TESIS

KONSTRUKSI SISTEM KORUM (h, k)-KOTERI BERDASARKAN KOTERI MAJORITY

CONSTRUCTION OF (h, k)-COTERIE QUORUM SYSTEM BASED ON MAJORITY COTERIE

ARMAYANI ARSAL
H022171004

PROGRAM PASCASARJANA MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2019

TESIS

KONSTRUKSI SISTEM KORUM (h, k)-KOTERI BERDASARKAN KOTERI MAJORITY

CONSTRUCTION OF (h, k)-COTERIE QUORUM SYSTEM BASED ON MAJORITY COTERIE

sebagai persyaratan untuk memperoleh gelar Magister

disusun dan diajukan oleh

ARMAYANI ARSAL
H022171004

kepada

PROGRAM PASCASARJANA MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2019

HALAMAN PENGESAHAN TESIS

KONSTRUKSI SISTEM KORUM (h, k)-KOTERI BERDASARKAN KOTERI MAJORITY

disusun dan diajukan oleh:

ARMAYANI ARSAL
H022171004

telah dipertahankan dalam Ujian Tesis
pada tanggal 9 Agustus 2019 dan
dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,
Komisi Penasihat

Ketua	Anggota
Dr. Eng. Armin Lawi, M.Eng	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc**

Ketua Program Studi Magister Matematika	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si**

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS HASANUDDIN
FAKULTAS MIPA

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Armayani Arsal
NIM	: H022171004
Program Studi	: Matematika

menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa tesis yang berjudul

KONSTRUKSI SISTEM KORUM (h, k)-KOTERI BERDASARKAN KOTERI MAJORITY

adalah karya ilmiah saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya di dalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan/ditulis/diterbitkan sebelumnya, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, Agustus 2019

ARMAYANI ARSAL

PRAKATA

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah. Syukur alhamdulillah penulis haturkan atas segala rahmat, hidayah, kemudahan serta keberkahan yang Dia limpahkan sehingga penulisan tesis dengan judul "Konstruksi Sistem Korum (h, k)-Koteri Berdasarkan Koteri Majority" dapat terselesaikan dengan baik.

Penulisan tesis ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan motivasi yang terus mengalir dari berbagai pihak. Oleh karena itu, melalui tulisan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ayahanda **Salama** dan Ibunda **Ratna Sari** tercinta yang semasa hidupnya senantiasa memberikan cinta dan kasih sayang yang luar biasa, tanpa kenal lelah menasehati, menyemangati, hingga mengirimkan doa untuk penulis demi kemudahan dan kelancaran segala urusan dalam menuntut ilmu. Doa ananda selalu untuk kalian, semoga tenang di sisi Allah SWT.
2. Adik tercinta **Dwi Sabriyadi Arsal** dan keluarga besar yang selalu memberikan semangat, menguatkan, mendoakan, dan mencurahkan perhatian dan kasih sayang tanpa batas.
3. **Dr. Eng Armin Lawi, M.Eng** dan **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu demi membimbing dan mengarahkan penulis sehingga tesis dapat terselesaikan tepat waktu.

4. **Dr. Loeky Haryanto, M.Sc., M.Math.**, **Dr. Hendra, S.Si., M.Kom.**, dan **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku penguji yang telah meluangkan waktu memberi kritik dan saran demi perbaikan dan penyempurnaan tesis ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin yang telah mendidik dan mencurahkan ilmunya kepada penulis.
6. Dekan, Wakil Dekan, dan staf fakultas MIPA Universitas Hasanuddin, terkhusus Pak **Irsan** dan Pak **Latif** yang telah membantu penulis dalam urusan administrasi.
7. Teman-teman seperjuangan **Pasca Math angkatan 2017**, Sahabat-sahabat terbaik **SILVER** dan **Netizen Squad** yang telah memberikan waktu, dukungan, perhatian, dan ruang kebersamaan dengan rasa persaudaraan kepada penulis.
8. Seluruh pihak yang telah memberi bantuan, dukungan, dan motivasi dalam penulisan tesis ini yang tidak dapat dituliskan satu demi satu,

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan tesis ini. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya bagi penulis, serta dapat memberi sumbangsi bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Makassar, Agustus 2019

Penulis

ABSTRAK

ARMAYANI ARSAL. *Konstruksi Sistem Korum* (h, k)*-Koteri Berdasarkan Koteri Majority* (dibimbing oleh Armin Lawi dan Amir Kamal Amir).

Sistem korum (h, k)-koteri majority adalah suatu sistem himpunan yang unsurnya berupa koleksi himpunan k-koteri dengan ketentuan bahwa setiap unsur memenuhi sifat bikoteri dan disjoint. Beberapa penelitian terkait mencoba membuat konstruksi sistem korum ini akan tetapi terkendala pada masalah generalisasi. Dalam penelitian ini, untuk mengatasi masalah tersebut maka terlebih dahulu dibentuk suatu persamaan untuk menentukan ukuran korum. Selanjutnya dirancang konstruksi penyusunan sistem korum berdasarkan persamaan yang telah diperoleh. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh suatu persamaan $|Q|$ untuk menetukan ukuran korum dalam sistem. Adapun tahap konstruksi sistem korum ialah sebagai berikut: (a) Menentukan unsur semesta masing-masing koteri, (b) Mengkonstruksi koteri dengan ukuran korum $|Q|$, (c) Memilih korum untuk tiap koteri sedemikian sehingga sistem korum memenuhi sifat bikoteri dan disjoint. Cara lain yang dapat dilakukan ialah dengan menggunakan operasi join.

Kata Kunci: (h, k)-koteri majority, korum, koteri, operasi join, sistem korum.

ABSTRACT

ARMAYANI ARSAL. *Construction of* (h, k)*-Coterie Quorum System Based on Majority Coterie* (supervised by Armin Lawi and Amir Kamal Amir).

Quorum system of (h, k)-majority coterie is a set system which elements are a collection of sets k-coterie provided that each element satisfies bicoterie and disjoint properties. Some of related studies have tried to make the construction of this quorum system but constrained by the problem of generalization. In this paper, to overcome the problem we first compile an equation to determine the size of quorum. Then we arrange quorums that satisfies the equation in a quorum system. Based on research results, we find an equation of $|Q|$ to determine a size of quorum in system. The way of construction of quorum system are (a) we arrange an universe set for each coterie, (b) we construct a coterie which a size of quorum in coterie satisfy an equation $|Q|$, (c) we choose quorum since that a quorum system satisfy a bicoterie and disjoint property. In other way to construction a quorum system we can use a joint operation.

Keywords: (h, k)-majority coterie, quorum, coterie, joint operation, quorum system.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Korum adalah suatu himpunan yang memuat unsur himpunan semesta, baik sebagian ataupun seluruhnya. Korum-korum yang memenuhi syarat irisan dan minimalitas membentuk satu kesatuan yang disebut koteri. Koteri memiliki peranan yang penting dalam menyelesaikan masalah alokasi sumber daya, seperti masalah mutual exclusion. Oleh karena itu, banyak peneliti yang mengembangkan konsep himpunan korum dan koteri.

Awalnya, Molina dan Barbara (1985) memperkenalkan sebuah koleksi himpunan koteri dengan syarat irisan dan minimalitas yang mengikat anggotanya. Selanjutnya muncul macam-macam koteri diantaranya koteri majority yang menambahkan syarat yaitu jumlah anggota korum harus memenuhi persamaan $|Q| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Pada tahun 1992, Kakugawa dkk melakukan penelitian terkait pengembangan koteri dan menghasilkan koleksi himpunan baru yang disebut k-koteri.

Selain koteri, pengembangan sistem himpunan korum juga menjadi hal yang menarik untuk diteliti. Pada tahun 1993, Ibaraki dan Kameda memperkenalkan sebuah sistem himpunan beranggotakan sepasang koteri yang disebut bikoteri. Selanjutnya lahir ide pengembangan konsep bikoteri menjadi sistem himpunan yang beranggotakan lebih dari dua koteri. Pada tahun 2004, Joung memperkenalkan sistem korum $(m, 1, k)$-koteri, namun terbatas pada $h = 1$. Hingga akhirnya Lawi dkk (2006) berhasil menjawab keterbatasan h dengan penemuan sistem himpunan baru yang disebut (m, h, k) -koteri. Selanjutnya, Joung (2010) menggunakan pendekatan korum (m, h, k)-koteri tersebut dan membentuk sistem lain yang disebut (n, m, k, d). Akan tetapi konsep-konsep ini hanya dapat digunakan pada himpunan semesta P yang jumlah anggotanya merupakan bilangan kuadrat atau $n = a^2$.

