# IDEAL MAKSIMAL DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG MATRIKS

*MAXIMAL IDEAL AND CENTER OF THE SKEW POLYNOMIAL RING OVER THE MATRIX RING*

**NUR HAFIKA RAFIUDIN**

**H022221019**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

# IDEAL MAKSIMAL DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG MATRIKS

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi
Magister Matematika Terapan

Disusun dan diajukan oleh

NUR HAFIKA RAFIUDIN
H022221019

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2023**

# TESIS

## IDEAL MAKSIMAL DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG MATRIKS

**NUR HAFIKA RAFIUDIN**

**NIM: H022221019**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 13 September 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19680803 199202 1001

Pembimbing Pendamping

**Dr. Andi Muhammad Anwar,S.Si.,M.Si.**
NIP. 19901228 201803 1001

Ketua Program Studi
Matematika S2

**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1013

Dekan Fakulras MIPA
Universitas Hasanuddin

**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19720515 1997 02 1002

# LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

| | |
|---|---|
| Nama | : Nur Hafika Rafiudin |
| Nomor Mahasiswa | : H022221019 |
| Program Studi | : Magister Matematika Terapan |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atau perbuatan tersebut.

Makassar, 13 September 2023

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

Nur Hafika Rafiudin

# KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala yang telah melimpahkan rahmat-Nya dan karunia-Nya sehingga alhamdulillah penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul '' Ideal Maksimal dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring Atas Gelanggang Matriks.'' Sholawat dan salam tak lupa pula penulis haturkan kepada Nabi Muhammad Shallahu'alaihiwasallam yang merupakan kekasih Allah Subhanahu Wata'ala yang menjadi suri tauladan bagi seluruh alam semesta.

Ucapan terima kasih kepada seluruh pihak yang terlibat dalam proses penyusunan tesis ini sehingga biidznillah dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. **Ayahanda tercinta Rafiudin, S.Ag.,M.Si** dan **Ibunda tersayang Hasni S.Pd.,Sd** yang telah memberikan banyak dukungan, motivasi, dan doa yang selalu dipanjatkan kepada penulis.

2. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** dan **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si**., **M.Si** selaku dosen pembimbing yang selalu sabar dalam memberikan arahan, bimbingan, nasehat, masukan, dan saran sehingga Alhamdulillah tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.

3. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si, Dr. Muhammad Zakir, M.Si, dan Dr. Firman, S.Si., M.Si** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan untuk menyempurnakan tesis ini.

4. **Muhammad Amin, S.H** selaku paman yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan bimbingan sehingga penulis bisa sampai di tahap ini.

5. **Kakanda Irmawani Rafiudin, S.Ak, dan adik Maulana Ibrahim Angkawou, adik Nurul Fatin Rafiudin, dan adik Azka Rafasyah, serta kepada nenek Wa Posi, Kakek La Baru Rahimahullah, Nenek Wa Naamu Rahimahullah** yang selalu menjadi penyemangat bagi penulis.

6. **Teman-teman Pascasarjana Matematika 2022** yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan semangat kepada penulis.

7. **Seluruh pihak yang terlibat**, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.

Akhir kata, penulis menerima kritikan dan saran dari berbagai pihak untuk memperbaiki dan menyempurnakan tesis ini. Dengan memohon rahmat dan ridho dari Allah Subhanahu Wata'ala semoga tesis ini bisa memberikan manfaat kepada pembaca pada umumnya, dan penulis pada khususnya.

Makassar, 5 September 2023

Nur Hafika Rafiudin

# ABSTRAK

Gelanggang tumpuan yang digunakan dalam penelitian ini adalah gelanggang matriks ukuran $2 \times 2$ dengan bentuk khusus. Dari gelanggang tersebut, kita dapat mendesain bentuk endomorfisma dan sigma derivatif untuk membentuk gelanggang polinomial miring. Dari penelitian ini, digunakan dua delta untuk mencari bentuk hasil perkalian polinomial pangkat $n$ yaitu perkalian $x^n$ dengan matriks $2 \times 2$ . Dengan demikian, dari hasil tersebut digunakan untuk mencari bentuk pusat dan ideal maksimal dari gelanggang polinomial miring.

