TRANSFORMASI LAPLACE QUATERNION DAN SIFAT-SIFATNYA

QUATERNION LAPLACE TRANSFORM AND IT'S PROPERTIES

MUHAMMAD AFDAL BAU

H022212005

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TRANSFORMASI LAPLACE QUATERNION DAN SIFAT-SIFATNYA

Tesis

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Magister Sains

Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

MUHAMMAD AFDAL BAU

H022212005

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

LEMBAR PENGESAHAN

TRANSFORMASI LAPLACE QUATERNION DAN SIFAT-SIFATNYA

Disusun dan diajukan oleh

MUHAMMAD AFDAL BAU

H022212005

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 18 Agustus 2023

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si
NIP. 19701231 1998 02 1001

Pembimbing Utama,

Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si
NIP. 19850529 2008 12 1002

Ketua Program Studi Matematika S2

Dr. Muhammad Zakir, S.Si., M.Si
NIP. 19640207 1991 03 1013

Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin

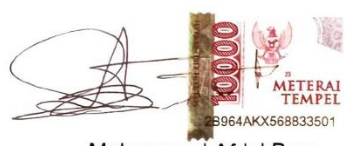
Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si
NIP. 19720515 1997 02 1002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis berjudul " Transformasi Laplace quaternion dan Sifat-sifatnya", adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si sebagai pembimbing utama dan Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si sebagai pembimbing pendamping. Karya imiah ini belum di ajukan dan sedang tidak diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruantinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau yang dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian isi dari tesis ini telah dipublikasikan pada jurnal *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*.

Dengan ini saya limpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin

Makassar, 24 Agustus 2023



Muhammad Afdal Bau
NIM. H022212005

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrahmanirrahim

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha kuasa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul “TRANSFORMASI LAPLACE QUATERNION DAN SIFAT-SIFATNYA”. Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Nabiullah Muhammad *shallalahu Alaihi Wassalam*, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi S2 Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

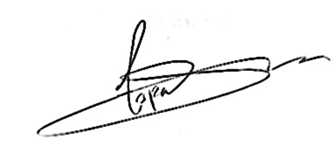
1. Orang tua penulis, Bapak Jen Mohamad Bau dan Ibu Salma Y. Sahido yang senantiasa memberikan nasehat, motivasi dukungan materil dan do'a sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
2. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin
4. Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing utama, dan Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing pertama, yang dengan penuh kesabaran dan ketulusan telah memberikan ilmu dan bimbingan terbaik kepada penulis.

5. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc, Dr. Muhammad Zakir, M.Si dan Dr. Firman, M.Si selaku dosen penguji yang memberikan saran dan kritik yang membangun untuk penyelesaian tesis ini.
6. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si selaku Ketua Departemen Matematika yang memberikan arahan dalam penyelesaian tugas akhir tesis ini.
7. Dr.Muhammad Zakir, S.Si., M.Si selaku Ketua Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang selalu memberikan masukan dalam proses penyelesaian tesis ini.
8. Para Dosen Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis.
9. Para Pegawai dan Operator Program Studi S2 Matematika Universitas Hsanuddin yang telah membantu penulis dalam proses belajar.
10. Teman-teman sepebimbingan Lab analisis: Kak Nasrullah, Andi Topan, Ibu Wahyuni, Ibu Sri Sulastri, Hilma, Fitriyani, Ajeng, Dara, Irfa, Kak Uli, Kak Ulil, Emanuel dan teman-teman seangkatan 2022
11. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
12. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 22 Agustus 2023



Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini mempelajari tentang transformasi Laplace quaternion, yang merupakan generalisasi dari transformasi Laplace biasa menggunakan aljabar quaternion. Kami menemukan bahwa beberapa sifat-sifatnya seperti teorema turunan, konvolusi dan korelasi sangat berbeda dari sifat-sifat yang sesuai dari transformasi Laplace klasik. Sifat-sifat lain seperti linearitas, pergeseran, penskalaan dan turunan juga dipelajari secara rinci. Terakhir, disajikan kegunaan transformasi Laplace quaternion dapat di gunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial bernilai quaternion .