Berdasarkan uraian tersebut maka dilakukan pengkajian dan penelitian dengan judul **"Konstruksi Sistem Korum $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ -Koteri Berdasarkan Koteri Majority"**. Penelitian ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat penyelesaian studi Magister Matematika di Universitas Hasanuddin.

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah :

1. Bagaimana bentuk persamaan $|Q|$ untuk korum (h, k)-koteri?
2. Bagaimana cara konstruksi sistem korum (h, k)-koteri yang baru?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan melakukan penelitian ini adalah :

1. Menghasilkan bentuk persamaan $|Q|$ untuk korum (h, k)-koteri.
2. Menghasilkan cara konstruksi sistem korum (h, k)-koteri baru.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memperoleh bentuk persamaan $|Q|$ dan cara konstruksi sistem korum (h, k)-koteri baru.
2. Sebagai bahan rujukan untuk pengembangan sistem himpunan korum.

E. Batasan Masalah

Mengingat luasnya cakupan permasalahan yang ada, agar penelitian ini berjalan dengan baik sesuai dengan inti penelitian yang diinginkan maka perlu dilakukan pembatasan masalah. Adapun batasan masalah dalam penelitian ini ialah:

1. Menggunakan koleksi himpunan korum yaitu koteri majority dan k-koteri majority.
2. Menggunakan sistem korum yang berorientasi pada himpunan m.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Sistem himpunan adalah suatu himpunan yang unsurnya terdiri dari koleksi himpunan yang membentuk satu kesatuan. Koleksi himpunan adalah suatu himpunan yang unsurnya terdiri dari himpunan. Berikut ini adalah contoh koleksi himpunan dan sistem himpunan.

Misalkan P adalah himpunan semesta.

A. Koteri

Definisi 2.1. *Suatu koleksi himpunan* $C(C \subseteq 2^P)$ *yang memuat himpunan bagian tak kosong dari himpunan* P *disebut koteri dari himpunan* P *jika dan hanya jika memenuhi syarat berikut:* (Molina dan Barbara,1985)

a. *Irisan* : $\forall Q, Q' \in C$ *berlaku* $Q \cap Q' \neq \emptyset$

b. *Minimalitas* : $\forall Q, Q' \in C$ *berlaku* $Q \not\subset Q'$

Contoh 2.1

1. Koleksi himpunan $C = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ merupakan koteri atas semesta $P = \{1,2,3\}$ dengan anggota C yaitu $\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ disebut korum karena memenuhi syarat irisan dan minimalitas pada definisi 2.1.
2. Koleksi himpunan $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\}\}$ bukan koteri karena terdapat himpunan $\{1,3\}$ dan $\{2,4\}$ yang tidak memenuhi syarat irisan.

3. Koleksi himpunan $B = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ bukan koteri karena terdapat himpunan $\{1,2\}$ dan $\{1,2,3\}$ yang tidak memenuhi syarat minimalitas.

Berikut ini beberapa jenis koteri.

a. Koteri Singelton

Definisi 2.2. *Suatu koleksi himpunan S disebut koteri singelton atas himpunan P jika $S = \{\{v\}\}, v \in P$.*

Contoh 2.2

Misalkan $P = \{1,2,3\}$ maka $S = \{\{1\}\}$ adalah koteri singelton.

b. Koteri Majority

Definisi 2.3. *Suatu koleksi himpunan M disebut koteri majority atas himpunan P jika dan hanya jika $M = \left\{Q \middle| |Q| = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1, Q \subseteq P\right\}$, dengan $n = |P|$.*

Konstruksi koteri majority sangat sederhana, yaitu dengan membagi dua jumlah anggota himpunan semesta agar syarat minimalitas terpenuhi. Kemudian menambahkan 1 anggota ke dalam masing-masing bagian sebagai pengikat sehingga syarat irisan terpenuhi. (Thomas, 1979)

Contoh 2.3

1. Koleksi himpunan $M = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ merupakan koteri majority atas semesta $P = \{1,2,3,4\}$ karena untuk setiap

himpunan korum di dalam M, jumlah anggotanya memenuhi definisi 2.3, yaitu: $|Q| = \left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor + 1 = 3$.

2. Koleksi himpunan $C = \{\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{1,2\}\}$ merupakan suatu koteri atas semesta $P = \{1,2,3,4,5\}$, akan tetapi bukan koteri majority karena terdapat korum $\{1,2\}$ yang jumlah anggotanya 2. Hal ini melanggar definisi 2.3. yaitu jumlah anggota setiap korum dalam koteri majority harus memenuhi persamaan: $|Q| = \left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor + 1 = 3$.

c. Koteri Grid

Definisi 2.4. *Misalkan P adalah himpunan titik yang diatur dalam bentuk bujur sangkar berukuran $a \times a$. Korum grid adalah gabungan dari titik-titik pada garis penuh dan kolom yang saling berpotongan. Jumlah anggota P adalah $n = a^2$ dan $|Q| = 2a - 1$.* (Maekawa, 1985)

Contoh 2.4

Misalkan $P = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ maka $a = 3$ dan $|Q| = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Koteri grid dari semesta P ialah $C = \{\{1,2,3,4,7\},\{1,4,5,6,7\},\{1,4,7,8,9\},\{1,2,3,5,8\},\{2,4,5,6,8\},\{2,5,7,8,9\},\{1,2,3,6,9\},\{3,4,5,6,9\},\{3,6,7,8,9\}\}$.

d. Koteri Tree

Definisi 2.5. *Misalkan P adalah himpunan titik yang diatur dalam bentuk graf lengkap a-anak pohon dengan ketinggian d dan $n = \sum_{0 \le i \le d} a^i$ untuk sembarang bilangan bulat a dan $d = 0,1,2,\ldots$.*

Sebuah korum dalam pohon T terdiri dari akar, mayoritas cabang batangnya, mayoritas rantingnya, dan seterusnya. (Agrawal dan Abbadi, 1991)

Contoh 2.5

Misalkan $P = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ dengan $a = 2$ dan $d = 2$. Koteri tree dari himpunan P ialah $C = \{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\}\}$.

B. k-Koteri

Koleksi himpunan k-koteri merupakan perluasan dari syarat 1 definisi 2.1. Jika pada koteri setiap korum harus saling beririsan, maka pada k-koteri dirancang sebuah syarat yang menjamin bahwa terdapat k korum yang saling lepas sedangkan untuk setiap $k+1$ korum harus saling beririsan.

Definisi 2.6. *Misalkan $k > 1$. Suatu koleksi himpunan C yang memuat himpunan bagian tak kosong dari himpunan P disebut k-koteri dari P jika dan hanya jika memenuhi syarat berikut:* (Kakugawa dkk, 1992)

a. *Saling lepas : $\forall Q_1, Q_2, \dots, Q_d \in C$ yang saling lepas dengan $d < k$, berlaku $Q_i \cap Q_j = \emptyset, 1 \leq i \neq j \leq d, \exists Q \in C \ni Q \cap Q_i = \emptyset, 1 \leq i \leq d$.*
b. *Irisan : $\forall Q_1, Q_2, \dots, Q_p \in C,\ p > k, \exists (Q_i, Q_j) \ni Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, $1 \leq i \neq j \leq p$.*
c. *Minimalitas : $\forall Q_i, Q_j \in C$ berlaku $Q_i \not\subset Q_j$.*

Untuk koleksi himpunan korum 1-koteri disebut juga koteri.

Contoh 2.6

Koleksi himpunan $C = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},$ $\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$ adalah 3-koteri atas semesta $P = \{1,2,3,4,5,6\}$ karena memenuhi syarat dalam definisi 2.6 yaitu:

a. Saling lepas: Setiap dua korum di dalam C yang saling lepas (tidak beririsan), misal $\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$, terdapat korum yang lain di dalam C yaitu $\{5,6\}$ yang juga saling lepas dengan korum $\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$.
b. Irisan: Untuk setiap empat korum atau lebih di dalam C terdapat dua korum di antaranya yang saling beririsan, misalnya $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$ dan $\{1,3\}$ terdapat korum $\{1,2\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$, atau korum $\{3,4\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$. Demikian pula untuk setiap $p(p > k)$ korum lainnya akan selalu terdapat pasangan korum yang saling beririsan.
c. Minimalitas: Untuk setiap korum di dalam C tidak saling subset.