**Kata Kunci** : gelanggang polinomial miring, ideal maksimal, pusat.

## ABSTRACT

The basic ring used in this paper is a $2 \times 2$ ring matrix with a special form. From this, we can design the endomorphism and sigma derivatives to form a skew polynomial ring. From this paper, two deltas were used to find the form of the multiplication form of the polynomial of degree $n$, namely the multiplication of $x^n$ with a $2 \times 2$ matrix. Thus, these results are used to find the center and the maximal ideal forms of the skew polynomial ring.

**Key words** : skew polynomial ring, maximal ideal, center.

## DAFTAR ISI

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Salah satu pengembangan dari gelanggang adalah gelanggang polinomial miring. Gelanggang tersebut merupakan gelanggang yang terdiri dari polinom – polinom dengan aturan perkaliannya bersifat tidak komutatif. Adapun aturan perkalian dari gelanggang polinomial miring yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, $\forall a \in R$ dengan $R$ adalah gelanggang. Dalam gelanggang polinomial miring terdapat tiga unsur yaitu gelanggang biasa atau gelanggang tumpuan yang disimbol dengan $R$, $\sigma$ suatu endomorfisma di $R$, dan $\delta$ suatu $\sigma$ –derivatif.

Dalam struktur aljabar juga dikenal istilah ideal. Dikatakan ideal jika memenuhi ideal kiri sekaligus ideal kanan. Perlu diketahui bahwa bentuk ideal dari gelanggang biasa berbeda dengan bentuk ideal dari gelanggang polinomial miring yang dinotasikan dengan $R[x; \sigma, \delta]$. Dengan adanya $\sigma$ dan $\delta$ dapat dibentuk ideal dari gelanggang polinomial miring dengan aturan perkalian yang tidak komutatif dengan $xa \neq ax$.

Penelitian yang berkaitan dengan ideal pada gelanggang polinomial miring telah diteliti sebelumnya, diantaranya : Amir (2009) mengkaji tentang ciri – ciri ideal $\sigma$-prim dan gelanggang polinomial miring. Kemudian, Amir dkk (2016) kembali melakukan penelitian tentang bentuk pusat dan ideal gelanggang polinomial miring atas quaternion. Pada penelitian tersebut menggunakam gelanggang quaternion sebagai gelanggang tumpuannya dan $\delta$ ditetapkan sebagai nol sehingga gelanggang polinomial miring yang terbentuk tidak sempurna. Kemudian, Gil dan Elad (2020) mengkaji tentang ideal lengkap prima satu sisi dalam gelanggang polinomial miring. Pada penelitian tersebut membahas tentang ideal prima kiri lengkap dengan polinomial *p* prima dan menggunakan $K$ sebagai *field* dengan berorde hingga. Selain membahas ideal satu sisi, Gil dan Elad juga membahas tentang *center-free* dengan $\delta = 0$.

Selanjutnya, pada tahun 2023, M. V. Babenko dan V. V. Chermnykh melakukan penelitian tentang "*On the semirings of skew polynomials*." Dalam penelitian tersebut menggunakan $A$ semiring dengan $\delta = 0$ sehingga gelanggang polinomial yang terbentuk yaitu $R[x;\sigma]$.

Dari beberapa penelitian yang telah dilakukan, penulis tertarik untuk meneliti mengenai ideal maksimal dan pusat dari gelanggang polinomial miring dengan mengambil gelanggang tumpuan berupa gelanggang matriks ukuran $2 \times 2$ dan menetapkan $\delta \neq 0$.

