Skripsi Fisika

SOLUSI VAKUM PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN UNTUK BENDA SIMETRI AKSIAL STASIONER MENGGUNAKAN PERSAMAAN ERNST

ALDYTIA GEMA SUKMA

H211 09 281

JURUSAN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2016

SOLUSI VAKUM PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN UNTUK BENDA SIMETRI AKSIAL STASIONER MENGGUNAKAN PERSAMAAN ERNST

SKRIPSI

Diajukan Untuk Melengkapi Tugas Akhir dan Memenuhi Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Oleh :

ALDYTIA GEMA SUKMA

H211 09 281

JURUSAN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2016

LEMBAR PENGESAHAN

Judul : **SOLUSI VAKUM PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN UNTUK BENDA SIMETRI AKSIAL STASIONER MENGGUNAKAN PERSAMAAN ERNST**

Nama : **ALDYTIA GEMA SUKMA**

Stambuk : **H211 09 281**

Makassar, 5 September 2016

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. Bansawang BJ, M.Si	**Dr. Tasrief Surungan, M.Sc**
NIP: 196312061994121001	**NIP: 196308301989032001**

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini merupakan karya orisinal saya dan sepanjangg pengetahuan saya tidak memuat bahan yang pernah dipublikasikan atau telah ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau lembaga pendidikan tinggi lainnya di manapun; kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Saya juga menyatakan bahwa skripsi ini merupakan hasil kerja saya sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Penulis

Aldytia Gema Sukma

SARI BACAAN

Abstrak. Telah diperoleh solusi vakum persamaan medan gravitasi Einstein simetri aksial stasioner. Solusi ini diperoleh dengan penelusuran tensor Ricci dari metric Lewis-Papapetrou. Persamaan yang diperoleh selanjutnya diselesaikan menggunakan metode Ernst dengan potensial Ernst orde pertama sehingga didapatkan metrik Kerr. Sebagai pelengkap, disajikan pula metrik Kerr dalam koordinat Boyer-Lindquist, persamaan geodesik dan gambaran horison peristiwa dalam kasus lubanghitam Kerr untuk $m > a$.

Kata Kunci: *medan gravitasi Einstein, persamaan Ernst, simetri aksial stasioner, geodesik*.

ABSTRACT

We presented the stationary axial symmetry solution of Einstein's vacuum gravitational field equations. This solution is obtained by tracking Ricci tensor of Lewis-Papapetrou metric. The obtained equation solved using the Ernst equation with first order Ernst potential to get the Kerr metric. As a complement, we also present Kerr metric in Boyer-Lindquist coordinates, the geodesic equation and the display of event horizon for Kerr blackhole with $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{a}$.

Keywords: *Einstein's gravitational field, Ernst equation, axial simetry stationary geodesic.*

KATA PENGANTAR

Segala puji, hormat, kuasa dan kemuliaan bagi kausa prima penulis yakni, יהוה, yang di dalam Yesus Kristus dengan penuh kasih memberikan hikmat dan kekuatan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada: Nur Salam, ayah paling hebat se-semesta, Johanna Walangitan, ibu paling kuat se-jagat, dan Clara Axselia adik paling cantik se-dunia, atas dukungan dan doa yang diberikan. Selain itu penulis juga mengucapkan terima kasih kepada:

1) **Drs. Bansawang BJ, M.Si** selaku pembimbing utama dan **Dr. Tasrief Surungan, M.Sc** selaku pembimbing pertama. Terima Kasih atas bimbingan, diskusi, perhatian, dan kesabarannya kepada penulis selama ini.

2) Dosen-dosen penguji ujian akhir saya yakni, **Dr. Nurlaela Rauf, M.Sc**, **Prof. Dahlang Tahir, M.Si, Ph.D**, dan **Dr. Arifin, M.T**. Terima Kasih atas waktu yang diluangkan dalam mendukung penyelesaian tugas akhir ini.

3) Seluru dosen-dosen dan staff fakultas MIPA Universitas Hasanuddin. Terima Kasih atas ilmu, didikan dan bantuan administrasinya.

4) Teman-teman kelompok meja kotak dalam lingkup fakultas MIPA UNHAS, ah agaknya nama-nama kalian tidak perlu ditulis di sini, biarlah terekam dalam adukan frekuensi alam semesta, bukan untuk

hilang, tetapi sebagai misteri untuk dicari, karena keinginan belajar yang kuat timbul dari rasa penasaran memecahkan misteri. Terima kasih atas diskusi fisika (terutama fisika teori), matematika, biologi, kimia, kesehatan, ekonomi, politik, sosial, budaya, bahasa, agama, hukum, olahraga, dan wanita.

5) Kakak-kakak, saudara-saudari dan adik-adik yang namanya terekam dalam arsip warga KM FMIPA UNHAS. Demi menghemat halaman penulisan, tak ada yang namanya diutamakan untuk ditulis di sini, karena kalian semua adalah ter-utama. Terima kasih atas tambahan plot cerita dalam kehidupan penulis.

6) Dan kepada yang terdahulu, sekarang dan nantinya terdekat dengan penulis. Terima kasih senantiasa menjadi plot utama pemberi semangat dalam kehidupan penulis kemarin, saat ini, esok selamanya kasih.

Penulis menyadari bahwasanya skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran amat penulis harapkan demi kemajuan penulis dan kemajuan ilmu pengetahuan.

Makassar, Agustus 2016

Aldytia Gema Sukma

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL……………………………………………………….		i
LEMBAR PENGESAHAN……………………………………………………..		ii
PERNYATAAN……………………………………………………………		iii
SARI BACAAN……………………………………………………………		iv
ABSTRACT……………………………………………………………………..		v
KATA PENGANTAR……………………………………………………..		vi
DAFTAR ISI…………………………………………………………….		viii
DAFTAR GAMBAR………………………………………………………		x
BAB 1	**PENDAHULUAN**	**1**
	1.1. Latar Belakang………………………………………………....	1
	1.2. Rumusan Masalah...	4
	1.3. Tujuan Penelitian...…	4
BAB 2	**MEDAN GRAVITASI**	**5**
	2.1. Metrik Umum…………………………………………………..	6
	2.2. Geodesik..	9
	2.3. Persamaan Medan Einstein...	9
	2.4. Medan Vakum…………………………………………………	10
BAB 3	**RUANGWAKTU SIMETRI AKSIAL STASIONER**	**12**
	3.1. Metodologi……………………………………………………..	12
	3.2. Metrik Lewis-Papapetrou………………………………………	13
	3.3. Persamaan Medan Vakum Papapetrou…………………………	18

	3.4.	Persamaan Ernst………………………………...…………...	19
	3.5.	Anzats Papapetrou dalam potensial Ernst…………..…...........	22
	3.6.	Solusi Ernst..	24
BAB 4	**METRIK KERR**		**28**
	4.1.	Geodesik metrik Kerr…………………………………………..	31
	4.2.	Lubanghitam Kerr...	37
BAB 5	**KESIMPULAN DAN SARAN**		**41**
	5.1.	Kesimpulan..	41
	5.2.	Saran..	42
DAFTAR ACUAN			**44**
LAMPIRAN			

DAFTAR GAMBAR

3.1 Bagan alir penelitian 12

4.1 Batas-batas permukaan horison dan singularitas lubanghitam Kerr untuk $m > a$ 39

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Rentang tahun 1905 - 1916 merupakan tahun-tahun kemenangan bagi teori gravitasi dalam dunia fisika modern, ditandai dengan hadirnya teori relativitas khusus yang dikemukakan oleh Albert Einstein pada tahun 1905. Teori tersebut berdasar pada dua prinsip yakni: pertama, *hukum-hukum fisika tetap bentuknya pada semua acuan pengamat yang tidak dipercepat*; kedua, *kecepatan cahaya di ruang hampa tidak bergantung pada pergerakan sumber cahaya maupun pergerakan pengamat*[1]. Kemudian, pada tahun 1911 Albert Einstein mengemukakan prinsip kesetaraan massa inersia dan massa gravitasi. Prinsip tersebut menyebabkan lahirnya teori relativitas umum di tahun 1915 sebagai generalisasi dari teori relativitas khusus[1]. Teori relativitas umum dibangun berdasarkan dua prinsip yakni: pertama, *percobaan di daerah lokal tidak dapat membedakan efek medan gravitasi atau percepatan setara;* kedua, *hukum-hukum fisika tetap bentuknya terhadap segala bentuk perubahan acuan pengamat*[2].

Dampak teori relativitas umum adalah pergeseran persepsi ruangwaktu absolut dikarenakan adanya jalinan antara kehadiran sebaran massa dengan ruangwaktu yang melengkung. Jalinan antara keduanya dinyatakan dalam persamaan medan Einstein[1]. Solusi eksak pertama dari persamaan medan Einstein berhasil ditemukan oleh Karl Schwarzschild dengan tinjauan kasus benda statik simetri bola [3,4]. Hasil yang didapatkan oleh Schwarzschild merupakan solusi satu-satunya yang dapat menggambarkan solusi vakum medan gravitasi Einstein di sekitar bola statik[5], namun tidak untuk medan gravitasi simetri bola yang berotasi seperti kebanyakan perilaku dari benda-benda langit. Bola berotasi mestinya tidak dapat mempertahankan bentuk simetri bolanya, dikarenakan adanya pemampatan pada sumbu rotasi akibat pengaruh momentum sudut maksimal pada daerah ekuatornya[6].

Pada tahun 1917, Hermann Weyl memulai investigasi terhadap solusi vakum dari persamaan medan Einstein untuk benda simetri aksial statik, dengan mengajukan bentuk kanonik dari metrik simetri aksial statik menggunakan koordinat silinder[6]. Kemudian, pada tahun 1931 Lewis memperluas metrik Weyl dengan membuat benda tinjauan Weyl berotasi stasioner. Bentuk metrik hasil perluasan tersebut dinamakan metrik Lewis, yang mana solusinya mencakup jenis sumber medan silinder berotasi[7]. Solusi kasus simetri aksial stasioner lainnya ditemukan oleh Achilles Papapetrou pada tahun 1953 melalui transformasinya pada metrik Lewis. Papapetrou menyusun metriknya dengan menghubungkan ansatz-ansatz (fungsi yang belum diketahui) metrik Lewis dengan tiga ansatz Papapetrou. Solusi persamaan medannya menghasilkan parameter rotasi dengan total massa nol yang menjadikannya solusi tanpa makna fisis[8]. Pada tahun 1954 Alexei Petrov melakukan pengklasifikasian terhadap solusi vakum persaman medan Einstein berdasarkan karakteristik tensor kelengkungannya. Hasil klasifikasi Petrov membuka jalan terhadap terselesaikannya solusi vakum persamaan medan Einstein untuk kasus bola berotasi[9]. Adalah Roy Patrick Kerr yang menemukan solusi vakum secara eksak dari persamaan medan Einstein untuk benda berotasi pada tahun 1963, hampir setengah abad setelah Einstein merumuskan persamaan medan gravitasinya. Kerr menyusun metriknya berdasarkan klasifikasi Petrov tipe-D yang solusinya mencakup parameter massa dan parameter rotasi. Hasil yang ditemukan oleh Kerr merupakan solusi yang tepat untuk kasus natural dari bola berotasi[10]. Pada tahun 1967 Frederick J. Ernst menemukan formulasi baru untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein dari metrik Papapetrou, yang mana salah satu solusinya merupakan solusi Kerr[11].

Pada tahun 2008 Matt Visser memberikan pengenalan singkat mengenai ruangwaktu Kerr berdasarkan pada metrik Kerr dalam koordinat Kerr (koordinat original dari metrik Kerr)[12]. Kemudian, pada tahun 2015 Heinicke dan Hehl mempublikasikan penelusuran solusi persamaan medan Einstein yang salah satunya merupakan solusi vakum untuk sumber gravitasi simetri aksial stasioner dengan jalan penelusuran tensor Einstein campuran metrik Papapetrou[13].

Penelitian yang dilakukan ini merupakan penelusuran kembali solusi vakum persamaan medan Einstein simetri aksial stasioner. Pencarian solusi dilakukan dengan memilih jalan penelusuran tensor Ricci dari metrik Lewis sampai kepada tensor Ricci dari metrik Papapetrou, untuk kemudian diselesaikan persamaan medannya dengan menggunakan persamaan Ernst.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini merupakan kajian teoretik yang berupaya menelusuri kembali solusi vakum persamaan medan gravitasi Einstein simetri aksial stasioner dengan menggunakan persamaan Ernst melalui penelusuran tensor Ricci dari metrik Lewis-Papapetrou. Dalam penelitian ini juga ditentukan bentuk persamaan geodesik dari partikel uji di sekitar ekuator sumber medan berotasi dan penerapan solusi vakum terhadap kasus lubanghitam berotasi.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk;

1. Menelusuri solusi vakum dari persamaan medan Einstein untuk kasus benda simetri aksial stasioner menggunakan persamaan Ernst,
2. Menentukan rumusan persamaan geodesik partikel uji di sekitar ekuator sumber medan berotasi,
3. Memperoleh gambaran horison peristiwa pada kasus lubanghitam berotasi.

BAB 2

MEDAN GRAVITASI

Sebelum teori Einstein tentang gravitasi dicetuskan, terlebih dahulu dikenal teori gravitasi Newton. Teori tersebut menjelaskan dengan presisi tentang gaya gravitasi dari interaksi dua pusat massa. Newton mengungkapkan dalam hukum gravitasinya, bahwa gaya gravitasi yang dialami oleh suatu benda terhadap pusat massa yang mempengaruhinya dipengaruhi oleh jarak dan massa. Ungkapan tersebut tidak memperhatikan pengaruh dari variabel waktu, yang mana bila pusat massa berubah maka benda yang berada dalam pengaruh medannya merasakan perubahan seketika. Konsekuensinya untuk dua pusat massa yang terpisah sangat jauh adalah adanya efek fisis yang bergerak melebihi kecepatan cahaya. Konsekuensi tersebut bertolak belakang dengan teori relativitas khusus yang menyatakan bahwa kelajuan tertinggi di dalam ruangwaktu adalah kelajuan cahaya. Dapat disimpulkan bahwa hukum Newton merupakan kasus khusus, karena tidak akurat untuk kasus kecepatan tinggi dan interaksi benda bermassa besar. Untuk itu Einstein memperluas teori relativitas khusus menjadi teori relativitas umum yang mana teori gravitasi Newton tercakup[14].

Sesuai dengan asas kovariansi dalam teori relativitas umum, hukum-hukum fisika tidak berubah terhadap segala bentuk transformasi koordinat. Sifat kovarian tersebut yang kemudian membuat persamaan-persamaan fisika pada relativitas umum ditulis dalam bentuk Tensor, yang mana tensor merupakan generalisasi dari vektor seperti halnya vektor merupakan generalisasi dari skalar[2].

