

SKRIPSI FISIKA

Penentuan Fungsi Struktur Proton dari Proses *Deep Inelastic Scattering* $e^- + p \rightarrow e^- + X$ dengan Menggunakan Model Quark - Parton

Muhammad Fauzi Mustamin

H21113505



DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2017

Penentuan Fungsi Struktur Proton dari Proses *Deep Inelastic Scattering* $e^- + p \rightarrow e^- + X$ dengan Menggunakan Model Quark - Parton

SKRIPSI

*Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Fisika Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin*

Muhammad Fauzi Mustamin
H21113505

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2017

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

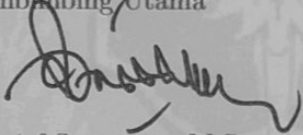
Nama : Muhammad Fauzi Mustamin
NIM : H21113505
Program Studi : Fisika
Judul Skripsi : Penentuan Fungsi Struktur Proton dari Proses
Deep Inelastic Scattering $e^- + p \rightarrow e^- + X$ dengan
Menggunakan Model Quark - Parton

Makassar, 8 Agustus 2017


Disetujui oleh:

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama


Dr. Tasrief Surungan, M.Sc.

NIP. 196702221992031003

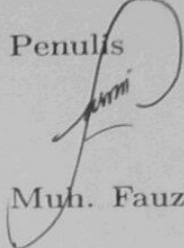

Drs. Bansawang B.J., M.Si.

NIP. 196312061994121001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini merupakan karya orisinal saya dan sepanjang pengetahuan saya tidak memuat bahan yang pernah dipublikasi atau telah ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau di lembaga pendidikan tinggi lainnya di manapun; kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Saya juga menyatakan bahwa skripsi ini merupakan hasil kerja saya sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Penulis



Muh. Fauzi M.

ABSTRAK

Fungsi struktur proton ditentukan dengan menggunakan data awal eksperimen *Deep Inelastic Scattering* (DIS) elektron-proton pada SLAC. Kuantitas ini diperoleh dari persamaan penampang lintang DIS. Fungsi struktur perolehan lalu digunakan untuk menunjukkan fenomena Bjorken scaling serta hubungan Callan-Gross sebagai prediksi model quark-parton. Kesesuaian antara prediksi dan data ditunjukkan dengan menggunakan uji χ^2 untuk menunjukkan p-value.

Kata kunci: Model Quark-Parton, DIS, Fungsi Struktur

ABSTRACT

Proton structure function was determined using early SLAC electron-proton Deep Inelastic Scattering (DIS) experiment. This quantity was obtained by DIS cross section equation. It was used to show Bjorken scaling and Callan-Gross relation phenomena which are the quark-parton model prediction. The consistency between the prediction and the data was shown by using χ^2 test to show the p-value.

Keywords: Quark-Parton Model, DIS, Structure Function

KATA PENGANTAR

Fungsi struktur merupakan salah satu topik kajian dari *standard model*, teori yang mendeskripsikan partikel fundamental di alam semesta beserta dengan interaksinya (kecuali gravitasi). Kajiannya bertujuan untuk mengetahui komposisi penyusun dari suatu partikel. Penelitian ini mengkhususkan penentuan fungsi struktur dari proton. Dalam penentuannya digunakan data eksperimen *deep inelastic scattering* elektron - proton.

Bentuk fungsi struktur diperoleh dari formalisme analitik menggunakan model quark - parton. Model ini mengasumsikan terdapat tiga buah partikel quark bebas di dalam proton. Prediksi model tersebut pada penelitian ini diuji kesesuaiannya dengan data dari eksperimen. Penelitian pada tingkat lebih lanjut pada topik ini umumnya sudah menggunakan teori kromodinamika kuantum (QCD).

Pada proses penyelesaiannya, penulis sangat terbantu berkat peran langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Berikut beberapa diantaranya :

- Dra. Bahjah Musa dan Drs. Mustamin Saleng, M.Pd., masing-masing adalah umi dan abah penulis, serta Syarifah Nadrah Mustamin, Muhammad Mukram Mustamin dan Syarifah Nihlah Mustamin, adik-adik penulis,
- Drs. Tasrief Surungan, M.Sc. selaku pembimbing utama dan Drs. Bansawang B.J., M.Si. selaku pembimbing pertama sekaligus pembimbing akademik penulis,
- Prof. Dr. Dahlang Tahir, M.Si., Prof. Dr. rer. nat. Wira Bahari Nurdin dan Dr. Bualkar Abdullah, M.Eng.Sc. sebagai para penguji,
- Dr. Arifin, M.T. sebagai ketua Departemen Fisika, Syukur P., S.T. sebagai laboran Laboratorium Elektronika dan Instrumentasi, beserta para dosen dan pegawai lainnya di Departemen Fisika Universitas Hasanudin,

- Dr. Julio selaku pembimbing saat praktik lapang di Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia,
- Muh. Nur Gazali Yunus, Muh. Syahrul Padli, S.Si., serta segenap Kelompok Fisika Teori,
- Sultan serta segenap teman-teman Fisika 2013,
- Arham sebagai ketua serta segenap pengurus Mahasiswa Pemerhati Nobel Sains Universitas Hasanuddin,
- Ryan Tasman Iranda beserta segenap teman-teman di Lembaga Kajian Ukhuwah Mahasiswa Universitas Hasanuddin,

hanya kepada-Nya, sang pengatur harmoni alam semesta, kumohonkan ganjaran terbaik.

Saran dan komentar dari pembaca akan sangat bermanfaat bagi penuliss.

Makassar, Zulkaedah 1438 / Agustus 2017

Muhammad Fauzi Mustamin

DAFTAR ISI

| | |
|--|-----------|
| ABSTRAK | iv |
| KATA PENGANTAR | vi |
| 1 PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 2 |
| 1.3 Metode Penelitian | 2 |
| 1.4 Tujuan Penelitian | 2 |
| 2 TINJAUAN PUSTAKA | 3 |
| 2.1 Penampang Lintang Interaksi | 3 |
| 2.1.1 Aturan Emas Fermi | 3 |
| 2.1.2 Penampang Lintang <i>Deep Inelastic Scattering</i> | 5 |
| 2.2 Amplitudo Invarian | 6 |
| 2.3 Model Quark | 8 |
| 2.3.1 Isospin dan Grup SU(2) | 8 |
| 2.3.2 Quark dan SU(3) | 9 |
| 2.4 Hamburan Elastis Elektron Proton | 11 |
| 2.4.1 Proton sebagai partikel titik | 11 |
| 2.4.2 Proton dengan struktur | 13 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.5 | <i>Deep Inelastic Scattering</i> Elektron Proton | 14 |
| 2.6 | Model Quark Parton | 17 |
| 2.6.1 | Bjorken <i>Scaling</i> | 17 |
| 2.6.2 | Hubungan Callan-Gross | 18 |
| 3 | METODE PENELITIAN | 20 |
| 3.1 | Eksperimen <i>Deep Inelastic Scattering</i> pada SLAC | 20 |
| 3.2 | Uji χ^2 | 21 |
| 4 | HASIL DAN DISKUSI | 28 |
| 4.1 | Titik Pemilihan Fungsi Struktur | 28 |
| 4.2 | Penentuan Fungsi Struktur Proton | 29 |
| 4.3 | Prediksi Model Quark Parton | 30 |
| 4.4 | Fungsi Struktur Proton F_1 dan F_2 | 32 |
| 5 | KESIMPULAN | 38 |
| A | Satuan | 39 |
| B | Mekanika Kuantum Relativistik | 40 |
| | Daftar Pustaka | 42 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Baryon ringan memenuhi prediksi octet SU(3) [6]. | 11 |
| 2.2 | Hamburan elastis elektron dengan asumsi proton partikel titik. . | 12 |
| 2.3 | Proses <i>deep inelastic scattering</i> elektron proton. | 15 |
| 4.1 | Sebaran titik x terhadap Q^2 dari data yang digunakan. | 28 |
| 4.2 | <i>Scaling</i> yang terjadi pada beberapa nilai x | 31 |
| 4.3 | Fungsi struktur proton tersebar pada tersebar pada titik Callan- Gross untuk empat rentang energi transfer | 32 |
| 4.4 | Fungsi struktur proton F_1 dan F_2 sebagai fungsi x | 33 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Data dari eksperimen DIS $e^- + p \rightarrow e^- + X$ [11, 12, 13]. | 22 |
| 4.1 | Sebaran semua nilai x dan Q^2 pada setiap sudut. | 29 |
| 4.2 | Perolehan fungsi struktur proton F_1 dan F_2 | 34 |

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengetahuan tentang alam semesta pada ranah subatomik dibangun oleh berbagai ide teoritik yang tercakup dalam Model Standar fisika partikel. Model Standar mengelompokkan penyusun materi alam semesta menjadi partikel elementer quark dan lepton beserta dengan partikel boson sebagai mediator interaksinya. Quark dijumpai di alam dalam keadaan terikat berupa baryon (tiga quark) dan meson (quark dan antiquark) yang dikelompokkan lagi menjadi hadron. Proton dan neutron merupakan contoh dari baryon. Kesesuaian ide-ide teoretik tersebut dengan berbagai eksperimen menjadikan Model Standar sebagai salah satu keberhasilan terbesar dalam fisika moderen [1].

Salah satu topik terdepan pada Model Standar adalah perolehan struktur fungsi nukleon [2]. Fungsi struktur merupakan perhitungan struktur parton dari hadron [3]. Parton adalah suatu model yang menjelaskan bahwa proton tersusun dari partikel titik [4] sebelum model quark dan gluon diterima secara umum. Kuantitas fungsi struktur diperoleh dengan menggunakan formalisme *deep inelastic scattering* (DIS) antara lepton dan nukleon [5].

DIS adalah hamburan antara lepton dengan nukleon pada energi tinggi untuk menyelidiki struktur proton serta interaksinya. Proses DIS menyebabkan terpecahnya hadron menjadi berbagai kemungkinan keadaan akhir hadron ringan oleh pertukaran energi tinggi lepton menuju nukleon. Energi tinggi memungkinkan lepton berinteraksi dengan parton penyusun nukleon sehingga terjadilah hamburan *inelastic*. Lepton dalam proses ini dapat berupa elektron atau neutrino elektron [6]. Kemungkinan ini membuat dapat digunakannya interaksi elektromagnet serta interaksi lemah pada formalisme DIS. Penelitian ini fokus pada penggunaan elektron sehingga pada prosesnya digunakan pertukaran foton.

Model parton memprediksi tidak bergantungnya struktur fungsi proton oleh pertukaran energi momentum pada skala energi tinggi [7] serta struktur fungsi proton mendeskripsikan parton memiliki spin-1/2 [8]. Konsep tersebut sesuai dengan model quark [9] tentang proton yang terdiri dari dua quark up dan satu quark down. Model quark mendasari dikelompokkannya gluon serta anti-quark sebagai parton penyusun nukleon dan pengenalan muatan warna pada setiap quark. Proses dinamika interaksi kuat partikel penyusun nukleon kemudian dijabarkan pada teori kromodinamika kuantum (QCD) [10].

Pada penelitian kali ini diulas penentuan fungsi struktur proton menggunakan model quark - parton. Formalisme DIS digunakan untuk memperoleh bentuk penampang lintang proses hamburan. Data eksperimen diperoleh dari Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) untuk reaksi $e^- + p \rightarrow e^- + X$ [11, 12, 13]. Hasil tersebut dianalisa untuk menguji prediksi Bjorken *scaling* dan hubungan Callan-Gross [14].

1.2 Rumusan Masalah

Fungsi struktur proton diperoleh dalam bentuk penampang lintang proses DIS $e^- + p \rightarrow e^- + X$. Peran dari interaksi QCD tidak disertakan.

1.3 Metode Penelitian

Model quark - parton ditelaah secara analitik untuk memperlihatkan prediksi Bjorken *scaling* dan hubungan Callan-Gross. Data eksperimen dari SLAC [11, 12, 13] digunakan untuk memperoleh fungsi struktur proton. Data kemudian dianalisa [14] menggunakan uji χ^2 [5] menggunakan Mathematica [15] untuk melihat hubungan data dengan prediksi.

1.4 Tujuan Penelitian

Menentukan fungsi struktur proton F_1 dan F_2 dan menunjukkan fenomena Bjorken *scaling* serta hubungan Callan-Gross dari fungsi tersebut sebagai konsekuensi dari model quark - parton.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penampang Lintang Interaksi

Pengetahuan tentang proses fundamental pada tumbukan partikel dapat diketahui dari penampang lintang interaksi. Kuantitas penampang lintang membawa informasi partikel yang bertumbukan serta kinematika proses hamburannya. Bagian berikut akan menjelaskan tentang perolehan bentuk penampang lintang hamburan untuk proses *deep inelastic scattering*. Perhitungan kedepannya digunakan aturan pada Lampiran A.

2.1.1 Aturan Emas Fermi

Aturan emas Fermi mendeskripsikan transisi antar keadaan pada mekanika kuantum. Keadaan $\psi(\mathbf{x}, t)$ saat mengalami transisi dari keadaan tanpa gangguan dapat dijelaskan dengan persamaan Schrodinger [1]

$$i \frac{d\psi}{dt} = [\hat{H}_0 + \hat{H}'(\mathbf{x}, t)]\psi. \quad (2.1)$$

Saat tidak ada gangguan berlaku $\hat{H}_0\phi_k = E_k\phi_k$ dengan normalisasi $\langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{jk}$. Solusi keadaan bergantung waktu secara umum merupakan kumpulan dari keadaan tanpa gangguan, $\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_k c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})e^{-iE_k t}$, dimana koefisien $c_k(t)$ memungkinkan transisi antar keadaan. Misalkan pada waktu $t = 0$ keadaan awal adalah $|i\rangle = \phi_i$ dengan $c_k(0) = \delta_{ki}$. Jika Hamiltonian gangguan cukup kecil, transisi menuju keadaan $|f\rangle$ memberikan [16]

$$\frac{dc_f(t)}{dt} = -i \int_V \phi_f^*(\mathbf{x})\hat{H}'\phi_i(\mathbf{x})e^{i(E_f-E_i)t}d^3\mathbf{x},$$

sehingga didapatkan

$$T_{fi} = c_f(t) = -i \int dt \int d^3\mathbf{x}\phi_f^*(\mathbf{x})\hat{H}'\phi_i(\mathbf{x})e^{i(E_f-E_i)t}. \quad (2.2)$$

atau

$$T_{fi} = -i \int d^4x\phi_f^*(x)\hat{H}'(x)\phi_i(x), \quad (2.3)$$

Peluang partikel terhambur dari keadaan awal i menuju keadaan akhir f diinterpretasikan oleh $|T_{fi}|^2$.

Laju transisi adalah peluang terjadinya interaksi setiap waktu dari keadaan $|i\rangle$ menuju $|f\rangle$. Keadaan $T \rightarrow \infty$ serta substitusi $t \rightarrow t + T/2$ membuat laju transisi menjadi

$$d\Gamma_{fi} = |V_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} dt dt' \right].$$

dengan $V_{fi} = \int d^3\mathbf{x} \phi_f^*(x) \hat{H}'(x) \phi_i(x)$. Menggunakan definisi fungsi delta Dirac membuat integral terhadap dt' menjadi $2\pi\delta(E_f - E_i)$. Saat terdapat dn keadaan akhir pada rentang $E_f \rightarrow E_f + dE_f$, laju transisi total menjadi

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |V_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \right] dE_f.$$

Kehadiran fungsi delta membuat $E_f = E_i$. Menyelesaikan integrasi diperoleh aturan emas Fermi untuk laju transisi

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i). \quad (2.4)$$

Bagian $\rho(E_i) = |dn/dE_f|_{E_i}$ disebut juga rapat keadaan.

Jumlah keadaan dn merupakan volume rerata partikel pada ruang momentum dibagi dengan volume ruang V . Untuk kasus non-relativistik digunakan normalisasi satu partikel setiap satuan volume. Hal ini mengharuskan momentum terkuantisasi akibat kondisi batas periodik, $p_x = 2\pi n/a$, sehingga

$$dn_i = \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}. \quad (2.5)$$

Untuk keadaan akhir N partikel, terdapat $N - 1$ keadaan dengan momentum bebas. Menggunakan fungsi delta tiga dimensi, $\delta^3(\mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i) d^3\mathbf{p}_N$ untuk mengikutkan peran dari partikel ke- N dimana \mathbf{p}_a adalah partikel keadaan awal, bentuk umum jumlah keadaan diperoleh

$$dn = (2\pi)^3 \prod_{i=1}^N \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \delta^3\left(\mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i\right). \quad (2.6)$$

Agar berlaku untuk semua kerangka acuan, maka bentuk normalisasi keadaan menjadi $2E$ partikel setiap satuan volume [10]. Kondisi tersebut dipengaruhi

oleh faktor $1/\gamma$ pada arah gerak tertentu yang membuat normalisasi sebanding dengan $\gamma = E/m$. Keadaan pada kerangka transformasi dihubungkan dengan kerangka awal memenuhi $\psi' = (2E)^{1/2}\psi$, sehingga membuat elemen matriks memenuhi bentuk invarian Lorentz, $\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_f | \hat{H}' | \psi'_i \rangle$. Untuk keadaan awal $a + b \dots$ menjadi keadaan akhir $1 + 2 \dots$ maka

$$\mathcal{M}_{fi} = (2E_1 2E_2 \dots 2E_a 2E_b \dots)^{1/2} V_{fi}. \quad (2.7)$$

Hubungan ini membuat diperolehnya laju transisi untuk keadaan awal $a + b$ menjadi N keadaan akhir sebagai [1]

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2E_a 2E_b} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{i=1}^N \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^N p_i). \quad (2.8)$$

Bagian didalam integral memuat elemen matriks invarian kuadrat serta *Lorentz invariant phase space*.