## 1.2 Rumusan Masalah

Misalkan $R$ gelanggang. Himpunan bagian $I$ dari $R$ yang tidak kosong disebut ideal dari $R$ jika : $I$ adalah subgrup penjumlahan dari $R$ dan misalkan $r \in R, a \in I$ maka $ra \in I$ dan $ar \in I$ . Pusat dari gelanggang $R$ dinotasikan sebagai $Z(R)$ adalah $Z(R) = \{r \in R | rx = xr, \forall x \in R\}$. Selanjutnya, didefinisikan gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x;\sigma,\delta]$ :

(i) $\sigma$ adalah endomorfisma gelanggang

(ii) $\delta$ suatu derivatif pada gelanggang $R$ adalah pemetaan $\delta: R \to R$ yang memenuhi aturan penjumlahan dan perkalian biasa untuk derivatif yaitu $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ dan $\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \forall a, b \in R$.

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah menentukan bentuk ideal maksimal dan pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang matriks.

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini dibatasi ukuran dari gelanggang matriks yaitu matriks dengan ukuran $2 \times 2$ sebagai berikut :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini yaitu untuk mengetahui bentuk ideal maksimal dan pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang matriks.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini yaitu : untuk memberikan kontribusi dalam kemajuan dan perkembangan ilmu matematika pada umumnya dan aljabar pada khususnya.

# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

Pada sub bab ini, akan membahas mengenai beberapa teori yang digunakan untuk menunjang penelitian yang dilakukan yaitu sebagai berikut.

## 2.1 Grup

Dalam struktur aljabar dikenal istilah grup yang menggunakan satu operasi biner dan memenuhi beberapa syarat sebagai grup.

**Definisi 2.1 :** *Himpunan tak kosong $G$ dikatakan grup jika dalam $G$ didefinisikan sebuah operasi biner $(\cdot)$ sedemikian sehingga :*

*(a) Jika $a\,, b\ \in G$ maka $a\ \cdot\ b\ \in G$*

*(b) Misalkan $a\,, b\,, c\ \in G$ maka $a \cdot (\ b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*

*(c) Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a \cdot e = e \cdot a = a$ untuk setiap $a \in G$*

*(d) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a' \in G$ sedemikian sehingga $a \cdot a' = a' \cdot a = e$.*

*(Herstein, 1996).*

Berikut disajikan contoh 2.1 untuk lebih memahami definisi dari grup.

**Contoh 2.1 :** Diketahui $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a\,, b\ \in \mathbb{Z}\right\}$, didefinisikan operasi $+$ adalah operasi penjumlahan pada matriks maka $(M, +)$ merupakan grup.

**Bukti :**

(a) Bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan $\forall\ A, B \in M\,, A + B \in M$.

Ambil sebarang $A, B \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dengan $a\,, b, c, d\ \in \mathbb{Z}$ maka

$$A + B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix}.$$

Karena $a + c \in \mathbb{Z}$ dan $b + d \in \mathbb{Z}$ maka terbukti $A + B \in M$.

(b) Bersifat asosiatif $\forall\ A, B, C \in M$ , $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Ambil sebarang $A, B, C \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ dengan $a\ , b, c, d, e, f\ \in \mathbb{Z}$ maka

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + (c + e) & 0 \\ 0 & b + (d + f) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c + e & 0 \\ 0 & d + f \end{pmatrix} \\
&= A + (B + C).
\end{aligned}$$

Terbukti $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(c) Mempunyai elemen identitas, $\exists\ E \in M, \ni \forall A \in M,\ A + E = E + A = A$.

Pilih $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M$. Maka

$$A + E = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = E + A.$$

Karena $A + E = E + A = A, \forall A \in M$ maka terbukti bahwa $E$ elemen identitas dari $M$.

(d) Setiap elemen mempunyai invers, $\forall A \in M$ , $\exists\ A^{-1} \in M$ sedemikian sehingga $A + A^{-1} = A^{-1} + A = E$.

Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ maka

$$A + A^{-1} = E \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} + A = E \rightarrow A^{-1} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Jadi, invers dari $A$ yaitu $A^{-1} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Dari $(a), (b), (c),$ dan $(d)$ terbukti bahwa $(M, +)$ merupakan grup.

## 2.2 Gelanggang

Salah satu perluasan dari grup adalah gelanggang. Perbedaan antara grup dan gelanggang adalah terletak pada operasi biner yang digunakan. Grup menggunakan satu operasi biner sedangkan gelanggang menggunakan dua operasi biner.

**Definisi 2.2 :** *Himpunan tak kosong $R$ dikatakan gelanggang jika di $R$ terdapat dua operasi yaitu $(+)$ dan $(\cdot)$ sedemikian sehingga :*

*(a)* $a, b \in R$ *berlaku* $a + b \in R$

*(b)* $a + b = b + a, \forall a, b \in R$

*(c)* $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$

*(d)* *Terdapat* $0 \in R$ *sedemikian sehingga* $a + 0 = a, \forall a \in R$

*(e)* $\forall a \in R, \exists a, b \in R$ *sedemikian sehingga* $a + b = 0$

*(f)* $a, b \in R$ *berlaku* $a \cdot b \in R$

*(g)* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in R$

*(h)* *Memenuhi distributif kanan dan kiri*

*(1)* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad \forall a, b, c \in R$

*(2)* $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c.a), \quad \forall a, b, c \in R$. *(Herstein, 1996).*

Adapun contoh dari gelanggang sebagai berikut.

**Contoh 2.2 :** Diketahui $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, didefinisikan operasi $+$ adalah operasi penjumlahan pada matriks dan operasi $(\cdot)$ adalah operasi perkalian pada matriks $(M, +, \cdot)$, maka $M$ merupakan gelanggang.

**Bukti :**

(a) Mudah ditunjukkan bahwa $(M,+)$ merupakan grup abelian.

(b) $(M,\ \cdot\ )$ bersifat asosiatif $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C), \forall\ A,B,C \in M$.

Ambil sebarang $A,B,C \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ dengan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$ , maka

$$(A\cdot B)\cdot C = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(ce) & 0 \\ 0 & b(df) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ce & 0 \\ 0 & df \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)$$

$$= A\cdot(B\cdot C).$$

Jadi terbukti $(M,\ \cdot\ )$ bersifat asosiatif $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C), \forall\ A,B,C \in M$.

(c) Akan ditunjukkan bersifat distributif kanan dan kiri.

Ambil sebarang $A,B,C \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ dengan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$ maka

(i) Bersifat distributif kanan $A\cdot(B+C) = (A\cdot B)+(A\cdot C)$.

$$A\cdot(B+C) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c+e & 0 \\ 0 & d+f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac+ae & 0 \\ 0 & bd+bf \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & df \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)$$

$$= (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

Terbukti $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

(ii) Bersifat distributif kiri $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

$$(A+B) \cdot C = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae+ce & 0 \\ 0 & bf+df \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & bf \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ce & 0 \\ 0 & df \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot C + B \cdot C.$$

Terbukti $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Karena memenuhi syarat $(\mathrm{a})$, $(\mathrm{b})$, dan $(\mathrm{c})$ maka terbukti bahwa $(M, +, \cdot)$ merupakan gelanggang.

### 2.2.1 Homomorfisma Grup

Homomorfisma grup adalah suatu pemetaan dari grup ke grup yang memenuhi syarat tertentu.

**Definisi 2.3** *Jika* $(G,+)$ *dan* $(H,*)$ *adalah grup dan fungsi* $f: G \to H$ *adalah homomorfisma grup jika* $f(a+b) = f(a) * f(b)$ *untuk setiap* $a, b \in G$ *(Amir dkk, 2016).*

Adapun contoh dari homomorfisma grup sebagai berikut.