2.1 Metrik umum

Menurut teori relativitas khusus ruangwaktu dipengaruhi oleh pemilihan kerangka acuan, yang berarti ruangwaktu tidaklah mutlak. Misalkan pengamat dalam kerangka acuan yang bergerak serempak bersama suatu peristiwa secara paralel dengan kelajuan konstan sebesar v, akan mengukur selang waktu peristiwa tersebut sebesar $d\tau$. Bagi pengamat lain yang diam terhadap peristiwa tersebut, akan mengukur selang waktu sebesar

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}$$

dengan c merupakan kecepatan cahaya di ruang vakum. Dapat dilihat pada persamaan (2.1) bahwa pengamat diam terhadap peristiwa mengukur selang waktu yang lebih besar ($dt > d\tau$). Adanya selisi pengukuran selang waktu antara dua pengamat berbeda disebut sebagai efek pemuaian waktu[14]. Elemen jarak (garis) yang bersangkutan dengan persamaan (2.1) dapat dituliskan sebagai

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \tag{2.2}$$

yang mana persamaan tersebut merupakan elemen garis ruangwaktu Minkowski (ruang datar) dengan ds merupakan interval ruangwaktu dan dl^2 merupakan elemen garis ruang Euclid. Bagi teori relativitas koordinat suatu titik dalam ruangwaktu diwakili oleh (x^0, x^1, x^2, x^3) dengan x^0 merupakan komponen ct, yaitu komponen yang satuannya disesuaikan dengan komponen ruang x^1, x^2, x^3. Untuk seterusnya dalam skrpsi ini tanda $\sum$ untuk indeks berjalan dihilangkan dan dipilih $c = 1$. Kemudian, metrik ruangwaktu empat dimensi (2.2) dapat diperluas dalam sajian berikut.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(x^0)^2 + 2g_{01}x^0x^1 + 2g_{02}x^0x^0 + 2g_{03}x^0x^3 + g_{11}(x^0)^2 + 2g_{12}x^1x^2 \\ &\quad +2g_{13}x^1x^3 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{23}x^2x^3 + g_{33}(x^3)^2 \\ &= g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan $g_{\mu\nu}$ merupakan tensor metrik rank-kedua yang memerikan fungsi dari titik dalam ruangwaktu[14]. Tensor metrik memenuhi sifat simetri terhadap pertukaran indeks dan memenuhi hubungan $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \equiv I$, yang mana I merupakan matriks identitas. Tensor dengan indeks bawah disebut tensor kovarian sedangkan inversnya, yaitu tensor dengan indeks atas disebut tensor kontravarian. Vektor kovarian dan vektor kontravarian memenuhi hubungan $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$. Sebaliknya, $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$. Kemudian, diperkenalkan konvensi tensor metrik kovarian yang digunakan untuk ruang Minkowski dalam koordinat kartesian dan koordinat bola masing-masing sebagai berikut.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.4a}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \tag{2.4b}$$

Pergeseran paralel dari suatu vektor di ruangwaktu lengkung sangat dipengaruhi oleh lintasan. Jika suatu vektor bergerak sepanjang lintasan tertutup, tidak ada jaminan vektor tersebut akan berimpit dengan vektor awal. Jadi untuk ruang lengkung diperkenalkan tensor kurvatur Riemann yang memerikan variasi dari vektor yang bergerak paralel dalam lintasan tertutup di ruangwaktu lengkung sebagai berikut.[14]

$$R_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\rho} - \Gamma^\rho_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \tag{2.5}$$

dengan $\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ dan Γ merupakan simbol Christoffel. Simbol Christoffel merupakan koefisien koneksi yang menghubungkan pergeseran paralel antara vektor yang terletak pada permukaan datar dengan proyeksinya pada permukaan lengkung. Simbol Christoffel didefinisikan sebagai

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \tag{2.6}$$

yang bersifat simetri terhadap pertukaran dua indeks bawah. Mengontraksikan indeks α dan β pada persamaan (2.5) memerikan tensor kurvatur Ricci yang merupakan tensor rank dua simetri sebagai berikut.

$$R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} = R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \tag{2.7}$$

yang memiliki sifat simetri terhadap pertukaran indeks bawah, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Kemudian, jika persamaan (2.7) dikalikan dengan tensor metrik $g^{\mu\nu}$ diperoleh

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R \tag{2.8}$$

yang disebut sebagai skalar Ricci[14].

2.2 Geodesik

Geodesik menggambarkan perilaku gerak suatu benda berdasarkan lintasan terpendek yang ditempuh benda tersebut di dalam ruangwaktu. Dalam ruangwaktu lengkung (ruang Riemann) geometrinya hanya diwakili oleh garis lengkung. Dengan demikian, lintasan terpendek yang ditempuh oleh sebuah benda diruang lengkung pastilah merupakan garis lengkung. Seperti tafsiran geodesik pada ruangwaktu Minkowski yang menyatakan gerak tanpa perubahan kecepatan, tafsiran geodesik pada ruangwaktu Riemann menyatakan gerak yang mengalami percepatan. Semua benda yang geraknya diperikan dalam persamaan geodesik ruangwaktu lengkung bergerak dengan percepatan yang sama dan tidak bergantung pada massa masing-masing benda[1]. Geodesik dalam ruangwaktu lengkung diberikan oleh[2]

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{2.9}$$

yang mana dalam limit medan lemah (asimtotik Minkowskian) tereduksi menjadi gerak dengan kecepatan konstan.

2.3 Persamaan Medan Einstein

Pada mekanika klasik telah ada teori yang mampu menggambarkan interaksi medan gravitasi dengan baik, yaitu teori gravitasi Newton. Dalam pengertian mekanika Newtonian diberikan hubungan antara potensial skalar dan kerapatan massa yang diperikan dalam bentuk persamaan Poisson

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \tag{2.10}$$

dengan G merupakan tetapan gravitasi Newton $(6{,}67 \times 10^{-8}$ dalam $\mathrm{c.g.s})$ dan ρ merupakan kerapatan massa sumber. Berdasarkan kesimpulan Einstein mengenai kesetaraan massa dan energi, generalisasi dari rapat materi-energi dalam relativitas khusus harus dirumuskan dalam bentuk tensor. Untuk itu Einstein merumuskan rapat materi-energi dalam bentuk tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$, yang berarti generalisasi dari persamaan (2.10) pada relativitas umum harus memuat tensor energi-momentum tersebut. Potensial gravitasi pada persamaan (2.10) harus mengandung tensor metrik $g_{\mu\nu}$ yang memiliki sifat: maksimal hanya memiliki turunan orde dua; dan linier dalam turunan orde dua. Karena itu Einstein mempostulasikan[14]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

yang memuat ungkapan gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruangwaktu. Hubungan antara tensor Einstein dengan tensor kurvatur Ricci diberikan oleh

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.12}$$

sehingga melalui persamaan (2.11) dan (2.12) dapat dilihat jalinan antara kehadiran massa-energi dan kelengkungan ruangwaktu[2].

2.4 Medan Vakum

Dalam relativitas umum, medan vakum berarti ketiadaan sebaran materi dan ketiadaan medan fisis kecuali medan gravitasi. Persamaan medan vakum Einstein merupakan persamaan medan yang memerikan pengaruh dari medan gravitasi terhadap setiap titik dalam koordinat di luar sumber medan. Artinya, solusi vakum dari persamaan medan Einstein merupakan solusi eksterior yang memerikan geometri ruangwaktu di luar sumber medan gravitasi yang mana $T_{\mu\nu} = 0$[15]. Berdasarkan persamaan (2.8), mengalikan persamaan (2.11) dan (2.12) dengan $g^{\mu\nu}$ diperoleh

$$G = R - 2R = -R = \kappa T \tag{2.13}$$

Hubungan persamaan (2.11), (2.12) dan (2.13) memberikan $R_{\mu\nu}$ untuk kasus vakum sebagai berikut

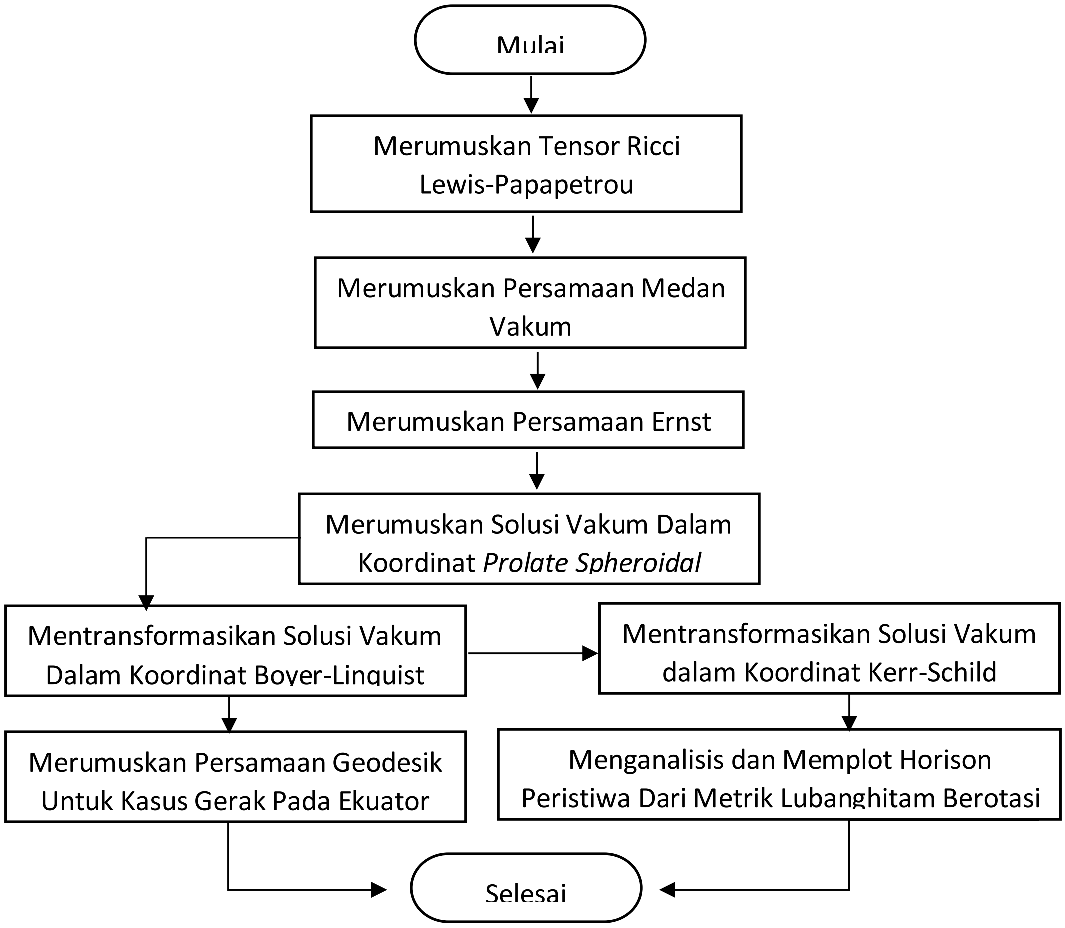
$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = 0 \tag{2.14}$$

BAB 3

RUANGWAKTU SIMETRI AKSIAL STASIONER

3.1 Metodologi

Tugas akhir ini meliputi kajian teoritis mengenai solusi vakum medan gravitasi simetri aksial stasioner, termasuk penentuan geodesik dan penerapan solusi terhadap kasus lubanghitam berotasi. Mengenai tahapan-tahapan dalam pengerjaan penelitian dapat dilihat pada gambar 3.1 di bawah ini



Gambar 3.1 Bagan Alir Penelitian

3.2 Metrik Lewis-Papapetrou

Metrik ruangwaktu simetri aksial stasioner merupakan metrik yang memerikan kondisi dari geometri ruangwaktu akibat pengaruh dari adanya pusat massa yang berotasi stasioner dan simetri terhadap salah satu sumbu rotasinya. Karakteristik dari ruang-waktu simetri aksial stasioner mengharuskan adanya koefisien metrik yang tidak bergantung terhadap t (waktu) dan ϕ (azimuth), dalam hal ini diperkenalkan

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^2, x^3) \tag{3.1}$$

dengan x^2 dan x^3 merupakan dua koordinat spasial. Oleh karena itu berdasarkan persamaan (2.3) dan (3.1) metrik simetri aksial stasioner harus memiliki bentuk

$$ds^2 = g_{00}(dx^o)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 \tag{3.2}$$

yang mana semua koefisien metrik merupakan fungsi dari x^2 dan x^3. Kemudian diterapkan pengortonormalan terhadap x^2 dan x^3 pada persamaan (3.2) berdasarkan teorema

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{aa}(dx^a)^2 + 2g_{ab}dx^adx^b + g_{bb}(dx^b)^2 \\ &= \pm e^{2\mu}[(dx^{a'})^2 + (dx^{b'})^2] \end{aligned} \tag{3.3}$$

diperoleh

$$ds^2 = g_{00}(dx^o)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \pm e^{2\mu}\left[\left(dx^{2'}\right)^2 + \left(dx^{3'}\right)^2\right] \tag{3.4}$$

dengan μ merupakan fungsi dari $x^{2'}$ dan $x^{3'}$ [16].

Pemilih ansatz berbeda pada $dx^{2'}$ dan $dx^{3'}$ dilakukan untuk perluasan persamaan (3.4), agar mencakup solusi dari benda yang memiliki perbedaan potensial pada dua sumbu spasial yang ortogonal. Persamaan umum elemen garis ruangwaktu simetri aksial stasioner dapat ditulis menjadi[7]

$$ds^2 = A(dt)^2 - 2B\, dt\, d\phi - C(d\phi)^2 - e^{2\mu_2}(dx^{2'})^2 - e^{2\mu_3}(dx^{3'})^2 \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dikenal sebagai metrik Lewis, yang memerikan keadaan geometri dari pusat massa silinder berotasi. Metrik Lewis dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks sebagai berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & -B & 0 & 0 \\ -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\mu_3} \end{pmatrix} \quad (3.6a)$$

Kemudian, dengan menggunakan rumus invers matriks

$$g^{\mu\nu} = \frac{adj\ g_{\mu\nu}}{\det g_{\mu\nu}} = \frac{\left[(-1)^{\mu+\nu} \det M_{\mu\nu}\right]^T}{\det g_{\mu\nu}}$$

maka diperoleh

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} C/\rho^2 & -B/\rho^2 & 0 & 0 \\ -B/\rho^2 & -A/\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\mu_3} \end{pmatrix} \quad (3.6b)$$

yang mana $\rho^2 = AC + B^2$. Selanjutnya, determinan dari persamaan (3.6) adalah

$$\det g_{\mu\nu} = \sqrt{-g} = \rho\, e^{\mu_2 + \mu_3} \quad (3.7)$$

Kemudian, subtitusi persamaan (3.6) ke dalam persamaan (2.6) diperoleh simbol Christoffel yang tidak nol sebagai berikut:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{20} = \frac{C}{2\rho^2}\partial_2 A + \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 B && \Gamma^2_{11} = -\frac{e^{-2\mu_2}}{2}\partial_2 C \\
&\Gamma^0_{30} = \frac{C}{2\rho^2}\partial_3 A + \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 B && \Gamma^2_{22} = \partial_2\mu_2 \\
&\Gamma^0_{12} = \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 C - \frac{C}{2\rho^2}\partial_2 B && \Gamma^2_{32} = \partial_3\mu_2 \\
&\Gamma^0_{13} = \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 C - \frac{C}{2\rho^2}\partial_3 B && \Gamma^2_{33} = -\partial_2\mu_3 e^{2(\mu_3-\mu_2)} \\
&\Gamma^1_{02} = \frac{A}{2\rho^2}\partial_2 B - \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 A && \Gamma^3_{00} = \frac{e^{-2\mu_3}}{2}\partial_3 A \\
&\Gamma^1_{03} = \frac{A}{2\rho^2}\partial_3 B - \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 A && \Gamma^3_{01} = -\frac{e^{-2\mu_3}}{2}\partial_3 B \\
&\Gamma^1_{21} = \frac{A}{2\rho^2}\partial_2 C + \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 B && \Gamma^3_{11} = -\frac{e^{-2\mu_3}}{2}\partial_3 C \\
&\Gamma^1_{31} = \frac{A}{2\rho^2}\partial_3 C + \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 B && \Gamma^3_{22} = -\partial_3\mu_2 e^{2(\mu_2-\mu_3)} \\
&\Gamma^2_{00} = \frac{e^{-2\mu_2}}{2}\partial_2 A && \Gamma^3_{23} = \partial_2\mu_3 \\
&\Gamma^2_{01} = -\frac{e^{-2\mu_2}}{2}\partial_2 B &&
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.8}
$$

dengan notasi $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^{2'}}$ dan $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^{3'}}$. Subtitusi simbol Christoffel (3.8) ke dalam persamaan (2.7) diperoleh komponen tensor Ricci tidak lenyap sebagai berikut (Lampiran A):

$$
\begin{aligned}
R_{00} = {} & e^{-2\mu_2}\Big[\frac{1}{2}\partial_2{}^2 A - \frac{1}{2}\partial_2 A\ \partial_2\mu_2 + \frac{1}{2}\partial_2 A\ \partial_2\mu_3 + \frac{A}{2\rho^2}(\partial_2 B)^2 - \frac{C}{4\rho^2}(\partial_2 A)^2 - \\
& \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 A\ \partial_2 B + \frac{A}{4\rho^2}\partial_2 A\ \partial_2 C\Big] + e^{-2\mu_3}\Big[\frac{1}{2}\partial_3{}^2 A - \frac{1}{2}\partial_3 A\ \partial_3\mu_3 + \frac{1}{2}\partial_3 A\ \partial_3\mu_2 + \\
& \frac{A}{2\rho^2}(\partial_3 B)^2 - \frac{C}{4\rho^2}(\partial_3 A)^2 - \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 A\ \partial_3 B + \frac{A}{4\rho^2}\partial_3 A\ \partial_3 C\Big]
\end{aligned}
\tag{3.9a}
$$