2.1.2 Penampang Lintang *Deep Inelastic Scattering*

Peninjauan fisika fundamental terkandung pada penampang lintang hamburan. Penampang lintang memiliki dimensi luasan dengan orde $barn = 10^{-24} cm^2$. Kuantitas ini bergantung pada banyak partikel terhambur setiap satuan waktu untuk setiap fluks partikel awal terhambur

$$\sigma = \frac{\text{laju transisi}}{\text{fluks awal} \times \text{jumlah partikel target}}. \quad (2.9)$$

Fluks awal untuk kasus $a + b \rightarrow 1 + 2$ dipengaruhi kecepatan partikel ($v_a + v_b$) dan kerapatan partikel awal. Banyaknya partikel target b dinyatakan dengan kerapatan partikel tersebut pada volume V . Normalisasi satu partikel tiap volume membuat penampang lintang proses menjadi

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{(v_a + v_b)}.$$

Diperolehlah penampang lintang untuk proses hamburan dua keadaan awal dengan N buah keadaan akhir sebagai

$$\sigma = \frac{1}{4E_a E_b (v_a + v_b)} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left[\prod_{i=1}^N \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^N p_i).$$

Kuantitas $F = 4E_a E_b (v_a + v_b)$ merupakan faktor fluks invarian Lorentz. Sifat ini dapat ditunjukkan dengan

$$F = 4E_a E_b (\mathbf{p}_a/E_b + \mathbf{p}_b/E_a) = 4(E_a \mathbf{p}_b + E_b \mathbf{p}_a)$$

$$F^2 = 16(E_a^2 \mathbf{p}_b^2 + E_b^2 \mathbf{p}_a^2 + 2E_a E_b \mathbf{p}_a \mathbf{p}_b).$$

Hubungan

$$(p_a \cdot p_b)^2 = E_a^2 E_b^2 + \mathbf{p}_a^2 \mathbf{p}_b^2 + 2E_a E_b \mathbf{p}_a \mathbf{p}_b,$$

memberikan persamaan fluks [10]

$$F = 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}. \quad (2.10)$$

Perumusan tersebut membuat bentuk umum penampang lintang untuk proses hamburan $a + b \rightarrow N$ menjadi [1]

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left[\prod_{i=1}^N \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^N p_i) \quad (2.11)$$

Bentuk ini digunakan pada proses *deep inelastic scattering* $e^- + P \rightarrow e^- + X$. Keadaan awal prosesnya terdiri dari elektron dan proton dengan keadaan akhir elektron dan X . Notasi X mengindikasikan partikel-partikel lain hasil hamburan yang berasal dari terpecahnya proton akibat energi tinggi proses hamburan. Partikel terhambur tersebut haruslah lebih ringan dibandingkan partikel awal [16].

2.2 Amplitudo Invarian

Bagian fisika mendasar dari partikel terletak pada amplitudo invarian. Kuantitas ini merupakan deskripsi dari proses interaksi yang terjadi. Penelitian ini menggambarkan perolehan amplitudo invarian tersebut dari konsep mekanika kuantum nonrelativistik. Elektron digunakan sebagai partikel peninjau interaksi karena bersifat elementer. Persamaan geraknya memenuhi persamaan Dirac (Lampiran B) dengan solusi bebas berbentuk $\psi = u(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}$ [16].

Kehadiran pengaruh potensial elektromagnet $A^\mu = (A^0 = \mathbf{A})$ membuat disubstitusinya $p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$, dengan e muatan elektron, pada persamaan

Dirac. Hal ini memberikan bentuk suku interaksi [10]

$$\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu. \quad (2.12)$$

Menggunakan amplitudo transisi keadaan awal ψ_i menuju ψ_f didapatkan

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x, \quad (2.13)$$

$$j_\mu^{fi} = -e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x}. \quad (2.14)$$

Kuantitas j_μ^{fi} adalah arus transisi antara elektron dari keadaan awal i menuju keadaan akhir f . Pada hamburan keadaan awal partikel 1 + 2, medan potensial elektromagnet yang mempengaruhi partikel 1 diperoleh dari arus transisi dari partikel 2. Potensial elektromagnet ini memenuhi persamaan Maxwell $\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = j_{(2)}^\mu$. Karena hubungan $\partial_\mu \partial^\mu e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x}$, dengan $q = p_4 - p_2$ adalah momentum antar keadaan awal dan keadaan akhir, maka $A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu$. Keterkaitan tersebut memberikan bentuk amplitudo transisi secara umum dapat dituliskan sebagai

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)}(x) \left(\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x. \quad (2.15)$$

Memasukkan nilai dari setiap arus dan melakukan integrasi, maka diperoleh

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}, \quad (2.16)$$

dengan bentuk umum dari elemen matriks invarian adalah

$$-i\mathcal{M} = (iQe\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (iQe\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2). \quad (2.17)$$

Faktor Q pada persamaan ditentukan oleh muatan partikel. Elemen matriks invarian ini merupakan bagian dari persamaan penampang lintang untuk mendeskripsikan proses hamburan yang terjadi. Elemen matriks total diperoleh dengan menjumlahkan elemen matriks untuk semua kemungkinan peristiwa serta dirata-ratakan dengan keadaan spin setiap partikel keadaan awal. Bagian berikutnya membahas klasifikasi proton sebagai partikel komposit sebelum menggunakan materi pada bagian ini untuk penentuan struktur fungsi melalui proses *deep inelastic scattering*.

2.3 Model Quark

Model quark mendeskripsikan bahwa hadron tersusun dari quark [6]. Istilah hadron digunakan untuk mengelompokkan partikel berinteraksi kuat. Teorinya dibangun dari konsep simetri grup SU(2), kemudian dikembangkan pada grup lebih besar SU(3) [10]. Konsep tersebut diterima dengan baik setelah berbagai penemuan partikel pada eksperimen sesuai dengan prediksi model quark [9]. Bagian ini menjelaskan tentang pengembangan model quark untuk mengetahui penyusun proton.

2.3.1 Isospin dan Grup SU(2)

Konsep isospin berawal dari tidak dapat dibedakannya antara proton dan neutron pada interaksi kuat. Simetri SU(2) berlaku untuk kasus ini dengan generator grup memenuhi hubungan [16]

$$[\hat{T}_j, \hat{T}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{T}_l \quad (2.18)$$

dimana ϵ_{123} merupakan tensor Levi-Civita dan $\hat{T}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, ($i = 1, 2, 3$), dengan representasi dasar

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Operator isospin total memenuhi $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$. Kuantitas teramati sebagai representasi sifat komutator operator membuat keadaan isospin dijelaskan hanya oleh keadaan $|\hat{T}, \hat{T}_3\rangle$. Saat diterapkan pada suatu keadaan, operator isospin total dan operator komponen ketiga isospin memenuhi [1]

$$\hat{T}^2|T, T_3\rangle = T(T+1)|T, T_3\rangle, \quad \hat{T}_3|T, T_3\rangle = T_3|T, T_3\rangle. \quad (2.20)$$

Keadaan proton dan neutron masing-masing dinotasikan sebagai

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Perolehan semua keadaan pada representasi isospin diperoleh dengan operator tangga $\hat{T}_\pm = \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2$ yang memenuhi

$$\hat{T}_\pm|T, T_3\rangle = \sqrt{T(T+1) - T_3(T_3 \pm 1)}|T, T_3 \pm 1\rangle. \quad (2.22)$$

Hasil nol diperoleh saat diterapkan pada keadaan ekstrem $T_3 = \pm T$.

Saat menggabungkan keadaan, misalnya $|T^a, T_3^a\rangle|T^b, T_3^b\rangle$, keadaan T dan T_3 gabungan memenuhi aturan

$$T_3 = T_3^a + T_3^b, \quad |T^a - T^b| \leq T \leq |T^a + T^b|. \quad (2.23)$$

Semua keadaan hasil pada SU(2) diperoleh dengan menerapkan operator tangga pada salah satu keadaan ekstrim dan menggunakan sifat ortogonalitas pada keadaan dengan lebih dari satu buah kemungkinan. Misalkan menerapkan \hat{T}_- pada keadaan ekstrim $|uu\rangle = |1, +1\rangle$

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= uu, & |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle), & |1, -1\rangle &= dd, \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle). \end{aligned}$$

Dekomposisi ini dapat dituliskan $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$. Dengan kata lain, dua isospin doublet menjadi satu isospin triplet dan satu isospin singlet. Penambahan keadaan p dan n pada keadaan ini akan mengantarkan pada kombinasi tiga buah quark dimana $2 \otimes 2 \otimes 2 = 3 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 1 = 4 \otimes 2 \otimes 2$. Hasil penambahan ini menjadi dasar dalam membangun keadaan pada pengembangan SU(3).

2.3.2 Quark dan SU(3)

Banyaknya penemuan partikel pada energi tinggi membuat diperkenalkannya bilangan kuantum *strangeness*, S . Hubungannya dengan muatan listrik Q memberikan [6]

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad Y = B + S, \quad (2.24)$$

dimana B adalah bilangan baryon dan Y disebut *hypercharge*.

Untuk menghubungkan isospin T_i dan *hypercharge* Y dikembangkan multiplet SU(3). Representasinya mampu menjelaskan semua keadaan hadron dengan spin yang sama pada bidang (T_3, Y) . Banyaknya penemuan partikel pada interaksi kuat membuat sulit diterima bahwa semuanya bersifat elemen ter tanpa struktur [6]. Alasan ini membuat diperkenalkannya model quark; semua hadron terdiri dari quark spin-1/2 dengan representasi fundamental SU(3) [9].

Terdapat tiga jenis (*flavour*) quark pada SU(3), up(u), down(d), dan strange(s). Representasi u , d , dan s pada SU(3) adalah

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Setiap quark membawa bilangan $B = 1/3$ serta muatan $Q_u = -2/3$ dan $Q_d = Q_s = -1/3$. Bilangan kuantum *strangeness* hanya dimiliki oleh s dengan $S = -1$.

Generator pada SU(3), $\hat{T}_i = \frac{1}{2}\lambda_i$, terdiri dari delapan matriks yang dikenal sebagai matriks Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Kuantitas teramati dideskripsikan oleh pembangkit $\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ dan $\hat{T}_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$. Bilangan kuantum berkesesuaian adalah komponen ketiga isospin dan *hypercharge* yang memenuhi

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \quad (2.27)$$

Operator tersebut diterapkan pada keadaan u, d, s untuk memperoleh representasi dasar SU(3) dengan bentuk triplet dan dinotasikan sebagai 3.

Enam matriks Gell-Mann lain membentuk operator tangga [17]

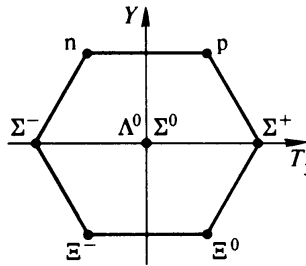
$$\hat{T}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad \hat{V}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \quad \hat{U}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \quad (2.28)$$

dimana semua keadaan pada multiplet SU(3) dapat dibangun dari ketiganya. Operator \hat{T} bekerja pada pertukaran $u-d$, \hat{V} pada $u-s$ dan \hat{U} pada $d-s$. Pro-

sesnya dapat dimulai dari salah satu keadaan ekstrem $|T_3, Y\rangle$ lalu menggunakan operator tangga yang sesuai, serta juga memperhatikan sifat ortogonalitas [1, 16].

Hasil kombinasi dari tiga quark untuk membentuk baryon mengantarkan pada $3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$. Kombinasi ini memungkinkan pelanggaran atas kaidah larangan Pauli namun berhasil ditanggulangi dengan pengenalan muatan warna. Kontribusi tersebut menjadi motivasi hadirnya interaksi kuat QCD [2, 10].

Represnetasi keadaan dasar, momentum sudut $L = 0$, mampu menjelaskan keadaan hadron ringan seperti pada Gambar 2.1. Proton berada pada oktet simetri SU(3) dengan spin 1/2 dan terusun dari quark uud . Hasil eksperimen menunjukkan kesesuaian keadaan tersebut dengan massa serta sifat-sifat proton [9], seperti memiliki muatan +1.



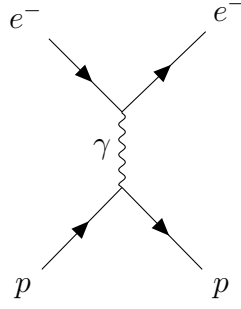
Gambar 2.1: Baryon ringan memenuhi prediksi oktet SU(3) [6].

2.4 Hamburan Elastis Elektron Proton

Dalam membangun proses hamburan yang terjadi, bagian ini akan mengulas terlebih dahulu asumsi saat proton merupakan partikel fundamental. Berpijak pada model ini, proses hamburan elastis dibangun untuk proton dengan struktur internal. Pemahaman akan hal tersebut menjadi pijakan dalam mendeskripsikan proses *deep inelastic scattering* pada bagian berikutnya.

2.4.1 Proton sebagai partikel titik

Hamburan proses $e^- + p^+ \rightarrow e^- + p^+$ pada diagram Feynman diberikan oleh gambar 2.2.



Gambar 2.2: Hamburan elastis elektron dengan asumsi proton partikel titik.

Bentuk amplitudo invariannya

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_3)[ie\gamma^\mu]u(p_1)\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(p_4)[-ie\gamma^\nu]u(p_2), \quad (2.29)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2).$$

Kuadrat dari amplitudo tersebut adalah

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)]^+[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)][\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)]^+.$$

Efek dari spin setiap spinor membuat amplitudo tersebut haruslah dijumlah dan dirata-ratakan sehingga

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,d} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{a,b} [\bar{u}^a(p_3)\gamma^\mu u^b(p_1)][\bar{u}^a(p_3)\gamma^\nu u^b(p_1)]^+ \\ &\quad \times \sum_{c,d} [\bar{u}^c(p_4)\gamma_\mu u^d(p_2)][\bar{u}^c(p_4)\gamma_\nu u^d(p_2)]^+. \end{aligned}$$

Indeks a, b, c, d mendeskripsikan dua kemungkinan keadaan spin. Bentuk ini dapat disederhanakan dengan hubungan [1]

$$[\bar{\psi}\gamma^\mu\phi]^+ = [\psi^+\gamma^0\gamma^\mu\phi]^+ = \phi^+\gamma^{\mu+}\gamma^{0+}\psi = \phi^+\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi = \bar{\phi}\bar{\gamma}^\mu\psi = \bar{\phi}\gamma^\mu\psi,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{a,b} [\bar{u}^a(p_3)\gamma^\mu u^b(p_1)][\bar{u}^b(p_1)\gamma^\nu u^a(p_3)] \\ &\quad \times \sum_{c,d} [\bar{u}^c(p_4)\gamma_\mu u^d(p_2)][\bar{u}^d(p_2)\gamma_\nu u^c(p_4)]. \end{aligned}$$

Amplitudo kuadrat ini terdiri dari tensor untuk setiap simpul. Untuk simpul elektron-elektron,

$$\begin{aligned} l_{(e)}^{\mu\nu} &= \sum_{a,b=1}^2 [\bar{u}_j^a(p_3) \gamma_{ji}^\mu u_i^b(p_1)] [\bar{u}_n^b(p_1) \gamma_{nm}^\nu u_m^a(p_3)] \\ &= \left[\sum_{a=1}^2 u_m^a(p_3) \bar{u}_j^a(p_3) \right] \left[\sum_{b=1}^2 u_i^b(p_1) \bar{u}_n^b(p_1) \right] \gamma_{ji}^\mu \gamma_{nm}^\nu. \end{aligned}$$

Menggunakan hubungan kelengkapan pada Lampiran B maka

$$\begin{aligned} l_{(e)}^{\mu\nu} &= (\not{p}_3 + m)_{mj} (\not{p}_1 + m)_{in} \gamma_{ji}^\mu \gamma_{nm}^\nu \\ &= \left[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu \right]_{mm} \\ &= \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu \right]. \end{aligned}$$

Menggunakan teknik trace [10]

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}), \quad (2.30)$$

maka diperoleh

$$l_{(e)}^{\mu\nu} = 4[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3 - m^2)]. \quad (2.31)$$

Asumsi proton adalah partikel titik, maka bentuk tensornya serupa dengan persamaan tersebut

$$l_{\mu\nu}^{(p)} = 4[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4 - M^2)]. \quad (2.32)$$

Kuadrat rerata elemen matriks amplitudo proses ini menjadi

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{q^4} l_{(e)}^{\mu\nu} l_{\mu\nu}^{(p)}. \quad (2.33)$$

Faktor 1/4 dimasukkan kedalam setiap tensor. Amplitudo kuadrat tersebut hanya berlaku saat proton dianggap sebagai partikel titik. Bentuk ini berlaku pula untuk hamburan elastis lain antar partikel titik. Perhatikan bahwa massa elektron yang kecil membuatnya tidak diikutkan dalam perhitungan.

2.4.2 Proton dengan struktur

Proton tidaklah sederhana partikel titik. Penjelasan mengenai model quark membuat hamburan proton harus mengikutkan komponen penyusunnya. Bagian ini menjelaskan formalisme hamburan elastis elektron proton dengan menghadirkan faktor simpul berbeda akibat struktur proton.