Kata Kunci: Aljabar quaternion, transformasi Laplace, transformasi Laplace quaternion

ABSTRACT

This research devotes to the study of the quaternion Laplace transform, which is a natural generalization of the classical Laplace transform using quaternion algebra. We find that some of its properties such as derivative, convolution and correlation theorems are quite different from the corresponding properties of the classical Laplace transform. Another properties like linearity, shifting, scaling and derivative are also studied in detail. Finally, the utility of the quaternion Laplace transform for solving the quaternion-valued differential equation is presented.

Keyword: quaternion Agebra, Laplace transform, quaternion Laplace transform.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Transformasi Laplace adalah salah satu tranformasi integral yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pada persamaan differensial parsial. Persamaan differensial parsial memuat dua atau lebih variable bebas. Transformasi Laplace pertama kali dikenalkan oleh Pierre Simon Marquas de Laplace (1749-1827) seorang matematikawan Prancis dan seorang guru besar di Paris yang mendefinisikan transformasi Laplace sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Dengan $f(t)$ adalah suatu fungsi yang terdefinisi untuk $0 \leq t < \infty$. Salah satu penerapan transformasi Laplace yaitu pada sistem gerak pendulum yang dianalisis menggunakan transformasi Laplace. Transformasi Laplace menganalisis suatu persamaan differensial dengan memetakan masalah nilai awal ke dalam suatu persamaan aljabar atau sistem persamaan yang dapat diselesaikan dengan metode aljabar.

Salah satu cabang matematika yang banyak menarik perhatian para peneliti dalam matematika adalah quaternion. Quaternion merupakan perluasan bilangan kompleks ke dimensi yang lebih tinggi. Quaternion terdiri dari satu bagian real dan tiga bagian imajiner. Bentuk aljabar quaternion pertama kali ditemukan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1843 melalui percobaan Hamilton yang memperluas bilangan kompleks ke dimensi yang lebih tinggi.

Penelitian ini mengkaji tentang perluasan Tranformasi laplace ke bidang quaternion dengan memanfaatkan variable $\boldsymbol{s}$ pada $\mathbf{e^{-st}}$, dimana $\boldsymbol{s}$ adalah bilangan komplek berbentuk $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{j\omega}$ dimana $\boldsymbol{j}$, menunjukan komponen imajiner yang membedakannya dari $\boldsymbol{i}$. Penelitian ini teriinspirasi dari penelitian sebelumnya tentang perluasan Transformasi Fourier pada bidang quaternion yang dikemukakan oleh Hitzer (2007) (4) dan Mawardi dkk (2008) yang menggunakan sifat-sifat transformasi fourier quaternion, penelitian lainnya juga dilakukan oleh Muh. Irwan (2017) (12) yang menulis tentang transformasi Fourier dan transformasi Fourier quaternion. Penelitian lainnya juga dilakukan oleh Mawardi pada (6, 4, dan 5) yang membahas tentang transformasi Fourier quaternion beserta sifat-sifat dan aplikasinya. Beberapa penelitian lainnya mengenai transformasi Laplace dapat di lihat pada (6, 7, 13 dan 8). Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang sudah ada sebelumnya terletak pada transformasi yang digunakan. Penulis menggunakan tranformasi Laplace sebagai perluasan pada quaternion.

"Prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *Coupled*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut:

Bagaimana definisi dan sifat-sifat transformasi Laplace quaternion yang merupakan generalisasi dari sifat-sifat transformasi Laplace biasa?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan ini adalah Membuat dan membuktikan secara detail beberapa sifat transformasi Laplace quaternion yaitu linearitas, turunan pertama, turunan kedua, turunan ke-$\boldsymbol{n}$, integral, konvolusi, perubahan skala dan translasi dari transformasi Laplace quaternion

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus *literature* tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Laplace quaternion dan sifat-sifatnya dan dapat di kembangkan lagi aplikasi dari sifat-sifat Laplace quaternion , khususnya pada analisis sinyal dan fisika quantum.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada transformasi Laplace quaternion dengan beberapa sifatnya seperti; linearitas, turunan pertama, turunan kedua, turunan ke-$\boldsymbol{n}$, integral, konvolusi, skala dan translasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Relevan

Pada bagian ini diambil beberapa penelitian terdahulu sebagai panduan untuk penelitian yang akan dilakukan, yang kemudian akan meenjadi acuan dan perbandingan dalam melakukan penelitian. Dalam penelitian ini, disertakan beberapa jurnal international penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan transformasi Laplace dan quaternion. Jurnal tersebut yaitu

1. Penelitian yang dilakukan oleh Stefano De leo dan Gisele C. Ducati pada tahun 2003 dengan judul *Solving simple quaternionic differential equations*. Pada penelitian ini menggunakan bagian real matriks dari kiri dan kanan sebagai operator quaternion, peneliti membuktikan eksistensi dan ketunggalan quaternion untuk masalah nilai awal membahas pengurangan urutan untuk persamaan diferensial quaternion homogen dan memperluas kasus nonkomutatif metode variasi parameter.
2. Penelitian yang dilakukan oleh Zhen-Feng Chai dan Kit Ian Kou pada tahun 2017 dengan judul Laplace transform: *a new approach in solving linear quaternion differential equations*. Pada penelitian ini mengkonstruksi beberapa fungsi elementer seperti eksponensial, sinus, cosinus dan fungsi hyperbolic ke domain biquaternion dan beberapa sifat-sifatnya, Menyelesaikan persamaan diferensial quaternion.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Khinal Parmar dan V. R. Lakshmi Gorty pada tahun 2021 dengan judul *Quaternion Stieltjes transform and quaternion Laplace-Stieltjes transform*. Dalam penelitian ini dipaparkan sifat-sifat tentang transformasi *Stieltjes* quaternion serta mendefinisikan sifat-sifat dari transformasi *Laplace-Stieltjes* quaternion dan aplikasinya

pada masalah momen integral volterra. Penelitian ini memiliki relevansi dengan apa yang akan di teliti karena berkaitan dengan transformasi Laplace quaternion.

4. Penelitian yang dilakukan oleh Ranjit R. Dhunde dan G. L. Waghmare pada tahun 2016 dengan judul *Double Laplace Transform Method for Solving Space and Time Fractional Telegraph Equations*. Dalam penelitian ini di paparkan tentang metode Double Laplace transform untuk menemukan solusi exact linear atau nonlinear dan ilustrasi contoh menggunakan metode double transformasi Laplace.
5. Penelitian yang dilakukan oleh Martin Bohnera, dkk pada tahun 2011 dengan judul *Properties of the Laplace transform on time scales with arbitrary graininess*.

2.2 Landasan Teori

Pada bab ini akan di uraikan beberapa definisi, notasi dan konsep dasar aljabar quaternion dan transformasi Laplace beserta sifat-sifatnya.

2.2.1 Aljabar quaternion

Pada subbab ini akan disajikan bentuk dan sifat bilangan quaternion. Bilangan quaternion adalah gabungan skalar dan bagian vektor berbentuk

$$q = q_0 + q \tag{2.1}$$

dengan

$$q = iq_1 + jq_2 + kq_3. \tag{2.2}$$

Bilangan quaternion pertama kali diperkenalkan oleh Sir William Hamilton, dan di simbolkan dengan $\mathbb{H}$. Setiap elemen dari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dan mengikuti relasi dengan

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j}. \tag{2.3}$$

Konjugate dari quternion $\overline{\mathbf{q}}$ di tuliskan sebagai

$$\boldsymbol{\overline{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3}. \tag{2.4}$$

2.2.2 Sifat bilangan quaternion

Pada bagian ini akan di jelaskan beberapa bentuk dari bilangan quaternion yang dikutip pada (17), seperti penjumlahan, perkalian, norm quaternion, unit quaternion, quaternion murni dan invers quaternion.