$$R_{01} = -e^{-2\mu_2}\left(\frac{1}{2}\partial_2{}^2 B - \frac{1}{2}\partial_2 B\, \partial_2\mu_2 + \frac{1}{2}\partial_2 B\, \partial_2\mu_3 + \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 A\, \partial_2 C - \frac{C}{4\rho^2}\partial_2 A\, \partial_2 B - \frac{A}{4\rho^2}\partial_2 B\, \partial_2 C\right) - e^{-2\mu_3}\left(\frac{1}{2}\partial_3{}^2 B - \frac{1}{2}\partial_3 B\, \partial_3\mu_3 + \frac{1}{2}\partial_3 B\, \partial_3\mu_2 + \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 A\, \partial_3 C - \frac{C}{4\rho^2}\partial_3 A\, \partial_3 B - \frac{A}{4\rho^2}\partial_3 B\, \partial_3 C\right) \quad (3.9b)$$

$$R_{11} = -e^{-2\mu_2}\left[\frac{1}{2}\partial_2{}^2 C - \frac{1}{2}\partial_2 C\, \partial_2\mu_2 + \frac{1}{2}\partial_2 C\, \partial_2\mu_3 - \frac{A}{4\rho^2}(\partial_2 C)^2 + \frac{C}{2\rho^2}(\partial_2 B)^2 + \frac{C}{4\rho^2}\partial_2 A\, \partial_2 C - \frac{B}{2\rho^2}\partial_2 B\, \partial_2 C\right] - e^{-2\mu_3}\left[\frac{1}{2}\partial_3{}^2 C - \frac{1}{2}\partial_3 C\, \partial_3\mu_3 + \frac{1}{2}\partial_3 C\, \partial_3\mu_2 + \frac{C}{2\rho^2}(\partial_3 B)^2 - \frac{A}{4\rho^2}(\partial_3 C)^2 - \frac{B}{2\rho^2}\partial_3 B\, \partial_3 C + \frac{C}{4\rho^2}\partial_3 A\, \partial_3 C\right] \quad (3.9c)$$

$$R_{22} = e^{2(\mu_2-\mu_3)}\left[-\partial_3^2\mu_2 - (\partial_3\mu_2)^2 + \partial_3\mu_2\, \partial_3\mu_3 - \frac{1}{\rho}\partial_3\mu_2\, \partial_3\rho\right] - \partial_2{}^2\mu_3 - (\partial_2\mu_3)^2 + \partial_2\mu_2\, \partial_2\mu_3 + \frac{1}{\rho}\partial_2\mu_2\partial_2\rho - \frac{1}{\rho}\partial_2{}^2\rho + \frac{1}{\rho^2}(\partial_2\rho)^2 - \left[\frac{C^2}{4\rho^4}(\partial_2 A)^2 + \frac{B^2}{2\rho^4}(\partial_2 B)^2 + \frac{BC}{\rho^4}\partial_2 A\, \partial_2 B + \frac{AB}{\rho^4}\partial_2 B\, \partial_2 C - \frac{B^2}{2\rho^4}\partial_2 A\, \partial_2 C - \frac{AC}{2\rho^4}(\partial_2 B)^2 + \frac{A^2}{4\rho^4}(\partial_2 C)^2\right] \quad (3.9d)$$

$$R_{23} = \left(\frac{AC}{4\rho^4}\partial_2 A\, \partial_3 C + \frac{B^2}{2\rho^4}\partial_2 B\, \partial_3 B + \frac{AC}{4\rho^4}\partial_3 A\, \partial_2 C + \frac{AC}{2\rho^4}\partial_2 B\, \partial_3 B + \frac{B^2}{4\rho^4}\partial_3 A\, \partial_2 C + \frac{B^2}{4\rho^4}\partial_2 A\, \partial_3 C\right) + \frac{1}{\rho}\partial_3\mu_2\, \partial_2\rho + \frac{1}{\rho}\partial_2\mu_3\, \partial_3\rho - \frac{1}{\rho}\partial_3(\partial_2\rho) \quad (3.9e)$$

$$R_{33} = e^{2(\mu_3-\mu_2)}\left[-\partial_2^2\mu_3 - (\partial_2\mu_3)^2 + \partial_2\mu_2\, \partial_2\mu_3 - \frac{1}{\rho}\partial_2\mu_3\, \partial_2\rho\right] - \partial_3{}^2\mu_2 - (\partial_3\mu_2)^2 + \partial_3\mu_2\, \partial_3\mu_3 + \frac{1}{\rho}\partial_3\mu_3\, \partial_3\rho - \frac{1}{\rho}\partial_3{}^2\rho + \frac{1}{\rho^2}(\partial_3\rho)^2 - \left[\frac{C^2}{4\rho^4}(\partial_3 A)^2 + \right.$$

$$\frac{B^2}{2\rho^4}(\partial_3 B)^2 + \frac{BC}{\rho^4}\partial_3 A\, \partial_3 B + \frac{AB}{\rho^4}\partial_3 B\, \partial_3 C - \frac{B^2}{2\rho^4}\partial_3 A\, \partial_3 C - \frac{AC}{2\rho^4}(\partial_3 B)^2 +$$

$$\frac{A^2}{4\rho^4}(\partial_3 C)^2\Big] \tag{3.9f}$$

Pemilihan koordinat spasial yang ortogonal pada metrik (3.5) dilakukan dengan memilih $x^{2'} = \rho$ dan $x^{3'} = z$. Ketiga anzats A, B, C dan μ pada metrik (3.5) haruslah memiliki hubungan dalam potensialnya, sehingga Papapetrou mengajukan tiga bentuk anzats f, ω dan γ yang memenuhi persamaan (3.8) dengan transformasi sebagai berikut[17].

$$\left.\begin{aligned} A &= f \\ B &= \omega f \\ C &= \frac{\rho^2}{f} - f\omega^2 \\ \mu_2 = \mu_3 = \mu &= \gamma - \tfrac{1}{2} ln(f) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Penerapan transformasi (3.10) pada persamaan (3.5) diperoleh

$$ds^2 = f(dt)^2 - 2\omega f\, dt\, d\phi - \left(\frac{\rho^2}{f} - f\omega^2\right)(d\phi)^2 - e^{2\gamma - ln(f)}(dx^2)^2 -$$

$$e^{2\gamma - ln(f)}(dx^3)^2 \tag{3.11}$$

atau dengan penyederhanaan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \tag{3.12}$$

yang mana elemen garis (3.12) dikenal sebagai metrik Papapetrou[8]. Penerapan transformasi (3.10) pada tensor Ricci Lewis pada persamaan (3.9) diperoleh tensor Ricci Papapetrou sebagai berikut

$$R_{00}=\frac{e^{-2\gamma}}{2}\Big\{f\left(\partial_\rho^2 f+\partial_z^2 f+\frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right)+\frac{f^4}{\rho^2}\left[\left(\partial_\rho\omega\right)^2+(\partial_z\omega)^2\right]-(\partial_z f)^2-$$

$$\left(\partial_\rho f\right)^2\Big\} \tag{3.13a}$$

$$R_{01}=-\frac{e^{-2\gamma}}{2}\Big[f^2\left(\partial_\rho^2\omega+\partial_z^2\omega-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\omega\right)+2f\left(\partial_\rho f\partial_\rho\omega+\partial_z f\partial_z\omega\right)+$$

$$2e^{2\gamma}\omega R_{00}\Big] \tag{3.13b}$$

$$R_{11}=\frac{\rho^2}{f^2}R_{00}-2\omega\left(R_{01}+\omega R_{00}-\frac{\omega}{2}R_{00}\right) \tag{3.13c}$$

$$R_{23}=\frac{1}{\rho}\partial_z\gamma-\frac{1}{2f^2}\partial_\rho f\partial_z f+\frac{f^2}{2\rho^2}\partial_\rho\omega\partial_z\omega \tag{3.13d}$$

$$R_{22}=-\partial_z^2\gamma-\partial_\rho^2\gamma+\frac{1}{\rho}\partial_\rho\gamma+\frac{1}{2f}\left(\partial_\rho^2 f+\partial_z^2 f+\frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right)-\frac{1}{f^2}\left(\partial_\rho f\right)^2-$$

$$\frac{1}{2f^2}(\partial_z f)^2+\frac{f^2}{2\rho^2}\left(\partial_\rho\omega\right)^2 \tag{3.13e}$$

$$R_{33}=-\partial_z^2\gamma-\partial_\rho^2\gamma-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\gamma+\frac{1}{2f}\left(\partial_\rho^2 f+\partial_z^2 f+\frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right)-\frac{1}{2f^2}\left(\partial_\rho f\right)^2-$$

$$\frac{1}{f^2}(\partial_z f)^2+\frac{f^2}{2\rho^2}(\partial_z\omega)^2 \tag{3.13f}$$

3.3 Persamaan Medan Vakum Papapetrou

Tinjauan medan gravitasi yang jauh di luar sumber menghasilkan syarat batas limit medan lemah, yang mana untuk jarak $r >>$ metrik asimtotik Minkoswkian. Syarat batas ini memenuhi persamaan (2.14) yang mengakibatkan tensor Ricci lenyap ($R_{\mu\nu}=0$), sehingga dengan menerapkan kondisi ini ke persamaan (3.13) diperoleh

$$R_{00}=f\left(\partial_\rho^2 f+\partial_z^2 f+\frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right)+\frac{f^4}{p^2}\left[\left(\partial_\rho\omega\right)^2+(\partial_z\omega)^2\right]-(\partial_z f)^2-$$

$$\left(\partial_\rho f\right)^2 = 0 \tag{3.14a}$$

$$R_{01} = f\left(\partial_\rho^2\omega + \partial_z^2\omega - \frac{1}{\rho}\partial_\rho\omega\right) + 2\left(\partial_\rho f\partial_\rho\omega + \partial_z f\partial_z\omega\right) = 0 \tag{3.14b}$$

$$R_{11} = 0 \tag{3.14c}$$

$$R_{23} = \frac{1}{\rho}\partial_z\gamma - \frac{1}{2f^2}\partial_\rho f\partial_z f + \frac{f^2}{2\rho^2}\partial_\rho\omega\partial_z\omega = 0 \tag{3.14d}$$

$$R_{22} = -\partial_z^2\gamma - \partial_\rho^2\gamma + \frac{1}{\rho}\partial_\rho\gamma + \frac{1}{2f}\left(\partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f + \frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right) - \frac{1}{f^2}\left(\partial_\rho f\right)^2 -$$

$$\frac{1}{2f^2}(\partial_z f)^2 + \frac{f^2}{2\rho^2}\left(\partial_\rho\omega\right)^2 = 0 \tag{3.14e}$$

$$R_{33} = -\partial_z^2\gamma - \partial_\rho^2\gamma - \frac{1}{\rho}\partial_\rho\gamma + \frac{1}{2f}\left(\partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f + \frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right) - \frac{1}{2f^2}\left(\partial_\rho f\right)^2 -$$

$$\frac{1}{f^2}(\partial_z f)^2 + \frac{f^2}{2\rho^2}(\partial_z\omega)^2 = 0 \tag{3.14f}$$

Dari ekspresi R_{00}, R_{01}, R_{23}, dan $R_{22} - R_{33}$ pada persamaan (3.14a)-(3.14f), dinyatakan persamaan medan vakum dari persamaan (3.12) sebagai berikut

$$f\left(\partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f + \frac{1}{\rho}\partial_\rho f\right) + \frac{f^4}{\rho^2}\left[\left(\partial_\rho\omega\right)^2 + (\partial_z\omega)^2\right] - (\partial_z f)^2 - \left(\partial_\rho f\right)^2 = 0 \tag{3.15a}$$

$$f\left(\partial_\rho^2\omega + \partial_z^2\omega - \frac{1}{\rho}\partial_\rho\omega\right) + 2\left(\partial_\rho f\partial_\rho\omega + \partial_z f\partial_z\omega\right) = 0 \tag{3.15b}$$

$$\partial_z\gamma = \frac{\rho}{2f^2}\partial_\rho f\partial_z f - \frac{f^2}{2\rho}\partial_\rho\omega\partial_z\omega \tag{3.15c}$$

$$\partial_\rho\gamma = \frac{\rho}{4f^2}\left[\left(\partial_\rho f\right)^2 - (\partial_z f)^2\right] - \frac{f^2}{4\rho}\left[\left(\partial_\rho\omega\right)^2 - (\partial_z\omega)^2\right] \tag{3.15d}$$

3.4 Persamaan Ernst

Metode Ernst merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial non-linier (3.15a)–(3.15d), dengan membawa fungsi potensial f, ω, γ ke dalam bentuk potensial kompleksnya. Untuk itu persamaan (3.15b) dapat ditulis menjadi

$$\nabla \cdot \frac{f^2}{\rho^2} \nabla \omega = 0 \tag{3.16}$$

dengan ∇ dalam koordinat silinder. Diperkenalkan vektor $\boldsymbol{A}$ yang memenuhi hubungan

$$\frac{f^2}{\rho^2} \nabla \omega = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.17}$$

yang mana $\nabla \omega$ orthogonal terhadap azimutal $(\hat{\phi})$. Melalui hubungan persamaan (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \bullet \hat{\phi} = 0 \tag{3.18}$$

yang memberikan syarat $\partial_\rho A_z - \partial_z A_\rho = 0$ sehingga

$$\partial_\rho A_z = \partial_z A_\rho \tag{3.19}$$

yang mana persamaan (3.19) mengharuskan munculnya sebuah fungsi $F(\rho, z, \phi)$ yang memberikan

$$A_\rho = \partial_\rho F \tag{3.20a}$$

$$A_z = \partial_z F \tag{3.20b}$$

Subtitusi persamaan (3.20a) dan (3.20b) ke dalam persamaan (3.18), diperoleh jalinan persamaan

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \left(\partial_\phi \partial_z F - \partial_z \rho A_\phi \right) \right] + \hat{z} \left[\frac{1}{\rho} \left(\partial_\rho \rho A_\phi - \partial_\phi \partial_\rho F \right) \right] \tag{3.21}$$

Kemudian, memperkenalkan fungsi potensial baru yang didefinisikan sebagai $\Omega \equiv \partial_\phi F - \rho A_\phi$, maka persamaan (3.21) dapat ditulis menjadi

$$\nabla \times A = \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\partial_z\Omega - \hat{z}\partial_\rho\Omega\right). \tag{3.22}$$

Mensubtitusi persamaan (3.22) ke dalam persamaan (3.17) maka diperoleh jalinan

$$\frac{f^2}{\rho^2}\nabla\omega = \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\partial_z\Omega - \hat{z}\partial_\rho\Omega\right)$$

$$\left(\hat{\rho}\partial_\rho\omega + \hat{z}\partial_z\omega\right) = \frac{\rho}{f^2}\left(\hat{\rho}\partial_z\Omega - \hat{z}\partial_\rho\Omega\right) \tag{3.23}$$

Hubungan ruas kiri dan ruas kanan persamaan (3.23) memberikan hubungan

$$\partial_\rho\omega = \frac{\rho}{f^2}\partial_z\Omega$$

$$\partial_z\omega = -\frac{\rho}{f^2}\partial_\rho\Omega$$

atau

$$\partial_z\Omega = \frac{f^2}{\rho}\partial_\rho\omega \tag{3.24a}$$

$$\partial_\rho\Omega = -\frac{f^2}{\rho}\partial_z\omega \tag{3.24b}$$

Persamaan (3.15a) dan (3.15b) dapat ditulis kembali berdasarkan persamaan (3.24) dengan ekspresi sebagai berikut

$$f\nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla f + \nabla\Omega \cdot \nabla\Omega = 0 \tag{3.25}$$

$$f\nabla^2\Omega - 2(\nabla f \cdot \nabla\Omega) = 0 \tag{3.26}$$

dengan ∇ dan ∇^2 adalah operator gradien dan operator Laplacian 2 dimensi dalam koordinat silinder. Mengalikan persamaan (3.26) dengan bilangan imaginer, didapatkan

$$if\nabla^2\Omega - 2i(\nabla f \cdot \nabla\Omega) = 0 \tag{3.27}$$

Penjumlahan persamaan (3.25) dan (3.27) menghasilkan

$$f\nabla^2 f + if\nabla^2\Omega = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{\nabla}\Omega \cdot \boldsymbol{\nabla}\Omega + 2i(\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla}\Omega) \qquad (3.28)$$

Diperkenalkan suatu fungsi potensial kompleks $\mathcal{E}\,(\rho, z)$ dengan definisi[13]

$$\mathcal{E} \equiv f + i\Omega \qquad (3.29)$$

Penerapan persamaan (3.29) ke dalam persamaan (3.28) menghasilkan

$$f\nabla^2\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathcal{E}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathcal{E} \qquad (3.30)$$

Persamaaan (3.30) dikenal sebagai persamaan Ernst. Pengggunaan “Re” dalam persamaan (3.30) menandakan komponen real potensial kompleks. Selanjutnya diperkenalkan potensial kompleks baru $\xi\,(\rho, z)$ melalui transformasi Mobius untuk memperoleh bentuk alternatif persamaan Ernst, yakni:

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \qquad (3.31)$$

sehingga persamaan (3.30) menjadi [lampiran B]

$$\left(\xi\bar{\xi} - 1\right)\nabla^2\,\xi = 2\bar{\xi}\,\boldsymbol{\nabla}\xi \cdot \boldsymbol{\nabla}\xi \qquad (3.32)$$

dengan $\bar{\xi}$ merupakan kompleks konjugate ξ[11].