Proses hamburan elastis elektron proton diperlihatkan oleh gambar di bawah. Struktur dari proton membuat tidak diketahuinya bagaimana foton berinteraksi dengan proton. Akibat hal ini maka elemen amplitudo invarian kuadrat dapat ditulis dalam bentuk

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{q^4} l_{(e)}^{\mu\nu} K_{\mu\nu(p)}. \quad (2.34)$$

Faktor $K_{\mu\nu}$ merupakan tensor proton. Kuantitas ini dipengaruhi oleh p_2, p_4 serta $q = p_4 - p_2$. Pengaruh q membuat ketiganya saling bergantung sama lain sehingga tensor proton hanya bergantung pada q dan p_2 . Kemungkinan tensor yang dapat dibangun dari kedua momentum empat tersebut secara umum adalah [17]

$$K^{\mu\nu} = -K_1 g^{\mu\nu} + \frac{K_2}{M^2} p_2^\mu p_2^\nu + \frac{K_3}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{K_4}{M^2} (p_2^\mu q^\nu + p_2^\nu q^\mu), \quad (2.35)$$

dengan K_i adalah fungsi dari variabel skalar q^2 . Keempat fungsi ini saling bergantung satu sama lain akibat hubungan

$$q_\mu K^{\mu\nu} = 0, \quad (2.36)$$

memberikan

$$K_3 = \frac{M^2}{q^2} K_1 + \frac{1}{4} K_2, \quad \text{dan} \quad K_4 = \frac{1}{2} K_2. \quad (2.37)$$

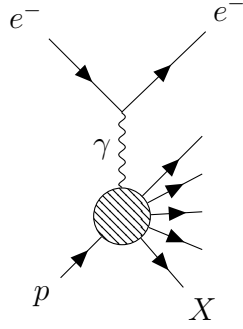
Diperolehlah bentuk

$$K_{(p)}^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) K_1 + \left(p_2^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \right) \left(p_2^\nu + \frac{1}{2} q^\nu \right) K_2. \quad (2.38)$$

Masalah mendasar pada penentuan struktur proton ditentukan oleh kedua fungsi K . Untuk penelitian ini akan ditinjau proses *deep inelastic scattering* yang prosesnya akan dijelaskan pada bagian selanjutnya.

2.5 Deep Inelastic Scattering Elektron Proton

Saat energi elektron datang cukup besar pada proses hamburan elektron proton, proton terhambur dapat berubah menjadi partikel lain yang lebih ringan. Proses ini dideskripsikan sebagai *deep inelastic scattering* antara $e^- + p^+ \rightarrow e^- + X$. Variabel X mengindikasikan semua kemungkinan keadaan akhir pada proses ini.



Gambar 2.3: Proses *deep inelastic scattering* elektron proton.

Elemen matriks dari reaksi tersebut adalah [6]

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \langle p_n | J_\mu^{em}(0) | p_2 \rangle. \quad (2.39)$$

Arus elektromagnet $J_\mu^{em}(0)$ merepresentasikan proses pada simpul foton-proton. Perhatikan pula bahwa setiap spinor mengandung variabel intrinsik spin. Kuadrat elemen matriks diberikan oleh

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{q^4} l_{(e)}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}(X). \quad (2.40)$$

Kuantitas $K_{\mu\nu}(X)$ bergantung pada $q = p_1 - p_3$, p_2 , serta momentum dari kemungkinan hamburan lain p_4, p_5, \dots, p_n . Bentuk penampang lintangnya diberikan oleh

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (mM)^2}} \frac{e^4}{q^4} l_{(e)}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}(X) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \prod_{i=4}^N \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \sum_{i=4}^n p_i).$$

Penampang lintang hamburan ini melibatkan semua kemungkinan momentum partikel keadaan akhir. Menggunakan hubungan $d^3\mathbf{p}_3 = E_3^2 dE_3 d\Omega$ serta hubungan konstanta struktur $\alpha = e^2/2\pi$ dan memperkenalkan tensor $W_{\mu\nu}$, maka diperoleh bentuk penampang lintang diferensial

$$\frac{d^2\sigma}{dE_3 d\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E_3}{E_1} l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

dengan [6]

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu} &= \frac{1}{4M} \sum_{s,n} \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] \\
&\times \langle p, s | J_{\mu}^{(em)}(0) | n \rangle \langle n | J_{\nu}^{(em)}(0) | p, s \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \sum_{i=4}^n p_i),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Bentuk tensor hadron $W_{\mu\nu}$ merupakan penjumlahan seluruh kemungkinan keadaan akhir. Bentuk ini dapat dideduksi seperti pada bagian sebelumnya terkait pembahasan hamburan elastis elektron proton. Perbedaannya terletak pada bentuk fungsi skalar yang bergantung pada q^2 dan $q \cdot p_2$. Ini diakibatkan oleh momentum total keadaan akhir yang bergantung pada setiap kemungkinan partikel terhambur. Mengikuti cara yang sama diperoleh

$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} \right) W_1 + \left[p_2^{\mu} - \frac{q \cdot p_2}{q^2} q^{\mu} \right] \left[p_2^{\nu} - \frac{q \cdot p_2}{q^2} q^{\nu} \right] W_2. \tag{2.43}$$

Fungsi ini terdiri dari variabel skalar Lorentz yang dibangun dari simpul momentum empat hadron.

Pada proses ini didefinisikan variabel kinematik

$$q = p_1 - p_3, \quad \nu = p_2 \cdot q/M. \tag{2.44}$$

Menggunakan kerangka acuan proton diam [1]

$$p_1 = (E_1, 0, 0, E_1), \tag{2.45}$$

$$p_2 = (M, 0, 0, 0), \tag{2.46}$$

$$p_3 = (E_3, 0, E_3 \sin \theta, E_3 \cos \theta), \tag{2.47}$$

diperoleh pertukaran momentum foton

$$q^2 = -4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 0, \quad Q^2 = -q^2 \tag{2.48}$$

dengan θ adalah sudut hamburan elektron. Bentuk kinematika ini membuat fungsi struktur W_i bergantung pada q^2 dan ν . Melakukan kontraksi antara tensor elektron dan tensor hadron diperoleh bentuk penampang lintang diferensial

$$\frac{d^2 \sigma}{dE_3 d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \tag{2.49}$$

Pengukuran terhadap penampang lintang hamburan ini memberikan informasi terkait fungsi struktur $W_{1,2}(q^2, \nu)$, kuantitas karakterisasi struktur dari proton target terhadap pengaruh elektromagnetik. Data dari eksperimen DIS [11, 12, 13] akan dianalisa [14] menggunakan persamaan ini.

2.6 Model Quark Parton

Model parton mengasumsikan bahwa nukleon tersusun dari partikel *point-like*. Proses DIS dipandang sebagai hamburan elastis elektron dengan parton. Keadaan akhir parton akibat elektron berenergi tinggi berekombinasi menjadi berbagai keadaan hadron lain [6]. Mengaitkan dengan model quark, maka parton tidak lain adalah quark spin-1/2. Konsep interaksi kuat QCD membuat antiquark, gliuon, serta partikel-partikel lain dikategorikan sebagai parton [10]. Penelitian ini dibatasi pada model quark parton.

2.6.1 Bjorken *Scaling*

Interaksi foton dengan parton penyusun proton memberikan hubungan momentum $p_i + q = p_f$ dengan p_i dan p_f masing-masing adalah momentum awal dan momentum akhir parton. Massa invarian keadaan akhir hadron memiliki hubungan [1]

$$W^2 = (p_2 + q)^2 = M^2 + 2M\nu + q^2 \geq M^2, \quad (2.50)$$

menjadi dasar didefinisikannya variabel skala *dimensionless*

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (2.51)$$

dengan rentang $0 \leq x \leq 1$. Didefinisikan fungsi struktur [6]

$$MW_1(Q^2, \nu) = F_1(Q^2, \nu) \quad (2.52)$$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = F_2(Q^2, \nu). \quad (2.53)$$

Bjorken *scaling* merupakan fenomena saat Q^2 cukup besar dan ν tetap, kecenderungan fungsi struktur memenuhi [7]

$$F_i(Q^2, \nu) \rightarrow F_i(x). \quad (2.54)$$

Hal ini dicetuskan Bjorken sebagai upaya penjelasan bahwa proton tersusun oleh parton. Prediksi Bjorken, bersama dengan hubungan Callan-Gross pada bagian selanjutnya, menjadi tujuan utama dalam penelitian ini.

2.6.2 Hubungan Callan-Gross

Pengembangan model parton mendeskripsikan setiap penyusun membawa fraksi momentum awal proton ξp_2 ($0 \leq \xi \leq 1$). Kontribusi pada tensor hadron dari parton spin-1/2 adalah [6]

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu}(\xi) &= \frac{1}{4\xi M} \sum_s \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \langle \xi p_2, s | J_\mu^{(em)} | p', s' \rangle \langle p', s' | J_\nu^{em}(0) | \xi p_2, s \rangle \\
&\times (2\pi)^3 \delta^4(p' - \xi p_2 - q) \\
&= \frac{1}{4\xi M} \sum_s \bar{u}(\xi p) \gamma_\mu u(p') \bar{u}(p') \gamma_\nu u(\xi p) \frac{\delta(p'_0 - \xi p_0 - q_0)}{2p'_0}. \quad (2.55)
\end{aligned}$$

dengan p' sebagai momentum empat parton. Menggunakan aturan fungsi delta Dirac

$$\int \delta(p'_0 - \mathbf{p}'^2 - m^2) dp'_0 = \frac{1}{p'_0}, \quad p'^2_0 = \mathbf{p}'^2_0 + m^2,$$

bagian fungsi Delta menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(p'_0 - \xi p_0 - q_0)}{2p'_0} &= \delta[p'^2_0 - (\xi p_0 + q_0)^2] \\
&= \delta[p'^2 - (\xi p + q)^2] \\
&= \delta(2\xi M\nu + q^2) \\
&= \frac{\delta(\xi - x)}{2M\nu}.
\end{aligned}$$

Sementara bagian penjumlahan spin awalnya, mengabaikan massa parton

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_s \bar{u}(\xi p_2) \gamma_\mu u(\xi p_2 + q) \bar{u}(\xi p_2 + q) \gamma_\nu u(\xi p_2) \\
&= \frac{\xi}{2} Tr[\not{p}_2 \gamma_\mu \xi \not{p}_2 \gamma_\nu + \not{p}_2 \gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu] \\
&= 2\xi [p_{2\mu}(\xi p_2 + q)_\nu + p_{2\nu}(\xi p_2 + q)_\mu - p_2 \cdot (\xi p_2 + q) g_{\mu\nu}] \\
&= 2\xi [\xi p_{\mu\nu} + \xi p_\mu p_\nu - M\nu g_{\mu\nu} + \dots] \\
&= 4M^2 \xi^2 (p_\mu p_\nu / M^2) - 2\xi M\nu g_{\mu\nu} + \dots
\end{aligned}$$

Tensor parton menjadi

$$K_{\mu\nu}(\xi) = \delta(\xi - x) \left(\frac{\xi}{\nu} \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} - \frac{1}{2M} g_{\mu\nu} \right). \quad (2.56)$$

Jumlah parton dengan momentum antara $\xi + d\xi$ tercakup pada $f(\xi)d\xi$. Tensor hadron kemudian dapat disajikan sebagai integral terhadap seluruh tensor parton $K_{\mu\nu}(\xi)$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \int_0^1 f(\xi) K_{\mu\nu}(\xi) d\xi \\ &= \frac{x f(x) p_\mu p_\nu}{\nu M^2} - \frac{f(x)}{2M} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Akhirnya terlihat bahwa fungsi struktur hanya bergantung pada x

$$M W_1 \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2} f(x) \quad (2.57)$$

$$\nu W_2 \rightarrow F_2(x) = x f(x). \quad (2.58)$$

Persamaan ini memperlihatkan bahwa anggapan parton memiliki spin-1/2 mengharuskan terpenuhinya

$$2x F_1(x) = F_2(x). \quad (2.59)$$

Keterkaitan ini dikenal sebagai hubungan Callan-Gross. Jika proton tersusun dari partikel skalar, maka tensor hadron $W_{\mu\nu}$ tidak mengandung suku W_1 , menyebabkan $F_1 = 0$ [10].

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Eksperimen *Deep Inelastic Scattering* pada SLAC

Data eksperimen *deep inelastic scattering* (DIS) diambil dari eksperimen $e^- + p \rightarrow e^- + X$ pada Stanford Linear Accelerator Center (SLAC). Pada proses DIS pancaran elektron dengan energi tertentu, E_1 , ditembakkan pada target hidrogen cair. Elektron terhambur pada proses tersebut kemudian dideteksi oleh detektor sebagai fungsi sudut hamburan, θ , dan energi terhambur, E_3 [14]. Kuantitas-kuantitas tersebut kemudian digunakan untuk menentukan fungsi struktur proton.

Penelitian ini menggunakan data hamburan elektron dari sudut 6, 10 derajat [12, 13], 18, 26, 34 derajat [11, 13], dan 15, 19 derajat [13]. Dari kumpulan data tersebut diperoleh nilai *scaling* pada rentang $0.02 < x < 0.97$ serta kuadrat dari momentum transfer pada rentang $0.15 < Q^2 < 21.77 \text{ GeV}^2$.

Keseluruhan data diperlihatkan pada Tabel 3.1. Notasi CC adalah penyederhanaan bentuk penampang lintang $d^2\sigma/d\Omega dE_3$. Sudut θ dalam satuan derajat, E_1 dan E_3 dalam GeV^2 , serta $CC + \delta CC$ dalam nbarn/sr GeV . Data dari [13] memiliki energi datang yang lebih tinggi dan mencakup semua sudut dari data [11] dan [12]. Beberapa titik dengan nilai sama tidak digunakan.

Penentuan fungsi struktur W_1 dan W_2 dilakukan dengan menemukan dua titik dari dua sudut berbeda dengan x dan Q^2 bernilai sama. Pemilihan nilai x dilakukan dengan mengambil batas kesalahan dari data tidak lebih dari 3%. Penentuan nilai Q^2 dilakukan dengan melakukan interpolasi terhadap data salah satu sudut. Interpolasi dilakukan untuk data dengan minimal tiga titik agar diperoleh nilai akurat.

Untuk mendapatkan fungsi struktur sesuai prediksi Bjorken, W_1 dikalikan dengan massa proton M dan W_2 dikalikan dengan ν yang merupakan energi hilang elektron. Nilai ν diperoleh dari hasil pemilihan nilai x dan Q^2 pada dua

sudut berbeda. Kuantitas ini kemudian diperlihatkan kesesuaiannya dengan model quark parton.

3.2 Uji χ^2

Dalam penelitian ini, perolehan fungsi struktur proton dari hasil eksperimen akan ditunjukkan kesesuaiannya dengan Bjroken scaling serta hubungan Callan-Gross. Hal tersebut dilakukan dengan melakukan perhitungan χ^2 pada proses pencocokan hasil analitik dengan data dari SLAC. Kuantitas χ^2 memenuhi persamaan [5]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.1)$$

dengan n adalah jumlah data, x_i sebagai data ke- i , μ sebagai konstanta pemberat, dan σ_i merupakan kesalahan pengamatan data ke- i . Penentuan nilai μ untuk sebuah data dapat menggunakan rerata dari keseluruhan data [15].

Nilai χ^2 secara tidak langsung memberikan nilai *p-value*. Kuantitas ini menentukan tingkat kesesuaian antara data dan apa yang diharapkan dari suatu asumsi [5]. Pada penelitian ini penentuannya dilakukan menggunakan fungsi bawaan dari aplikasi Mathematica.

Standard batas *p-value* pada penelitian ini adalah 0.05. Hal ini berarti nilai *p-value* yang kurang dari batas tersebut mengindikasikan kuat untuk menolak suatu asumsi. Sebaliknya, nilai *p-value* besar menunjukkan indikasi yang lemah untuk menolak suatu asumsi. Adapun nilai yang dekat dengan batas *p-value* berada pada daerah marjinal.

Tabel 3.1: Data dari eksperimen DIS $e^- + p \rightarrow e^- + X$ [11, 12, 13].