1. Penjumlahan quaternion

   Misalkan dua buah quaternion

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_0} + \boldsymbol{iq_1} + \boldsymbol{jq_2} + \boldsymbol{kq_3}.$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_0} + \boldsymbol{ip_1} + \boldsymbol{jp_2} + \boldsymbol{kp_3}.$$

   dua buah quaternion di atas adalah sama, jika dan hanya jika suku-suku yang bersesuain sama. Selanjutnya seperti vektor, dua buah quaternion tersebut dapat ditambah atau dikurangi sebagai berikut.

$$\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q} = [(\boldsymbol{p_0} \pm \boldsymbol{q_0}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{q_1}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{p_2} \pm \boldsymbol{q_2}) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{p_3} \pm \boldsymbol{q_3})]. \quad (2.5)$$

2. Perkalian quaternion

   Misalkan diberikan dua buah quaternion

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_0} + \boldsymbol{iq_1} + \boldsymbol{jq_2} + \boldsymbol{kq_3}.$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_0} + \boldsymbol{ip_1} + \boldsymbol{jp_2} + \boldsymbol{kp_3}.$$

   maka dapat diperoleh

$$qp = q_0p_0 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} + q_0\boldsymbol{p} + p_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}. \quad (2.5)$$

   Bukti:

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$$

$$p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$$

$$qp = (\boldsymbol{q_0} + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3)(p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3)$$

$$= q_0p_0 + \boldsymbol{i}q_0p_1 + \boldsymbol{j}q_0p_2 + \boldsymbol{k}q_0p_3 + \boldsymbol{i}q_1p_0 + \boldsymbol{i^2}q_1p_1 + \boldsymbol{ij}q_1p_2 + \boldsymbol{ik}q_1p_3 + \boldsymbol{j}q_2p_0$$

$$+\boldsymbol{ji}q_2p_1 + \boldsymbol{j^2}q_2p_2 + \boldsymbol{jk}q_2p_3 + \boldsymbol{k}q_3p_0 + \boldsymbol{ki}q_3p_1 + \boldsymbol{kj}q_3p_2 + \boldsymbol{k^2}q_3p_3$$

Satukan yang sejenis

$$qp = (q_0p_0) + i(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2) + j(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_1p_3) + k(q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0) - (q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3)$$

$$= (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + i(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2) + j(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1) + k(q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1)$$

$$= q_0p_0 - (q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) + i(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2) + j(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1) + k(q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0)$$

$$= q_0p_0 - (q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) + q_0(ip_1 + jp_2 + kp_3) + p_0(iq_1 + jq_2 + kq_3) + i(q_2p_3 - q_3p_2) - j(q_1p_3 - q_3p_1) + k(q_1p_2 - q_2p_1)$$

Dengan perkalian titik $\mathrm{q} \cdot \mathrm{p} = \mathrm{q}_1\mathrm{p}_1 + \mathrm{q}_2\mathrm{p}_2 + \mathrm{q}_3\mathrm{p}_3$ dan bentuk perkalian silangya $\mathrm{q} \times \mathrm{p} = \mathrm{i}(\mathrm{q}_2\mathrm{p}_3 - \mathrm{q}_3\mathrm{p}_2) + \mathrm{j}(\mathrm{q}_3\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}_1p_3) + \mathrm{k}(\mathrm{q}_1\mathrm{p}_2 - \mathrm{q}_2\mathrm{p}_1)$. Bagian skalar dari bentuk ini adalah