**Contoh 2.3 (Fraleigh, 2010)** Misalkan $r \in \mathbb{Z}$ dan $\varphi_r: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai $\varphi_r(n) = rn, \forall n \in \mathbb{Z}$. Buktikan bahwa $\varphi_r$ merupakan homomorfisma grup.

**Bukti :**

Ambil sebarang $m, n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\varphi_r(m+n) = \varphi_r(m) + \varphi_r(n)$.

$$\begin{aligned} \varphi_r(m+n) &= r(m+n) \\ &= rm + rn \\ &= \varphi_r(m) + \varphi_r(n). \end{aligned}$$

Karena $\varphi_r(m+n) = \varphi_r(m) + \varphi_r(n)$ maka terbukti bahwa $\varphi_r$ merupakan homomorfisma grup.

### 2.2.2 Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma gelanggang merupakan suatu pemetaan dari gelanggang ke gelanggang yang memenuhi dua syarat tertentu.

**Definisi 2.4** *Misalkan* $R$ *dan* $R'$ *merupakan gelanggang. Pemetaan* $f: R \to R'$ *merupakan homomorfisma gelanggang jika* $\forall a, b \in R$ *berlaku*

*(i)* $f(a+b) = f(a) + f(b)$

*(ii)* $f(ab) = f(a)f(b)$. *(Amir dkk, 2016).*

Untuk memahami mengenai homomorfisma gelanggang, berikut disajikan conton 2.4.

**Contoh 2.4 (Herstein, 1996)** Misalkan didefinisikan pemetaan $\varphi: R \to R'$ dengan $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$, maka $\varphi$ merupakan homomorfisma gelanggang.

**Bukti :**

Ambil sebarang $X, Y \in R$ dengan $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Maka

(i) Akan ditunjukkan $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(X+Y) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{pmatrix}\right) \\
&= a + c \\
&= \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&= \varphi(X) + \varphi(Y).
\end{aligned}$$

(ii) Akan ditunjukkan $\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(XY) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}\right) \\
&= ac \\
&= \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \varphi\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&= \varphi(X)\varphi(Y).
\end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $\varphi$ merupakan homomorfisma gelanggang.

## 2.3 Gelanggang Polinomial Miring

Dalam gelanggang polinomial miring digunakan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R$ dengan $R$ adalah gelanggang. Gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x;\sigma,\delta]$. Jika $\delta = 0$ maka ditulis $R[x;\sigma]$ dan jika $\sigma = 1$ maka ditulis $R[x;\delta]$.

**Definisi 2.5** *Misalkan $R$ gelanggang, $\sigma$ suatu endomorfisma gelanggang, dan $\delta$ suatu $\sigma$-derivatif yang memenuhi syarat $\delta$ endomorfisma grup penjumlahan dan $\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b)$, $\forall a, b \in R$. (McConnel J C dan J C Robson, 2001)*

**Definisi 2.6** *Suatu endomorfisma gelanggang dinyatakan dengan $End(A)$ adalah homomorfisma gelanggang yang memetakan gelanggang $R$ ke dirinya sendiri. (Rotman, 2003).*

Berikut contoh dari endomorfisma gelanggang dan gelanggang polinomial miring. Pada bagian (a) merupakan contoh endomorfisma gelanggang dan bagian (a) dan (b) merupakan contoh gelanggang polinomial miring.

**Contoh 2.5** Misalkan $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ adalah gelanggang. Automorfisma pada $R$ didefinisikan $\sigma\left(p + q\sqrt{-5}\right) = p - q\sqrt{-5}, \forall\, p + q\sqrt{-5} \in R$. Selanjutnya, pemetaan $\delta$ didefinisikan sebagai $\delta\left(p + q\sqrt{-5}\right) = q$, $\forall\, p + q\sqrt{-5} \in R$ maka $R[x: \sigma, \delta]$ merupakan gelanggang polinomial miring.