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | | | |
|----------|-------|-------|------------------|------|----------|-------|-------|------------------|------|------|------|--|
| 6 | 4.5 | 4.2 | 4710 | 614 | 10 | 9.1 | 1800 | 80.9 | | | | |
| | | 4.17 | 8770 | 812 | | 9.1 | 1290 | 73.2 | | | | |
| | | 4.14 | 15800 | 1330 | | 9 | 979 | 33.6 | | | | |
| | | 4.11 | 24400 | 1700 | | 9 | 921 | 21.7 | | | | |
| | | 4.08 | 31700 | 663 | | 8.9 | 1020 | 30.6 | | | | |
| | | 4.05 | 27300 | 1200 | | 8.8 | 1390 | 84.1 | | | | |
| | | 4.02 | 19000 | 895 | | 8.7 | 1550 | 80.7 | | | | |
| | | 3.99 | 14400 | 538 | | 8.7 | 1250 | 33.5 | | | | |
| | | 3.95 | 10800 | 330 | | 8.6 | 1250 | 29 | | | | |
| | | 3.92 | 8590 | 228 | | 8.5 | 1440 | 38 | | | | |
| | | 3.88 | 8110 | 199 | | 8.4 | 1460 | 45.6 | | | | |
| | | 3.85 | 7440 | 174 | | 8.3 | 1240 | 29.5 | | | | |
| | | 3.81 | 7880 | 170 | | 8.2 | 1170 | 23.1 | | | | |
| | | 3.77 | 8390 | 163 | | 8.1 | 1160 | 22.6 | | | | |
| | | 3.73 | 10000 | 232 | | 8 | 1140 | 22.2 | | | | |
| | | 3.7 | 11500 | 287 | | 7.9 | 1090 | 21.7 | | | | |
| | | 3.66 | 11400 | 235 | | 7.9 | 1070 | 23 | | | | |
| | | 3.62 | 9260 | 289 | | 7.8 | 1050 | 19.9 | | | | |
| | | 3.58 | 8190 | 197 | | 7.7 | 1010 | 19.9 | | | | |
| | | 3.53 | 7080 | 142 | | 7.6 | 983 | 18.6 | | | | |
| | | 3.49 | 6180 | 121 | | 7.5 | 901 | 17.1 | | | | |
| | | 3.45 | 6270 | 131 | | 7.4 | 872 | 16.4 | | | | |
| | | 3.41 | 6910 | 127 | | 7.3 | 924 | 20 | | | | |
| | | 3.37 | 6540 | 138 | | 7.2 | 819 | 25.1 | | | | |
| | | 3.32 | 6130 | 146 | | 6.7 | 701 | 27 | | | | |
| | | 3.28 | 5100 | 114 | | 6.1 | 581 | 13.8 | | | | |
| | | 3.23 | 4460 | 95.3 | | 5.4 | 497 | 24 | | | | |
| | | 3.18 | 3970 | 81.7 | | 4.6 | 401 | 10.9 | | | | |
| | | 3.14 | 3950 | 79.7 | | 3.7 | 354 | 30 | | | | |
| | | 3.1 | 3740 | 77.2 | | 3 | 333 | 11.5 | | | | |
| | | | | 3.05 | | 3880 | 116 | 14 | 12 | 63.1 | 16 | |
| | | | | 2.96 | | 3450 | 80.2 | | 12 | 195 | 45.7 | |
| | | 7 | 6.54 | 6.54 | | 961 | 186 | | 12 | 322 | 9.62 | |
| | | | | 6.51 | | 1920 | 286 | | 12 | 258 | 14.1 | |
| | | | | 6.48 | | 4290 | 588 | | 12 | 235 | 5.77 | |
| | | | | 6.45 | | 7320 | 711 | | 12 | 252 | 5.89 | |
| | | | | 6.42 | | 9030 | 213 | | 12 | 267 | 8.45 | |
| | | | | 6.39 | | 8470 | 490 | | 12 | 394 | 32.1 | |
| | | | | 6.36 | | 6640 | 410 | | 12 | 462 | 21.9 | |
| | | | | 6.33 | | 4750 | 238 | | 12 | 356 | 10.9 | |
| | | | | 6.29 | | 3860 | 143 | | 12 | 371 | 8.9 | |
| | | | | 6.26 | | 3350 | 121 | | 12 | 480 | 18.9 | |
| 6.23 | 3040 | | | 92 | | 11 | 505 | 14.9 | | | | |
| 6.19 | 3350 | | | 87.8 | | 11 | 423 | 10.2 | | | | |
| 6.15 | 3050 | | | 97.8 | | 11 | 416 | 8.18 | | | | |
| 6.12 | 3290 | | | 94.6 | | 11 | 429 | 8.19 | | | | |
| 6.08 | 3960 | | | 145 | | 11 | 446 | 8.05 | | | | |
| 6.04 | 4580 | | | 160 | | 11 | 426 | 8.7 | | | | |
| 6 | 4870 | | | 148 | | 11 | 423 | 7.84 | | | | |
| 5.97 | 4430 | | | 188 | | 11 | 431 | 7.8 | | | | |
| 5.93 | 3810 | | | 122 | | 11 | 408 | 7.76 | | | | |
| 5.89 | 3400 | | | 84.9 | | 11 | 403 | 7.46 | | | | |
| 5.85 | 3370 | | | 79.7 | | 10 | 403 | 7.14 | | | | |
| 5.8 | 3450 | | | 77.7 | | 9.8 | 410 | 9.3 | | | | |
| 5.76 | 3940 | | | 94.3 | | 9.2 | 374 | 8.78 | | | | |
| 5.72 | 3800 | | | 86.7 | | 8.5 | 354 | 8.48 | | | | |
| 5.68 | 3500 | | | 103 | | 7.7 | 385 | 5.6 | | | | |
| 5.63 | 3230 | | | 91.2 | | 6 | 319 | 8.06 | | | | |
| 5.58 | 2840 | | | 73.8 | | 4.2 | 279 | 8.5 | | | | |
| | | | | 5.54 | 2540 | 60.7 | 14 | 11 | 262 | 6.96 | | |
| | | | | 5.49 | 2500 | 55.3 | | 10 | 237 | 5.5 | | |
| | | | | 5.45 | 2470 | 59.7 | | 9.9 | 209 | 11 | | |
| | | | | 5.4 | 2500 | 53.4 | | 8.5 | 203 | 6.03 | | |
| | | | | 5.35 | 2350 | 57 | | 6.9 | 185 | 11 | | |
| | | | | 5.31 | 2430 | 51.2 | | 5.1 | 174 | 6.48 | | |
| | | | | 5.25 | 2210 | 47.3 | | 3.4 | 159 | 27 | | |
| | | | | 5.21 | 2100 | 48.9 | 16 | 14 | 15 | 6.35 | | |
| | | | | 5.16 | 2060 | 42 | | 14 | 43.9 | 11.8 | | |
| | | | | 5.1 | 2010 | 41.1 | | 14 | 97.7 | 8.72 | | |
| | | | | 5.05 | 1910 | 39 | | 14 | 93.3 | 5.5 | | |
| | | | | 5 | 1810 | 36.5 | | 14 | 87.8 | 2.12 | | |
| | | | | 4.94 | 1800 | 36.5 | | 14 | 96.6 | 3.25 | | |
| | | | | 4.89 | 1770 | 37.4 | | 14 | 113 | 4.89 | | |
| | | | | 4.84 | 1630 | 41.5 | | 14 | 148 | 14.1 | | |
| | | 4.586 | 1560 | 40 | | 14 | 184 | 8.65 | | | | |
| | | 4.56 | 1450 | 35.7 | | 14 | 152 | 4.53 | | | | |
| | | 3.96 | 1120 | 30.3 | | 14 | 150 | 4.59 | | | | |
| | | 3.75 | 933 | 64 | | 14 | 201 | 10.5 | | | | |
| | | 3.25 | 796 | 73 | | 14 | 217 | 4.99 | | | | |
| | | 5.13 | 2150 | 49 | | 14 | 192 | 6.34 | | | | |
| | | 9.26 | 388 | 76.2 | | 13 | 187 | 4.34 | | | | |
| | | 9.2 | 1040 | 191 | | 13 | 201 | 4.73 | | | | |

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | |
|----------|-------|-------|------------------|-------|----------|-------|-------|------------------|-------|
| | | 13.29 | 204 | 4.29 | | | 3.68 | 882 | 19.1 |
| | | 13.1 | 219 | 4.2 | | | 3.63 | 889 | 18.8 |
| | | 13 | 221 | 5.04 | | | 3.59 | 950 | 21.7 |
| | | 12.89 | 223 | 4.6 | | | 3.56 | 1020 | 20 |
| | | 12.8 | 229 | 4.9 | | | 3.51 | 1010 | 23.2 |
| | | 12.69 | 223 | 4.39 | | | 3.47 | 906 | 23.2 |
| | | 12.47 | 226 | 4.54 | | | 3.43 | 783 | 18.2 |
| | | 12.39 | 221 | 4.3 | | | 3.38 | 728 | 15.5 |
| | | 11.35 | 208 | 4.74 | | | 3.34 | 688 | 14.7 |
| | | 9.88 | 217 | 10.1 | | | 3.29 | 671 | 15.3 |
| | | 9.07 | 216 | 4.2 | | | 3.25 | 695 | 15.3 |
| | | 8.19 | 201 | 4.67 | | | 3.2 | 707 | 15.8 |
| | | 6.46 | 184 | 4.2 | | | 3.16 | 657 | 16.9 |
| | | 4.74 | 166 | 4.07 | | | 2.97 | 585 | 39.7 |
| | | 3.13 | 159 | 5.6 | | | 2.72 | 524 | 14.3 |
| | 16.05 | 13.16 | 149 | 3.91 | | | 2.49 | 474 | 12.9 |
| | | 12.64 | 138 | 3.71 | | 7 | 6.1 | 59.1 | 8.3 |
| | | 12.03 | 124 | 6.6 | | | 6.05 | 190 | 21.9 |
| | | 10.69 | 119 | 3.52 | | | 5.99 | 320 | 8.82 |
| | | 9.109 | 111 | 7.4 | | | 5.94 | 246 | 10.8 |
| | | 7.282 | 120 | 4.07 | | | 5.87 | 194 | 6.97 |
| | | 5.644 | 113 | 17 | | | 5.81 | 188 | 7.35 |
| | | 3.851 | 137 | 6.23 | | | 5.74 | 214 | 6.93 |
| | 19.49 | 17.27 | 10.4 | 3.22 | | | 5.67 | 271 | 13 |
| | | 17.21 | 22.6 | 0.999 | | | 5.6 | 345 | 14 |
| | | 17.1 | 22 | 0.827 | | | 5.53 | 278 | 8.71 |
| | | 17.03 | 26.4 | 1.2 | | | 5.45 | 277 | 9.01 |
| | | 16.96 | 30 | 2.01 | | | 5.37 | 340 | 9.6 |
| | | 16.89 | 46.6 | 6.04 | | | 5.28 | 330 | 11.1 |
| | | 16.82 | 52.7 | 3.26 | | | 5.21 | 290 | 8.15 |
| | | 16.75 | 44.7 | 1.49 | | | 5.11 | 260 | 7.5 |
| | | 16.66 | 50.6 | 2.39 | | | 5.04 | 267 | 7.56 |
| | | 16.58 | 67.5 | 3.99 | | | 4.94 | 286 | 7.2 |
| | | 16.51 | 72.8 | 2.42 | | | 4.76 | 263 | 6.87 |
| | | 16.42 | 66.2 | 1.87 | | | 3.07 | 169 | 4.27 |
| | | 16.33 | 70.1 | 2.13 | | | 2.48 | 153 | 5.29 |
| | | 16.25 | 71.2 | 1.99 | | 7.01 | 4.802 | 282 | 9 |
| | | 16.16 | 76.7 | 2.52 | | | 4.294 | 234 | 9.9 |
| | | 16.07 | 80.6 | 2.01 | | | 3.717 | 205 | 12 |
| | | 15.97 | 87.4 | 2.33 | | 9 | 7.56 | 67.3 | 3.91 |
| | | 15.86 | 92 | 2.27 | | | 7.51 | 49.3 | 3.33 |
| | | 15.77 | 90.4 | 2.6 | | | 7.45 | 59 | 2.89 |
| | | 15.68 | 97.4 | 2.56 | | | 7.4 | 53.2 | 3.44 |
| | | 15.58 | 99.1 | 2.34 | | | 7.23 | 105 | 8.5 |
| | | 15.47 | 104 | 2.52 | | | 7.19 | 109 | 5.88 |
| | | 15.34 | 96 | 2.99 | | | 7.12 | 86 | 3.8 |
| | | 15.26 | 91.8 | 6.15 | | | 7.06 | 74.8 | 6.63 |
| | | 14.88 | 106 | 2.4 | | | 6.93 | 158 | 15.9 |
| | | 14.25 | 106 | 2.46 | | | 6.88 | 126 | 5.2 |
| | | 13.55 | 103 | 2.44 | | | 6.8 | 111 | 4.44 |
| | | 12.82 | 96.6 | 2.42 | | | 6.75 | 122 | 9.2 |
| | | 12.02 | 92.7 | 2.41 | | | 6.35 | 115 | 4.37 |
| | | 11.14 | 88.7 | 2.35 | | | 6.28 | 118 | 5.32 |
| | | 10.24 | 83.1 | 2.14 | | | 5.34 | 113 | 3.18 |
| | | 9.43 | 76.4 | 2.08 | | | 4.06 | 93.8 | 2.98 |
| | | 8.63 | 76.6 | 2.03 | | | 2.49 | 89.4 | 3.91 |
| | | 7.76 | 74.7 | 2.22 | | 10.97 | 9.14 | 2.8 | 0.586 |
| | | 6.88 | 71.1 | 2.38 | | | 9.09 | 8.98 | 1.43 |
| | | 5.94 | 70.1 | 2.63 | | | 9.03 | 15.5 | 0.432 |
| | | 4.96 | 75.3 | 3.11 | | | 8.98 | 15.1 | 0.474 |
| | | 3.95 | 80 | 3.7 | | | 8.92 | 15.1 | 0.378 |
| | | 3.18 | 85.8 | 5.06 | | | 8.86 | 17.7 | 0.492 |
| 10 | 4.88 | 4.35 | 214 | 31.1 | | | 8.79 | 20 | 0.751 |
| | | 4.32 | 411 | 42 | | | 8.73 | 29.6 | 2 |
| | | 4.29 | 770 | 72.6 | | | 8.66 | 36.7 | 1.52 |
| | | 4.26 | 1400 | 112 | | | 8.6 | 29.5 | 0.765 |
| | | 4.23 | 2000 | 52.7 | | | 8.52 | 30.4 | 0.824 |
| | | 4.2 | 1830 | 72 | | | 8.44 | 41.3 | 1.47 |
| | | 4.17 | 1410 | 63.8 | | | 8.38 | 45.1 | 1.09 |
| | | 4.14 | 1130 | 44 | | | 8.29 | 42.5 | 0.953 |
| | | 4.11 | 913 | 28 | | | 8.2 | 42.4 | 1 |
| | | 4.07 | 799 | 21.5 | | | 8.13 | 44.4 | 0.963 |
| | | 4.04 | 718 | 20.2 | | | 8.04 | 46.6 | 1.03 |
| | | 4.01 | 727 | 17.7 | | | 7.86 | 56.6 | 3.8 |
| | | 3.97 | 774 | 18 | | | 7.78 | 49.8 | 1.08 |
| | | 3.94 | 837 | 20.5 | | | 7.68 | 52.9 | 1.13 |
| | | 3.9 | 949 | 27 | | | 7.4 | 51.3 | 1.41 |
| | | 3.86 | 1200 | 36.4 | | | 6.86 | 56.9 | 1.29 |
| | | 3.83 | 1250 | 27.9 | | | 6.26 | 59.9 | 1.43 |
| | | 3.79 | 1080 | 36.1 | | | 5.61 | 59.4 | 1.49 |
| | | 3.75 | 961 | 24.8 | | | 4.91 | 55.5 | 1.49 |
| | | 3.71 | 853 | 20.5 | | | 4.14 | 51.9 | 1.47 |