3.5 Anzats Papapetrou Dalam Potensial Ernst

Potensial $f, \omega,$ dan γ pada persamaan medan vakum (3.15) dapat diekspresikan ke dalam fungsi potensial ξ dengan memerhatikan jalinan persamaan (3.29) dan (3.31) sebagai berikut

$$f + i\Omega = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \qquad (3.33)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (3.33) ditunjukkan potensial f sebagai berikut

$$f = \mathrm{Re}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} + \frac{\bar{\xi}-1}{\bar{\xi}+1}\right) = \frac{\xi\bar{\xi}-1}{(\xi+1)(\bar{\xi}+1)} \tag{3.34}$$

yang mana turunan orde pertama terhadap ρ dan z adalah sebagai berikut

$$\partial_\rho f = \left[\frac{\partial_\rho \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 + \partial_\rho \bar{\xi}(\xi+1)^2}{(\xi+1)^2\left(\bar{\xi}+1\right)^2}\right] \tag{3.35a}$$

$$\partial_z f = \left[\frac{\partial_z \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 + \partial_z \bar{\xi}(\xi+1)^2}{(\xi+1)^2\left(\bar{\xi}+1\right)^2}\right] \tag{3.35b}$$

Sedangkan untuk $\partial_\rho \omega$ dan $\partial_z \omega$, mengingat persamaan (3.24a) dan (3.24b) terlebih dahulu dicari potensial Ω dalam ξ

$$\Omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} - \frac{\bar{\xi}-1}{\bar{\xi}+1}\right) = \frac{\xi-\bar{\xi}}{i(\xi+1)(\bar{\xi}+1)} \tag{3.36}$$

yang mana turunan pertamanya terhadap ρ dan z adalah sebagai berikut

$$\partial_\rho \Omega = \frac{\partial_\rho \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 - \partial_\rho \bar{\xi}(\xi+1)^2}{i\left(\bar{\xi}+1\right)^2(\xi+1)^2} \tag{3.37a}$$

$$\partial_z \Omega = \frac{\partial_z \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 - \partial_z \bar{\xi}(\xi+1)^2}{i\left(\bar{\xi}+1\right)^2(\xi+1)^2}\,. \tag{3.37b}$$

Subtitusi persamaan (3.34) dan (3.37) kedalam persamaan (3.24) didapatkan

$$\partial_\rho \omega = \rho\,\frac{\left[\partial_z \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 - \partial_z \bar{\xi}(\xi+1)^2\right]}{i\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2} \tag{3.38a}$$

$$\partial_z \omega = -\rho\,\frac{\left[\partial_\rho \xi\left(\bar{\xi}+1\right)^2 - \partial_\rho \bar{\xi}(\xi+1)^2\right]}{i\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2}\,. \tag{3.38b}$$

Subtitusi persamaan (3.34a), (3.34b)), (3.35a), (3.35b), (3.38a) dan (3.38b) ke dalam persamaan (3.15c) dan (3.15d), diperoleh $\partial_\rho \gamma$ dan $\partial_z \gamma$ dalam potensial ξ sebagai berikut

$$\partial_\rho \gamma = \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\{\partial_\rho \xi \partial_\rho \bar{\xi} - \partial_z \xi \partial_z \bar{\xi}\} \tag{3.39a}$$

$$\partial_z \gamma = \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\{\partial_\rho \xi \partial_z \bar{\xi} + \partial_\rho \bar{\xi} \partial_z \xi\} \tag{3.39b}$$

3.6 Solusi Ernst

Sumber medan gravitasi yang ditinjau merupakan benda berbentuk elipsoid yang berotasi stasioner, sehingga persamaan Ernst lebih mudah diselesaikan dalam koordinat spheroidal. Untuk itu dipilih koordinat *prolate spheroidal* (x, y) sebagai berikut

$$\rho = k(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.40a}$$

$$z = kxy \tag{3.40b}$$

dengan transformasi balik

$$x = \frac{1}{2k}\left(\sqrt{(k+z)^2+\rho^2} + \sqrt{(k-z)^2+\rho^2}\right) \tag{3.41a}$$

$$y = \frac{1}{2k}\left(\sqrt{(k+z)^2+\rho^2} - \sqrt{(k-z)^2+\rho^2}\right). \tag{3.41b}$$

yang mana k bernilai konstan dan $y = \pm 1$ merupakan sumbu simetri. Gradien dan Laplacian dalam koordinat *prolate spheroidal* disajikan sebagai berikut[17]

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{k}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\hat{x}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\partial_x + \hat{y}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\partial_y\right] \tag{3.42a}$$

$$\nabla^2 = \frac{k^2}{x^2-y^2}\left[\partial_x(x^2-1)\partial_x + \partial_y(1-y^2)\partial_y\right] \tag{3.42b}$$

Persamaan (3.42a) dan (3.42b) disubtitusi ke dalam persamaan (3.32), didapatkan persamaan Ernst dalam koordinat *prolate spheroidal* yakni

$$\left(\xi\bar{\xi}-1\right)\left[(x^2-1)\partial_x^2\xi+2x\partial_x\xi+(1-y^2)\partial_y^2\xi-2y\partial_y\xi\right]=$$

$$2\bar{\xi}[(x^2-1)(\partial_x\xi)^2+(1-y^2)\left(\partial_y\xi\right)^2)] \tag{3.43}$$

Dipilih parameter ξ sebagai fungsi ψ untuk mempermudah pengerjaan matematis, yakni

$$\xi = e^{i\alpha}\coth\psi \tag{3.44}$$

dengan α merupakan konstanta dan $\psi = \psi(x,y)$. Persamaan (3.44) disubtitusikan ke persamaan (3.32), maka diperoleh persamaan Laplace sebagai berikut

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{3.45}$$

dengan memilih $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$, dapat diterapkan separasi variabe pada persamaan (3.48) dalam koordinat *prolate spheroidal*, sehingga diperoleh dua persamaan Legendre sebagai berikut

$$(x^2-1)\frac{d^2X}{dx^2}+2x\frac{dX}{dx}-l(l+1)X=0 \tag{3.46a}$$

$$(x^2-1)\frac{d^2X}{dx^2}+2x\frac{dX}{dx}-l(l+1)X=0 \tag{3.46b}$$

dengan kasus $l = 0$. Solusi umum dari persamaan (3.46a) dan (3.46b) adalah[17]

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty}[a_lQ_l(x)+b_lP_l(x)][c_lQ_l(y)+d_lP_l(y)] \tag{3.47}$$

dengan Q_l dan P_l merupakan polinomial Legendre dan $a_l, b_l, c_l,$ dan d_l merupakan konstanta. Dalam perumusan Rodrigues Q_l dan P_l dituliskan sebagai berikut[17]

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{du^l}(u^2-1)^l \tag{3.48a}$$

$$Q_l(u) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{du^l}\left[(u^2-1)^l\ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right)\right]-\frac{1}{2}P_l(u)\ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) \tag{3.48b}$$

Jika dimasukkan syarat batas $y = 1$ dan $y = -1$ (sumbu simetri) pada persamaan (3.48b), maka akan diperoleh solusi berbeda untuk masing-masing nilai y yang menjadikan solusi Q tidak simetri. Untuk itu pada persamaan (3.47) dipilih $c_l = 0$. Jika dimasukkan syarat batas limit medan lemah (daerah yang jauh dari sumber medan gravitasi) $x \to \infty$ untuk setiap y, maka melalui persamaan (3.29) diperoleh $\mathcal{E} = 1$ yang terpenuhi apabila pada persamaan (3.31) $\xi \to \infty$. Penerapan syarat $\xi \to \infty$ pada persamaan (3.44) dan (3.48b) mengakibatkan $\psi \to 0$ dan $Q_l(x) = 0$. Untuk kasus $\psi \to 0$ pada persamaan (3.47) hanya terpenuhi jika b_l lenyap. Dengan mensubtusikan nilai konstanta c_l dan b_l pada persamaan (3.47) diperoleh

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} a_l d_l Q_l(x) P_l(y) = \sum_{l=0}^{\infty} a'_l Q_l(x) P_l(y) \tag{3.49}$$

Untuk kasus $l = 0$, melalui persamaan (3.48a), (3.48b) dan (3.49) diperoleh

$$\psi = \frac{a'_0}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \tag{3.50}$$

Persamaan (3.50) disubtitusikan ke dalam persamaan (3.44), kemudian $\coth\psi$ dibawa ke dalam bentuk eksponensial sehingga diperoleh

$$\xi = e^{i\alpha} \frac{(x+1)^{a'_0} + (x-1)^{a'_0}}{(x+1)^{a'_0} - (x-1)^{a'_0}} \tag{3.51}$$

dengan memilih syarat batas limit medan lemah, maka melalui persamaan (3.29) diperoleh $\Omega = 0$. Kemudian, persamaan (3.44) disubtitusikan ke dalam persamaan (3.36), maka diperoleh konstanta $\alpha = 0$. Dengan demikian persamaan (3.51) menjadi

$$\xi = \frac{(x+1)^{a'_0} + (x-1)^{a'_0}}{(x+1)^{a'_0} - (x-1)^{a'_0}} \tag{3.52}$$

yang mana a_0' merupakan parameter deformasi. Dengan memilih $a_0' = 1$ pada persamaan (3.52) maka diperoleh

$$\xi(x,y) = x \tag{3.53}$$

Persamaan (3.47) simetri terhadap pertukaran x dan y, sehingga jika persamaan (3.53) merupakan solusi dari persamaan (3.32), maka

$$\xi(y,x) = y \tag{3.54}$$

juga merupakan solusi dari persamaan (3.53). Dipilih salah satu kombinasi linier dari persamaan (3.53) dan (3.54) yang memenuhi persamaan (3.43), yakni[17]

$$\xi = px - iqy \tag{3.55}$$

dengan p dan q merupakan konstanta yang memenuhi hubungan $p^2 + q^2 = 1$.

BAB 4

METRIK KERR

Sajian persamaan (3.34), (3.38a), (3.38b), (3.39a) dan (3.39b) dalam koordinat *prolate speroidal* dengan potensial (3.55) adalah sebagai berikut [lampiran C]

$$f = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2} \tag{4.1}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{k2q\left(1-y^2\right)\left((px+1)^2-q^2y^2\right)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2} \tag{4.2}$$

$$\frac{d\omega}{dy} = -\frac{4kpqy\left(x^2-1\right)(px+1)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2} \tag{4.3}$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{x\left(1-y^2\right)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)} \tag{4.4}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{y\left(x^2-1\right)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)} \tag{4.5}$$

Kemudian, dilakukan pengintegralan pada persamaan (4.2), maka diperoleh potensial ω sebagai berikut [lampiran D]

$$\omega = \int -\frac{k2q\left(1-y^2\right)\left[(px+1)^2-q^2y^2\right]}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}dx$$

$$\omega = \frac{2kq\left(1-y^2\right)(px+1)}{p(p^2x^2+q^2y^2-1)} + C \tag{4.6}$$

Dipilih konstanta integrasi C sama dengan nol sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$\omega = \frac{2kq\left(1-y^2\right)(px+1)}{p(p^2x^2+q^2y^2-1)} \tag{4.7}$$

Selanjutnya, dengan mengintegralkan persamaan (4.4) diperoleh [lampiran D]

$$\gamma = \int \frac{x(1-y^2)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)} dx$$

$$\gamma = -\frac{(y^2-1)[\ln(y^2-x^2)-\ln(-p^2x^2-q^2y^2+1)]}{2(p^2y^2+q^2y^2-1)} + C$$

$$e^{(2\gamma+C)} = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{x^2-y^2}$$

$$e^{2\gamma} = C' \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{x^2-y^2} \tag{4.8}$$

Untuk $x \to \infty$ dan $y \ll$ akan terlihat dalam skala lokal koordinat asimtotik kartesian, sehingga melalui persamaan (3.12) diperoleh syarat batas $\lim_{x\to\infty} e^{2\gamma} = 1$. Dengan memasukkan syarat batas ke dalam persamaan (4.8) maka didapatkan nilai konstanta integrasi

$$C' = \frac{1}{p^2}$$

sehingga persamaan (4.8) menjadi

$$e^{2\gamma} = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}. \tag{4.9}$$

Selanjutnya, dilakukan transformasi (3.12) melalui hubungan (3.40a) dan (3.40b), kemudian mensubtitusi persamaan (4.1), (4.7) dan (4.9) pada metrik (3.12), maka diperoleh

$$ds^2 = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}\left[dt - \frac{2kq(1-y^2)(px+1)}{p(p^2x^2+q^2y^2-1)} d\phi\right]^2 -$$
$$\frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2x^2+q^2y^2-1}\left\{\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}\left[\left(\frac{x^2-y^2}{x^2-1}\right)k^2dx^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{1-y^2}\right)k^2dy^2\right] + k^2(x^2 -\right.$$
$$\left. 1)(1-y^2)d\phi^2\right\} \tag{4.10}$$

yang mana persamaan (4.10) merupakan metrik Kerr dalam koordinat *prolate spheriodal* (t, ϕ, x, y).

Ekspresi ruangwaktu Kerr dalam koordinat Boyer-Lindquist (t', ϕ', r, θ) (bentuk standar metrik Kerr) diperoleh dengan mentransformasi persamaan (4.10) melalui hubungan

$$\left.\begin{aligned} t &= t' \\ \phi &= \phi' \\ px &= \frac{r}{m} - 1 \\ qy &= \frac{a}{m}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

dengan $p = \frac{k}{m}$, $q = \frac{a}{m}$, $k = (m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, $x = \frac{r-m}{(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$ dan $y = \cos\theta$

[Lampiran E], sehingga diperoleh

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(dt' - \frac{2mra\sin^2\theta}{\varrho^2 - 2mr}d\phi'\right)^2 - \frac{\varrho^2\Delta}{\varrho^2 - 2mr}\sin^2\theta\, d\phi'^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}dr^2 - \varrho^2 d\theta^2 \tag{4.12}$$

dengan $\varrho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta,\ \Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$.

Jika dipilih $a = 0$ pada persamaan (4.12), maka diperoleh

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dt')^2 - r^2\sin^2\theta\, d\phi'^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 \tag{4.13}$$

yang mana persamaan (4.13) merupakan metrik Scwarzschild untuk solusi vakum medan gravitasi statik simetri bola[12]. Perbedaan antara metrik Scwarzschild dan metrik Kerr terletak pada rotasi dari sumber medan gravitasi. Untuk itu dapat diidentifikasi bahwa a pastilah merupakan parameter momentum sudut.