$$Sc(qp) = q_0p_0 + q \cdot p,$$

dan bagian vektornya adalah

$$q_0\boldsymbol{p} + p_0\boldsymbol{q} + q \times p.$$

3. Norm quaternion

   Misalkan

$$\boldsymbol{p} = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$$

   maka norma dari p dapat dituliskan sebagai

$$|p| = \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \qquad (2.6)$$

   Contoh: Misalkan $p = 1 + 2i + 3j + 4k$

   Maka $|p| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$

4. Quaternion satuan

   Misalkan $\mathrm{p} = \mathrm{p}_0 + \mathrm{ip}_1 + \mathrm{jp}_2 + \mathrm{kp}_3$

   quaternion satuan $\hat{\mathrm{p}} = \frac{1}{|\mathrm{p}|}(\mathrm{p}_0 + \mathrm{ip}_1 + \mathrm{jp}_2 + \mathrm{kp}_3)$

   Contoh 2. Misalkan $\mathrm{p} = 1 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k}$

   maka $\hat{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k})$

5. Quaternion murni

   Quaternion murni adalah quaternion dengan skalar nol

   $$q = iq_1 + jq_2 + kq_3 \tag{2.7}$$

   perkalian dua quaternion murni tidak bersifat tertutup, sebab hasilnya adalah quaternion yang tidak murni

   $qp = (iq_1 + jq_2 + kq_3)(ip_1 + jp_2 + kp_3)$

   $= (\boldsymbol{i^2}q_1p_1 + \boldsymbol{ij}q_1p_2 + \boldsymbol{ik}q_1p_3 + \boldsymbol{j^2}q_2p_2 + \boldsymbol{ji}q_2p_1 + \boldsymbol{jk}q_2p_3 + \boldsymbol{ki}q_3p_1 + \boldsymbol{kj}q_3p_1 + \boldsymbol{k^2}q_3p_3)$

   $= -q_1p_1 + kq_1p_2 - jq_1p_3 - q_2p_2 - kq_2p_1 + iq_2p_3 + jq_3p_1 - iq_3p_2 - q_3p_3$

   $= -(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) + \boldsymbol{i}(q_2p_3 - q_3p_2) + \boldsymbol{j}(q_3p_1 - q_1p_3) + \boldsymbol{k}(q_1p_2 - q_2p_1)$.

6. Konjugat quaternion

   Misalkan quaternion

   $$q = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3, \tag{2.8}$$

   maka conjugate quaternion

   $$\bar{q} = q_0 - q = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3. \tag{2.9}$$

   Contoh. Misalkan $1 + i2 + j3 + k4$

   maka $\bar{q} = 1 - i2 - j3 - k$

7. Invers quaternion

   Diberikan quaternion $q \ = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$

   maka q^{-1} adalah

$$q^{-1} = \frac{q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3}{|q|^2}. \qquad (2.10)$$

   Contoh.

   Misalkan

$$q = 1 + i2 + j3 + k4$$

   sehingga

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{|q|^2} \\ &= \frac{1 - i2 - j3 - k4}{\left|\sqrt{30}\right|^2} \\ &= \frac{1 - i2 - j3 - k4}{30} \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{15}i - \frac{1}{10}j - \frac{2}{15}k. \end{aligned}$$

2.2.3 Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah salah satu transformasi integral yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal dan nilai batas (Nababan, 2014). Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan differensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variable bebas s yaitu domain frekuensi, dimana s adalah bilangan kompleks (Gazali, 2022).

Begitu pula sebaliknya, invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t.

Transformasi Laplace adalah suatu transformasi integral yang digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear. Dengan menggunakan tranformasi laplace dapat diubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam dan fungsi exponensial menjadi fungsi-fungsi variabel kompleks (Adhikari, 2008).

Secara matematis, transformasi laplace dari fungsi domain waktu t didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \qquad (2.11)$$

Dengan s adalah bilangan kompleks yang diberikan oleh

$$s = \sigma + j\,\omega.$$

Operator $\mathcal{L}$ disebut operator Laplace yang mengubah fungsi pada domain waktu menjadi fungsi pada domain frekuensi s.