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | |
|----------|-------|--------|------------------|------|----------|-------|--------|------------------|--------|
| | | 3.33 | 48.8 | 1.45 | | | 7.86 | 9.01 | 0.263 |
| | | 2.49 | 53.8 | 7.7 | | | 7.16 | 9.75 | 0.292 |
| 10.988 | 7.915 | 49.9 | 1.63 | | | 6.45 | 9.96 | 0.306 | |
| | 3 | 54.5 | 2.6 | | | 5.69 | 9.68 | 0.333 | |
| 13.51 | 10.9 | 0.817 | 0.191 | | | 4.9 | 11.2 | 0.372 | |
| | 10.79 | 3.34 | 0.148 | | | 4.05 | 11.7 | 0.486 | |
| | 10.67 | 4.24 | 0.163 | | | 3.2 | 12.8 | 0.687 | |
| | 10.55 | 5.22 | 0.398 | | | 2.49 | 16.3 | 1.42 | |
| | 10.43 | 8.83 | 0.408 | | 15 | 10 | 7.16 | 0.322 | 0.0413 |
| | 10.3 | 9.25 | 0.418 | | | 7.08 | 0.987 | 0.0269 | |
| | 10.12 | 13.7 | 0.448 | | | 6.99 | 1.18 | 0.0322 | |
| | 10 | 12.8 | 0.382 | | | 6.9 | 1.52 | 0.0511 | |
| | 9.8 | 16.6 | 0.495 | | | 6.81 | 2.63 | 0.136 | |
| | 8.71 | 22 | 0.83 | | | 6.72 | 2.68 | 0.0818 | |
| | 8.14 | 26 | 0.59 | | | 6.63 | 2.93 | 0.103 | |
| | 7.5 | 28.4 | 0.705 | | | 6.54 | 4.64 | 0.117 | |
| | 6.83 | 30.3 | 1.5 | | | 6.45 | 4.55 | 0.103 | |
| | 6.08 | 28.7 | 0.741 | | | 6.36 | 4.73 | 0.0954 | |
| | 5.31 | 28.8 | 0.799 | | | 6.26 | 5.47 | 0.0969 | |
| | 4.44 | 29.3 | 1.5 | | | 6.14 | 6.24 | 0.107 | |
| | 3.74 | 28.1 | 0.798 | | | 6.02 | 6.95 | 0.109 | |
| 13.534 | 9.27 | 28.1 | 0.843 | | | 5.88 | 7.66 | 0.134 | |
| | 7.534 | 29.4 | 0.939 | | 12.5 | 8.43 | 0.053 | 0.0133 | |
| | 6.113 | 28.7 | 1 | | | 8.34 | 0.173 | 0.0184 | |
| | 3 | 37.5 | 5.4 | | | 8.25 | 0.243 | 0.0213 | |
| 15.15 | 11.95 | 0.633 | 0.212 | | | 8.15 | 0.381 | 0.0293 | |
| | 11.8 | 1.55 | 0.136 | | | 8.03 | 0.56 | 0.0263 | |
| | 11.22 | 6.42 | 0.292 | | | 7.91 | 0.744 | 0.0377 | |
| | 10.34 | 8.76 | 0.58 | | | 7.79 | 1 | 0.0334 | |
| | 9.27 | 12.3 | 0.278 | | | 7.64 | 1.2 | 0.028 | |
| | 7.99 | 15.7 | 0.6 | | | 7.46 | 1.53 | 0.0351 | |
| | 6.51 | 16.9 | 0.436 | | | 7.27 | 2.1 | 0.0499 | |
| | 4.98 | 19.4 | 0.89 | | | 7.06 | 2.56 | 0.0664 | |
| | 2.48 | 19.4 | 0.506 | | | 6.85 | 2.98 | 0.0782 | |
| 15.201 | 10.86 | 20.8 | 0.83 | | | 6.62 | 3.43 | 0.0846 | |
| | 9.868 | 21.4 | 0.609 | | | 6.38 | 3.99 | 0.0984 | |
| | 8.691 | 19.8 | 0.94 | | | 6.14 | 4.57 | 0.114 | |
| | 7.3 | 20.5 | 0.633 | | | 5.9 | 4.95 | 0.156 | |
| | 5.696 | 22.6 | 1.5 | | 15 | 9.54 | 0.0138 | 0.0038 | |
| | 4.258 | 21.7 | 2.2 | | | 9.43 | 0.0428 | 0.0052 | |
| | 3.7 | 24.6 | 2.8 | | | 9.33 | 0.0811 | 0.0063 | |
| | 3 | 26.1 | 1.78 | | | 9.21 | 0.133 | 0.0073 | |
| 17.65 | 13.53 | 0.229 | 0.0932 | | | 9.09 | 0.163 | 0.0083 | |
| | 13.2 | 3.36 | 0.2 | | | 8.97 | 0.271 | 0.0089 | |
| | 12.81 | 0.985 | 0.126 | | | 8.82 | 0.325 | 0.0069 | |
| | 12.54 | 2.03 | 0.128 | | | 8.64 | 0.442 | 0.0089 | |
| | 11.94 | 2.97 | 0.123 | | | 8.46 | 0.582 | 0.0134 | |
| | 11.45 | 5.08 | 0.167 | | | 8.26 | 0.803 | 0.0194 | |
| | 10.93 | 6.17 | 0.27 | | | 8.04 | 0.983 | 0.0251 | |
| | 9.67 | 6.49 | 0.192 | | | 7.8 | 1.28 | 0.0302 | |
| | 8.98 | 8.44 | 0.222 | | | 7.56 | 1.48 | 0.028 | |
| | 8.25 | 9.57 | 0.42 | | | 7.32 | 1.67 | 0.0335 | |
| | 7.42 | 10.6 | 0.282 | | | 7.08 | 2.01 | 0.046 | |
| | 6.77 | 11.9 | 0.57 | | | 6.84 | 2.23 | 0.0494 | |
| | 5.29 | 11.3 | 0.31 | | | 6.6 | 2.4 | 0.0527 | |
| | 4.52 | 11.9 | 0.354 | | | 6.36 | 2.69 | 0.0575 | |
| | 3.73 | 13.3 | 0.73 | | | 6.12 | 2.85 | 0.0609 | |
| | 2.49 | 12.3 | 0.367 | | | 5.88 | 3.13 | 0.0865 | |
| 17.696 | 12.46 | 12.6 | 0.386 | | 18 | 9.68 | 0.183 | 0.009 | |
| | 11.5 | 13.2 | 0.91 | | | 9.48 | 0.225 | 0.0071 | |
| | 10.36 | 13.6 | 0.455 | | | 9.3 | 0.295 | 0.0078 | |
| | 9.015 | 15 | 1.5 | | | 9.12 | 0.373 | 0.0087 | |
| | 7.461 | 15.5 | 0.566 | | | 8.94 | 0.462 | 0.0078 | |
| | 6.069 | 17 | 2.1 | | | 8.78 | 0.534 | 0.0081 | |
| | 4.544 | 15.7 | 0.742 | | | 8.61 | 0.594 | 0.0088 | |
| | 3.8 | 17.9 | 3.7 | | | 8.43 | 0.683 | 0.0129 | |
| | 3 | 16.5 | 2.01 | | | 8.24 | 0.766 | 0.0198 | |
| 19.3 | 14.5 | 0.0824 | 0.031 | | | 8.01 | 0.91 | 0.0227 | |
| | 14.34 | 0.277 | 0.0384 | | | 7.77 | 1.02 | 0.0259 | |
| | 14.18 | 0.465 | 0.0648 | | | 7.53 | 1.16 | 0.0295 | |
| | 13.99 | 0.667 | 0.0481 | | | 7.29 | 1.36 | 0.0339 | |
| | 13.78 | 1.03 | 0.0459 | | | 7.05 | 1.46 | 0.0369 | |
| | 13.53 | 1.33 | 0.0551 | | | 6.81 | 1.59 | 0.0404 | |
| | 13.33 | 1.88 | 0.084 | | | 6.57 | 1.7 | 0.0427 | |
| | 12.97 | 2.76 | 0.0776 | | | 6.33 | 1.83 | 0.0419 | |
| | 12.47 | 3.93 | 0.1 | | | 6.09 | 1.91 | 0.0361 | |
| | 11.94 | 5.14 | 0.129 | | | 5.85 | 2.02 | 0.0452 | |
| | 11.35 | 6.28 | 0.16 | | 18 | 4.5 | 3.5 | 0.657 | |
| | 10.74 | 7.1 | 0.186 | | | 3.46 | 14.2 | 0.986 | |
| | 10.06 | 8.1 | 0.219 | | | 3.42 | 39 | 2.42 | |
| | 9.33 | 8.54 | 0.238 | | | 3.37 | 59.5 | 1.33 | |
| | 8.54 | 9.08 | 0.256 | | | 3.32 | 46 | 1.23 | |

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | |
|----------|-------|-------|------------------|-------|----------|-------|--------|------------------|-------|
| | | 3.27 | 38.2 | 0.765 | | | 1.5 | 11.2 | 0.263 |
| | | 3.23 | 40.7 | 0.727 | 8.598 | 4.78 | 11 | 0.256 | |
| | | 3.18 | 44.5 | 0.787 | | 4.5 | 11.4 | 0.271 | |
| | | 3.13 | 50.7 | 1.01 | | 4 | 12.29 | 0.65 | |
| | | 3.08 | 63.3 | 1.74 | | 3.5 | 11.3 | 0.335 | |
| | | 3.03 | 80.3 | 1.55 | | 3 | 12.1 | 0.359 | |
| | | 2.99 | 66.6 | 1.57 | | 2.5 | 13.3 | 1.3 | |
| | | 2.94 | 58.3 | 1.06 | | 2 | 13.7 | 1.03 | |
| | | 2.89 | 61.2 | 1.07 | 10.39 | 6.49 | 0.151 | 0.0072 | |
| | | 2.84 | 72.9 | 1.36 | | 6.25 | 0.535 | 0.0236 | |
| | | 2.79 | 84.5 | 1.43 | | 5.99 | 0.875 | 0.0385 | |
| | | 2.75 | 84.4 | 1.59 | | 5.75 | 1.21 | 0.0525 | |
| | | 2.7 | 73.7 | 1.51 | | 5.25 | 1.806 | 0.063 | |
| | | 2.65 | 68.6 | 1.21 | | 4.75 | 2.41 | 0.0817 | |
| | | 2.6 | 68 | 1.18 | | 4.31 | 2.84 | 0.1 | |
| | | 2.55 | 71.8 | 1.19 | | 4.12 | 3.52 | 0.0454 | |
| | | 2.51 | 72.6 | 1.15 | | 3.79 | 4.09 | 0.16 | |
| | | 2.46 | 75 | 1.17 | | 3.64 | 4.51 | 0.101 | |
| | | 2.41 | 72.4 | 1.19 | | 3.35 | 4.77 | 0.113 | |
| | | 2.36 | 72.6 | 1.2 | | 3.19 | 5.12 | 0.23 | |
| | | 2.31 | 73.5 | 1.29 | | 2.84 | 5.08 | 0.108 | |
| | | 1.75 | 76 | 4.3 | | 2.69 | 5.34 | 0.099 | |
| | | 1.5 | 70 | 4.5 | | 2.32 | 6.04 | 0.32 | |
| | | 1.25 | 67.9 | 1.62 | | 2.13 | 5.86 | 0.144 | |
| 4.501 | 2.25 | 67.4 | 2.33 | | | 1.79 | 6.33 | 0.165 | |
| | 2 | 64.6 | 2.94 | | | 1.5 | 6.3 | 0.4 | |
| 6.5 | 4.7 | 0.763 | 0.115 | | 10.404 | 5.5 | 6.67 | 0.152 | |
| | 4.65 | 2.94 | 0.266 | | | 5 | 6.67 | 0.162 | |
| | 4.6 | 5.14 | 0.171 | | | 4.5 | 7.51 | 0.47 | |
| | 4.54 | 4.58 | 0.139 | | | 3.94 | 7.23 | 0.194 | |
| | 4.48 | 5.26 | 0.142 | | | 3.5 | 6.82 | 0.326 | |
| | 4.42 | 6.11 | 0.162 | | | 3 | 8.01 | 0.99 | |
| | 4.36 | 7.68 | 0.246 | | | 2.5 | 8.54 | 0.422 | |
| | 4.3 | 12.3 | 0.291 | | | 2 | 9.18 | 0.767 | |
| | 4.24 | 10.1 | 0.281 | | 12.5 | 6.91 | 0.239 | 0.0114 | |
| | 4.18 | 9.52 | 0.224 | | | 5.91 | 1.05 | 0.0292 | |
| | 4.12 | 12.4 | 0.306 | | | 4.94 | 2.09 | 0.0616 | |
| | 4.06 | 15.7 | 0.358 | | | 4.12 | 2.97 | 0.0948 | |
| | 4 | 16 | 0.39 | | | 3.31 | 3.77 | 0.115 | |
| | 3.94 | 14.6 | 0.338 | | | 2.94 | 3.94 | 0.125 | |
| | 3.88 | 14.8 | 0.336 | | | 2.69 | 4.34 | 0.144 | |
| | 3.81 | 15.7 | 0.351 | | | 2.43 | 4.72 | 0.186 | |
| | 3.61 | 19 | 0.422 | | | 2.25 | 4.95 | 0.218 | |
| | 3.38 | 18.79 | 0.54 | | | 2.07 | 5.03 | 0.26 | |
| | 3.26 | 20.7 | 0.46 | | | 1.89 | 5.27 | 0.322 | |
| | 3.1 | 21.8 | 0.487 | | | 1.75 | 5.73 | 0.393 | |
| | 2.85 | 21.9 | 0.493 | | | 1.6 | 5.3 | 0.968 | |
| | 2.7 | 24.13 | 0.75 | | 13.3 | 7.5 | 0.0378 | 0.0028 | |
| | 2.36 | 23.6 | 0.517 | | | 5.75 | 0.1988 | 0.009 | |
| | 2.28 | 24.3 | 0.534 | | | 5.25 | 0.492 | 0.019 | |
| | 2.19 | 25.93 | 0.93 | | | 4.75 | 0.93 | 0.036 | |
| | 2.11 | 23.2 | 0.523 | | | 4.5 | 1.09 | 0.0293 | |
| | 1.5 | 23.9 | 0.599 | | | 4.27 | 1.358 | 0.056 | |
| 6.503 | 3.5 | 21.9 | 0.6 | | | 4 | 1.56 | 0.0385 | |
| | 3 | 23 | 0.616 | | | 3.82 | 1.782 | 0.077 | |
| | 2.5 | 25.1 | 1.2 | | | 3.68 | 1.99 | 0.0553 | |
| | 2 | 26.7 | 1.3 | | | 3.5 | 2.4 | 0.0655 | |
| 8.6 | 5.77 | 0.172 | 0.0236 | | | 3.34 | 2.44 | 0.0494 | |
| | 5.68 | 0.601 | 0.0353 | | | 3.09 | 2.65 | 0.0551 | |
| | 5.61 | 0.81 | 0.0443 | | | 2.92 | 2.84 | 0.0648 | |
| | 5.53 | 0.962 | 0.0509 | | | 2.74 | 2.78 | 0.0852 | |
| | 5.46 | 1.51 | 0.085 | | | 2.63 | 2.98 | 0.0939 | |
| | 5.39 | 1.87 | 0.0733 | | | 2.5 | 3.33 | 0.0926 | |
| | 5.32 | 1.73 | 0.0465 | | | 2.31 | 3.27 | 0.0968 | |
| | 5.25 | 2.44 | 0.0676 | | | 2 | 3.56 | 0.105 | |
| | 5.17 | 3.22 | 0.0585 | | | 1.93 | 3.32 | 0.125 | |
| | 5.1 | 2.92 | 0.0589 | | | 1.79 | 3.92 | 0.137 | |
| | 5.02 | 3.2 | 0.0615 | | | 1.67 | 3.63 | 0.164 | |
| | 4.92 | 3.82 | 0.0799 | | 13.299 | 7 | 4.08 | 0.2 | |
| | 4.64 | 4.6 | 0.15 | | | 6.5 | 4.39 | 0.248 | |
| | 4.33 | 5.23 | 0.0885 | | | 6 | 4.11 | 0.276 | |
| | 4.16 | 5.72 | 0.17 | | | 5.5 | 4.5 | 0.365 | |
| | 3.83 | 6.56 | 0.13 | | | 5 | 4.17 | 0.389 | |
| | 3.66 | 7.27 | 0.142 | | 17 | 8.74 | 0.0042 | 0.0004 | |
| | 3.35 | 7.79 | 0.44 | | | 8.49 | 0.015 | 0.0009 | |
| | 3.21 | 8.46 | 0.181 | | | 8 | 0.0708 | 0.0035 | |
| | 2.9 | 8.91 | 0.189 | | | 7.5 | 0.1517 | 0.0056 | |
| | 2.79 | 9.57 | 0.36 | | | 7 | 0.299 | 0.011 | |
| | 2.68 | 9.99 | 0.207 | | | 6.5 | 0.448 | 0.017 | |
| | 2.59 | 9.8 | 0.21 | | | 6 | 0.643 | 0.026 | |
| | 2.33 | 10.36 | 0.5 | | | 5.75 | 0.741 | 0.0216 | |
| | 2.16 | 10.9 | 0.248 | | | 5.5 | 0.869 | 0.034 | |

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | |
|----------|-------|-------|------------------|--------|----------|--------|-------|------------------|--------|
| | | 5.35 | 0.882 | 0.0255 | | | 1.4 | 15.18 | 0.81 |
| | | 5 | 1.011 | 0.074 | | | 1.2 | 16.6 | 0.52 |
| | | 4.75 | 1.07 | 0.0375 | | 4.494 | 2 | 17 | 0.675 |
| | | 4.5 | 1.228 | 0.094 | | | 1.8 | 19.8 | 1.23 |
| | | 4.25 | 1.39 | 0.0435 | | 6.7 | 3.5 | 0.569 | 0.0315 |
| | | 4 | 1.45 | 0.12 | | | 3.25 | 1.43 | 0.0516 |
| | | 3.75 | 1.66 | 0.0611 | | | 3 | 1.87 | 0.0571 |
| | | 3.5 | 1.73 | 0.16 | | | 2.94 | 2.126 | 0.078 |
| | | 3.33 | 1.74 | 0.0616 | | | 2.75 | 2.831 | 0.1 |
| | | 3.15 | 1.92 | 0.0696 | | | 2.5 | 3.4 | 0.14 |
| | | 3 | 1.91 | 0.2 | | | 2.38 | 3.73 | 0.116 |
| | | 2.75 | 1.9 | 0.095 | | | 2.25 | 4.07 | 0.19 |
| | | 2.5 | 2.39 | 0.31 | | | 2.12 | 4.38 | 0.153 |
| | | 2.22 | 2.38 | 0.183 | | | 2 | 5.04 | 0.25 |
| | | 2 | 2.71 | 0.54 | | | 1.89 | 5.22 | 0.165 |
| | | 1.83 | 2.66 | 0.292 | | | 1.75 | 5.85 | 0.51 |
| | | 1.77 | 2.82 | 0.31 | | | 1.63 | 5.64 | 0.225 |
| 19 | 12.5 | 7.08 | 0.0134 | 0.0023 | | | 1.5 | 5.62 | 0.309 |
| | | 6.94 | 0.0353 | 0.0026 | | | 1.38 | 6.9 | 0.392 |
| | | 6.82 | 0.0941 | 0.006 | | 8.7 | 4.36 | 0.0158 | 0.0028 |
| | | 6.7 | 0.1 | 0.0047 | | | 4.29 | 0.0354 | 0.0025 |
| | | 6.58 | 0.173 | 0.0057 | | | 4.21 | 0.0592 | 0.0031 |
| | | 6.43 | 0.217 | 0.0054 | | | 4.13 | 0.104 | 0.0061 |
| | | 6.25 | 0.322 | 0.0072 | | | 4.05 | 0.127 | 0.0059 |
| | | 6.07 | 0.443 | 0.0098 | | | 3.97 | 0.175 | 0.0083 |
| | | 5.88 | 0.598 | 0.0126 | | | 3.89 | 0.266 | 0.0085 |
| | | 5.66 | 0.765 | 0.0168 | | | 3.79 | 0.299 | 0.0071 |
| | | 5.41 | 0.956 | 0.0306 | | | 3.67 | 0.322 | 0.02 |
| | 15 | 7.81 | 0.0051 | 0.0018 | | | 3.42 | 0.428 | 0.012 |
| | | 7.69 | 0.0111 | 0.0021 | | | 2.39 | 0.572 | 0.03 |
| | | 7.57 | 0.0189 | 0.0022 | | | 2.14 | 0.677 | 0.0357 |
| | | 7.44 | 0.0387 | 0.0024 | | | 1.88 | 0.917 | 0.037 |
| | | 7.27 | 0.0523 | 0.002 | | | 1.5 | 1.199 | 0.05 |
| | | 7.09 | 0.0892 | 0.0026 | | 8.696 | 3.75 | 1.549 | 0.068 |
| | | 6.91 | 0.132 | 0.0039 | | | 3.5 | 1.955 | 0.097 |
| | | 6.73 | 0.179 | 0.0055 | | | 3.25 | 2.24 | 0.0635 |
| | | 6.55 | 0.225 | 0.007 | | | 3 | 2.29 | 0.12 |
| | | 6.36 | 0.313 | 0.0084 | | | 2.75 | 2.47 | 0.0753 |
| | | 6.13 | 0.388 | 0.0094 | | | 2.5 | 2.75 | 0.17 |
| | | 5.89 | 0.503 | 0.0122 | | | 2.27 | 2.64 | 0.124 |
| | | 5.65 | 0.62 | 0.0154 | | | 2 | 3.17 | 0.2 |
| | | 5.41 | 0.742 | 0.0224 | | | 1.75 | 3.33 | 0.24 |
| | 18.02 | 8.63 | 0.0017 | 0.0006 | | 11.88 | 5.09 | 0.0019 | 0.0009 |
| | | 8.51 | 0.0033 | 0.0004 | | | 5.01 | 0.0056 | 0.0009 |
| | | 8.39 | 0.0054 | 0.0004 | | | 4.93 | 0.0075 | 0.001 |
| | | 8.27 | 0.0108 | 0.0005 | | | 4.85 | 0.0174 | 0.0013 |
| | | 8.15 | 0.0129 | 0.0005 | | | 4.77 | 0.0205 | 0.0014 |
| | | 8 | 0.0208 | 0.0006 | | | 4.69 | 0.0291 | 0.0015 |
| | | 7.79 | 0.0361 | 0.0009 | | | 4.61 | 0.0367 | 0.0017 |
| | | 7.55 | 0.0559 | 0.0015 | | | 4.41 | 0.047 | 0.0048 |
| | | 7.31 | 0.0846 | 0.0022 | | | 2.13 | 0.0703 | 0.0032 |
| | | 7.07 | 0.119 | 0.003 | | 11.905 | 4.5 | 0.0934 | 0.0099 |
| | | 6.83 | 0.163 | 0.0041 | | | 4.25 | 0.177 | 0.01 |
| | | 6.59 | 0.208 | 0.0053 | | | 4 | 0.259 | 0.016 |
| | | 6.35 | 0.25 | 0.0065 | | | 3.75 | 0.351 | 0.022 |
| | | 6.11 | 0.341 | 0.0085 | | | 3.5 | 0.47 | 0.045 |
| | | 5.87 | 0.38 | 0.0091 | | | 3.25 | 0.634 | 0.062 |
| | | 5.63 | 0.446 | 0.0065 | | | 3 | 0.769 | 0.077 |
| | | 5.39 | 0.511 | 0.0076 | | | 2.75 | 0.912 | 0.099 |
| | 20 | 9.08 | 0.001 | 0.0004 | | | 2.5 | 1.13 | 0.12 |
| | | 8.94 | 0.0019 | 0.0003 | | | 2.25 | 1.18 | 0.0434 |
| | | 8.78 | 0.004 | 0.0003 | | | 2 | 1.21 | 0.17 |
| | | 8.6 | 0.0064 | 0.0002 | | | 1.67 | 1.61 | 0.23 |
| | | 8.4 | 0.0126 | 0.0004 | | 15 | 5.59 | 0.0008 | 0.0003 |
| | | 8.19 | 0.0207 | 0.0006 | | | 5.5 | 0.0014 | 0.0002 |
| | | 7.98 | 0.0311 | 0.0009 | | | 5.4 | 0.0024 | 0.0002 |
| | | 7.76 | 0.0476 | 0.0013 | | | 5.3 | 0.0056 | 0.0003 |
| | | 7.52 | 0.0691 | 0.0018 | | | 5.18 | 0.0081 | 0.0003 |
| | | 7.28 | 0.0936 | 0.0024 | | | 4.89 | 0.0134 | 0.0017 |
| | | 7.04 | 0.124 | 0.0032 | | | 4.73 | 0.0211 | 0.0006 |
| | | 6.8 | 0.167 | 0.0043 | | | 4.57 | 0.0287 | 0.0026 |
| | | 6.56 | 0.198 | 0.0052 | | | 4.41 | 0.0328 | 0.0009 |
| | | 6.32 | 0.238 | 0.0062 | | | 2.39 | 0.0482 | 0.0016 |
| | | 6.08 | 0.274 | 0.0074 | | 15.006 | 5 | 0.0555 | 0.0039 |
| | | 5.84 | 0.334 | 0.009 | | | 4.75 | 0.0807 | 0.005 |
| | | 5.6 | 0.377 | 0.0104 | | | 4.5 | 0.0648 | 0.0023 |
| | | 5.36 | 0.405 | 0.0159 | | | 4.25 | 0.1383 | 0.0091 |
| 26 | 4.5 | 2.8 | 4.1 | 0.104 | | | 4 | 0.184 | 0.015 |
| | | 2.6 | 4.83 | 0.13 | | | 3.75 | 0.233 | 0.013 |
| | | 2.4 | 8.02 | 0.206 | | | 3.5 | 0.316 | 0.018 |
| | | 2.2 | 11.3 | 0.301 | | | 3.25 | 0.396 | 0.023 |
| | | 1.6 | 14.1 | 0.67 | | | 3 | 0.459 | 0.043 |

| θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | | θ | E_1 | E_3 | $CC + \delta CC$ | |
|----------|-------|-------|------------------|----------|----------|--------|-------|------------------|--------|
| | | 2.75 | 0.52 | 0.054 | | 7.9 | 3 | 0.023 | 0.0025 |
| | | 2.5 | 0.59 | 0.0271 | | | 2.75 | 0.0957 | 0.0056 |
| | | 2.25 | 0.627 | 0.076 | | 7.899 | 2.5 | 0.248 | 0.016 |
| | | 2 | 0.76 | 0.1 | | | 2.25 | 0.382 | 0.033 |
| | | 1.75 | 0.79 | 0.15 | | | 2 | 0.624 | 0.051 |
| | 18.02 | 5.97 | 0.0004 | 0.00013 | | | 1.75 | 0.904 | 0.08 |
| | | 5.87 | 0.0009 | 0.00015 | | | 1.48 | 1.25 | 0.12 |
| | | 5.76 | 0.0015 | 0.00013 | | | 1.25 | 1.53 | 0.21 |
| | | 5.63 | 0.0022 | 0.00011 | | 10 | 3.25 | 0.0098 | 0.0039 |
| | | 5.35 | 0.005 | 9.00E-04 | | 9.999 | 3 | 0.0302 | 0.0035 |
| | | 4.88 | 0.0068 | 0.00028 | | | 2.75 | 0.086 | 0.0057 |
| | 18.03 | 5.5 | 0.0109 | 0.0015 | | | 2.5 | 0.1503 | 0.0086 |
| | | 5.25 | 0.0131 | 0.002 | | | 2.25 | 0.261 | 0.012 |
| | | 5 | 0.0228 | 0.00103 | | | 2 | 0.364 | 0.029 |
| | | 4.75 | 0.0276 | 0.0029 | | | 1.75 | 0.472 | 0.044 |
| | | 4.5 | 0.0478 | 0.0039 | | | 1.5 | 0.703 | 0.074 |
| | | 4.25 | 0.0766 | 0.0055 | | | 1.25 | 1.04 | 0.13 |
| | | 4 | 0.1014 | 0.0099 | | 12.5 | 3.25 | 0.0122 | 0.0019 |
| | | 3.75 | 0.129 | 0.012 | | | 3.5 | 0.0046 | 0.0012 |
| | | 3.5 | 0.153 | 0.017 | | | 3 | 0.0352 | 0.004 |
| | | 3.25 | 0.215 | 0.017 | | | 2.75 | 0.0757 | 0.0055 |
| | | 3 | 0.257 | 0.025 | | | 2.5 | 0.1032 | 0.0064 |
| | | 2.75 | 0.329 | 0.041 | | | 2.25 | 0.171 | 0.017 |
| | | 2.5 | 0.394 | 0.052 | | | 2 | 0.219 | 0.024 |
| | | 2.25 | 0.457 | 0.073 | | | 1.75 | 0.321 | 0.04 |
| | | 2 | 0.56 | 0.1 | | | 1.5 | 0.478 | 0.066 |
| | | 1.75 | 0.81 | 0.16 | | | 1.25 | 0.61 | 0.13 |
| 34 | 4.5 | 2.2 | 0.71 | 0.0323 | | 15 | 3.5 | 0.0041 | 0.0002 |
| | | 2 | 1.58 | 0.0542 | | 14.996 | 3.25 | 0.0085 | 0.0025 |
| | | 1.8 | 2.94 | 0.0979 | | | 3 | 0.0229 | 0.0038 |
| | 4.501 | 1.6 | 4.04 | 0.22 | | | 2.75 | 0.043 | 0.0053 |
| | | 1.4 | 5.33 | 0.31 | | | 2.5 | 0.0721 | 0.0099 |
| | | 1.2 | 6.52 | 0.41 | | | 2.25 | 0.118 | 0.018 |
| | 5.8 | 2.5 | 0.246 | 0.0105 | | | 2 | 0.167 | 0.02 |
| | | 2.25 | 0.674 | 0.0234 | | | 1.75 | 0.196 | 0.03 |
| | 5.795 | 2.02 | 1.08 | 0.076 | | | 1.5 | 0.326 | 0.054 |
| | | 1.75 | 1.753 | 0.096 | | | | | |
| | | 1.5 | 2.52 | 0.21 | | | | | |
| | | 1.25 | 3.56 | 0.33 | | | | | |

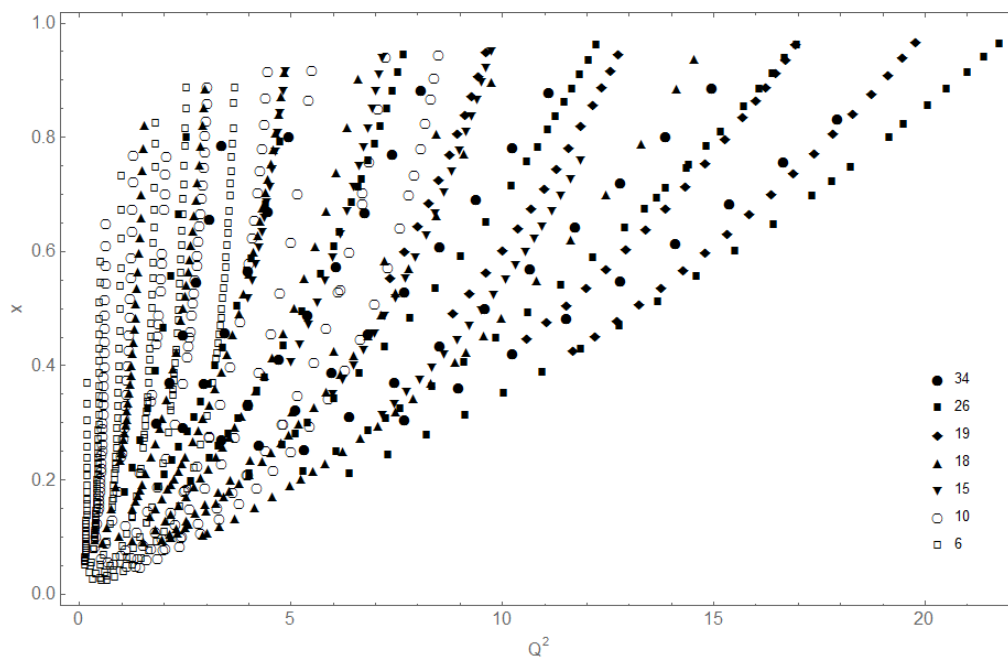
BAB 4

HASIL DAN DISKUSI

4.1 Titik Pemilihan Fungsi Struktur

Fungsi struktur proton F_1 dan F_2 diperoleh dari titik x dan Q^2 pada sudut $\theta = 6^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 19^\circ, 26^\circ$, dan 34° . Pada penentuan fungsi struktur proton ini dipilih nilai x dengan besar kesalahan 3% pada dua sudut berbeda. Sudut dengan jumlah data lebih banyak digunakan untuk melakukan interpolasi Q^2 .

Sebaran semua titik x terhadap Q^2 dari data disajikan pada Gambar 4.1. Terlihat sebaran titik yang memungkinkan terletak pada nilai x kecil. Untuk nilai x mendekati 1.0 sulit ditemukan titik untuk memperoleh fungsi struktur. Sebaran nilai x dan Q^2 dari keseluruhan sudut terangkum pada Tabel 4.1.



Gambar 4.1: Sebaran titik x terhadap Q^2 dari data yang digunakan.

Tabel 4.1: Sebaran semua nilai x dan Q^2 pada setiap sudut.

| θ | x | Q^2 (GeV ²) |
|----------|-------------------|----------------------------|
| 34° | $0.25 < x < 0.89$ | $1.84 < Q^2 < 17.96$ |
| 26° | $0.17 < x < 0.97$ | $1.00 < Q^2 < 21.78$ |
| 19° | $0.42 < x < 0.97$ | $7.36 < Q^2 < 19.79$ |
| 18° | $0.09 < x < 0.94$ | $0.55 < Q^2 < 14.55$ |
| 15° | $0.31 < x < 0.96$ | $4.00 < Q^2 < 11.88$ |
| 10° | $0.04 < x < 0.95$ | $0.36 < Q^2 < 8.51$ |
| 6° | $0.02 < x < 0.89$ | $0.14 < Q^2 < 3.69$ |

4.2 Penentuan Fungsi Struktur Proton

Fungsi struktur proton terdapat pada persamaan penampang lintang *deep inelastic scattering* $e^- + p \rightarrow e^- + X$. Penulis dalam memperoleh nilai W_1 dan W_2 menggunakan bentuk penampang lintang DIS yang dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_3} = \sigma_{\text{Mott}} \left[2W_1 \tan^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \right], \quad (4.1)$$

dengan

$$\sigma_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4.2)$$

merupakan penampang lintang Mott. Bagian ini adalah bentuk penampang lintang proses hamburan elastis [16].

Dari bentuk penampang lintang DIS diperoleh nilai W_1 dan W_2 dari dua sudut berbeda dengan nilai x dan Q^2 sama. Nilai fungsi W_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$W_1 = \frac{CC(\theta_1)/\sigma_{\text{Mott}}(\theta_1) - CC(\theta_2)/\sigma_{\text{Mott}}(\theta_2)}{2(\tan^2 \frac{\theta_1}{2} - \tan^2 \frac{\theta_2}{2})}, \quad (4.3)$$

dimana telah digunakan bentuk $CC(\theta) = \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_3}$ sebagai penyederhanaan. Pada perhitungan digunakan $\theta_1 > \theta_2$ untuk menjamin nilai positif pada bagian sudut. Bentuk W_1 ini kemudian disubstitusi pada persamaan (4.1) untuk memperoleh nilai W_2 .

Kesalahan relatif untuk W_1 dan W_2 diperoleh dari fungsi penjalaran kesalahan [5]. Persamaan kesalahan untuk kedua fungsi tersebut masing-masing

dapat dituliskan sebagai

$$\delta W_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{CCU(\theta_1)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_1)} - \frac{CC(\theta_1)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_1)}\right)^2}{\left(2(\tan^2 \frac{\theta_1}{2} - \tan^2 \frac{\theta_2}{2})\right)^2} + \frac{\left(\frac{CCU(\theta_2)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_2)} - \frac{CC(\theta_2)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_2)}\right)^2}{\left(2(\tan^2 \frac{\theta_1}{2} - \tan^2 \frac{\theta_2}{2})\right)^2}}, \quad (4.4)$$

$$\delta W_2 = \sqrt{\left(\frac{CCU(\theta_1)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_1)} - \frac{CC(\theta_1)}{\sigma_{\text{Mott}}(\theta_1)}\right)^2 + \left(2 \tan^2 \frac{\theta_1}{2}\right)^2 \delta W_1^2} \quad (4.5)$$

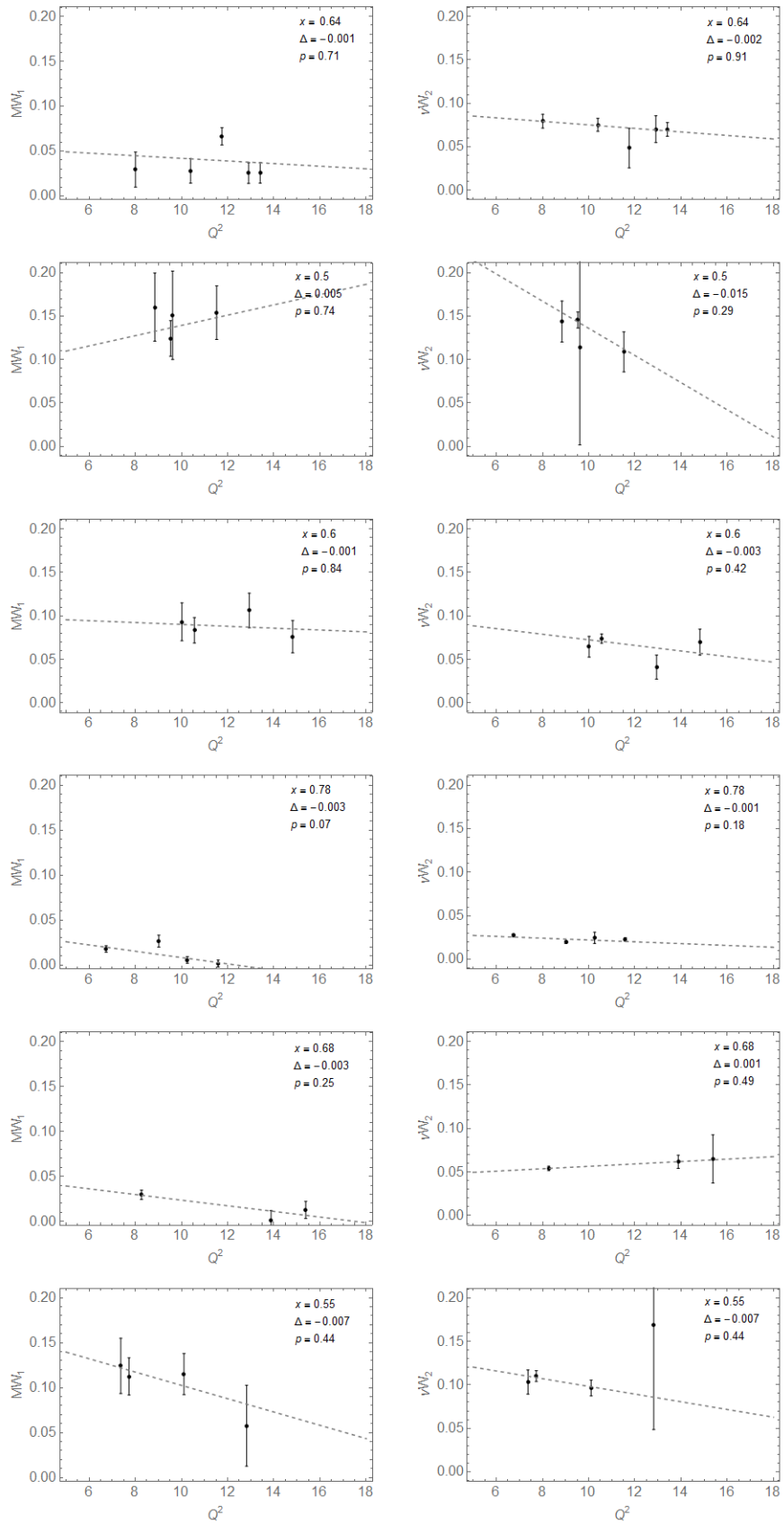
Nilai ini kemudian dikalikan masing-masing dengan massa proton M_p serta energi elektron hilang ν untuk mendapatkan fungsi struktur proton F_1 dan F_2 prediksi dari Bjorken [6]. Hal ini juga dilakukan untuk memperoleh besar kesalahan dari fungsi struktur proton δF_1 dan δF_2 .