4.1 Geodesik Metrik Kerr

Metrik Kerr pada persamaan (4.13) dapat disederhanakan menjadi

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\varrho^2}\right) dt'^2 - \frac{4mra\sin^2\theta}{\varrho^2} dt' d\phi' -$$

$$\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)\sin^2\theta\, d\phi'^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}\, dr^2 - \varrho^2 d\theta^2 \tag{4.14}$$

dengan bentuk tensor metrik kontravarian sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned}
g^{00} &= \frac{\varrho^4\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)\sin^2\theta}{\varrho^4\left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)\sin^2\theta+(2mra\sin^2\theta)^2} \\
g^{01} = g^{10} &= -\frac{\frac{2mra\sin^2\theta}{\varrho^2}}{\left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)\sin^2\theta-\left(\frac{2mra\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)^2} \\
g^{11} &= -\frac{\varrho^4\left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)}{\varrho^4\left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\varrho^2}\right)\sin^2\theta+(2mra\sin^2\theta)^2} \\
g^{22} &= -\frac{\Delta}{\varrho^2} \\
g^{33} &= -\frac{1}{\varrho^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Tampak metrik Kerr pada persamaan (4.14) analog dengan Metrik Lewis pada persamaan (3.5), sehingga diperoleh hubungan subtitusi sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} t &= t' \\ \phi &= \phi' \\ x^{2'} &= r \\ x^{3'} &= \theta \end{aligned}\right\} \tag{4.16a}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 - \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\ B &= \frac{2mra\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\ C &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta \\ e^{2\mu_2} &= \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2} \\ e^{2\mu_3} &= r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}[ln(r^2 + a^2\, cos^2\,\theta) - ln(r^2 - 2mr + a^2)] \\ \mu_3 &= \frac{1}{2}ln(r^2 + a^2\cos^2\theta) \end{aligned}\right\} \tag{4.16b}$$

Kemudian, dilakukan subtitusi pada elemen simbol Christoffel (3.9) menggunakan persamaan (4.16a) dan (4.16b), sehingga diperoleh simbol Christoffel metrik Kerr (4.14) sebagai berikut [lampiran F]

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^0_{20} &= \frac{m\sin^2\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)(r^2 - a^2\cos^2\theta) + \right. \\ &\qquad \left. \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}(a^2\cos^2\theta - r^2)\right] \\ \Gamma^0_{30} &= \frac{2mra^2\sin^3\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} + 2mr - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{4.17a}$$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{ma\sin^4\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\Big[2r^2 - \frac{4mr^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} -$$

$$\frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\Big]$$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{2mra^3\sin^5\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}(2mr - r^2 - a^2)$$

$$\Gamma^1_{02} = \frac{ma\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{2mra\sin\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\left(\frac{a^2\sin^2\theta - 2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} + 1\right)$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\Big(\frac{2m^2ra^4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4m^2r^2a^2\sin^2\theta - 2m^2r^3a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3} -$$

$$\frac{2m^2ra^2\sin^2\theta - 2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta - 2mr^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} + r\Big)$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\Big[r^2 + a^2 + \frac{4mra^2\sin^2\theta - 2mr^3 - 2mra^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} +$$

$$\frac{2mra^4\sin^4\theta + 4m^2r^2a^2 - 8m^2r^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} - \frac{4m^2r^2a^4\sin^4\theta + 4m^2r^2a^4\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\Big]$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{m(r^2 - a^2\cos^2\theta)(r^2 - 2mr + a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\Gamma^2_{01} = -\frac{ma\sin^2\theta(a^2\cos^2\theta - r^2)(r^2 - 2mr + a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{(r^2 - 2mr + a^2)\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left[r - \frac{2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta} - \frac{r - m}{r^2 - 2mr + a^2}$$

$$\Gamma^2_{32} = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{r(r^2 - 2mr + a^2)}{r^2+a^2\cos^2\theta} \qquad (4.17b)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= -\frac{2mra^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\\
\Gamma^3_{01} &= -\frac{2mra\sin\theta\cos\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+1\right)\\
\Gamma^3_{11} &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left[r^2+a^2+\frac{4mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+\frac{2mra^4\sin^4\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\right]\\
\Gamma^3_{22} &= -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r^2-2mr+a^2)}\\
\Gamma^3_{23} &= \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta}\\
\Gamma^3_{33} &= -\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}
\end{aligned}\right\} \quad (4.17c)$$

Subtitusi simbol Christoffel (4.17a)-(4.17c) ke dalam persaman (2.9), diperoleh persamaan geodesik yang menggambarkan perilaku gerak dari partikel uji di sekitar ruangwaktu Kerr sebaga berikut:

- Untuk $x^\alpha = x^0 = t'$ diperoleh

$$\frac{d^2t'}{ds^2} + 2\Gamma^0_{02}\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + 2\Gamma^0_{03}\frac{dt}{ds}\frac{d\theta}{ds} + 2\Gamma^0_{12}\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} + 2\Gamma^0_{13}\frac{d\phi'}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2t'}{ds^2} + \frac{2m\sin^2\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)(r^2-a^2\cos^2\theta) + \right.\\
&\left.\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}(a^2\cos^2\theta - r^2)\right]\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{4mra^2\sin^3\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[-\left(r^2+a^2+\right.\right.\\
&\left.\left.\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right) + 2mr\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+1\right)\right]\frac{dt'}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \frac{2ma\sin^4\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\left[2r^2 - \right.\\
&\frac{4mr^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} - \frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left(r^2+a^2+\right.\\
&\left.\left.\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\right]\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{4mra^3\sin^5\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}(2mr-r^2-a^2)\frac{d\phi'}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0 \quad (4.18a)
\end{aligned}$$

- Untuk $x^{\alpha} = x^{1} = \phi'$ diperoleh

$$\frac{d^2\phi'}{ds^2} + 2\Gamma^1_{02}\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + 2\Gamma^1_{03}\frac{dt'}{ds}\frac{d\theta}{ds} + 2\Gamma^1_{12}\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} + 2\Gamma^1_{13}\frac{d\phi'}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2\phi'}{ds^2} + \frac{2ma\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\right]\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{4mra\sin\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\left(\frac{a^2\sin^2\theta - 2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} + \right.$$

$$\left. 1\right)\frac{dt'}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \frac{2\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{2m^2ra^4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4m^2r^2a^2\sin^2\theta - 2m^2r^3a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3} - \right.$$

$$\left.\frac{2m^2ra^2\sin^2\theta - 2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta - 2mr^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} + r\right)\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\left[r^2 + \right.$$

$$a^2 + \frac{4mra^2\sin^2\theta - 2mr^3 - 2mra^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} + \frac{2mra^4\sin^4\theta + 4m^2r^2a^2 - 8m^2r^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} -$$

$$\left.\frac{4m^2r^2a^4\sin^4\theta + 4m^2r^2a^4\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\right]\frac{d\phi'}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0 \qquad (4.18b)$$

- Untuk $x^{\alpha} = x^{2} = r$ diperoleh

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^2_{00}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{01}\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{23}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} +$$

$$\Gamma^2_{33}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{m(r^2 - a^2\cos^2\theta)(r^2 - 2mr + a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^2 -$$

$$\frac{2ma\sin^2\theta(a^2\cos^2\theta - r^2)(r^2 - 2mr + a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} - \frac{(r^2-2mr+a^2)\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left[r - \right.$$

$$\left.\frac{2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta} - \frac{r-m}{r^2-2mr+a^2}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 -$$

$$\frac{2a^2\cos\theta\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \frac{r(r^2-2mr+a^2)}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.18c)$$

- Untuk $x^{\alpha} = x^{3} = \theta$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma^3_{00}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^3_{01}\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} + \Gamma^3_{11}\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 + \Gamma^3_{22}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^3_{23}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} +$$

$$\Gamma^3_{33}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{2mra^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^2 - \frac{4mra\sin\theta\cos\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+1\right)\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} -$$

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left[r^2+a^2+\frac{4mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+\frac{2mra^4\sin^4\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\right]\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 -$$

$$\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r^2-2mr+a^2)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{2r}{r^2+a^2\cos^2\theta}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} -$$

$$\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.18d)$$

Untuk gerak pada daerah equator sumber massa ($\theta = \frac{\pi}{2}$ dan $\frac{d\theta}{ds} = 0$) diperoleh persamaan geodesik berdasarkan persamaan (4.18a)-(4.18d) sebagai berikut:

- Untuk $x^\alpha = x^0 = t'$

$$\frac{d^2t'}{ds^2} + \frac{2mr^2}{\Delta r^4}(r^2+a^2)\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{2ma}{\Delta}\left[3 - \frac{4ma^2}{r^4} + \frac{4ma^2}{r^3} + \frac{a^2}{r^2}\right]\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \qquad (4.19a)$$

- Untuk $x^\alpha = x^1 = \phi'$

$$\frac{d^2\phi'}{ds^2} - \frac{2ma}{\Delta r^2}\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{2}{\Delta}\left(\frac{4m^2a^2}{r^4} + \frac{2ma^2-4m^2a^2}{r^3} + \frac{ma^2-2mr^2}{r^2} + r\right)\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \qquad (4.19b)$$

- Untuk $x^\alpha = x^2 = r$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{m\Delta}{r^4}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^2 + \frac{2ma\Delta}{r^4}\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} - \frac{\Delta}{r^2}\left[r - \frac{2ma^2}{r^3} + \frac{ma^2}{r^2}\right]\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{r-m}{\Delta}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.19c)$$

- Untuk $x^\alpha = x^3 = \theta$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0 \qquad (4.19d)$$

4.2 Lubanghitam Kerr

Lubanghitam merupakan objek dengan massa yang sangat besar dan memiliki kerapatan menuju tak hingga, sehingga cahaya pun tidak dapat lolos dari tarikan gravitasinya. Permukaan terluar di mana cahaya tidak dapat lolos dari tarikan gravitasi lubanghitam disebut horison peristiwa. Sedangkan daerah yang dilingkupi oleh horison peristiwa di mana tidak dapat diperoleh informasi dari metriknya disebut singularitas.

Karakteristik singularitas untuk kasus lubanghitam Kerr dapat dilihat pada persamaan (4.14) untuk kasus $g_{00} = 0$ dan $g_{22} = \infty$. Pada g_{22} diperoleh singularitas koordinat dengan syarat $\Delta = 0$, sehingga horison peristiwa dapat diidentifikasi melalui persamaan

$$r^2 - 2mr + a^2 = 0 \tag{4.20}$$

Selanjutnya dari persamaan tersebut dapat dicari akar-akar dari r, yaitu

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \tag{4.21}$$

Tidak seperti lubanghitam Schwarzschild pada persamaan (4.13), batas permukaan horison peristiwa tidak berhimpit pada g_{00}, sehingga untuk batas limit statik hanya bisa diperoleh dari

$$g_{00} = 1 - \frac{2mr}{\varrho^2} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta - 2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = 0 \tag{4.22}$$

yang mana hanya bisa terpenuhi pada

$$r^2 + a^2\cos^2\theta - 2mr = 0 \tag{4.23}$$

Selanjutnya akar-akar persamaan tersebut yaitu

$$r_{e\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{4.24}$$

sehingga dapat dipetakan batas singularitas dan masing-masing horison yang dilingkupi oleh persamaan (4.21) dan (4.24) sebagai berikut

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \tag{4.25a}$$

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \tag{4.25b}$$

$$r_{e+} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{4.25c}$$

$$r_{e-} = m - \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{4.25d}$$

$$r = 0 \tag{4.25e}$$

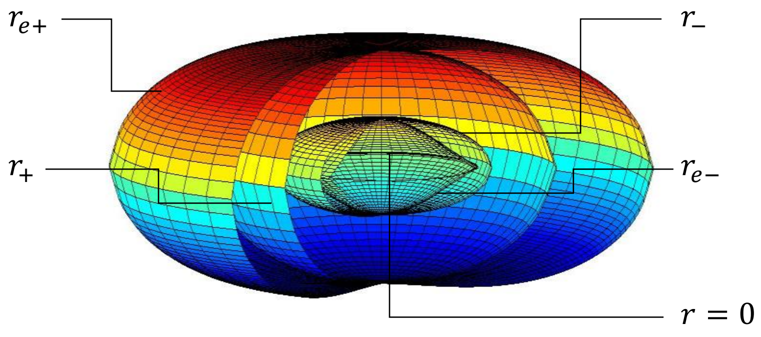
Diperkenalkan parameter transformasi dari Boyer-Lindquist (t', ϕ', r, θ) ke Kerr-Schild (t'', x', y', z') sebagai berikut [lampiran G]

$$\left.\begin{aligned} t' &= t'' \\ x' &= (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\phi' \\ y' &= (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\phi' \\ z' &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Dengan menggunakan parameter transformasi (4.26) diperoleh hubungan

$$z'^2 = r^2 \left(1 - \frac{x'^2 + y'^2}{r^2 + a^2}\right) \tag{4.27}$$

Berdasarkan persamaan (4.27) dan (4.25a)-(4.25e) diperoleh gambaran horison metrik Kerr berdasarkan hasil plot sebagai berikut



Gambar 4.1 Batas-batas permukaan horison dan singularitas lubanghitam Kerr untuk $m > a$.

Urutan permukaan horison pada gambar 4.1 diperoleh dengan meninjau daerah ekuator $(\theta = 90)$ pada persamaan (4.25a) – (4.25d), sehingga dapat disimpulkan bahwa $r_{e+} > r_+ > r_- > r_{e-}$. Pada persamaan (4.27) dan (4.25e) diperoleh singularitas pada daerah $x^2 + y^2 = a^2$ dengan $z = 0$. Pada permukaan r_{e+}, berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.23) diperoleh metrik

$$ds^2 = -2a \sin^2\theta \, dt' d\phi' - (r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta) \sin^2\theta \, d\phi'^2 - \frac{2mr}{\Delta} dr^2 - 2mrd\theta^2 \quad (4.28)$$

yang mengartikan bahwa benda apapun pada daerah antara r_{e+} dan r_+ tidak boleh berada pada kondisi statik melainkan harus berotasi dibawa pengaruh parameter momentum sudut sebesar $a \sin^2\theta$ menuju pusat medan gravitasi. Pada daerah r_+, berdasarkan persamaan (4.14), (4.20) dan (4.28) g_{22} menjadi tak hingga. Permukaan r_+ ini disebut horison peristiwa, yang mana pada daerah ini foton tidak dapat lolos dari tarikan gravitasi. Karena $r_+ > r_- > r_{e-}$, maka pengamat tidak dapat memperoleh informasi dari daerah r_- dan r_{e-} (daerah dalam lingkup horison peristiwa).

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini diperoleh solusi vakum persamaan medan Einstein untuk benda simetri aksial stasioner dengan menggunakan metode Ernst, yang setelah ditransformasi ke dalam koordinat Boyer-Lindquist diperoleh solusi standar seperti yang ditemukan oleh Kerr. Perumusan tersebut diberikan oleh persamaan (4.12) yakni:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(dt' - \frac{2mra\sin^2\theta}{(\varrho^2 - 2mr)}d\phi'\right)^2 - \frac{\varrho^2\Delta}{\varrho^2 - 2mr}\sin^2\theta\, d\phi'^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}dr^2 - \varrho^2 d\theta^2$$

dengan $\varrho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta,\ \Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$ dan $c = 1$. Yang mana

m : parameter massa dari sumber medan gravitasi

a : parameter momentum dari sumber medan gravitasi

θ : sudut polar dari sumber medan gravitasi

Kemudian, dalam penelitian ini ditentukan persamaan Geodesik dari partikel uji disekitar ekuator pusat massa berotasi sebagai berikut:

- Untuk $x^\alpha = x^0 = t'$

$$\frac{d^2t'}{ds^2} + \frac{2mr^2}{\Delta r^4}(r^2 + a^2)\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{2ma}{\Delta}\left[3 - \frac{4ma^2}{r^4} + \frac{4ma^2}{r^3} + \frac{a^2}{r^2}\right]\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

- Untuk $x^\alpha = x^1 = \phi'$

$$\frac{d^2\phi'}{ds^2} - \frac{2ma}{\Delta r^2}\frac{dt'}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{2}{\Delta}\left(\frac{4m^2a^2}{r^4} + \frac{2ma^2-4m^2a^2}{r^3} + \frac{ma^2-2mr^2}{r^2} + r\right)\frac{d\phi'}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

- Untuk $x^\alpha = x^2 = r$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{m\Delta}{r^4}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^2 + \frac{2ma\Delta}{r^4}\frac{dt'}{ds}\frac{d\phi'}{ds} - \frac{\Delta}{r^2}\left[r - \frac{2ma^2}{r^3} + \frac{ma^2}{r^2}\right]\left(\frac{d\phi'}{ds}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{r-m}{\Delta}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0$$

- Untuk $x^\alpha = x^3 = \theta$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$$

Selain itu, penelitian ini juga menggambarkan horison peristiwa pada kasus lubanghitam berotasi. Pemetaan horison peristiwa diberikan oleh persamaan (4.25a)- (4.25d), yang bentuknya

- $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$
- $r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}$
- $r_{e+} = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$
- $r_{e-} = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$

dengan $r_{e+} > r_+ > r_- > r_{e-}$.

5.2 Saran

Penelitian dalam skripsi ini belum mampu menjelaskan solusi dari persamaan geodesik metrik Kerr dikarenakan kerumitan dari persamaanya, sehingga diharapkan ada penelitian lanjutan untuk mendapat solusi yang dimaksud.

Selain itu, diharapkan penelitian selanjutnya dapat menjelaskan secara lebih detail mengenai tafsiran horison peristiwa dari lubanghitam Kerr.

DAFTAR ACUAN

[1] Wospakrik, H.J. 1987, *Berkenalan dengan teori kerelatifan umum Einstein dan biografi Albert Einstein*. Bandung: ITB.