**Bukti :**

(a) Akan ditunjukkan pemetaan $\sigma$ merupakan endomorfisma gelanggang**.**

Ambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x = p + q\sqrt{-5}$ dan $y = r + s\sqrt{-5}$ dengan $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ maka

(i) Akan ditunjukkan $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

$$\sigma(x + y) = \sigma\left(\left(p + q\sqrt{-5}\right) + \left(r + s\sqrt{-5}\right)\right)$$

$$= \sigma\left((p + r) + (q + s)\sqrt{-5}\right)$$

$$= (p + r) - (q + s)\sqrt{-5}$$

$$= \left(p - q\sqrt{-5}\right) + \left(r - s\sqrt{-5}\right)$$

$$= \sigma\left(p + q\sqrt{-5}\right) + \sigma\left(r + s\sqrt{-5}\right)$$

$$= \sigma(x) + \sigma(y)$$

Terbukti $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

(ii) Akan ditunjukkan $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

$$\sigma(xy) = \sigma\left(\left(p + q\sqrt{-5}\right)\left(r + s\sqrt{-5}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(pr + ps\sqrt{-5} + qr\sqrt{-5} - 5qs\right)$$

$$= \sigma\left((pr - 5qs) + (ps + qr)\sqrt{-5}\right)$$

$$= (pr - 5qs) - (ps + qr)\sqrt{-5}$$

$$= \left(pr - ps\sqrt{-5}\right) + (-qr\sqrt{-5} - 5qs)$$

$$= \left(p - q\sqrt{-5}\right)\left(r - s\sqrt{-5}\right)$$

$$= \sigma\left(p + q\sqrt{-5}\right)\sigma\left(r + s\sqrt{-5}\right)$$

$$= \sigma(x)\sigma(y).$$

Terbukti $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

Karena memenuhi syarat $(\mathrm{i})$ dan $(\mathrm{ii})$ serta merupakan pemetaan dari $R$ ke $R$ maka terbukti bahwa pemetaan $\sigma$ merupakan endomorfisma gelanggang.

(b) Akan ditunjukkan $\delta$ adalah suatu $\sigma$-derivatif.

Ambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x = p + q\sqrt{-5}$ dan $y = r + s\sqrt{-5}$ dengan $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ maka

(i) Akan ditunjukkan $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$.

$$\delta(x+y) = \delta\left(\left(p+q\sqrt{-5}\right)+\left(r+s\sqrt{-5}\right)\right)$$
$$= \delta\left((p+r)+(q+s)\sqrt{-5}\right)$$
$$= q+s$$
$$= \delta\left(p+q\sqrt{-5}\right)+\delta\left(r+s\sqrt{-5}\right)$$
$$= \delta(x)+\delta(y).$$

Terbukti bahwa $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$.

(ii) Akan ditunjukkan $\delta(xy) = \sigma(x)\delta(y)+\delta(x)y$.

$$\delta(xy) = \delta\left(\left(p+q\sqrt{-5}\right)\left(r+s\sqrt{-5}\right)\right)$$
$$= \delta\left((pr-5qs)+(ps+qr)\sqrt{-5}\right)$$
$$= ps+qr$$
$$= \left(ps-qs\sqrt{-5}\right)+\left(qr+qs\sqrt{-5}\right)$$
$$= \left(p-q\sqrt{-5}\right)s+q\left(r+s\sqrt{-5}\right)$$
$$= \sigma\left(p+q\sqrt{-5}\right)\delta\left(r+s\sqrt{-5}\right)+\delta\left(p+q\sqrt{-5}\right)\left(r+s\sqrt{-5}\right)$$
$$= \sigma(x)\delta(y)+\delta(x)y.$$

Terbukti bahwa $\delta(xy) = \sigma(x)\delta(y)+\delta(x)y$.

Dari $(\mathrm{i})$ dan $(\mathrm{ii})$ terbukti bahwa $\delta$ adalah suatu $\sigma$ – derivatif. Jadi, dari $(a)$ dan $(b)$ terbukti bahwa $R[x:\sigma,\delta]$ merupakan gelanggang polinomial miring.