Teorema 2.2.1

Jika $f(t)$ fungsi kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{N}$ dan eksponensial berorde γ untuk $\mathrm{t} > \mathrm{N}$ dan memenuhi

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t},\ \forall\, t \geq 0, \qquad (2.13)$$

maka transformasi Laplace ada untuk setiap $\mathrm{s} > \gamma$.

Bukti. Untuk setiap bilangan N positif diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^N e^{-st} f(t)dt + \int_N^0 e^{-st} f(t)dt. \qquad (2.14)$$

Karena $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{N}$, integral pertama di ruas kanan ada. Juga interval kedua di ruas kanan ada. Karena $\mathrm{f(t)}$ adalah eksponensial berorde γ untuk $\mathrm{t} > \mathrm{N}$. Kita dapat mengamati hal berikut.

$$\left|\int_N^\infty e^{-st} f(t)dt\right| = \int_N^\infty |e^{-st}f(t)dt|$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} M^{\gamma t} dt$$
$$= \frac{M}{s-\gamma}. \qquad (2.15)$$

Jadi transformasi Laplace ada untuk $s > \gamma$.

2.2.4 Transformasi Laplace Fungsi Sederhana

Dalam tabel berikut akan disajikan beberapa transformasi Laplace untuk beberapa fungsi elementer khusus dengan daerah kewujudan dan kekonvergenannya.

1. Untuk $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty 1\, e^{-st} dt$$
$$= -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$= \left(-\frac{1}{s} e^{-s\cdot\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s} e^{-s\cdot 0}\right)$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s}. \qquad (2.16)$$

2. Untuk fungsi Eksponensial $\mathrm{f(t) = e^{-at}}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt$$
$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty$$
$$= \left(-\frac{1}{s+a} e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s+a} e^{-0}\right)$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{s+a}\right)$$
$$= \frac{1}{s+a}. \qquad (2.17)$$

3. Untuk $f(t) = At$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty At\, e^{-st} dt$$
$$= A\int_0^\infty te^{-st}\, dt$$
$$= At\frac{e^{-st}}{-s}|_0^\infty - A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt$$
$$= 0 - A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt$$
$$= A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt$$
$$= \frac{1}{s}\frac{e^{-st}}{-s}|_0^\infty$$
$$= \left(-\frac{1}{s^2}e^{-s\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s^2}e^{-s0}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2}. \tag{2.18}$$

4. Hitunglah transformasi Laplace dari $\mathrm{f(t) = A\sin\omega\, t}$

   Berdasarkan rumus euler,

   $A\sin\omega\, t = A\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A\int_0^\infty \sin(\omega t)\, e^{-st} dt$$
$$= A\int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}\, dt$$
$$= A\int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right)dt$$
$$= \frac{A}{2j}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t}\, dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt\right)$$
$$= \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{-(s-j\omega)}e^{-(s-j\omega)t|_0^\infty} - \frac{1}{-(s+j\omega)}e^{-(s+j\omega)t|_0^\infty}\right)$$
$$= \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right)$$
$$= \frac{A}{2j}\left(\frac{s+j\omega-(s-j\omega)}{s+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{A}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{A\omega}{s+\omega^2}. \tag{2.19}$$

2.2.5 Sifat-sifat Transformasi Laplace

Pada bagian ini akan dituliskan beberapa sifat dari transformasi Laplace.

Misalkan $\mathcal{L}\{\mathrm{f}\} = \mathrm{F(s)}$dan $\mathcal{L}\{\mathrm{g}\} = \mathrm{G(s)}$.