[2] Anugraha, R. 2004. *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

[3] Schulmann, R., Kox, A. J. dkk. 1998, *The Collected Papers of Albert Einstein, Vol. 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918*. Princeton Univ. Press.

[4] Schwarzschild, K. 1917. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.* Terjemahkan Bahasa Inggris oleh Antoci, S., Loinger, A. 1999. *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory.* arXiv:physics/9905030v1.

[5] Birkhoff, G. D. 1923. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press.

[6] Weyl, H. 1917. *Zur Gravitationstheorie,* Ann. d. Physk, 54, 117. Terjemahan Bahasa Inggris oleh Nutto, C., Crothers, S.J. 2012. *On the Theory of Gravitation*. Gen. Rel. Grav. 44,779-810.

[7] Lewis, T. 1931. *Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields*. (http://rspa.royalsocietypublishing.org/).

[8] Papapetrou, A. 1953. *Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys. (Berlin) 447, 309-315.

[9] Petrov, A. 1954. *The Classification of Spaces Defining Gravitational Einstein* (diterjemahkan dari Bahasa Rusia pada tahun 2000). Gen. Rel. Grav. 32 (8): 1665–1685.

[10] Kerr, R. P. 1963. *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. Phys. Rev. Lett. 11, 237-238.

[11] Ernst, F. J. 1968. *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*. Phys. Rev. 167, 1175-1179.

[12] Visser, M. 2008. The Kerr spacetime: A brief introduction. arXiv:0706.0622v3

[13] Heinicke, C., Hehl W,F. 2015. *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation - an introduction* -. arXiv:1503.02172v1.

[14] Purwanto, A. 2009. *Pengantar Kosmologi*. Surabaya: ITS Press.

[15] Dirac, P. A. M. 1975. *Teori Relativitas Umum* (terjemahan). John Wiley and Sons.

[16] Chandrasekhar, S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.

[17] Carmeli, M. 1982. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. John Wiley and Sons.

LAMPIRAN A

Elemen garis Lewis

$$ds^2 = A(dt)^2 - 2B\, dt\, d\phi - C(d\phi)^2 - e^{2\mu_1}(dx^{2'})^2 - e^{2\mu_2}(dx^{3'})^2$$

Digunakan notasi turunan $\frac{\partial A}{\partial x^{2'}} = \dot{A}$ dan $\frac{\partial A}{\partial x^{3'}} = A'$. Kemudian, simbol Christoffel tak lenyap dari elemen garis Lewis adalah

$\Gamma^0_{20} = \frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}$

$\Gamma^0_{30} = \frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}$

$\Gamma^0_{12} = -\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{C}}{2\rho^2}$

$\Gamma^0_{13} = -\frac{B'C}{2\rho^2} + \frac{BC'}{2\rho^2}$

$\Gamma^1_{02} = -\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}$

$\Gamma^1_{03} = -\frac{A'B}{2\rho^2} + \frac{AB'}{2\rho^2}$

$\Gamma^1_{21} = \frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}$

$\Gamma^1_{31} = \frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}$

$\Gamma^2_{00} = \frac{\dot{A}}{2} e^{-2\mu_2}$

$\Gamma^3_{00} = \frac{A'}{2} e^{-2\mu_3}$

$\Gamma^2_{01} = -\frac{\dot{B}}{2} e^{-2\mu_2}$

$\Gamma^3_{01} = -\frac{B'}{2} e^{-2\mu_3}$

$\Gamma^2_{11} = -\frac{\dot{C}}{2} e^{-2\mu_2}$

$\Gamma^3_{11} = -\frac{C'}{2} e^{-2\mu_3}$

$\Gamma^3_{22} = -\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}$

$\Gamma^2_{32} = \mu_2'$

$\Gamma^3_{23} = \dot{\mu}_3$

$\Gamma^2_{22} = \dot{\mu}_2$

$\Gamma^3_{33} = \mu_3'$

Komponen Ricci tak lenyap berdasarkan persamaan $R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ adalah

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha 0} + \Gamma^\beta_{00}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 0}\Gamma^\alpha_{0\beta} \\
&= \partial_2 \Gamma^2_{00} + \partial_3 \Gamma^3_{00} + \Gamma^2_{00}(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32}) + \Gamma^3_{00}(\Gamma^1_{13} + \Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33}) - (\Gamma^2_{10}\Gamma^1_{02} + \\
&\quad \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{03} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{20}\Gamma^2_{01} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{01})
\end{aligned}$$

$$= \partial_2 \frac{\dot{A}}{2} e^{-2\mu_2} + \partial_3 \frac{A'}{2} e^{-2\mu_3} + \frac{\dot{A}}{2} e^{-2\mu_2} \left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \dot{\mu}_2 + \dot{\mu}_3\right) + \frac{A'}{2} e^{-2\mu_3} \left(\frac{AC'}{2\rho^2} +\right.$$

$$\left.\frac{BB'}{2\rho^2} + {\mu_2}' + {\mu_3}' \right) - \left[-\frac{\dot{B}}{2} e^{-2\mu_2} \left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \frac{B'}{2} e^{-2\mu_3} \left(-\frac{A'B}{2\rho^2} + \frac{AB'}{2\rho^2}\right) + \right.$$

$$\frac{\dot{A}}{2} e^{-2\mu_2} \left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \frac{\dot{B}}{2} e^{-2\mu_2} \left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right) + \frac{A'}{2} e^{-2\mu_3} \left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) -$$

$$\left.\frac{B'}{2} e^{-2\mu_3} \left(-\frac{A'B}{2\rho^2} + \frac{AB'}{2\rho^2}\right)\right]$$

$$= e^{-2\mu_2} \left[\frac{\ddot{A}}{2} - \frac{\dot{A}}{2}\dot{\mu}_2 + \frac{\dot{A}}{2}\dot{\mu}_3 + \frac{A\dot{B}^2}{2\rho^2} - \dot{A}\left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{A\dot{C}}{2\rho^2}\right)\right] + e^{-2\mu_3} \left[\frac{A''}{2} - \frac{A'}{2}\mu_3' + \frac{A'}{2}\mu_2' + \right.$$

$$\left.\frac{AB'^2}{2\rho^2} - A'\left(\frac{\rho'}{2\rho} - \frac{AC'}{2\rho^2}\right)\right]$$

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{\alpha 1} + \Gamma^\beta_{11}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 1}\Gamma^\alpha_{1\beta}$$

$$= \partial_2 \Gamma^2_{11} + \partial_3 \Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{11}(\Gamma^0_{02} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32}) + \Gamma^3_{11}(\Gamma^0_{03} + \Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33}) - (\Gamma^2_{01}\Gamma^0_{12} +$$

$$\Gamma^3_{01}\Gamma^0_{13} + \Gamma^0_{21}\Gamma^2_{10} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} + \Gamma^0_{31}\Gamma^3_{10} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{11})$$

$$= \partial_2 \left(-\frac{\dot{C}}{2} e^{-2\mu_2}\right) - \partial_3 \frac{C'}{2} e^{-2\mu_3} - \frac{\dot{C}}{2} e^{-2\mu_2} \left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \dot{\mu}_2 + \dot{\mu}_3\right) -$$

$$\frac{C'}{2} e^{-2\mu_3} \left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2} + \mu_2' + \mu_3'\right) - \left[-\dot{B} e^{-2\mu_2} \left(-\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{C}}{2\rho^2}\right) - \right.$$

$$\left.B' e^{-2\mu_3} \left(-\frac{B'C}{2\rho^2} + \frac{BC'}{2\rho^2}\right) - \left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)\frac{\dot{C}}{2} e^{-2\mu_2} - \left(\frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right)\frac{C'}{2} e^{-2\mu_3}\right]$$

$$= e^{-2\mu_2} \left[-\frac{\ddot{C}}{2} + \frac{\dot{C}}{2}\dot{\mu}_2 - \frac{\dot{C}}{2}\dot{\mu}_3 - \frac{\dot{B}^2 C}{2\rho^2} + \dot{C}\left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{A}C}{2\rho^2}\right)\right] + e^{-2\mu_3} \left[-\frac{C''}{2} + \frac{C'}{2}\mu_3' - \right.$$

$$\left.\frac{C'}{2}\mu_2' - \frac{B'^2 C}{2\rho^2} + C'\left(\frac{\rho'}{2\rho} - \frac{A'C}{2\rho^2}\right)\right]$$

$$R_{01} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{01} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha 1} + \Gamma^\beta_{01}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 1}\Gamma^\alpha_{0\beta}$$

$$= \partial_2 \Gamma^2_{01} + \partial_3 \Gamma^3_{01} + \Gamma^2_{01}(\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32}) + \Gamma^3_{01}(\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33}) - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{02} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{03} -$$

$$\Gamma^0_{21}\Gamma^2_{00} - \Gamma^0_{31}\Gamma^3_{00}$$

$$= \partial_2 \left(-\frac{\dot{B}}{2} e^{-2\mu_2}\right) + \partial_3 \left(-\frac{B'}{2} e^{-2\mu_3}\right) + \left(-\frac{\dot{B}}{2} e^{-2\mu_2}\right)(\dot{\mu}_2 + \dot{\mu}_3) +$$

$$\left(-\frac{B'}{2} e^{-2\mu_3}\right)(\mu_2' + \mu_3') - \left(-\frac{\dot{C}}{2} e^{-2\mu_2}\right)\left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \left(-\frac{C'}{2} e^{-2\mu_3}\right)\left(-\frac{A'B}{2\rho^2} +\right.$$

$$\left.\frac{AB'}{2\rho^2}\right) - \left(-\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{C}}{2\rho^2}\right)\left(\frac{\dot{A}}{2} e^{-2\mu_2}\right) - \left(-\frac{B'C}{2\rho^2} + \frac{BC'}{2\rho^2}\right)\left(\frac{A'}{2} e^{-2\mu_3}\right)$$

$$= e^{-2\mu_2}\left[-\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}}{2}\dot{\mu}_2 - \frac{\dot{B}}{2}\dot{\mu}_3 - \frac{\dot{A}B\dot{C}}{2\rho^2} + \dot{B}\left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)\right] + e^{-2\mu_3}\left[-\frac{B''}{2} + \frac{B'}{2}\mu_3' -\right.$$

$$\left.\frac{B'}{2}\mu_2' - \frac{A'BC'}{2\rho^2} + B'\left(\frac{\rho'}{2\rho} - \frac{BB'}{2\rho^2}\right)\right]$$

$$R_{22} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{22} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^\beta_{22}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 2}\Gamma^\alpha_{2\beta}$$

$$= \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} - \partial_2 \Gamma^0_{02} - \partial_2 \Gamma^1_{12} - \partial_2 \Gamma^2_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{32} + \Gamma^2_{22}\Gamma^0_{02} + \Gamma^3_{22}\Gamma^0_{03} +$$

$$\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13} + \Gamma^2_{22}\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33} - \Gamma^0_{02}\Gamma^0_{20} - \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{21} - \Gamma^0_{12}\Gamma^1_{20} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21} -$$

$$\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{23}$$

$$= \partial_3\left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right] - \partial_2\left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \partial_2\left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \partial_2\dot{\mu}_3 + \dot{\mu}_2\left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} +\right.$$

$$\left.\frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right) + \left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right]\left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) + \dot{\mu}_2\left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right) + \left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right]\left(\frac{AC'}{2\rho^2} +\right.$$

$$\left.\frac{BB'}{2\rho^2}\right) + \dot{\mu}_2\dot{\mu}_3 + \left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right]\mu_3' - \left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)^2 - \left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right)\left(-\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} +\right.$$

$$\left.\frac{B\dot{C}}{2\rho^2}\right) - \left(-\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{C}}{2\rho^2}\right)\left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right) - \left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)^2 - \mu_2'\left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right] - \dot{\mu}_3^2$$

$$= e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\left(-\mu_2'' - {\mu_2'}^2 + \mu_2'\mu_3' - \frac{\rho'}{\rho}\mu_2'\right) + \frac{\dot{B}^2}{2\rho^2} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{2\rho^2} - \ddot{\mu}_3 - \dot{\mu}_3^2 + \dot{\mu}_2\dot{\mu}_3 +$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\mu}_2 - \frac{\ddot{\rho}}{\rho}$$

$$R_{23} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{23} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{\alpha 3} + \Gamma^\beta_{23}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 2}\Gamma^\alpha_{3\beta}$$

$$= \partial_3 \Gamma^3_{23} - \partial_2 \Gamma^0_{03} - \partial_2 \Gamma^1_{13} - \partial_2 \Gamma^3_{33} + \Gamma^2_{23}(\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{03} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{13} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32}) -$$

$$\Gamma^0_{02}\Gamma^0_{30} - \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{31} - \Gamma^0_{12}\Gamma^1_{30} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{32} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33}$$

$$= \partial_3 \dot{\mu}_3 - \partial_2\left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) - \partial_2\left(\frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) - \partial_2 \mu_3' + \mu_2'\left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \frac{A'C}{2\rho^2} + \right.$$

$$\left.\frac{BB'}{2\rho^2} + \frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2} + \dot{\mu}_2 + \dot{\mu}_3\right) - \left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)\left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) -$$

$$\left(-\frac{\dot{A}B}{2\rho^2} + \frac{A\dot{B}}{2\rho^2}\right)\left(-\frac{B'C}{2\rho^2} + \frac{BC'}{2\rho^2}\right) - \left(-\frac{\dot{B}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{C}}{2\rho^2}\right)\left(-\frac{A'B}{2\rho^2} + \frac{AB'}{2\rho^2}\right) - \left(\frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \right.$$

$$\left.\frac{B\dot{B}}{2\rho^2}\right)\left(\frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) - \dot{\mu}_2\mu_2' - \left[-\mu_2' e^{2(\mu_2 - \mu_3)}\right]\left[-\dot{\mu}_3 e^{2(\mu_3 - \mu_2)}\right]$$

$$= -\frac{\dot{\rho}'}{\rho} + \mu_2'\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho}\right) + \frac{\dot{A}C'}{4\rho^2} + \frac{\dot{B}B'}{2\rho^2} + \frac{A^2\dot{C}C'}{4\rho^4} + \frac{A'B^2\dot{C}}{4\rho^4}$$

$$R_{33} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{33} - \partial_3 \Gamma^\alpha_{\alpha 3} + \Gamma^\beta_{33}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha 3}\Gamma^\alpha_{3\beta}$$

$$= \partial_2 \Gamma^2_{33} - \partial_3 \Gamma^0_{03} - \partial_3 \Gamma^1_{13} - \partial_3 \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{33}(\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}) + \Gamma^3_{33}(\Gamma^0_{03} + \Gamma^1_{13} +$$

$$\Gamma^2_{23}) - (\Gamma^0_{03})^2 - 2\Gamma^1_{03}\Gamma^0_{31} - (\Gamma^1_{13})^2 - (\Gamma^2_{23})^2 - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33}$$

$$= \partial_2\left(-\dot{\mu}_3 e^{2(\mu_3 - \mu_2)}\right) - \partial_3\left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) - \partial_3\left(\frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right) - \partial_3 \mu_2' -$$

$$\dot{\mu}_3 e^{2(\mu_3 - \mu_2)}\left(\frac{\dot{A}C}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \frac{A\dot{C}}{2\rho^2} + \frac{B\dot{B}}{2\rho^2} + \dot{\mu}_2\right) + \mu_3'\left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2} + \frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2} + \right.$$

$$\left.\mu_2'\right) - \left(\frac{A'C}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right)^2 - 2\left(-\frac{A'B}{2\rho^2} + \frac{AB'}{2\rho^2}\right)\left(-\frac{B'C}{2\rho^2} + \frac{BC'}{2\rho^2}\right) - \left(\frac{AC'}{2\rho^2} + \frac{BB'}{2\rho^2}\right)^2 -$$

$$(\mu_2')^2 + \dot{\mu}_3 e^{2(\mu_3 - \mu_2)}\dot{\mu}_3$$

$$= e^{2(\mu_3 - \mu_2)}\left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\mu}_3 - \dot{\mu}_3{}^2 + \dot{\mu}_2\dot{\mu}_3 - \ddot{\mu}_3\right) + \frac{B'^2}{2\rho^2} + \frac{A'C'}{2\rho^2} - \frac{\rho''}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho}\mu_3' + \mu_2'\mu_3' -$$

$$\mu_2'' - \mu_2'^2$$

LAMPIRAN B

Berdasarkan persamaan (3.33) dan (3.34) diperoleh hubungan

$$\left[Re\ \frac{\xi-1}{\xi+1}\right]\nabla^2\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) \tag{1}$$

Dalam koordinat silinder kanonik diperoleh

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}=\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2b}$$