Contoh 2.7

Koleksi himpunan $C = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\big\}$ bukan merupakan 2-koteri atas himpunan semesta $P = \{1,2,3,4\}$ karena tidak memenuhi syarat saling lepas yaitu $\{1,2\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$, $\{1,2\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset$, dan $\{1,3\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset$.

Contoh 2.8

Koleksi himpunan $C = \big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{3,5\}\big\}$ bukan merupakan 2-koteri atas himpunan semesta $P = \{1,2,3,4,5,6\}$ karena tidak memenuhi syarat irisan yaitu terdapat tiga korum $\{1,2\}, \{3,4\}$ dan $\{5,6\}$ yang tidak memuat pasangan korum yang saling beririsan.

Contoh 2.9

Koleksi himpunan $C = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{4\}, \{4,5\}\big\}$ bukan merupakan 2-koteri karena tidak memenuhi syarat minimalitas yaitu terdapat korum $\{4\} \subset \{4,5\}$.

Selain k-koteri juga terdapat k-koteri majority. Adapun definisinya diberikan oleh definisi 2.7 berikut.

Definisi 2.7. *Suatu koleksi himpunan M disebut k-koteri majority atas himpunan P jika dan hanya jika $M = \left\{Q \middle| |Q| = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1,\ Q \subseteq P\right\}$, dengan $n > k$ dan $n = |P|$.*

Contoh 2.10

1. Misalkan $P = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $k = 3$ maka $|Q| = \left\lfloor \frac{6}{3+1} \right\rfloor + 1 = 2$.

   Jadi, 3-koteri untuk himpunan P ialah

   $$C = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}\}.$$

2. Koleksi himpunan $C = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4\}\big\}$ bukan 2-koteri majority atas himpunan semesta $P = \{1,2,3,4\}$ karena terdapat korum $\{4\}$ yang jumlah anggotanya tidak memenuhi persamaan $|Q| = \left\lfloor \frac{5}{2+1} \right\rfloor + 1 = 2$.

C. Bikoteri

Definisi 2.8. *Misalkan* C_1 *dan* C_2 *adalah koleksi himpunan bagian dari* P*. Sistem himpunan* $B = \{C_1, C_2\}$ *disebut bikoteri dari* P *jika dan hanya jika memenuhi:* (Ibaraki dan Kameda, 1993)

a. *Irisan* : $\forall Q \in C_1, \forall Q' \in C_2$ *berlaku* $Q \cap Q' \neq \emptyset$.

b. *Minimalitas* : $\forall Q \in C_1, \forall Q' \in C_2$ *berlaku* $Q \not\subset Q$.

Contoh 2.11

1. Misalkan himpunan $P = \{1,2,3,4\}$. Sistem himpunan $B = \{C_1, C_2\}$, dengan $C_1 = \big\{\{1,2\}, \{3,4\}\big\}$ dan $C_2 = \big\{\{1,3\}, \{2,4\}\big\}$ adalah sebuah bikoteri dari P.
2. Misalkan himpunan $P = \{1,2,3,4,5\}$. Sistem himpunan $D = \{C_1, C_2\}$, dengan $C_1 = \big\{\{1,2\}, \{3,4\}\big\}$ dan $C_2 = \big\{\{1,3\}, \{2,5\}\big\}$ bukan merupakan sebuah bikoteri dari P karena tidak memenuhi syarat irisan yaitu terdapat korum $Q = \{3,4\} \in C_1$ dan $Q' = \{2,5\} \in C_2$ sedemikian sehingga $Q \cap Q' = \emptyset$.

D. $(m, 1)$-koteri

Definisi 2.9. *Diberikan himpunan* $P \neq \emptyset$*. Suatu sistem himpunan* $B = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ *dengan* $C_i \neq \emptyset (C_i \subseteq 2^P)$ *disebut* $(m, 1)$*-koteri dari* P *jika dan hanya jika memenuhi:* (Joung,2004)

a. *Irisan* : $\forall Q_1 \in C_i, \forall Q_2 \in C_j, 1 \leq i \neq j \leq m$, *berlaku* $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

b. *Minimalitas* : $\forall Q_1, Q_2 \in C_i, 1 \leq i \leq m$, *berlaku* $Q_1 \not\subset Q_2$.

Sistem korum $(m, 1)$-koteri kemudian dijadikan acuan untuk membentuk $(m, 1, k)$-koteri dengan banyak unsur himpunan P yang memenuhi ialah k^2.

Contoh 2.12

Sistem korum $B = \{C_1, C_2, C_3\}$ adalah $(3,1,2)$-koteri dari himpunan $P = \{1,2,3,4\}$ dengan:

$$C_1 = \{\{1,2\}, \{3,4\}\},$$

$$C_2 = \{\{1,3\}, \{2,4\}\},$$

$$C_3 = \{\{1,4\}, \{2,3\}\},$$

karena memenuhi syarat pada definisi 2.9 yaitu:

a. Irisan: setiap korum di dalam C_i saling beririsan dengan setiap korum di dalam C_j dengan $1 \leq i \neq j \leq 3$. Misalkan diambil korum $\{1,2\} \in C_1$ maka dengan anggota C_2 berlaku $\{1,2\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$ dan $\{1,2\} \cap \{2,4\} \neq \emptyset$. Demikian pula dengan anggota C_3 berlaku $\{1,2\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset$ dan $\{1,2\} \cap \{2,3\} \neq \emptyset$. Hal yang sama juga berlaku untuk pengambilan sembarang korum.
b. Minimalitas: setiap korum $Q, Q' \in C_i, 1 \leq i \leq 3$, jelas bahwa $Q \not\subset Q'$.

Adapun tahapan untuk menyusun korum dalam tiap koteri ialah sebagai berikut:

- Mula-mula anggota himpunan P diatur dalam bentuk grid.

1	2
3	4

- Kemudian anggota yang segaris disatukan dalam sebuah korum, sehingga diperoleh korum $\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,4\}$, dan $\{2,3\}$.
- Selanjutnya dibentuk koteri dengan anggota berupa korum yang membentuk garis serupa dalam grid. Sehingga diperoleh koteri seperti berikut:

$$C_1 = \big\{\{1,2\}, \{3,4\}\big\},$$

$$C_2 = \big\{\{1,3\}, \{2,4\}\big\},$$

$$C_3 = \big\{\{1,4\}, \{2,3\}\big\}.$$

Berdasarkan algoritma penyusunan korum dalam koteri ini diketahui bahwa jumlah m yang dibentuk hanya sebanyak 3 yaitu C_1 memuat garis horizontal, C_2 memuat garis vertikal, dan C_3 memuat garis diagonal.

E. $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$-Koteri

Definisi 2.10. *Misalkan sistem himpunan* $B = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, *dengan* C_i *adalah* k*-koteri dari* P. *Sistem himpunan* B *disebut* (m, h, k)*-koteri dari* P *jika dan hanya jika* $\forall C_i \in B$ *memenuhi:* (Lawi dkk, 2006) *a. Disjoint:* $\forall C_1, C_2, \dots, C_l \in B$ $(l < h)$ *yang saling lepas terdapat* $C \in B$ *sedemikian sehingga* C *dan* C_i *saling lepas untuk setiap* $i = 1,2,\dots,l$.

b. Bikoteri: $\forall C_1, C_2, \dots, C_h, C_{h+1} \in B$ *terdapat pasangan* $\{C_i, C_j\}$ *yang membentuk bikoteri dengan* $1 \le i \ne j \le h+1$.

Penyusunan korum untuk sistem himpunan ini berlaku jika (h,k)-koteri sesuai dengan $\left(\frac{m}{2}, \sqrt{\frac{n}{m}}\right)$-koteri dengan n adalah banyak anggota himpunan semesta P.

Contoh 2.13.