4.3 Prediksi Model Quark Parton

Adanya penyusun fundamental dari proton diprediksikan oleh model quark parton. Eksperimen DIS berperan dalam mengetahui terpenuhinya prediksi tersebut. Pada penelitian ini diperlihatkan fenomena Bjorken *scaling* dan hubungan Callan-Gross dari penentuan struktur fungsi proton.

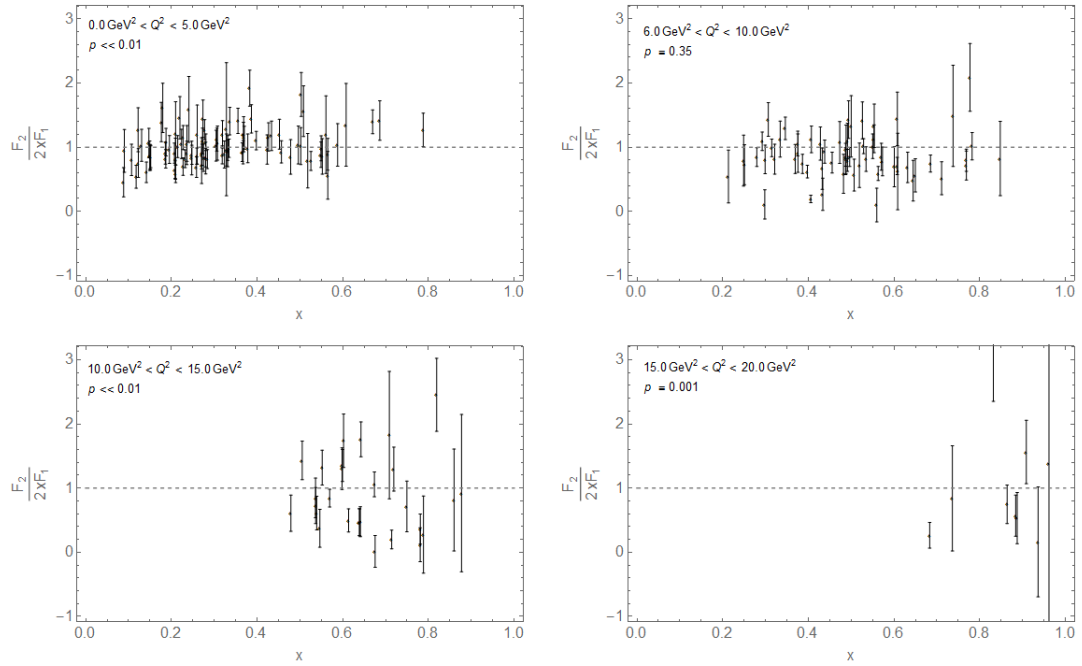
Fenomena Bjorken *scaling* diperoleh dengan memilih fungsi struktur proton dari suatu nilai skala tertentu dengan energi transfer Q^2 cukup besar. Fungsi struktur F_1 dan F_2 beserta besar kesalahannya kemudian diplot terhadap energi transfer Q^2 . Kuantitas tersebut lalu dicocokkan menggunakan pencocokan linear dengan fungsi pada paket aplikasi Mathematica. Parameter pencocokan dapat dilihat untuk mengetahui besar kemiringan serta nilai *p-value*.

Gambar 4.2 memperlihatkan fenomena Bjorken *scaling*. Dipilih beberapa nilai skala x sesuai kriteria terjadinya *scaling* pada energi tinggi. Pada gambar disertakan pula nilai *p-value*. Nilai *p-value* yang lebih dari batas interval menunjukkan bahwa tidak dapat ditolaknya prediksi *scaling*.



Gambar 4.2: *Scaling* yang terjadi pada beberapa nilai x .

Hubungan Callan-Gross juga dapat diperlihatkan dari perolehan fungsi struktur. Gambar 4.3 menyajikan empat buah keterpenuhannya beserta dengan kriteria energi transfer. Besar nilai p -value didapatkan dengan analisa χ^2 . Kecilnya nilai p -value memperlihatkan bahwa meskipun hasil plot sesuai dengan prediksi, namun proton tidaklah hanya berupa tiga buah quark bebas.

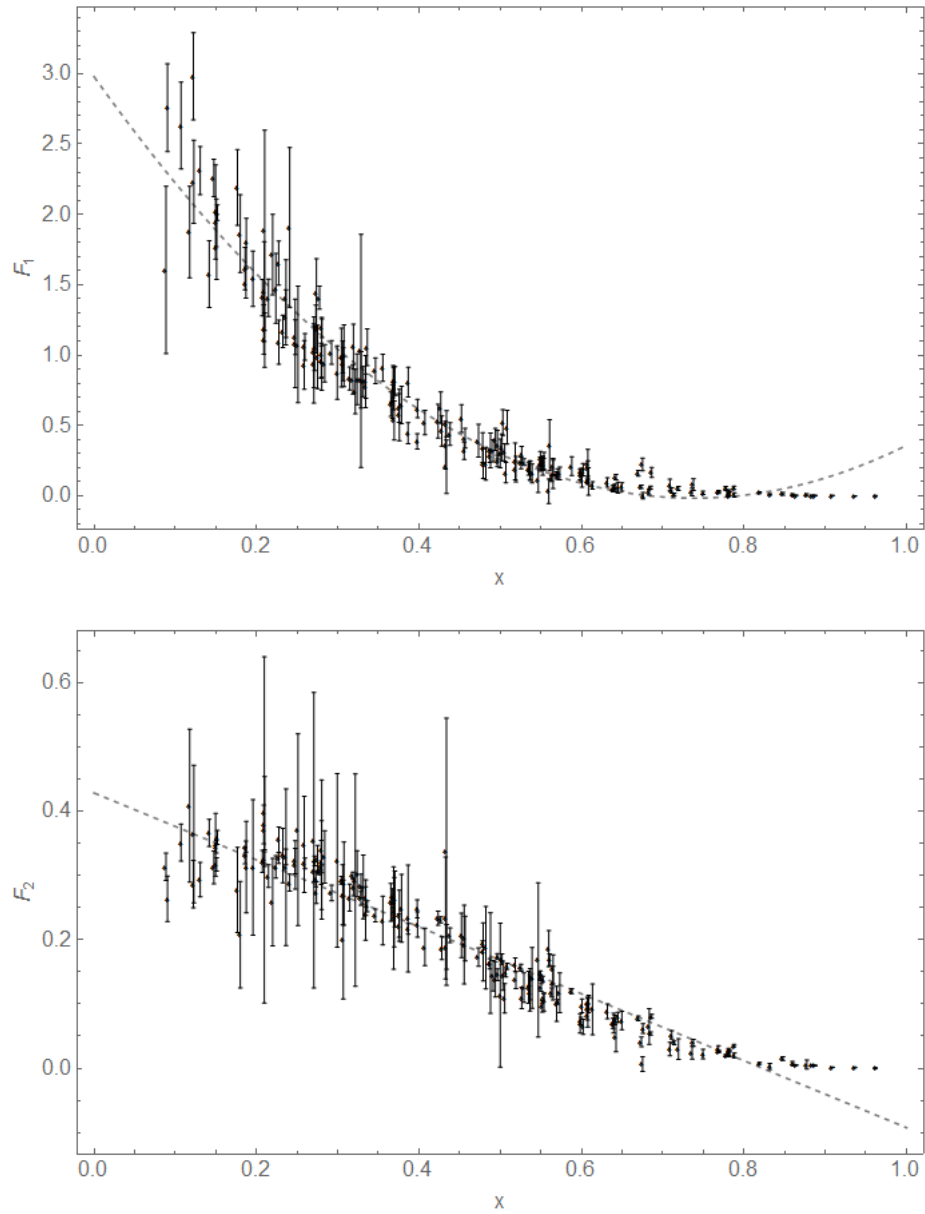


Gambar 4.3: Fungsi struktur proton tersebar pada tersebar pada titik Callan-Gross untuk empat rentang energi transfer

4.4 Fungsi Struktur Proton F_1 dan F_2

Hasil penentuan fungsi struktur proton dapat dilihat pada Tabel 4.2. Skala x , fraksi momentum proton, dan Q^2 (GeV^2) untuk setiap fungsi struktur F_1 dan F_2 juga ditampilkan. Kesalahan dari setiap fungsi struktur diperoleh dengan mencari kesalahan penjalaran dari setiap variabel.

Fungsi struktur proton F_1 dan F_2 sebagai fungsi x ditunjukkan pada Gambar 4.4. Hasil tersebut memperlihatkan sebaran fungsi struktur proton pada setiap fraksi momentum proton yang dibawa oleh penyusunnya. Besar kesalahan menunjukkan kesalahan sistematik dan statistik hasil perhitungan. Terlihat pula bahwa untuk nilai $x < 0.1$ tidak dapat ditunjukkan oleh data.



Gambar 4.4: Fungsi struktur proton F_1 dan F_2 sebagai fungsi x

Melakukan pencarian persamaan dari gambar tersebut didapatkan bentuk fungsi struktur proton

$$F_1(x) = 2.9781 - 8.1061x + 5.4873x^2, \quad (4.6)$$

$$F_2(x) = 0.4281 - 0.5204x. \quad (4.7)$$

Tidak didapatkannya data untuk nilai x kecil mengindikasikan perlunya peningkatan energi. Hal tersebut telah dilakukan pada penelitian terbaru [18].

Tabel 4.2: Perolehan fungsi struktur proton F_1 dan F_2 .

| x | Q^2 | F_1 | δF_1 | F_2 | δF_2 |
|------|----------|----------|--------------|----------|--------------|
| 0.09 | 0.652963 | 1.60638 | 0.594305 | 0.313336 | 0.021166 |
| 0.09 | 0.550614 | 2.75757 | 0.312254 | 0.263611 | 0.035506 |
| 0.11 | 1.8226 | 2.63116 | 0.308632 | 0.350935 | 0.028726 |
| 0.12 | 2.51266 | 1.87437 | 0.325837 | 0.408631 | 0.118861 |
| 0.12 | 2.83695 | 2.98132 | 0.309142 | 0.286435 | 0.036843 |
| 0.12 | 2.60379 | 2.23192 | 0.296064 | 0.364337 | 0.106973 |
| 0.13 | 3.33673 | 2.31156 | 0.170353 | 0.293491 | 0.026756 |
| 0.14 | 2.17973 | 1.57488 | 0.23728 | 0.36612 | 0.02126 |
| 0.15 | 2.63084 | 2.2583 | 0.133166 | 0.312403 | 0.025343 |
| 0.15 | 3.2632 | 2.01614 | 0.334399 | 0.347552 | 0.048843 |
| 0.15 | 1.73412 | 1.94034 | 0.168944 | 0.344547 | 0.009786 |
| 0.15 | 0.789943 | 1.76834 | 0.230314 | 0.317 | 0.010331 |
| 0.15 | 2.3788 | 2.0128 | 0.055015 | 0.35889 | 0.010895 |
| 0.18 | 1.09302 | 2.19084 | 0.268554 | 0.277378 | 0.066042 |
| 0.18 | 3.5672 | 1.86368 | 0.275914 | 0.207869 | 0.082657 |
| 0.19 | 1.86991 | 1.61517 | 0.151345 | 0.330699 | 0.012644 |
| 0.19 | 1.87969 | 1.50976 | 0.105832 | 0.344714 | 0.008571 |
| 0.19 | 1.8715 | 1.80042 | 0.172111 | 0.312816 | 0.071243 |
| 0.19 | 2.64148 | 1.54327 | 0.196859 | 0.312519 | 0.1054 |
| 0.21 | 3.97924 | 1.40889 | 0.130057 | 0.321856 | 0.017021 |
| 0.21 | 4.01166 | 1.18135 | 0.176065 | 0.379237 | 0.030068 |
| 0.21 | 4.02422 | 1.45154 | 0.353978 | 0.370574 | 0.269185 |
| 0.21 | 1.45354 | 1.88661 | 0.711831 | 0.32545 | 0.011303 |
| 0.21 | 4.02286 | 1.10677 | 0.193997 | 0.396908 | 0.056856 |
| 0.21 | 4.60927 | 1.40757 | 0.132121 | 0.299055 | 0.017604 |
| 0.22 | 3.05525 | 1.71404 | 0.286146 | 0.258322 | 0.068178 |
| 0.22 | 2.80368 | 1.474 | 0.247951 | 0.313319 | 0.017374 |
| 0.23 | 1.99213 | 1.65446 | 0.155962 | 0.326811 | 0.008394 |
| 0.23 | 3.37169 | 1.09249 | 0.156297 | 0.355293 | 0.01975 |
| 0.23 | 2.21054 | 1.16855 | 0.114661 | 0.330973 | 0.042423 |
| 0.24 | 2.08657 | 1.26814 | 0.196 | 0.328711 | 0.012098 |
| 0.24 | 3.0803 | 1.40184 | 0.275947 | 0.31276 | 0.12182 |
| 0.24 | 1.01241 | 1.9075 | 0.567783 | 0.288754 | 0.013383 |
| 0.25 | 1.01754 | 1.08379 | 0.314793 | 0.322353 | 0.019636 |
| 0.25 | 4.55664 | 1.12655 | 0.123328 | 0.316284 | 0.037622 |
| 0.25 | 6.24029 | 1.07608 | 0.413578 | 0.371183 | 0.149105 |
| 0.26 | 3.31065 | 0.930232 | 0.173286 | 0.348303 | 0.074934 |
| 0.26 | 2.89342 | 1.05864 | 0.09458 | 0.318699 | 0.008153 |
| 0.27 | 3.37608 | 0.940801 | 0.281395 | 0.354677 | 0.229684 |
| 0.27 | 1.06158 | 1.0217 | 0.251315 | 0.305593 | 0.015256 |
| 0.27 | 1.55341 | 1.04913 | 0.158346 | 0.322525 | 0.00766 |
| 0.27 | 3.07871 | 1.18547 | 0.170712 | 0.29481 | 0.012373 |
| 0.27 | 3.678 | 1.44212 | 0.243364 | 0.273173 | 0.016999 |
| 0.27 | 3.09816 | 0.987638 | 0.225558 | 0.324968 | 0.021527 |
| 0.28 | 1.55715 | 1.4083 | 0.081934 | 0.306686 | 0.005697 |
| 0.28 | 4.97325 | 0.96105 | 0.124718 | 0.320115 | 0.034127 |
| 0.28 | 5.12191 | 0.954157 | 0.111147 | 0.315933 | 0.068951 |
| 0.28 | 3.52035 | 1.00944 | 0.258947 | 0.340168 | 0.108193 |
| 0.28 | 2.11531 | 1.19197 | 0.066089 | 0.310307 | 0.006354 |
| 0.28 | 2.56314 | 0.942557 | 0.132578 | 0.328591 | 0.040689 |
| 0.29 | 5.47131 | 1.01915 | 0.083711 | 0.272652 | 0.012022 |
| 0.3 | 5.42186 | 0.876498 | 0.190267 | 0.32339 | 0.134841 |
| 0.3 | 1.58824 | 0.983218 | 0.208653 | 0.292285 | 0.005958 |
| 0.31 | 3.7685 | 0.987093 | 0.114339 | 0.269939 | 0.046835 |
| 0.31 | 7.25647 | 0.935623 | 0.116247 | 0.20031 | 0.092374 |
| 0.31 | 2.71232 | 0.994779 | 0.219471 | 0.287384 | 0.064699 |
| 0.31 | 7.17602 | 0.83408 | 0.081479 | 0.265543 | 0.020906 |
| 0.32 | 1.60304 | 0.827506 | 0.104364 | 0.299312 | 0.005595 |
| 0.32 | 2.17467 | 1.06074 | 0.159505 | 0.281961 | 0.013753 |
| 0.32 | 5.12836 | 0.741261 | 0.157998 | 0.292658 | 0.165164 |
| 0.32 | 1.63735 | 0.829094 | 0.180209 | 0.302622 | 0.035858 |
| 0.33 | 2.18872 | 1.03032 | 0.82861 | 0.264169 | 0.010648 |
| 0.33 | 4.01415 | 0.82487 | 0.201373 | 0.283346 | 0.018429 |
| 0.33 | 3.99559 | 0.812407 | 0.107362 | 0.282132 | 0.049554 |
| 0.33 | 7.47042 | 0.812636 | 0.185053 | 0.240848 | 0.041479 |
| 0.33 | 2.87506 | 0.780154 | 0.086085 | 0.265321 | 0.027735 |
| 0.34 | 1.1673 | 1.05571 | 0.130399 | 0.251969 | 0.00839 |
| 0.35 | 5.18589 | 0.888537 | 0.091499 | 0.237565 | 0.009861 |
| 0.35 | 4.20875 | 0.911333 | 0.095962 | 0.229683 | 0.037841 |
| 0.36 | 3.05136 | 0.651754 | 0.086548 | 0.258045 | 0.029466 |