Persamaan (2a) dan (2b) disubtitusikan ke dalam persamaan (1) diperoleh

$$\left[Re\ \frac{\xi-1}{\xi+1}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\right]=\left[\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\right]\cdot$$

$$\left[\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\right]$$

Untuk mempermudah penurunan persamaan (3.34) disederhanakan sehingga diperoleh

$$\left[Re\ \left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)\right]=\left[\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{2}{\xi+1}\right)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)\right]\cdot\left[\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(1-\frac{2}{\xi+1}\right)\right]$$

Kemudian, diiturunkan terhadap masing-masing operator diperoleh

$$\frac{\xi\bar{\xi}-1}{(\xi+1)(\bar{\xi}+1)}\left[\frac{2\xi_{\rho\rho}}{(\xi+1)^2}-\frac{4\xi_\rho^2}{(\xi+1)^3}+\frac{1}{\rho}\frac{2\xi_\rho}{(\xi+1)^2}+\frac{2\xi_{zz}}{(\xi+1)^2}-\frac{4\xi_z^2}{(\xi+1)^3}\right]=\left[\hat{\rho}\frac{2\xi_\rho}{(\xi+1)^2}+\hat{z}\frac{2\xi_z}{(\xi+1)^2}\right]\cdot$$

$$\left[\hat{\rho}\frac{2\xi_\rho}{(\xi+1)^2}+\hat{z}\frac{2\xi_z}{(\xi+1)^2}\right]$$

sehingga hasilnya diperoleh

$$\left(\xi\bar{\xi}-1\right)\nabla^2\ \xi=2\bar{\xi}\ \boldsymbol{\nabla}\xi\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi$$

LAMPIRAN C

- **Persamaan (4.1)**

Untuk f berdasarkan persamaan (3.37) diperole

$$f = \mathrm{Re}\,\frac{\xi-1}{\xi+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} + \frac{\bar{\xi}-1}{\bar{\xi}+1}\right) = \frac{\xi\bar{\xi}-1}{\xi\bar{\xi}+\xi+\bar{\xi}+1} = \frac{(px-iqy)(px+iqy)-1}{(px-iqy)(px+iqy)+px-iqy+px+iqy+1}$$

$$= \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}$$

- **Persamaan (4.2) dan (4.3)**

Terlebih dahulu dicari Ω melalui persamaan (3.39)

$$\Omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} - \frac{\bar{\xi}-1}{\bar{\xi}+1}\right) = \left[\frac{\xi-\bar{\xi}}{i(\xi+1)(\bar{\xi}+1)}\right] = \frac{(px-iqy)-(px+iqy)}{i(px-iqy+1)(px+iqy+1)}$$

$$= \frac{-2qy}{(px+1)^2+q^2y^2}$$

$$\Omega_{\mathrm{x}} = \frac{4pqy(px+1)}{[(px+1)^2+q^2y^2]^2} = \frac{4q^3y^2}{((px+1)^2+q^2y^2)^2} - \frac{2q}{(px+1)^2+q^2y^2}$$

$$= -\frac{2q\left((px+1)^2-q^2y^2\right)}{[(px+1)^2+q^2y^2]^2}$$

Dengan mensubtitusikan parameter f, Ω_x, Ω_y (dalam bentuk potensial Ernst) ke dalam persamaan ω_ρ dan ω_z diperoleh

$$\omega_\rho = \frac{\rho}{f^2}\Omega_z = \frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_x x_z + \Omega_y y_z\right)$$

$$\omega_z = -\frac{\rho}{f^2}\Omega_\rho = -\frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_{\mathrm{x}} x_\rho + \Omega_{\mathrm{y}} y_\rho\right)$$

Untuk ω_x

$$\omega_x = \omega_\rho \rho_x + \omega_z z_x$$

$$= \frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_x x_z \rho_x - \Omega_{\mathrm{x}} x_\rho z_x + \Omega_y y_z \rho_x - \Omega_{\mathrm{y}} y_\rho z_x\right)$$

$$= \frac{\rho}{f^2}\left[\Omega_x\left(x_z \rho_x - x_\rho z_x\right) + \Omega_y\left(y_z \rho_x - y_\rho z_x\right)\right]$$

Dengan pemisalan

$\omega_x = \frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_x A + \Omega_y B\right)$ dengan $A = x_z \rho_x - x_\rho z_x$ dan $B = y_z \rho_x - y_\rho z_x$

Untuk A

$$A = 0$$

Untuk B

$$B = \frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}[x(x+y) - y(x+y) + xk(x-y) + y(x-y)]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x-y)(x+y)} = \frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Persamaan A dan B dsubtitusi kembali ke ω_x diperoleh

$$\omega_x = \frac{k(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}\right]^2}\left[-\frac{2q\left((px+1)^2 - q^2y^2\right)(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{((px+1)^2 + q^2y^2)^2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= -\frac{2kq(1-y^2)\left[(px+1)^2 - q^2y^2\right]}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}$$

Untuk ω_y

$$\omega_y = \omega_\rho \rho_y + \omega_z z_y$$

$$= \frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_x x_z + \Omega_y y_z\right)\rho_y - \frac{\rho}{f^2}\left(\Omega_{\mathrm{x}} x_\rho + \Omega_{\mathrm{y}} y_\rho\right) z_y$$

$$= \frac{\rho}{f^2}\left[\Omega_x\left(x_z \rho_y - x_\rho z_y\right) + \Omega_y\left(y_z \rho_y - y_\rho z_y\right)\right]$$

Kemudian, dimisalkan $C = x_z\rho_y - x_\rho z_y$ dan $D = y_z\rho_y - y_\rho z_y$, sehingga

$$\omega_y = \frac{\rho}{f^2}\left[\Omega_x C + \Omega_y D\right]$$

Untuk C

$$C = -\frac{ky(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\left[\frac{(\mathrm{k+z})}{2k((\mathrm{k+z})^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right] - \left[\frac{(k-z)}{2k((k-z)^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\} - kx\left\{\left[\frac{\rho}{2k((k+z)^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \left[\frac{\rho}{2k((k-z)^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$

$$= -\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$D = 0$$

Persamaan C dan D disubtiusi kembali ke ω_y

$$\omega_y = -\frac{4kpqy(x^2-1)(px+1)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}$$

- **Persamaan (4.4) dan (4.5)**

Dengan menggunakan persamaan (3.42a) dan (3.42b) maka dapat diperoleh γ_x dan γ_y dalam koordinat prolate spheroidal sebagai berikut.

Untuk γ_x

$$\gamma_x = \left[\frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left(\xi_\rho\bar{\xi}_\rho - \xi_z\bar{\xi}_z\right)\right]\rho_x + \left[\frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left(\xi_\rho\bar{\xi}_z + \xi_z\bar{\xi}_\rho\right)\right]z_x$$

$$= \rho_x \left\{\frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\left(\xi_x x_\rho + \xi_y y_\rho\right)\left(\bar{\xi}_x x_\rho + \bar{\xi}_y y_\rho\right) - \left(\xi_x x_z + \xi_y y_z\right)\left(\bar{\xi}_x x_z + \bar{\xi}_y y_z\right)\right]\right\} +$$

$$z_x \left\{\frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\left(\xi_x x_\rho + \xi_y y_\rho\right)\left(\bar{\xi}_x x_z + \bar{\xi}_y y_z\right) + \left(\xi_x x_z + \xi_y y_z\right)\left(\bar{\xi}_x x_\rho + \bar{\xi}_y y_\rho\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\{\xi_x\bar{\xi}_x\left[\left(x_\rho^2 - x_z^2\right)\rho_x + 2x_\rho x_z z_x\right] + \left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\left(x_\rho y_\rho \rho_x - x_z y_z \rho_x +\right.$$

$$\left. x_\rho y_z z_x + x_z y_\rho z_x\right) + \xi_y\bar{\xi}_y\left[\left(y_\rho^2 - y_z^2\right)\rho_x + 2y_\rho y_z z_x\right]\}$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\xi_x\bar{\xi}_x A + \xi_y\bar{\xi}_y B + \left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)C\right]$$

$$A = \xi_x\bar{\xi}_x\left[\left(x_\rho^2 - x_z^2\right)\rho_x + 2x_\rho x_z z_x\right] = \frac{x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k(x^2-y^2)}$$

$$B = \xi_y\bar{\xi}_y\left[\left(y_\rho^2 - y_z^2\right)\rho_x + 2y_\rho y_z z_x\right] = -\frac{x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)}{k(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-y^2)}$$

$$C = \left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\left(x_\rho y_\rho \rho_x - x_z y_z \rho_x + x_\rho y_z z_x + x_z y_\rho z_x\right) = -\frac{y(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{k(x^2-y^2)}$$

Masukkan nilai A,B,C ke dalam persamaan γ_x

$$\gamma_x = \frac{k(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left(\xi_x\bar{\xi}_x\left[\frac{x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k(x^2-y^2)}\right] + \left(\xi_x\bar{\xi}_y +\right.\right.$$

$$\left.\left.\xi_y\bar{\xi}_x\right)\left[-\frac{y(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{k(x^2-y^2)}\right] - \xi_y\bar{\xi}_y\left[\frac{x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)}{k(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-y^2)}\right]\right)$$

$$= \frac{(1-y^2)}{(\xi\bar{\xi}-1)^2(x^2-y^2)}\left[x(x^2-1)\xi_x\bar{\xi}_x - x(1-y^2)\xi_y\bar{\xi}_y - y(x^2-1)\left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\right]$$

Untuk γ_y

$$\gamma_y = \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left(\xi_\rho\bar{\xi}_\rho - \xi_z\bar{\xi}_z\right)\rho_y + \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left(\xi_\rho\bar{\xi}_z + \xi_z\bar{\xi}_\rho\right)z_y$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\left(\xi_x x_\rho + \xi_y y_\rho\right)\left(\bar{\xi}_x x_\rho + \bar{\xi}_y y_\rho\right) - \left(\xi_x x_z + \xi_y y_z\right)\left(\bar{\xi}_x x_z + \bar{\xi}_y y_z\right)\right]\rho_y +$$

$$\frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\left(\xi_x x_\rho + \xi_y y_\rho\right)\left(\bar{\xi}_x x_z + \bar{\xi}_y y_z\right) + \left(\xi_x x_z + \xi_y y_z\right)\left(\bar{\xi}_x x_\rho + \bar{\xi}_y y_\rho\right)\right] z_y$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\xi_x\bar{\xi}_x\left(x_\rho^2\rho_y - x_z^2\rho_y + 2x_\rho x_z z_y\right) + \xi_y\bar{\xi}_y\left(y_\rho^2\rho_y - y_z^2\rho_y + 2y_\rho y_z z_y\right) +\right.$$

$$\left.\left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\left(y_\rho x_\rho \rho_y - y_z x_z \rho_y + y_\rho x_z z_y + y_z x_\rho z_y\right)\right]$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\xi_x\bar{\xi}_x \mathrm{D} + \xi_y\bar{\xi}_y \mathrm{E} + \left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\mathrm{F}\right]$$

$$D = \left(x_\rho^2\rho_y - x_z^2\rho_y + 2x_\rho x_z z_y\right) = \frac{y\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}{k\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-y^2\right)}$$

$$E = \left(y_\rho^2\rho_y - y_z^2\rho_y + 2y_\rho y_z z_y\right) = \frac{y\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2-1\right)}{k\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-y^2\right)}$$

$$F = \left(x_\rho y_\rho \rho_y - x_z y_z \rho_y + x_\rho y_z z_y + x_z y_\rho z_y\right) = \frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k\left(x^2-y^2\right)}$$

Masukkan nilai D,E,F ke dalam persamaan γ_y

$$\gamma_y = \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left[\xi_x\bar{\xi}_x \mathrm{D} + \xi_y\bar{\xi}_y \mathrm{E} + \left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\mathrm{F}\right]$$

$$= \frac{\rho}{(\xi\bar{\xi}-1)^2}\left\{\xi_x\bar{\xi}_x\left[\frac{y\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}{k\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-y^2\right)}\right] + \xi_y\bar{\xi}_y\left[\frac{y\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2-1\right)}{k\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-y^2\right)}\right] + \left(\xi_x\bar{\xi}_y +\right.\right.$$

$$\left.\left.\xi_y\bar{\xi}_x\right)\left[\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k\left(x^2-y^2\right)}\right]\right\}$$

$$= \frac{\left(x^2-1\right)}{(\xi\bar{\xi}-1)^2\left(x^2-y^2\right)}\left[y\left(x^2-1\right)\xi_x\bar{\xi}_x - y\left(1-y^2\right)\xi_y\bar{\xi}_y + x\left(1-y^2\right)\left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\right]$$

Maka kita dapatkan γ_x dan γ_y sebagai berikut

$$\gamma_x = \frac{\left(1-y^2\right)}{(\xi\bar{\xi}-1)^2\left(x^2-y^2\right)}\left[x\left(x^2-1\right)\xi_x\bar{\xi}_x - x\left(1-y^2\right)\xi_y\bar{\xi}_y - y\left(x^2-1\right)\left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\right]$$

$$\gamma_y = \frac{(x^2-1)}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2(x^2-y^2)}\left[y(x^2-1)\xi_x\bar{\xi}_x - y(1-y^2)\xi_y\bar{\xi}_y + x(1-y^2)\left(\xi_x\bar{\xi}_y + \xi_y\bar{\xi}_x\right)\right]$$

Dilakukan subtitusi potensial Ernst orde pertama $\xi = px - iqy$ pada persamaan diatas dengan p dan q merupakan konstanta, Sehingga dperoleh

$$\gamma_x = \frac{(1-y^2)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2(x^2-y^2)}[x(x^2-1)p^2 - x(1-y^2)q^2 - y(x^2-1)(iqp - iqp)]$$

$$= \frac{x(1-y^2)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)}$$

dan

$$\gamma_y = \frac{(x^2-1)}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2(x^2-y^2)}[y(x^2-1)p^2 - y(1-y^2)q^2 + x(1-y^2)(iqp - iqp)]$$

$$= \frac{y(x^2-1)}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)}$$

LAMPIRAN D

- **Untuk ω**

Dipilih persamaan (4.2)

$$\omega = \int -\frac{k2q(1-y^2)[(px+1)^2 - q^2y^2]}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}dx$$

$$= k2q(y^2-1)\left[\int \frac{p^2x^2}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}dx + \int \frac{2px+1-q^2y^2}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}\ dx\right]$$

$$= k2q(y^2-1)[A+B]$$

Untuk A

$$A = \int \frac{p^2x^2}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}dx$$

Misalkan $x = \frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u$ dan $dx = \frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}du$

Sulihkan ke dalam persamaan A

$$A = \int \frac{p^2\left(\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u\right)^2}{\left(p^2\left(\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u\right)^2+q^2y^2-1\right)^2}\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}du$$

$$= \frac{(q^2y^2-1)^{\frac{3}{2}}}{p}\int \frac{u^2}{\left((q^2y^2-1)u^2+q^2y^2-1\right)^2}du$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}\int \frac{u^2}{(u^2+1)^2}du$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}\left[\int \frac{1}{(u^2+1)}du - \int \frac{1}{(u^2+1)^2}du\right]$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}[C-D]$$

Untuk C

$C = \int \frac{1}{(u^2+1)} du$

Subtitusi $u = \tan \nu$ dan $du = \sec^2 \nu \, d\nu$

$C = \int \frac{\sec^2 \nu}{(\tan^2 \nu + 1)} d\nu$

Karena $\tan^2 \nu + 1 = \sec^2 \nu$, maka

$C = \int \frac{\sec^2 \nu}{\sec^2 \nu} d\nu = \int d\nu = \nu = \arctan u$

Untuk D

$D = \int \frac{1}{(u^2+1)^2} du$

Subtitusi $u = \tan \nu$ dan $du = \sec^2 \nu \, d\nu$

$D = \int \frac{\sec^2 \nu}{(\tan^2 \nu + 1)^2} d\nu$

Karena $\tan^2 \nu + 1 = \sec^2 \nu$, maka

$D = \int \frac{\sec^2 \nu}{(\sec^2 \nu)^2} d\nu = \int \cos^2 \nu \, d\nu = \int \frac{1+\cos 2\nu}{2} d\nu = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\nu) d\nu = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{2} \sin 2\nu\right)$

Subtitusi balik $\nu = \arctan u$

$D = \int \frac{1}{(u^2+1)^2} du = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{1}{2} \sin(2 \arctan u)\right)$