Sistem korum $B = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah (2,2) -koteri dari himpunan $P = \{1,2,3,\dots,16\}$ dengan:

$$C_1 = \{\{1,3,5,7\},\{9,11,13,15\}\},$$

$$C_2 = \{\{1,2,9,10\},\{3,4,11,12\}\},$$

$$C_3 = \{\{2,4,6,8\},\{10,12,14,16\}\},$$

$$C_4 = \{\{5,6,13,14\},\{7,8,15,16\}\},$$

karena memenuhi syarat pada definisi 2.10 yaitu:

a. Disjoint: $\forall C_1, C_2, \dots, C_l \in B$ $(l < h)$ yang saling lepas terdapat $C \in B$ sedemikian sehingga C dan C_i saling lepas untuk setiap $i = 1,2,\dots,l$. Karena $h = 2$ maka terdapat dua koleksi himpunan yang saling lepas. Misalkan diambil $C_1 = \{\{1,3,5,7\},\{9,11,13,15\}\}$ maka terdapat $C_3 = \{\{2,4,6,8\},\{10,12,14,16\}\}$ sedemikian sehingga C_1 dan C_3 saling lepas, yaitu

$$\{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \emptyset,$$

$$\{1,3,5,7\} \cap \{10,12,14,16\} = \emptyset,$$

$$\{9,11,13,15\} \cap \{2,4,6,8\} = \emptyset,$$

$$\{9,11,13,15\} \cap \{10,12,14,16\} = \emptyset$$

b. Bikoteri: $\forall C_1, C_2, \ldots, C_h, C_{h+1} \in B$ terdapat pasangan $\{C_i, C_j\}$ yang membentuk bikoteri dengan $1 \leq i \neq j \leq h+1$. Karena $h = 2$ maka untuk setiap tiga koleksi himpunan di dalam B terdapat pasangan yang membentuk bikoteri. Misalkan diambil koleksi himpunan $C_1, C_2, C_3 \in B$ maka terdapat pasangan $\{C_1, C_2\}$ dan $\{C_2, C_3\}$ yang masing-masing membentuk bikoteri.

Penyusunan korum dalam setiap koteri agar memenuhi syarat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

- Mula-mula himpunan P yang terdiri dari n unsur disusun dalam bentuk grid yang kemudian dibagi menjadi m bagian. Jadi untuk $n = 16$ dan $m = 4$ maka

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- Kemudian membentuk koteri dengan menggabungkan tiap 2 unsur yang bersesuaian letak dari masing-masing bagian, sehingga diperoleh

$$C_1 = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$C_2 = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}\}$$

$$C_3 = \{1,2,3,4,9,10,11,12\}$$

$$C_4 = \{5,6,7,8,13,14,15,16\}$$

- Selanjutnya dibentuk k -koteri yaitu 2 -koteri. Caranya ialah menyusun kembali koteri menjadi 2 korum sesuai dengan pembagian grid, sehingga diperoleh

$$C_1 = \left\{\{1,3,5,7\},\{9,11,13,15\}\right\}$$

$$C_2 = \left\{\{2,4,6,8\},\{10,12,14,16\}\right\}$$

$$C_3 = \left\{\{1,2,9,10\},\{3,4,11,12\right\}$$

$$C_4 = \left\{\{5,6,13,14\},\{7,8,15,16\}\right\}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian pustaka (studi literatur) yaitu mengumpulkan bahan penelitian melalui jurnal dan literatur terkait.

B. Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan di kampus Universitas Hasanuddin Makassar. Penelitian akan dimulai pada bulan Mei 2019.

C. Tahapan Penelitian

Untuk mendapatkan hasil penelitian yang memenuhi kriteria penulisan karya tulis ilmiah maka dalam penelitian ini dilakukan beberapa tahapan penelitian, yaitu:

1. Tahap inisiasi

   Pada tahap ini akan dilakukan persiapan penelitian, meliputi pengumpulan jurnal dan literatur terkait yang relevan dengan penelitian. Pada tahap ini pula akan dilakukan kajian pustaka atau kajian teoritik terhadap materi penelitian.

2. Tahap investigasi

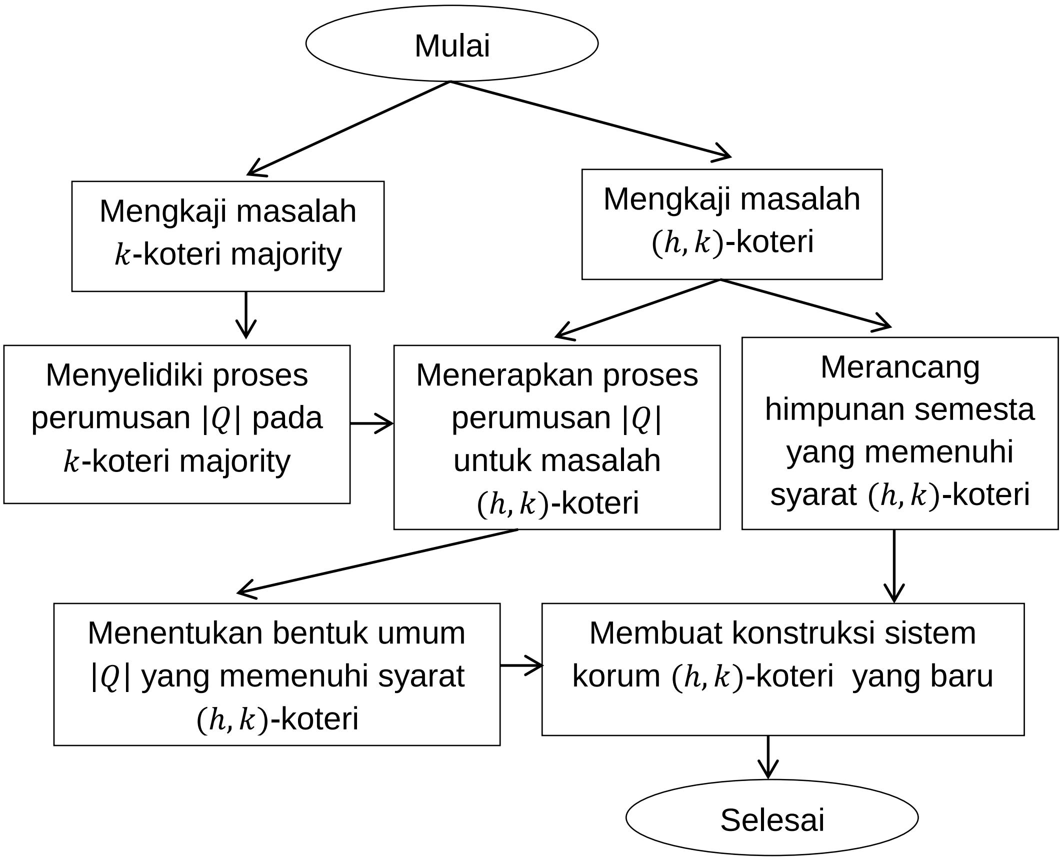
Pada tahap ini akan dilakukan penyelidikan dan analisis lebih mendalam tentang bentuk-bentuk koteri di antaranya koteri majority, k-koteri majority, dan (h, k)-koteri serta algoritma pembentukannya. Pada tahap ini pula akan disusun algoritma pembentukan koteri yang baru berdasarkan beberapa bentuk koteri yang telah diselidiki.

3. Tahap verifikasi

   Pada tahap ini akan dilakukan verifikasi terhadap hasil investigasi yang diperoleh sebelumnya. Hasil investigasi yang telah diverifikasi akan menjadi hasil penelitian.

D. Alur Kerja Penelitian

Alur kerja penelitian ini akan dilakukan sesuai uraian berikut. Pertama-tama yang akan dikaji adalah masalah korum dan sistem korum. Di dalamnya akan diperoleh berbagai macam bentuk koteri di antaranya koteri majority, k-koteri majority hingga (h, k)-koteri. Pada masalah k-koteri akan diselidiki tahapan pembentukan persamaan $|Q|$ yang kemudian akan dijadikan acuan untuk menyusun persamaan $|Q|$ untuk (h, k)-koteri. Kemudian pada (h, k)-koteri akan dilakukan pengkajian lebih mendalam untuk menentukan bentuk persamaan $|Q|$ dan merancang himpunan semesta yang memenuhi keadaan (h, k) -koteri. Langkah terakhir ialah menyusun tahapan pembentukan koteri baru berdasarkan syarat $|Q|$. Berikut disajikan bagan alur dari penelitian yang akan dilakukan:



Gambar 3.1. Bagan Alur Penelitian

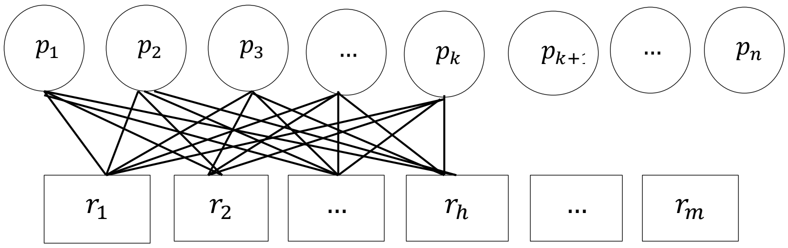
BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Masalah $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$-Sumber Daya Teralokasi

Suatu sistem terdistribusi yang terdiri dari m sumber daya akan dialokasikan untuk n proses dengan syarat derajat konkurensi (hk) tercapai. Derajat konkurensi (hk) artinya dalam satu waktu terdapat h sumber daya aktif, dari m sumber daya yang tersedia, yang dapat diakses secara bersamaan oleh masing-masing k proses. Masalah yang dihadapi dalam sistem (n, m, h, k)-sumber daya teralokasi ialah penentuan nilai n dan m yang dapat menjamin bahwa setiap h sumber daya yang aktif dapat dialokasikan secara bersamaan dan bahwa setiap k-proses yang ingin mengakses sumber daya dapat dilayani dalam satu waktu.