| x | Q^2 | F_1 | δF_1 | F_2 | δF_2 |
|------|---------|----------|--------------|----------|--------------|
| 0.37 | 2.15058 | 0.67099 | 0.118975 | 0.267004 | 0.012248 |
| 0.37 | 2.46655 | 0.812463 | 0.113487 | 0.250381 | 0.007037 |
| 0.37 | 2.97218 | 0.762523 | 0.150818 | 0.233686 | 0.079634 |
| 0.37 | 8.32039 | 0.536713 | 0.138751 | 0.242806 | 0.053892 |
| 0.37 | 2.15461 | 0.817071 | 0.101508 | 0.263438 | 0.043399 |
| 0.37 | 6.25602 | 0.624595 | 0.10179 | 0.22175 | 0.018078 |
| 0.38 | 8.05922 | 0.573807 | 0.182485 | 0.237289 | 0.039568 |
| 0.38 | 4.40043 | 0.646009 | 0.133671 | 0.248975 | 0.052652 |
| 0.39 | 5.98309 | 0.4463 | 0.074836 | 0.232943 | 0.08311 |
| 0.39 | 4.26721 | 0.808844 | 0.106035 | 0.216891 | 0.00833 |
| 0.4 | 8.35362 | 0.387444 | 0.053921 | 0.248124 | 0.01392 |
| 0.4 | 3.22766 | 0.620807 | 0.064813 | 0.223813 | 0.019744 |
| 0.4 | 8.90282 | 0.521603 | 0.08748 | 0.189022 | 0.029081 |
| 0.42 | 2.29692 | 0.531769 | 0.119998 | 0.233509 | 0.011098 |
| 0.43 | 2.314 | 0.628248 | 0.110373 | 0.231065 | 0.004628 |
| 0.43 | 6.74669 | 0.461073 | 0.107699 | 0.186714 | 0.017648 |
| 0.43 | 7.22914 | 0.360449 | 0.169122 | 0.233778 | 0.094738 |
| 0.43 | 4.84048 | 0.513108 | 0.092184 | 0.188886 | 0.034962 |
| 0.43 | 8.54812 | 0.207185 | 0.189951 | 0.336797 | 0.207745 |
| 0.44 | 5.23039 | 0.439753 | 0.079761 | 0.206903 | 0.011376 |
| 0.45 | 2.46241 | 0.550221 | 0.097679 | 0.20677 | 0.034549 |
| 0.45 | 6.83781 | 0.321253 | 0.062276 | 0.192468 | 0.06115 |
| 0.46 | 3.46755 | 0.409777 | 0.070323 | 0.201721 | 0.034737 |
| 0.47 | 5.43483 | 0.392686 | 0.116363 | 0.172839 | 0.014204 |
| 0.48 | 2.35195 | 0.343293 | 0.106537 | 0.193406 | 0.004685 |
| 0.48 | 12.7269 | 0.230291 | 0.105295 | 0.180921 | 0.045121 |
| 0.48 | 7.83157 | 0.228105 | 0.11646 | 0.187667 | 0.064052 |
| 0.49 | 7.23735 | 0.282959 | 0.045171 | 0.162534 | 0.00809 |
| 0.49 | 5.40173 | 0.323517 | 0.123701 | 0.163703 | 0.078235 |
| 0.5 | 8.84234 | 0.320547 | 0.078425 | 0.143738 | 0.023546 |
| 0.49 | 5.28052 | 0.401593 | 0.077593 | 0.138628 | 0.027492 |
| 0.5 | 2.36599 | 0.363295 | 0.10118 | 0.174114 | 0.004172 |
| 0.5 | 9.53123 | 0.248565 | 0.040801 | 0.145515 | 0.009129 |
| 0.5 | 9.61664 | 0.301718 | 0.101712 | 0.11382 | 0.112009 |
| 0.5 | 2.46871 | 0.344531 | 0.095086 | 0.16978 | 0.007984 |
| 0.5 | 3.72944 | 0.521695 | 0.091799 | 0.143986 | 0.022568 |
| 0.5 | 11.5258 | 0.308043 | 0.06165 | 0.108806 | 0.022967 |
| 0.51 | 7.00186 | 0.165436 | 0.071912 | 0.148039 | 0.005862 |
| 0.51 | 2.70987 | 0.487801 | 0.119861 | 0.158812 | 0.004618 |
| 0.52 | 4.00712 | 0.245673 | 0.130949 | 0.160986 | 0.01045 |
| 0.52 | 7.48269 | 0.190445 | 0.090909 | 0.137283 | 0.013312 |
| 0.53 | 3.90608 | 0.234371 | 0.041988 | 0.156492 | 0.005401 |
| 0.53 | 9.2346 | 0.295153 | 0.057241 | 0.109478 | 0.016669 |
| 0.53 | 7.69254 | 0.241043 | 0.023361 | 0.125438 | 0.023029 |
| 0.53 | 8.434 | 0.191848 | 0.043593 | 0.125838 | 0.024879 |
| 0.54 | 13.7729 | 0.183935 | 0.065944 | 0.116451 | 0.027386 |
| 0.54 | 11.997 | 0.177562 | 0.067391 | 0.130854 | 0.024438 |
| 0.54 | 11.3902 | 0.159342 | 0.066979 | 0.140643 | 0.047171 |
| 0.55 | 12.8188 | 0.115394 | 0.090042 | 0.16848 | 0.120004 |
| 0.55 | 4.10253 | 0.226498 | 0.049511 | 0.140836 | 0.004399 |
| 0.55 | 2.76321 | 0.264706 | 0.050322 | 0.147873 | 0.003617 |
| 0.55 | 5.8352 | 0.231789 | 0.04192 | 0.125592 | 0.005882 |
| 0.55 | 10.1078 | 0.230534 | 0.045697 | 0.096349 | 0.008977 |
| 0.55 | 3.45075 | 0.215312 | 0.068553 | 0.13863 | 0.004672 |
| 0.55 | 7.72802 | 0.225141 | 0.041178 | 0.110116 | 0.006257 |
| 0.55 | 7.36861 | 0.248633 | 0.061445 | 0.103157 | 0.013925 |
| 0.56 | 5.72057 | 0.033107 | 0.086967 | 0.186147 | 0.028048 |
| 0.56 | 2.40987 | 0.360419 | 0.181297 | 0.168931 | 0.009033 |
| 0.56 | 9.62687 | 0.123671 | 0.021877 | 0.11802 | 0.006994 |
| 0.56 | 4.00254 | 0.208603 | 0.056902 | 0.132474 | 0.026043 |
| 0.56 | 3.98711 | 0.153096 | 0.101137 | 0.153909 | 0.022661 |
| 0.57 | 10.6852 | 0.148665 | 0.022623 | 0.100313 | 0.027299 |
| 0.57 | 7.31267 | 0.154532 | 0.037332 | 0.103476 | 0.00353 |
| 0.57 | 6.07694 | 0.159701 | 0.044679 | 0.11755 | 0.030875 |
| 0.59 | 3.48705 | 0.211596 | 0.067138 | 0.120096 | 0.00376 |
| 0.6 | 14.8189 | 0.152012 | 0.037043 | 0.069803 | 0.014966 |
| 0.6 | 10.5616 | 0.166821 | 0.029431 | 0.073955 | 0.00533 |
| 0.6 | 7.70912 | 0.112885 | 0.050305 | 0.097208 | 0.010604 |
| 0.6 | 10.0191 | 0.186504 | 0.043704 | 0.06452 | 0.011896 |
| 0.61 | 8.54727 | 0.108114 | 0.019665 | 0.092834 | 0.017734 |

| x | Q^2 | F_1 | δF_1 | F_2 | δF_2 |
|------|---------|----------|--------------|----------|--------------|
| 0.61 | 6.02256 | 0.19511 | 0.055364 | 0.082179 | 0.018188 |
| 0.61 | 4.26609 | 0.224229 | 0.106705 | 0.100986 | 0.007655 |
| 0.61 | 5.60129 | 0.102318 | 0.097979 | 0.100056 | 0.013442 |
| 0.61 | 14.1006 | 0.074377 | 0.026551 | 0.091691 | 0.039431 |
| 0.63 | 6.16061 | 0.09624 | 0.032899 | 0.088472 | 0.011484 |
| 0.64 | 13.4108 | 0.051422 | 0.022772 | 0.06994 | 0.007912 |
| 0.64 | 12.9089 | 0.051292 | 0.023028 | 0.070305 | 0.015416 |
| 0.64 | 10.3951 | 0.05587 | 0.02729 | 0.075088 | 0.007439 |
| 0.64 | 11.7537 | 0.132964 | 0.019284 | 0.048515 | 0.022748 |
| 0.64 | 8.00877 | 0.059033 | 0.038924 | 0.079315 | 0.007926 |
| 0.65 | 9.63886 | 0.064285 | 0.029426 | 0.074258 | 0.014442 |
| 0.67 | 3.55752 | 0.161731 | 0.020263 | 0.077561 | 0.003731 |
| 0.67 | 13.3895 | 0.064882 | 0.01149 | 0.041263 | 0.007472 |
| 0.67 | 10.7056 | 0.222976 | 0.044675 | 0.006685 | 0.011436 |
| 0.68 | 13.882 | 0.001295 | 0.02262 | 0.061811 | 0.007559 |
| 0.68 | 15.3825 | 0.025241 | 0.019005 | 0.065006 | 0.027662 |
| 0.68 | 8.26756 | 0.058919 | 0.010167 | 0.054156 | 0.002433 |
| 0.69 | 4.4569 | 0.166641 | 0.035559 | 0.080755 | 0.003237 |
| 0.71 | 10.9998 | 0.077175 | 0.041771 | 0.029941 | 0.01042 |
| 0.71 | 6.60065 | 0.03782 | 0.018642 | 0.052004 | 0.006524 |
| 0.71 | 14.3533 | 0.011099 | 0.008067 | 0.039726 | 0.00282 |
| 0.72 | 12.8222 | 0.053633 | 0.013947 | 0.029736 | 0.016059 |
| 0.74 | 16.911 | 0.027625 | 0.026914 | 0.024186 | 0.009877 |
| 0.74 | 6.0921 | 0.080209 | 0.042336 | 0.039758 | 0.00543 |
| 0.75 | 14.4276 | 0.021103 | 0.011654 | 0.022174 | 0.007474 |
| 0.77 | 7.42832 | 0.032083 | 0.006813 | 0.030926 | 0.004453 |
| 0.77 | 8.75789 | 0.024122 | 0.007558 | 0.025901 | 0.001563 |
| 0.78 | 9.01603 | 0.052906 | 0.013204 | 0.01969 | 0.001603 |
| 0.78 | 11.5882 | 0.00336 | 0.007648 | 0.022557 | 0.001925 |
| 0.78 | 10.2567 | 0.011394 | 0.007438 | 0.024612 | 0.006414 |
| 0.78 | 6.73817 | 0.035571 | 0.007339 | 0.027364 | 0.00166 |
| 0.79 | 3.63653 | 0.057038 | 0.011521 | 3.54E-02 | 0.001629 |
| 0.79 | 13.3126 | 0.007027 | 0.015349 | 0.020106 | 0.003847 |
| 0.81 | 11.8824 | 0.023702 | 0.005435 | 0.007911 | 0.001353 |
| 0.83 | 17.9511 | 0.011961 | 0.004019 | 0.0028 | 0.004707 |
| 0.85 | 7.27286 | 0.014538 | 0.010176 | 0.014934 | 0.002858 |
| 0.85 | 11.4702 | 0.007331 | 0.007144 | 0.007737 | 0.002982 |
| 0.86 | 16.0026 | 0.004196 | 0.001674 | 0.004845 | 0.000549 |
| 0.88 | 11.1126 | 0.006247 | 0.008311 | 0.005948 | 0.006899 |
| 0.88 | 16.0917 | 0.003048 | 0.00171 | 0.004722 | 0.001016 |
| 0.87 | 16.2382 | 0.002568 | 0.001917 | 0.004282 | 0.000607 |
| 0.91 | 19.1339 | 0.002895 | 0.000911 | 0.001684 | 0.00036 |
| 0.94 | 16.7095 | 0.000244 | 0.001287 | 0.001407 | 0.000411 |
| 0.96 | 16.9451 | 0.000781 | 0.001568 | 0.000543 | 0.000509 |

Bahkan pada nilai x rendah tersebut dapat pula diperoleh kontribusi dari gaya lemah [19, 20]. Penggunaan energi tinggi tersebut telah menyertakan konsep QCD. Fraksi momentum proton pada skala kecil tersebut diketahui dibawa oleh gluon, partikel mediator pengikat tiga buah quark di dalam proton [21]. Kehadiran penyusun lain dari proton ini dapat diindikasikan dari *p-value* daerah energi tinggi pada hubungan Callan-Gross.

BAB 5

KESIMPULAN

Telah dilakukan penentuan fungsi struktur proton serta menunjukkan prediksi model quark - parton menggunakan data eksperimen *deep inelastic scattering*. Fungsi struktur didapatkan pada persamaan penampang lintang proses DIS dengan asumsi satu pertukaran foton. Data penampang lintang lalu diklasifikasikan menurut kriteria tertentu untuk mendapatkan fungsi struktur proton berupa $F_1(x)$ dan $F_2(x)$.

Fungsi struktur hasil pada penelitian kali ini menunjukkan fenomena *scaling*, tidak bergantungnya fungsi struktur terhadap pertukaran energi transfer pada skala tinggi. Sementara hubungan Callan-Gross memperlihatkan sesuai prediksi penyusun proton berupa partikel spin-1/2 yang disebut quark. Kecilnya nilai *p-value* dari uji χ^2 mengindikasikan adanya penyusun lain dari proton.

LAMPIRAN A

Satuan

Penelitian ini menggunakan sistem satuan alami dimana $\hbar = c = 1$. Pilihan tersebut membuat energi, massa, dan momentum berdimensi energi (GeV). Dimensi panjang dan luas akhirnya masing-masing menjadi GeV^{-1} dan GeV^{-2} . Konversi berikut dilakukan untuk mengembalikan ke satuan yang ingin diketahui [5]

$$\hbar = 6.58211928(15) \times 10^{-25} \text{ GeV s}, \quad (\text{A.1})$$

$$c = 299792458 \text{ m s}^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

$$(\hbar c)^2 = 0.389379338(17) \text{ GeV}^2 \text{ mbarn}, \quad (\text{A.3})$$

dengan

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (\text{A.4})$$

Satuan barn digunakan pada perolehan penampang lintang hamburan.

Deskripsi kinematika digunakan bentuk momentum-empat contravariant dan covariant

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z), \quad p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z) \quad (\text{A.5})$$

serta metrik tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

dimana diperoleh kuantitas invariant Lorentz

$$p^\mu p_\mu = p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (\text{A.7})$$

LAMPIRAN B

Mekanika Kuantum Relativistik

Hamiltonian persamaan Dirac adalah [16]

$$\hat{H}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi, \quad (\text{B.1})$$

dan memenuhi hubungan relativistik energi-momentum

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (\text{B.2})$$

Representasi Dirac-Pauli memberikan bentuk matriks

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

dimana I adalah matriks satuan 2×2 dan σ_i adalah matriks Pauli. Hal ini membuat persamaan Dirac dapat dituliskan

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (\text{B.4})$$

dengan notasi Feynman *slash* $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial$ serta empat matriks- γ Dirac

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3). \quad (\text{B.5})$$

Matriks- γ memenuhi hubungan antikomutasi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.6})$$

Solusi partikel bebas gelombang bidangnya memenuhi

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{p})e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \quad (\text{B.7})$$

dimana u adalah spinor Dirac. Untuk kasus antipartikel digunakan notasi v . Solusinya untuk partikel bebas adalah [10]

$$u^{(s)} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

dengan $s = 1, 2$ dimana

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Diperoleh hubungan kelengkapan [1]

$$\sum_{s=1}^2 u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mI) = \not{p} + m, \quad (\text{B.10})$$

$$\sum_{s=1}^2 v^{(s)} \bar{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mI) = \not{p} - m. \quad (\text{B.11})$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press (2013).
- [2] E. Perez and E. Rizvi, Rep. Prog. Phys. **76** (2013).
- [3] A. De Roeck dan R.S. Thorne, Progress in Particle and Nuclear Physics **66** (2011).
- [4] R.P. Feynman, Physical Review Letters **23** (1969).
- [5] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), Chinese Physics C**38**, 090001 (2014).
- [6] T. Cheng dan L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford Science Publications (1982).
- [7] J.D. Bjorken, Physical Review **179** (1969).
- [8] C. G. Callan dan D.J. Gross, Physical Review Letters **22** (1969).
- [9] M. Gell-Mann, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961).
- [10] W. Greiner, E. Stein, dan S. Schramm, *Quantum Chromodynamics*, Springer (2007).
- [11] G. Miller et al., Physical Rev. D **5**, 528 (1972).
- [12] E. D. Bloom et. al., Phys. Rev. Letters **23**, 930 (1969).
- [13] E.M. Riordan et al., SLAC-PUB-1634, (1975).
- [14] R.E. Taylor, SLAC-PUB-1729, (1976).
- [15] P.C. Gregory, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences, A Comparative Approach with MathematicaTM Support*, Cambridge University Press (2005).

- [16] F. Halzen dan A.D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, Inc. (1984).
- [17] D.J. Griffith, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc. (1987).
- [18] K. Muller, *Measurement of the Proton Structure Function F_2 at Low Bjorken x at H1 Experiment*, Zurich, (1994).
- [19] F.D Aaron et.al. Physics Letter B **665**, 139-146 (2008).
- [20] F.D Aaron et al., Eur. Phys. J. C. **71**, 1579 (2011).
- [21] A.D. Martin, W.J. Stirling, dan R.G. Roberts, Physical Review D **50**, 11 (1994).