Karena $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta}$ maka

$$D = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{1}{2}\left(\frac{2\tan(\arctan u)}{1+\tan^2(\arctan u)}\right)\right)$$

Karena $\tan(\arctan u) = u$, maka

$$D = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right)$$

Mensubtitusi balik C dan D ke persamaan A diperoleh

$$A = \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}\left[\arctan u - \frac{1}{2}\left(\arctan u + \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}\left[\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right]$$

Subtitusi balik $u = \frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}$ diperoleh

$$A = \frac{1}{p\sqrt{q^2y^2-1}}\left\{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}}{1+\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right)^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right) - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\left(\frac{px\sqrt{q^2y^2-1}}{p^2x^2+q^2y^2-1}\right)$$

Untuk $B = \int \frac{2px+1-q^2y^2}{(p^2x^2+q^2y^2-1)^2}\,dx$

Misalkan $x = \frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u$ dan $dx = \frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}du$

$$B = \int \frac{2p\left(\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u\right)+1-q^2y^2}{\left[p^2\left(\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}u\right)^2+q^2y^2-1\right]^2}\,\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p}du$$

$$= \frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{p} \int \frac{2u\sqrt{q^2y^2-1} + 1- q^2y^2}{\{[(q^2y^2-1)u^2\ ]^2 + q^2y^2-1\}^2}\ du$$

$$= \frac{1}{p(q^2y^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[2\sqrt{q^2y^2-1} \int \frac{u}{(u^2+1)^2}\ du - (q^2y^2-1) \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du\right]$$

untuk

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^2}\ du$$

Misalkan $v = u^2 + 1$ dengan $dv = 2u\, du$

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^2}\ du = \int \frac{1}{2v^2}\ dv = \frac{v^{-2+1}}{2(-2+1)} = -\frac{1}{2v}$$

Jadi

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^2}\ du = -\frac{1}{2(u^2+1\ )}$$

Untuk

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\ du$$

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2} du = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right)$$

jadi

$$B = \frac{1}{p(q^2y^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{\sqrt{q^2y^2-1}}{(u^2+1\ )} - \frac{1}{2}(q^2y^2-1)\left(\arctan u + \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{(u^2+1\ )p(q^2y^2-1)} - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\left(\arctan u + \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right)\right]$$

Subtitusi balik $u = \frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}$

$$B = \left\{ -\frac{1}{\left(\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right)^2+1\right)p(q^2y^2-1)} - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\left[\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right) + \left(\frac{\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}}{1+\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right)^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \left\{ -\frac{(2+px)}{2p(p^2x^2+q^2y^2-1)} - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right)\right\}$$

Subtitusi balik $A\ dan\ B\ ke\ dalam\ \omega$

$$\omega = k2q(y^2-1)[A+B]$$

$$= k2q(y^2-1)\left[\frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right) - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\left(\frac{px\sqrt{q^2y^2-1}}{p^2x^2+q^2y^2-1}\right) - \frac{(2+px)}{2p(p^2x^2+q^2y^2-1)} - \frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\arctan\left(\frac{px}{\sqrt{q^2y^2-1}}\right)\right]$$

$$= k2q(y^2-1)\left[-\frac{1}{2p\sqrt{q^2y^2-1}}\left(\frac{px\sqrt{q^2y^2-1}}{p^2x^2+q^2y^2-1}\right) - \frac{(2+px)}{2p(p^2x^2+q^2y^2-1)}\right]$$

$$\omega = \frac{2kq(1-y^2)(px+1)}{p(p^2x^2+q^2y^2-1)} + C$$

- **Untuk γ**

Dipilih persamaan (4.4)

$$\gamma = (1 - y^2)\int \frac{x}{(p^2x^2+q^2y^2-1)(x^2-y^2)}dx$$

Misalkan $u = x^2$ dan $du = 2x\ dx$

$$\gamma = \frac{(1-y^2)}{2}\int \frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)(u-y^2)}du$$

Dilakukan manipulasi penyebut seperti berikut

$$\frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)(u-y^2)} = \frac{A}{(p^2u+q^2y^2-1)} + \frac{B}{(u-y^2)}$$

$$= \frac{A(u-y^2)+B(p^2u+q^2y^2-1)}{(p^2u+q^2y^2-1)(u-y^2)}$$

sehingga diperoleh hubungan

$$A(u- y^2) + B(p^2u + q^2y^2 - 1) = 1$$

Dengan memperhatikan kesetaraan fungsi u antara ruas kiri dan ruas kanan diperoleh

$$Au + Bp^2u = 0$$

$$A = -Bp^2$$

dan

$$By^2(p^2 + q^2) - B = 1$$

karena $p^2 + q^2 = 1$ maka

$By^2 - B = 1$

$B = \frac{1}{y^2-1}$

Dengan mensubtitusi B ke A diperoleh

$A = -\frac{p^2}{y^2-1}$

Kemudian, subtitusi kembali A dan B ke persamaan berikut

$$\frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)(u-y^2)} = \frac{A}{(p^2u+q^2y^2-1)} + \frac{B}{(u-y^2)}$$

$$= \frac{-\frac{p^2}{y^2-1}}{(p^2u+q^2y^2-1)} + \frac{\frac{1}{y^2-1}}{(u-y^2)} = -\frac{p^2}{(y^2-1)(p^2u+q^2y^2-1)} + \frac{1}{(y^2-1)(u-y^2)}$$

sehingga diperoleh γ

$$\gamma = \frac{(y^2-1)}{2}\int\left[\frac{p^2}{(y^2-1)(p^2u+q^2y^2-1)} - \frac{1}{(y^2-1)(u-y^2)}\right]du$$

$$= \frac{(y^2-1)}{2}\left[\int\frac{p^2}{(y^2-1)(p^2u+q^2y^2-1)}du - \int\frac{1}{(y^2-1)(u-y^2)}du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[p^2\int\frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)}du - \int\frac{1}{(u-y^2)}du\right]$$

Untuk $\int\frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)}du$

Misalkan $v = p^2u + q^2y^2 - 1$ dan $dv = p^2du$

$$\frac{1}{p^2}\int\frac{1}{v}dv = \frac{1}{p^2}\ln(p^2u + q^2y^2 - 1)$$

Untuk $\int \frac{1}{(u-y^2)} du$

Misalkan $v = u - y^2$ dan $dv = du$

$$\int \frac{1}{v} dv = \ln v = \ln(u - y^2)$$

Jadi γ diperoleh

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[p^2 \int \frac{1}{(p^2u+q^2y^2-1)} du - \int \frac{1}{(u-y^2)} du\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(p^2u + q^2y^2 - 1) - \ln(u - y^2)\right] + C$$

Subtitusi balik $u = x^2$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[\ln(p^2x^2 + q^2y^2 - 1) - \ln(x^2 - y^2)\right] + C = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{x^2-y^2}\right) + C$$

$$e^{2\gamma - C} = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{x^2-y^2}$$

$$e^{2\gamma} = C' \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{x^2-y^2}$$

LAMPIRAN E

Penentuan parameter transformasi metrik Kerr dalam koordinat *prolate spheroidal* ke bentuk standar dalam koordinat Boyer-Linquist diperoleh berdasarkan hubungan antara potensial kedua metrik tersebut. Merujuk pada persamaan (4.10) diperoleh Metrik Kerr dalam koordinat *prolate spheroidal* yakni

$$ds^2 = \frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}\left[dt - \frac{2kq\left(1-y^2\right)(px+1)}{p\left(p^2x^2+q^2y^2-1\right)}d\phi\right]^2 - \frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2x^2+q^2y^2-1}\left\{\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}\left[\left(\frac{x^2-y^2}{x^2-1}\right)k^2dx^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{1-y^2}\right)k^2dy^2\right] + k^2(x^2-1)(1-y^2)d\phi^2\right\}$$

Sedangkan metrik Kerr dalam koordinat Boyer-Linquist adalah[15]

$$ds^2 = \left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(dt' - \frac{2mra\sin^2\theta}{\varrho^2-2mr}d\phi'\right)^2 - \frac{\varrho^2\Delta}{\varrho^2-2mr}\sin^2\theta\, d\phi'^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}dr^2 - \varrho^2 d\theta^2$$

Metrik (4.10) dapat dibawa kedalam bentuk sederhana serupa metrik papapetrou berdasarkan persamaan (4.1), (4.7) dan (4.9) yakni

$$ds^2 = f(dt-\omega d\phi)^2 - f^{-1}k^2\left[e^{2\gamma}(x^2-y^2)\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right) + (x^2-1)(1-y^2)d\phi^2\right]$$

Sehingga, melaluli hubungan potensial pada suku $d\phi^2$ dari metrik di atas dan metrik Kerr dalam koordiant Boyer-Linquist diperoleh

$$\frac{\varrho^2\Delta}{\varrho^2-2mr}\sin^2\theta = f^{-1}k^2(x^2-1)(1-y^2)$$

dengan $f = 1-\frac{2mr}{\varrho^2}$. Selanjutnya, dengan mensubtitusi nilai f diperoleh

$$(x^2-1)(1-y^2)=\frac{r^2-2mr+a^2}{k^2}\sin^2\theta$$

Dalam koordinat *prolate spheroidal*, x merupakan komponen radial dan y merupakan komponen angular. Karena itu, berdasarkan persamaan di atas diperoleh hubungan

$$x^2=\frac{r^2-2mr+m^2}{m^2-a^2}$$

$$x=\frac{r-m}{(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dengan konstanta k dipilih $k=(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$. Selanjutnya untuk komponen y diperoleh

$$y^2=1-\sin^2\theta$$

$$y=\cos\theta$$

Kemudian, untuk penyederhanaan transformasi pada metrik (4.10) dipilih konstanta $p=\frac{(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{m}$, sehingga diperoleh parameter transformasi

$$px=\frac{r}{m}-1$$

Selanjutnya, merujuk pada syarat konstanta p dan q pada persamaan (3.55) yakni $p^2+q^2=1$, diperoleh konstanta $q=\frac{a}{m}$ sehingga diperole parameter transformasi

$$qy=\frac{a}{m}\cos\theta$$

LAMPIRAN F

Terlebih dahulu diuraikan komponen (4.16b) beserta turunannya sebagai berikut

- **Untuk** $\boldsymbol{A = 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}}$

  Misalkan

$$u = -2mr \quad u' = -2m \quad v = \frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad v' = -\frac{2r}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{4mr^2}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} - \frac{2m}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \frac{2m(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

Kemudian, misalkan

$$u = -2mr \quad u' = 0 \quad v = \frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad v' = \frac{2a^2 \cos\theta \sin\theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -\frac{4mr\,a^2 \cos\theta \sin\theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

- **Untuk** $\boldsymbol{B = \frac{2mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}}$

  Misalkan

$$u = 2mra \sin^2 \theta \quad u' = 2ma \sin^2 \theta \quad v = \frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad v' = -\frac{2r}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

diperoleh

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{2ma \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{4mr^2 a \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} = \frac{2ma \sin^2 \theta(a^2 \cos^2 \theta - r^2)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

Kemudian, misalkan

$u = 2mra\sin^2\theta \quad u' = 4mra\sin\theta\cos\theta \quad v = \frac{1}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \quad v' = \frac{2a^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$

diperoleh

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{4mra^3\sin^3\theta\cos\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{4mra\sin\theta\cos\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{4mra\sin\theta\cos\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} + 1\right)$$

- **Untuk** $\boldsymbol{C = \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta}$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \left[r - \frac{2mra^2\sin^2\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right] 2\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sin^2\theta\, a^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{2mra^2\sin^4\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) = 2\sin\theta\cos\theta\left[r^2 + a^2 + \frac{4mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{2mra^4\sin^4\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

- **Untutk** $\boldsymbol{\mu_2 = \frac{1}{2}[\ln(r^2 + a^2\cos^2\theta) - \ln(r^2 - 2mr + a^2)]}$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial r} = \frac{r}{r^2 + a^2\cos^2\theta} - \frac{r - m}{r^2 - 2mr + a^2}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \theta} = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

- **Untuk** $\boldsymbol{\mu_3 = \frac{1}{2}\ln(r^2 + a^2\cos^2\theta)}$

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial r} = \frac{r}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial \theta} = -\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

- **Untuk $\boldsymbol{\rho^2 = AC + B^2}$**

$$\rho^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta + \left(\frac{2mra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)^2$$

Kemudian, masing-masing komponen di atas disubtitusikan ke dalam simbol Christoffel (3.9), maka diperoleh simbol Christoffel metrik Kerr sebagai berikut

$$\Gamma^0_{20} = \frac{m\sin^2\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)(r^2 - a^2\cos^2\theta) + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}(a^2\cos^2\theta - r^2)\right]$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{2mra^2\sin^3\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left[2mr\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} + 1\right) - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{ma\sin^4\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\left[2r^2 - \frac{4mr^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} - \frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{2mra^3\sin^5\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}(2mr - r^2 - a^2)$$

$$\Gamma^1_{02} = \frac{ma\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\frac{a^2\cos^2\theta - r^2}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{2mra\sin\theta\cos\theta}{\rho^2(r^2+a^2\cos^2\theta)}\left(\frac{a^2\sin^2\theta - 2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} + 1\right)$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{2m^2ra^4\sin^2\theta\cos^2\theta+4m^2r^2a^2\sin^2\theta-2m^2r^3a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3} - \right.$$

$$\left.\frac{2m^2ra^2\sin^2\theta-2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{ma^2\sin^2\theta-2mr^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} + r\right)$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\left[r^2+a^2+\frac{4mra^2\sin^2\theta-2mr^3-2mra^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{2mra^4\sin^4\theta+4m^2r^2a^2-8m^2r^2a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} - \frac{4m^2r^2a^4\sin^4\theta+4m^2r^2a^4\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}\right]$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{m(r^2-a^2\cos^2\theta)(r^2-2mr+a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\Gamma^2_{01} = -\frac{ma\sin^2\theta\,(a^2\cos^2\theta-r^2)(r^2-2mr+a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{(r^2-2mr+a^2)\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\left[r-\frac{2mra^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}+\frac{ma^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta} - \frac{r-m}{r^2-2mr+a^2}$$

$$\Gamma^2_{32} = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{r(r^2-2mr+a^2)}{r^2+a^2\cos^2\theta}$$

$$\Gamma^3_{00} = -\frac{2mra^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\Gamma^3_{01} = -\frac{2mra\sin\theta\cos\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}+1\right)$$

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left[r^2 + a^2 + \frac{4mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{2mra^4\sin^4\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

$$\Gamma^3_{22} = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)(r^2 - 2mr + a^2)}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{r}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$\Gamma^3_{33} = -\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

LAMPIRAN G

Penentuan parameter transformasi metrik Kerr dalam koordinat Boyer-Linquist ke bentuk koordinat Kerr-Schild (serupa kartesian) diperoleh berdasarkan hubungan antara potensial kedua metrik tersebut. Merujuk pada persamaan (4.12) metrik Kerr dalam koordinat Boyer-Linquist adalah[15]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\varrho^2}\right)\left(dt' - \frac{2mra \sin^2\theta}{\varrho^2 - 2mr} d\phi'\right)^2 - \frac{\varrho^2 \Delta}{\varrho^2 - 2mr}\sin^2\theta \, d\phi'^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta} dr^2 - \varrho^2 d\theta^2$$

pada kondisi Minkowskian $(m = 0)$, metrik Kerr di atas tereduksi menjadi

$$ds^2 = dt'^2 - (r^2 + a^2)\sin^2\theta \, d\phi'^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2\cos^2\theta) d\theta^2$$

Merujuk pada persamaan (2.4b) yakni Minkowskian dalam koordinat bola $(t'', \tilde{r}, \phi', \theta)$, diperoleh metrik

$$ds^2 = dt''^2 - \tilde{r}^2 \, sin^2\,\theta \, d\phi'^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\theta$$

Kemudian, melalui potensial pada suku $d\phi'^2$(azimutal) diperoleh $\tilde{r} = \sqrt{r^2 + a^2}$. Sehingga, melalui transformasi koordinat kartesian ke bola di peroleh parameter transformasi antara koordinat Boyer-Lindquist (t', ϕ', r, θ) dan Kerr-Schild (t'', x', y', z') sebagai berikut

$$x' = \tilde{r}\sin\theta\cos\phi' = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\phi'$$

$$y' = \tilde{r}\sin\theta\sin\phi' = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\phi'$$

Untuk z, karena merupakan sumbu simetri yang tidak terpengaruh parameter momentum sudut maka $\tilde{r} = r$, sehingga

$$z = \tilde{r}\cos\theta = r\cos\theta$$