Hubungan antara proses, akses, dan sumber daya dalam masalah (n, m, h, k) -sumber daya teralokasi dapat dinyatakan dalam bentuk *Complete Resource Allocation Graph (CRAG)*. CRAG dalam hal ini melibatkan himpunan proses P dan himpunan sumber daya R membentuk graf bipartisi $G = (V, E)$, dengan $V = \{P \cup R\}$ dan E adalah himpunan sisi. Suatu unsur $e = (p, r)$ dikatakan sisi jika dan hanya jika proses p meminta hak akses ke sumber daya r.



Gambar 4.1. CRAG untuk masalah (n, m, h, k)-sumber daya teralokasi

Konfigurasi sisi pada CRAG dapat digambarkan dalam berbagai bentuk selama derajat konkurensi terpenuhi.

Untuk menyelesaikan masalah (n, m, h, k)-sumber daya teralokasi maka perlu ditentukan struktur dan ukuran sistem yang melibatkan himpunan n dan m. Salah satu solusi dari permasalahan ini ialah dengan membentuk sistem korum (h, k)-koteri majority.

B. Konstruksi Sistem Korum $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$-Koteri Majority

Sistem korum (h, k)-koteri majority adalah suatu sistem himpunan yang unsurnya berupa koleksi himpunan k-koteri yang memenuhi sifat yaitu setiap h unsur saling disjoint dan setiap $h + 1$ unsur atau lebih saling bikoteri.

Definisi 4.1 ($(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ -Koteri Majority). *Diberikan himpunan semesta* $P = \{1,2, \dots, n\}$ *. Misalkan sistem himpunan* $B = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ *adalah koleksi* k*-koteri dari* P*. Sistem himpunan* B *yang memenuhi sifat disjoint* *dan bikoteri disebut (h,k)-koteri majority atas P jika dan hanya jika $\forall C \in B$ memenuhi:*

$$C = \left\{ Q \middle| |Q| = \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1}{k+1} \right\rceil + (m-h-1)k \right\}$$

dengan $m \geq 2h$ dan $n \geq hk|Q|$

Pada penelitian ini, konstruksi sistem korum dilakukan dalam dua tahap yaitu menentukan ukuran korum yang akan dikonstruksi dan menyusun korum dalam koteri sedemikian sehingga semua sifat terpenuhi.

a. Ukuran Korum

Ukuran korum adalah banyaknya unsur yang dimiliki oleh suatu himpunan korum. Dalam sistem korum (h,k) -koteri, ukuran korum didasarkan pada banyaknya unsur himpunan semesta yang dapat dibagikan ke dalam m koleksi himpunan korum dengan ketentuan sifat k-koteri, bikoteri, dan disjoint terpenuhi.

Tahapan konstruksi sistem korum (h,k) -koteri majority diawali dengan penentuan jumlah anggota korum yang didasarkan pada penentuan jumlah anggota korum untuk koteri majority. Pada koteri majority, untuk himpunan semesta P yang terdiri dari n unsur, jumlah anggota setiap korum memenuhi persamaan

$$|Q| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, Q \subseteq P \qquad (4.1)$$

Dengan melakukan perluasan nilai k, yaitu $k \geq 1$ (k-koteri majority), maka jumlah anggota korum memenuhi persamaan

$$|Q| = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n+1}{k+1} \right\rceil, Q \subseteq P \qquad (4.2)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dan (4.2) maka disusun suatu persamaan untuk menentukan jumlah anggota korum pada sistem korum (h, k)-koteri majority dengan mengikuti langkah berikut.

1. Menentukan jumlah unsur untuk setiap C_i

   Misalkan himpunan semesta P terdiri dari n unsur maka setiap $C_i, i = 1,2, \dots, m$ terdiri dari $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ unsur. Dengan demikian diperoleh sistem korum awal sebagai berikut:

   $C_1 = \{Q_1\}$, dengan $Q_1 \subseteq P_1$ dan $|Q_1| = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$

   $C_2 = \{Q_2\}$, dengan $Q_2 \subseteq P_2$ dan $|Q_2| = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$

   $\vdots$

   $C_m = \{Q_m\}$, dengan $Q_m \subseteq P_m$ dan $|Q_m| = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$

   dimana $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m = P$.

2. Menentukan jumlah anggota tiap korum di dalam C_i yang memenuhi sifat k-koteri dan syarat h

   Berdasarkan tahap 1 diperoleh bahwa setiap P_i terdiri dari $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ unsur dan $C_i = \{Q_i\}$. Dengan kata lain pada tahap 1 hanya dipeoleh korum tunggal. Oleh karena itu, agar syarat k-koteri terpenuhi maka perlu dilakukan pemekaran korum $Q_i$menjadi beberapa korum. Hal ini akan menyebabkan ukuran korum di dalam C_i menyusut.

Misalkan P_i adalah semesta dari C_i. Agar sifat k-koteri terpenuhi maka setiap korum di dalam C_i harur memenuhi persamaan:

$$\left|Q_{ij}\right| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil, i = 1,2, \dots m; j = 1,2, \dots, k, \dots \qquad (4.3)$$

Dengan demikian diperoleh sistem korum sebagai berikut:

$$C_1 = \{Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1j} \mid Q_{1j} \subseteq P_1\}$$

$$C_2 = \{Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j} \mid Q_{2j} \subseteq P_2\}$$

$$\vdots$$

$$C_m = \{Q_{m1}, Q_{m2}, \dots, Q_{mj} \mid Q_{mj} \subseteq P_m\}$$

Untuk memenuhi syarat h maka harus diperhatikan sifat disjoint dan bikoteri pada definisi 2.10. Berdasarkan definisi 2.10, diketahui bahwa setiap koteri akan berpasangan membentuk bikoteri dengan $(m-h)$ koteri lainnya di dalam sistem.

$$C_1 = \{Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1j} \mid Q_{1j} \subseteq P_1\}$$

$$C_2 = \{Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j} \mid Q_{2j} \subseteq P_2\}$$

$$C_3 = \{Q_{31}, Q_{32}, \dots, Q_{3j} \mid Q_{3j} \subseteq P_3\}$$

$$\vdots$$

$$C_{(m-h)} = \{Q_{(m-h)1}, Q_{(m-h)2}, \dots, Q_{(m-h)j} \mid Q_{(m-h)j} \subseteq P_{(m-h)}\}$$

$$C_{(m-h)+1} = \{Q_{(m-h+1)1}, Q_{(m-h+1)2}, \dots, Q_{(m-h+1)j} \mid Q_{(m-h+1)j} \subseteq P_{(m-h+1)}\}$$

$$\vdots$$

$$C_m = \{Q_{m1}, Q_{m2}, \dots, Q_{mk} \mid Q_{mk} \subseteq P_m\}$$

Proses saling bikoteri menyatakan bahwa setiap himpunan semesta dari pasangan bikoteri saling beririsan. Dengan kata lain, agar sifat bikoteri terpenuhi maka penyusunan korum di dalam koteri harus berasal dari himpunan semesta baru P_i^* yang merupakan hasil penggabungan beberapa anggota himpunan semesta awal P_i.

Dengan demikian akan diperoleh

$$C_1 = \left\{Q_{11}^*, Q_{12}^*, \dots, Q_{1j}^* \mid Q_{1j}^* \subseteq P_1^*\right\}$$

$$C_2 = \left\{Q_{21}^*, Q_{22}^*, \dots, Q_{2j}^* \mid Q_{2j}^* \subseteq P_2^*\right\}$$

$$\vdots$$

$$C_m = \left\{Q_{m1}^*, Q_{m2}^*, \dots, Q_{mj}^* \mid Q_{mj}^* \subseteq P_m^*\right\}$$

3. Menentukan jumlah anggota korum untuk sistem korum (h, k)-koteri majority

   Akibat dari pemenuhan sifat bikoteri pada tahap 2 menyebabkan ukuran korum bertambah. Banyaknya unsur yang bertambah dapat diselidiki dari jumlah koteri yang saling bikoteri.