Teorema 2.2.2 (Linearitas) Jika f dan g adalah fungsi waktu yang berbeda maka

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s). \qquad (2.20)$$

Bukti:

Dari definisi transformasi Laplace (2.11) diperoleh,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty \big(af(t) + bg(t)\big)e^{-st}\,dt \\ &= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \\ &= aF(s) + bG(s). \end{aligned}$$

Contoh.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{6\sin 2t - 5\cos 2t\} &= \mathcal{L}6\sin 2t - \mathcal{L}5\cos 2t \\ &= 6\mathcal{L}\{\sin 2t\} - 5\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= 6\frac{2}{s^2+4} - 5\frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{12-5s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Teorema 2.2.3 (Turunan). Misalkan $f(t)$ adalah fungsi kontinu untuk setiap $t \geq 0$ dan memenuhi (2.13) untuk suatu konstanta γdan$M$. Misalkan pula $\mathrm{f}'(\mathrm{t})$kontinu bagian demi bagian pada selang $[0, \mathrm{a}]$, $\forall \mathrm{a} > 0$,maka transformasi Laplace dari $\mathrm{f}'(\mathrm{t})$ada untuk $\mathrm{s} > \gamma$dan berlaku

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \qquad (2.21)$$

Bukti. Kita tinjau kasus $\mathrm{f}'(\mathrm{t})$kontinu untuk$\mathrm{t} \geq 0$. Dari transformasi Laplace dan pengintegralan parsial, diperoleh

$$\int_a^b u(t)\frac{d}{dt}v(t) = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}u(t)v(t)dt$$

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau\, ,\, maka\ \frac{d}{dt}u(t) = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = e^{-st}, maka\, v(t) = -\frac{1}{s}e^{-st}.$$

Selanjutnya akan diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} \quad &= e^{-st}f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}\,f(t)dt \\ &= e^{-s\infty}f(\infty) - e^{-s0}f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)dt \\ &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).\end{aligned}$$

Untuk turunan ke-n dapat di tuliskan sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{f^n t\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f0 - \cdots - sf^{n-1}(0). \qquad (2.22)$$

Bentuk di atas dapat ditunjukan dengan menggunakan matematika induksi.

Contoh. Tunjukan bahwa

$$\mathcal{L}(\sin a\, t) = \frac{a}{s^2 + a^2} = F(s)$$

Misalkan $\mathrm{f(t) = \sin a\, t}$ diperoleh $\frac{\mathrm{df(t)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a\cos a\, t}, \frac{\mathrm{d^2f(t)}}{\mathrm{dt^2}} = -\mathrm{a^2\sin a\, t}$,

sehingga $\mathcal{L}\{\mathrm{\sin a\, t}\} = -\frac{1}{\mathrm{a^2}}\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d^2f(t)}}{\mathrm{dt^2}}\right)$. Dengan menggunakan sifat transformasi Laplace dari turunan-turunan di peroleh

$$\mathcal{L}\{\sin a\,t\} = \left(-\frac{1}{a^2}\right)s^2F(s) - \frac{df(0)}{dt} - sf(0)$$
$$= -\frac{1}{a^2}\left(s^2\frac{a}{s^2+a^2} - s(0) - a\right)$$
$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{as^2}{s^2+a^2} - a\right)$$
$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{as^2 - as^2 - a^3}{s^2+a^2}\right)$$
$$= \frac{a}{s^2+a^2}.$$

(2.23)

Teorema 2.2.4 (Sifat Integral) Misalkan f suatu fungsi kontinu bagian demi bagian yang memenuhi (2.15), untuk semua γ dan M, maka

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{1}{s}F(s). \tag{2.24}$$

Bukti. Dengan menggunakan integral parsial diperoleh

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\} = \int_0^\infty \{\int_0^t f(x)dx\}e^{-st}\,dt$$
$$= \{\int_0^t f(x)dx\}\frac{e^{-st}}{-s}\,|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$
$$= -\int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \frac{1}{s}F(s).$$