Dalam gelanggang polinomial miring terdapat istilah *center* (pusat) yang memenuhi syarat tertentu.

**Definisi 2.7** *Misalkan $G$ grup. Pusat dari $Z(G)$ didefinisikan sebagai $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$. (Fraleigh J.B and Victor J.K, 2003)*

## 2.4 Ideal

Suatu himpunan bagian $I$ dari $R$, dengan $R$ adalah gelanggang. $I$ dikatakan ideal jika memenuhi ideal kiri sekaligus ideal kanan. Berikut definisi dari ideal.

**Definisi 2.8** *Misalkan $R$ gelanggang. Himpunan bagian $I$ dari $R$ yang tidak kosong disebut ideal dari $R$ jika :*

*(a) $I$ adalah subgrup penjumlahan dari $R$*

*(b) Misalkan $r \in R, a \in I$ maka $ra \in I$ dan $ar \in I$ (Herstein, 1996).*

Adapun contoh dari ideal sebagai berikut.

**Contoh 2.6 (Herstein, 1996)** Misalkan $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ adalah subgelanggang matriks $2 \times 2$ atas bilangan real. Misalkan $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$. Apakah $I$ ideal dari $R$ ?

**Bukti :**

Akan diperiksa, apakah $I$ ideal dari $R$. Mudah dilihat bahwa $I$ merupakan subgrup penjumlahan dari $R$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $P \in R, A \in I$ berlaku $PA \in I$ dan $AP \in I$. Ambil sebarang $P \in R, A \in I$ dengan $P = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dengan $x, y, b \in \mathbb{R}$. Maka

(i) $PA = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

(ii) $AP = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

Karena $I$ merupakan subgrup penjumlahan dari $R$ dan memenuhi syarat $(i)$ dan $(ii)$ maka $I$ merupakan ideal dari $R$.

Salah satu pengembangan dari ideal adalah ideal prima. Berikut disajikan definisi dari ideal prima.

**Definisi 2.9** *Ideal prima dari gelanggang* $R$ *adalah ideal* $P$ *dari* $R$ *sedemikian sehingga* $I$ *dan* $J$ *adalah ideal dari* $R$ *dengan* $IJ \subseteq P$ *maka* $I \subseteq P$ *atau* $J \subseteq P$. *(Goodearl, 2004).*

Untuk lebih memahami ideal prima, perhatikan contoh di bawah ini.

**Contoh 2.7 (Rasiman, 2018)** Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah gelanggang komutatif. Ideal $P = \{5x | x \in \mathbb{Z}\}$ adalah ideal prima. Karena jika $a, b \in P$ maka $5|ab$ dan karenanya $5|a$ atau $5|b$.

Dalam ideal, selain ideal prima juga terdapat beberapa ideal lain yaitu ideal maksimal. Berikut definisi dari ideal maksimal.

**Definisi 2.10** *Ideal sejati* $M$ *dari* $R$ *adalah ideal maksimal dari* $R$ *jika satu – satunya ideal* $R$ *yang memuat* $M$ *adalah* $M$ *itu sendiri dan* $R$. *(Herstein, 1996).*

Adapun contoh dari ideal maksimal sebagai berikut.

**Contoh 2.8 (Rasiman, 2018)** Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah gelanggang komutatif. $K = \langle 11 \rangle$ adalah ideal maksimal dalam $\mathbb{Z}$ karena $K$ tidak termuat dalam ideal lainnya dalam gelanggang $\mathbb{Z}$, kecuali $K$ itu sendiri dan $\mathbb{Z}$. $T = \langle 6 \rangle$ bukan ideal maksimal karena $T$ termuat dalam ideal $\langle 2 \rangle = \{2x | x \in \mathbb{Z}\}$ dan juga termuat dalam ideal $\langle 3 \rangle = \{3x | x \in \mathbb{Z}\}$.