   Jika $Q_1 \subseteq P_1, Q_2 \subseteq P_2, Q_3 \subseteq P_3, \dots, Q_{m-h} \subseteq P_{m-h}, Q_{m-h+1} \subseteq P_{m-h+1}$, maka setiap korum dalam $C_2, C_3, \dots, C_{(m-h)}, C_{(m-h+1)}$ akan saling berbagi unsur dengan setiap korum di dalam C_1 sedemikian sehingga $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset, Q_1 \cap Q_3 \neq \emptyset, \dots, Q_1 \cap Q_{m-h} \neq \emptyset, Q_1 \cap Q_{m-h+1} \neq \emptyset$. Dengan demikian, $\forall Q_i \in C_i, i = 1,2, \dots, m$ akan medapatkan tambahan anggota korum paling sedikit k dari tiap pasangan bikoterinya. Jadi persamaan (4.3) menjadi

$$|Q_{ij}| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (m-h-1)k \tag{4.4}$$

dengan $\frac{n}{m} > k$ dan $m \geq 2h$.

b. Konstruksi Sistem Korum

Konstruksi sistem korum (h,k)-koteri adalah mengatur korum-korum dalam sistem sedemikian sehingga diperoleh untuk setiap koteri yang terbentuk memenuhi sifat k-koteri, bikoteri, dan disjoint

Tahapan konstruksi sistem korum (h,k)-koteri ialah sebagai berikut:

1. Menentukan unsur semesta P_i

   Agar sistem korum memenuhi sifat disjoint maka harus terdapat semesta P_i yang saling lepas dengan beberapa himpunan semesta lainnya, tergantung nilai h. Dengan kata lain

$$\exists P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_h = \emptyset$$

   Agar sistem korum memenuhi sifat bikoteri maka harus terdapat P_i yang saling bikoteri dengan beberapa himpunan semesta lainnya, tergantung nilai h. Dengan kata lain

$$\exists P_1, P_{h+1}, P_{h+2}, \ldots, P_m \ni P_1 \cap P_{h+1} \neq \emptyset, P_1 \cap P_{h+2} \neq \emptyset, \ldots, P_1 \cap P_m \neq \emptyset$$

Dengan demikian diperoleh P_i dimana $|P_i| \leq \left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor$ dan $|P_i| \geq k|Q|$. Karena $|P_i| \leq \left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor$ dan $|P_i| \geq k|Q|$ maka dapat disimpulkan bahwa

$$\left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor \geq |P_i| \geq k|Q|$$

$$\left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor \geq k|Q|$$

$$n \geq |Q| \cdot hk \qquad (4.5)$$

2. Mengkonstruksi koteri dengan ukuran korum $|Q|$

   Selanjutnya dengan menggunakan P_i disusun koteri $\overline{C_i} \in 2^{P_i}$ dimana $i = 1,2, \dots, m$. Korum-korum dalam koteri $\overline{C_i}$ dipilih berdasarkan ukurannya, yaitu setiap korum harus memenuhi persamaan (4.4). Dengan demikian diperoleh sistem korum sebagai berikut:

$$\overline{C_1} = \left\{K_{|Q|}^{|P_1|}\right\}$$

$$\overline{C_2} = \left\{K_{|Q|}^{|P_2|}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\overline{C_m} = \left\{K_{|Q|}^{|P_m|}\right\}$$

   dengan $K_{|Q|}^{|P_i|}$ adalah kombinasi $|Q|$ dari P_i untuk $i = 1,2, \dots, m$.

3. Konstruksi sistem korum yang memenuhi sifat bikoteri dan disjoint

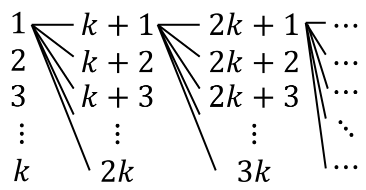
   Pada tahap sebelumnya telah diperoleh sistem korum yang memenuhi sifat disjoint. Akan tetapi karena proses kombinasi menyebabkan syarat bikoteri tidak terpenuhi. Oleh karena itu perlu dilakukan seleksi untuk korum yang diperoleh pada tahap sebelumnya.

Misalkan $P_i \cap P_j = \emptyset$ artinya jika $\overline{C_i} \subset 2^{P_i}$ dan $\overline{C_j} \subset 2^{P_j}$ maka $\overline{C_i}$ dan $\overline{C_j}$ disjoint untuk $i \neq j, i = 1,2,..,m$ dan $j = 1,2,\dots,m$. Dengan demikian, setiap pembentukan korum akan menyebabkan $\overline{C_i}$ dan $\overline{C_j}$ disjoint.

Misalkan $P_i \cap P_s \neq \emptyset$ artinya jika $\overline{C_i} \subset 2^{P_i}$ dan $\overline{C_s} \subset 2^{P_s}$ maka $\overline{C_i}$ dan $\overline{C_s}$ saling bikoteri untuk $i \neq s, i = 1,2,..,m$ dan $s = 1,2,\dots,m$.

Agar kedua koteri membentuk k-koteri dan bikoteri terpenuhi maka $|P_i \cap P_s| \geq k^2$ dan setiap korum di dalam $\overline{C_i}$ memuat paling sedikit k anggota berbeda dari $\{P_i \cap P_s\}$.

Jadi, dari korum-korum pada tahap 2 dipilih korum yang memuat kombinasi k anggota berbeda dari masing-masing himpunan irisan semesta pasangan bikoteri.



Gambar 4.2. Ilustrasi dari kombinasi unsur irisan semesta pasangan bikoteri

Akan tetapi tidak semua korum yang memuat unsur kombinasi pada gambar 4.2 dapat dipilih, karena akan melanggar syarat k-koteri. Oleh karena itu perlu ketelitian dalam memilih korum sedemikian sehingga menjamin bahwa k-koteri terpenuhi.

Dengan demikian diperoleh:

$$C_1 = \{Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1k}, \dots\}, \qquad C_1 \subseteq \overline{C_1}$$

$$C_2 = \{Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2k}, \dots\}, \qquad C_2 \subseteq \overline{C_2}$$

$$\vdots$$

$$C_m = \{Q_{m1}, Q_{m2}, \dots, Q_{mk}, \dots\}, \qquad C_m \subseteq \overline{C_m}$$

Cara lain yang dapat digunakan untuk menyusun sistem korum (h,k)-koteri majority ialah dengan menggunakan operasi join.

Definisi 4.2 (Definisi Operasional). *Misalkan akan dikonstruksi suatu sistem korum (h,k)-koteri majority dengan $(C_i, C_j), i \neq j$ adalah pasangan bikoteri. P_i adalah himpunan semesta untuk C_i dan P_j adalah himpunan semesta untuk C_j. Misalkan A adalah k-koteri dari $\{P_i \cap P_j\}$ dan D adalah koleksi himpunan yang memuat unsur kombinasi dari $\{P_i - \{P_i \cap P_j\}\}$. Maka koteri C_i yang terbentuk merupakan hasil operasi join dari:*

$$C_i = A \otimes D = \{Q | Q = a \cup d, \forall a \in A, d \in D\}$$

Contoh 1.

Misalkan akan dikonstruksi $(2,2)$-koteri majority, maka $n \geq 4|Q|$ dan $m \geq 2h$. Selanjutnya ditentukan nilai $|Q|$.

Misalkan $m = 4$ maka

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (m-h-1)k$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1}{2+1} \right\rceil + (4-2-1)2$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{4} + 1 \right\rceil}{3} \right\rceil + 2$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{4|Q|}{4} + 1 \right\rceil}{3} \right\rceil + 2$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{|Q| + 1}{3} \right\rceil + 2 \qquad (4.6)$$

Misalkan $\frac{|Q|+1}{3} = x$, maka $|Q| = 3x - 1$.

Karena x merupakan hasil pembulatan ke atas maka x dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$x = \lceil x \rceil - \{x\} \qquad (4.7)$$

dengan

$$0 \leq \{x\} < 1 \qquad (4.8)$$

Keterangan:

x : nilai hasil pembagian

$\lceil x \rceil$: bagian bulat dari hasil pembagian

$\{x\}$: bagian desimal dari hasil pembagian

Sehingga persamaan (4.6) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$3x - 1 = \lceil x \rceil + 2$$

$$3(\lceil x \rceil - \{x\}) - 1 = \lceil x \rceil + 2$$

$$3\lceil x \rceil - 3\{x\} - 1 = \lceil x \rceil + 2$$

$$2\lceil x \rceil - 3 = 3\{x\}$$

$$\frac{2}{3}\lceil x \rceil - 1 = \{x\} \qquad (4.9)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (4.8) maka persamaan (4.9) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$0 \leq \frac{2}{3}\lceil x \rceil - 1 = \{x\} < 1$$

$$0 \leq 2\lceil x \rceil - 3 = 3\{x\} < 3$$

$$0 \leq 2\lceil x \rceil - 3 < 3$$

$$3 \leq 2\lceil x \rceil < 6$$

$$\frac{3}{2} \leq \lceil x \rceil < 3$$

Jadi diperoleh nilai $\lceil x \rceil = 2$.