Contoh. Carilah $\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right)$

Misalf(t) = $\frac{\sin t}{t}$, maka $\mathcal{L}\{f\} = \arctan\frac{1}{s}$ sehingga menurut (2.24) diperoleh

$$\mathcal{L}\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\} = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}. \tag{2.25}$$

Definisi 1 (Konvolusi Transformasi Laplace) Diberikan dua fungsi f dan g terdefinisi untuk setiap $t \geq 0$, konvolusi dari $f * g$ diberikan sebagai

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \, forall \; t \geq 0. \tag{2.25}$$

Teorema 2.2.5 (Sifat Konvolusi) Misalkan f dan g adalah fungsi yang kontinu bagian demi bagian dan berpangkat eksponensial maka

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s). \tag{2.26}$$

Bukti. Dari definisi transformasi (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t - \tau) g(\tau) d\tau e^{-st} \, dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t - \tau) e^{-st} \, dt g\tau d \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u) e^{u-\tau} du \;\; g\tau d\tau \, (u = t - \tau, \, du = d\tau) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u) e^{-su} du \;\; g(\tau) e^{-s\tau} \\
&= \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).
\end{aligned}$$

Teorema 2.26 (Sifat Skala). Misalkan f adalah orde eksponensial dan $a \in \mathrm{R}$,adalah konstanta tak nol maka transformasi laplace untuk domain t di tuliskan sebagai

$$\mathcal{L}\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\} = \alpha F(s). \tag{2.27}$$

Bukti. Berdasarkan definisi pada (2.20) diperoleh

$$\mathcal{L}f\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} \, dt$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} d\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

misalkan $u = \frac{t}{\alpha}$, sehingga

$$= \int_0^\infty f(u) e^{-s(\alpha u)} d\,u$$
$$= \alpha F(s).$$

Contoh. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{6}{(s+3)^3} = F(s)$ maka

$$\mathcal{L}\{f(3t)\} = \frac{1}{3}\frac{F(s)}{3}$$
$$= \frac{6}{3\left(\frac{s}{3}+2\right)^3}$$
$$= \frac{54}{(s+6)^3}.$$

Teorema 2.26 (Sifat Translasi). Misalkan $f(t)$ adalah fungsi yang di translasikan oleh $\alpha > 0$, yang berarti $f_0(t) = t - \alpha$, maka

$$\mathcal{L}\{f_0\}(t) = e^{-s\alpha} F(s). \qquad (2.28)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Laplace (2.11) diperoleh

$$\mathcal{L}\{f_\alpha\} = \int_0^\infty f(t-\alpha) e^{-st}\, dt. \qquad (2.29)$$

Misalkan $u = t - \alpha$

$$\mathcal{L}\{f_\alpha\} = \int_0^\infty f(u) e^{-s(u+\alpha)}\, du$$
$$= \int_0^\infty f(u) e^{-su}\, e^{-s\alpha} du$$
$$= e^{-s\alpha} \int_0^\infty f(u) e^{-su} du = e^{-s\alpha} F(s).$$

Contoh. Tentukan $\mathcal{L}\{e^{-3t}f(t)\}$, jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Menurut (2.29) $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = f\{t-\alpha\}$ maka

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}f(t)\} = f\{t-(-3)\} = f\{f(t+3)\}.$$

Pada tabel di bawah ini akan di tuliskan beberapa sifat dari transformasi Laplace dan perubahannya dari domain t ke domain s.

Tabel 2.2 : Sifat-sifat Transfromasi Laplace

No.	Sifat-sifat
1	$\mathcal{L}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(s) \pm F_2(s)$
2	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$
3	ꟷc{L}{f(t − a)} = e^{as}F(s
4	$\mathcal{L}\{f\left(\frac{t}{a}\right)\} = aF(s)$
5	$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = sF(s) - f(0)$
6	$\mathcal{L}\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$
7	$\mathcal{L}\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{d}{dt}f(0) - \cdots + f^{n-1}(0)$
8	$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{1}{s}F(s)$