Subtitusi nilai $\lceil x \rceil = 2$ ke dalam persamaan (4.9) sehingga diperoleh

$$\frac{2}{3}(2) - 1 = \{x\}$$

$$\{x\} = \frac{1}{3}$$

Untuk memperoleh nilai x maka subtitusi nilai $\lceil x \rceil$ dan $\{x\}$ yang diperoleh ke dalam persamaan (4.7).

$$x = \lceil x \rceil - \{x\}$$

$$x = 2 - \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Dengan demikian diperoleh

$$|Q| = 3x - 1 = 3\left(\frac{5}{3}\right) - 1 = 4$$

dan

$$n \geq 4|Q|$$

$$n \geq 16$$

Jadi untuk membentuk $(2,2)$-koteri maka $n \geq 16$ dan $m \geq 4$.

1. Misalkan $P = \{1,2,\ldots,16\}$ dan $m = 1,2,3,4$ maka diperoleh $|Q| = 4$.

   Proses pembentukan $(2,2)$-koteri majority ialah sebagai berikut:

   Karena $h = 2$ maka terdapat $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, dan terdapat $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$ dan $P_1 \cap P_4 \neq \emptyset$. Agar syarat disjoint terpenuhi maka $P_i = \left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor = 8$

   Misalkan dipilih $P_1 \cap P_3 = \emptyset$ maka

   $$P_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

   $$P_3 = \{9,10,11,12,13,14,15,16,\}$$

   Agar syarat bikoteri terpenuhi maka $|P_1 \cap P_2| = 4$, $|P_2 \cap P_3| = 4$, $|P_3 \cap P_4| = 4$ dan $|P_1 \cap P_4| = 4$. Dengan demikian diperoleh

   $$P_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

   $$P_2 = \{5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

   $$P_3 = \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$$

   $$P_4 = \{1,2,3,4,13,14,15,16\}$$

   Selanjutnya dibentuk koteri yang setiap korumnya memiliki jumlah anggota $|Q| = 4$.

   $$C_1^* = \left\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\ldots,\{4,5,6,8\},\{5,6,7,8\}\right\}$$

   $$C_2^* = \left\{\{5,6,7,8\},\{5,6,7,9\},\ldots,\{8,9,10,11\},\{9,10,11,12\}\right\}$$

   $$C_3^* = \left\{\{9,10,11,12\},\{9,10,11,13\},\ldots,\{12,13,14,16\},\{13,14,15,16\}\right\}$$

$$C_4^* = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,13\},\dots,\{4,13,14,16\},\{13,14,15,16\}\}$$

Pada sistem korum di atas belum memenuhi syarat bikoteri sehingga perlu dilakukan seleksi korum.

Karena dalam kasus ini $k = 2$ dengan jumlah irisan himpunan semesta ialah 4, maka korum-korum yang dipilih dari C_i^* harus memuat kombinasi irisan semesta pasangan bikoteri. Misalkan $P_1 \cap P_2 = \{5,6,7,8\}$ maka korum yang dipilih dari C_1^* harus memuat $\{5,6\}$ atau $\{7,8\}$. Akan tetapi tidak semua korum yang memuat $\{5,6\},\{7,8\}$ dapat dipilih karena akan melanggar syarat bikoteri. Oleh karena itu, perlu diatur bahwa sisa unsur P_1 yaitu $\{P_1 - (P_1 \cap P_2)\} = \{1,2,3,4\}$ harus memenuhi syarat bikoteri. Hal ini berarti korum yang dipilih harus memuat $\{1,3\},\{2,4\},\{1,4\}$ atau $\{2,3\}$.

Misalkan $A = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ dan $D = \{\{5,6\},\{7,8\}\}$ maka

$$\begin{aligned} C_1 &= A \otimes D \\ &= \{\{1,3,5,6\},\{2,4,7,8\},\{1,4,5,6\},\{2,3,7,8\},\{2,4,5,6\},\{1,3,7,8\}, \\ &\quad \{2,3,5,6\},\{1,4,7,8\}\} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh sistem korum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\{1,3,5,6\},\{2,4,7,8\},\{1,4,5,6\},\{2,3,7,8\},\{2,4,5,6\},\{1,3,7,8\}, \\ &\quad \{2,3,5,6\},\{1,4,7,8\}\} \\ C_2 &= \{\{5,7,9,10\},\{6,8,11,12\},\{5,8,9,10\},\{6,7,11,12\},\{6,7,9,10\}, \\ &\quad \{5,8,11,12\},\{6,8,9,10\},\{5,7,11,12\}\} \\ C_3 &= \{\{9,11,13,14\},\{10,12,15,16\},\{9,12,13,14\},\{10,11,15,16\}, \\ &\quad \{10,12,13,14\},\{9,11,15,16\},\{10,11,13,14\},\{9,12,15,16\}\} \end{aligned}$$

$C_4 = \{\{1,2,13,15\}, \{3,4,14,16\}, \{1,2,13,16\}, \{3,4,14,15\}, \{1,2,14,16\},$

$\{3,4,13,15\}, \{1,2,14,15\}, \{3,4,13,16\}\}$

2. Konstruksi (2,2)-koteri majority dengan $m = 5$ dan $n = 4|Q|$

   Mula-mula akan ditentukan nilai $|Q|$. Karena $m = 5$ maka

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k + 1} \right\rceil + (m - h - 1)k$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + 1}{2 + 1} \right\rceil + (5 - 2 - 1)2$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{5} + 1 \right\rceil}{3} \right\rceil + 4$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{4|Q|}{5} + 1 \right\rceil}{3} \right\rceil + 4$$

$$|Q| = \left\lceil \frac{4|Q| + 5}{15} \right\rceil + 4 \qquad (4.10)$$

   Misalkan $\frac{4|Q|+5}{15} = x$, maka $|Q| = \frac{15x-5}{4}$.

   Sehingga persamaan (4.10) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{15x - 5}{4} = \lceil x \rceil + 4$$

$$15(\lceil x \rceil - \{x\}) - 5 = 4\lceil x \rceil + 16$$

$$11\lceil x \rceil - 21 = 15\{x\}$$

$$\frac{11\lceil x \rceil - 21}{15} = \{x\} \qquad (4.13)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (4.8) maka persamaan (4.13) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$0 \leq \frac{11\lceil x \rceil - 21}{15} < 1$$

$$0 \leq 11\lceil x \rceil - 21 < 15$$

$$21 \leq 11\lceil x \rceil < 36$$

$$\frac{21}{11} \leq \lceil x \rceil < \frac{36}{11}$$

Jadi diperoleh nilai $\lceil x \rceil = 2$.

Subtitusi nilai $\lceil x \rceil = 2$ ke dalam persamaan (4.13) sehingga diperoleh

$$\frac{11(2) - 21}{15} = \{x\}$$

$$\{x\} = \frac{1}{15}$$

Untuk memperoleh nilai x maka subtitusi nilai yang diperoleh ke dalam persamaan (4.7).

$$x = \lceil x \rceil - \{x\}$$

$$x = 2 - \frac{1}{15}$$

$$x = \frac{29}{15}$$

Dengan demikian diperoleh

$$|Q| = \frac{15x - 5}{4} = \frac{15\left(\frac{29}{15}\right) - 5}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

dan $n \geq (hk + 1)|Q| = 30$.

Misalkan $P = \{1,2,\ldots,30\}$ dan $m = 1,2,3,4,5$ maka proses pembentukan $(2,2)$-koteri majority ialah sebagai berikut:

Karena $h = 2$ maka terdapat $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, dan terdapat $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$, $P_1 \cap P_4 \neq \emptyset$ dan $P_1 \cap P_5 \neq \emptyset$. Agar syarat disjoint terpenuhi maka $P_i = k|Q| = 12$.

Misalkan dipilih $P_1 \cap P_3 = \emptyset$ maka

$$P_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$P_3 = \{13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$$

Agar syarat bikoteri terpenuhi maka $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$, $P_3 \cap P_4 \neq \emptyset$, $P_4 \cap P_5 \neq \emptyset$ dan $P_1 \cap P_5 \neq \emptyset$. Dengan demikian diperoleh

$$P_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$P_2 = \{7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$$

$$P_3 = \{13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$$

$$P_4 = \{19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30\}$$

$$P_5 = \{1,2,3,4,5,6,25,26,27,28,29,30\}$$

Selanjutnya dibentuk koteri yang setiap korumnya memiliki jumlah anggota $|Q| = 6$.

$$C_1^* = \big\{\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,7\},\ldots,\{6,7,8,9,10,11\},\{7,8,9,10,11,12\}\big\}$$

$$C_2^* = \big\{\{7,8,9,10,11,12\},\{7,8,9,10,11,13\}\ldots,\{13,14,15,16,17,18\}\big\}$$

$$C_3^* = \big\{\{13,14,15,16,17,18\},\{13,14,15,16,17,19\},\ldots,\{19,20,21,22,23,24\}\big\}$$

$$C_4^* = \{\{19,20,21,22,23,24\},\{19,20,21,22,23,25\},\ldots,\{25,26,27,28,29,30\}\}$$

$$C_5^* = \big\{\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,7\},\ldots,\{25,26,27,28,29,30\}\big\}$$

Pada sistem korum di atas belum memenuhi syarat bikoteri sehingga perlu dilakukan seleksi korum. Dalam tahap seleksi korum, dipilih korum yang memuat kombinasi k anggota berbeda dari himpunan irisan semesta pasangan bikoteri.

Karena dalam kasus ini jumlah irisan himpunan semesta ialah 6, maka korum-korum yang dipilih dari C_i^* harus memuat kombinasi irisan semesta pasangan bikoteri. Misalkan $P_1 \cap P_2 = \{7,8,9,10,11,12\}$ maka korum yang dipilih dari C_1^* harus memuat $\{7,9,11\}, \{7,9,12\}, \{7,10,11\}$, $\{7,10,12\}, \{8,9,11\}, \{8,9,12\}, \{8,10,11\}$ atau $\{8,10,12\}$. Akan tetapi tidak semua korum yang memuat kombinasi tersebut dapat dipilih karena akan melanggar syarat 2-koteri. Oleh karena itu, korum yang dipilih harus memuat $\{1,2,3\}$ atau $\{4,5,6\}$.

Dengan demikian akan diperoleh sistem korum sebagai berikut:

$$C_1 = \{\{1,2,3,7,9,11\}, \{4,5,6,8,10,12\}, \{1,2,3,7,9,12\}, \{4,5,6,8,10,11\}, \{1,2,3,7,10,11\}, \{4,5,6,8,9,12\}, \{1,2,3,7,10,12\}, \{4,5,6,8,9,11\}, \{1,2,3,8,10,12\}, \{4,5,6,7,9,11\}, \{1,2,3,8,10,11\}, \{4,5,6,7,9,12\}, \{1,2,3,8,9,12\}, \{4,5,6,7,10,11\}, \{1,2,3,8,9,11\}, \{4,5,6,9,10,12\}\}$$

$$C_2 = \{\{7,8,9,13,15,17\}, \{10,11,12,14,16,18\}, \{7,8,9,13,15,18\}, \{10,11,12,14,16,17\}, \{7,8,9,13,16,17\}, \{10,11,12,14,15,18\}, \{7,8,9,13,16,18\}, \{10,11,12,14,15,17\}, \{10,11,12,13,15,17\}, \{7,8,9,14,16,18\}, \{10,11,12,13,15,18\}, \{7,8,9,14,16,17\}, \{10,11,12,13,16,17\}, \{7,8,9,14,15,18\}, \{10,11,12,13,16,18\}, \{7,8,9,14,15,17\}\}$$

$$C_3 = \{\{13,14,15,19,21,23\}, \{16,17,18,20,22,24\}, \{13,14,15,19,21,24\}, \{16,17,$$

$18,20,22,23\}, \{13,14,15,19,22,23\}, \{16,17,18,20,21,24\}, \{13,14,15,19,22,$
$24\}, \{16,17,18,20,21,23\}, \{13,14,15,20,22,24\}, \{16,17,18,19,21,23\}, \{13,14,$
$15,20,22,23\}, \{16,17,18,19,21,24\}, \{13,14,15,20,21,24\}, \{16,17,18,19,22,$
$23\}, \{13,14,15,20,21,23\}, \{16,17,18,19,22,24\}\}$

$C_4 = \{\{19,20,21,25,27,29\}, \{22,23,24,26,28,30\}, \{19,20,21,25,27,30\}, \{22,23,$
$24,26,28,29\}, \{19,20,21,25,28,29\}, \{22,23,24,26,27,30\}, \{19,20,21,25,28,$
$30\}, \{22,23,24,26,27,29\}, \{19,20,21,26,28,30\}, \{22,23,24,25,27,29\},$
$\{19,20,21,26,28,29\}, \{22,23,24,25,27,30\}, \{19,20,21,26,27,30\}, \{22,23,24,$
$25,28,29\}, \{19,20,21,26,27,29\}, \{22,23,24,25,28,30\}\}$

$C_5 = \{\{1,3,5,25,26,27\}, \{2,4,6,28,29,30\}, \{1,3,6,25,26,27\}, \{2,4,5,28,29,30\}$
$\{1,4,5,25,26,27\}, \{2,3,6,28,29,30\}, \{1,4,6,25,26,27\}, \{2,3,5,28,29,30\},$
$\{2,4,6,25,26,27\}, \{1,3,5,28,29,30\}, \{2,4,5,25,26,27\}, \{1,3,6,28,29,30\}$
$\{2,3,6,25,26,27\}, \{1,4,5,28,29,30\}, \{2,3,5,25,26,27\}, \{1,4,6,28,29,30\}\}$

Teorema 1. Misalkan $P = \{1,2,\dots n\}$ adalah semesta untuk sistem korum (h,k)-koteri majority. Nilai minimal n agar sistem korum (h,k)-koteri majority dapat dikonstruksi adalah

$$n = \begin{cases} (hk)^2, & m = 2h \\ (hk^2 + k)(h+1), & m = 2h+1 \end{cases}$$

Bukti.

- Untuk $m = 2h$, dengan $n = hk|Q|$.

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (m-h-1)k$$

$$= \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{hk|Q|}{2h} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (2h - h - 1)k$$

$$= \left\lceil \frac{k|Q| + 2}{2k+2} \right\rceil + (h-1)k$$

Misal $x = \frac{k|Q|+2}{2k+2}$ maka $|Q| = \frac{(2k+2)x-2}{k}$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{(2k+2)x - 2}{k} = \lceil x \rceil + (h-1)k$$

$$(2k+2)(\lceil x \rceil - \{x\}) - 2 = k\lceil x \rceil + k^2(h-1)$$

$$\frac{(k+2)\lceil x \rceil - 2 - k^2(h-1)}{2(k+1)} = \{x\}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (4.8) maka diperoleh:

$$0 \leq \frac{(k+2)\lceil x \rceil - 2 - k^2(h-1)}{2(k+1)} < 1$$

$$0 \leq (k+2)\lceil x \rceil - 2 - k^2(h-1) < 2(k+1)$$

$$k^2(h-1) + 2 \leq (k+2)\lceil x \rceil < 2(k+1) + k^2(h-1) + 2$$

$$\frac{k^2(h-1) + 2}{k+2} \leq \lceil x \rceil < \frac{k^2(h-1) + 2k + 4}{k+2}$$

$$k \leq \lceil x \rceil < \cdots$$

Jadi diperoleh minimal $\lceil x \rceil = k$ yang berakibat $|Q| = hk$.

Dengan demikian, $n = hk|Q| = (hk)(hk) = (hk)^2$.

- Untuk $m = 2h + 1$, dengan $n = (hk+1)|Q|$.

$$|Q| = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (m - h - 1)k$$

$$= \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{hk|Q|}{2h+1} \right\rceil + 1}{k+1} \right\rceil + (2h + 1 - h - 1)k$$

$$= \left\lceil \frac{hk|Q| + 2h + 1}{(2h+1)(k+1)} \right\rceil + hk$$

Misal $x = \frac{hk|Q|+2h+1}{(2h+1)(k+1)}$ maka $|Q| = \frac{(2h+1)(k+1)x-2h-1}{hk} = \frac{(2hk+2h+k+1)x-2h-1}{hk}$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{(2hk + 2h + k + 1)x - 2h - 1}{hk} = \lceil x \rceil + hk$$

$$(2hk + 2h + k + 1)(\lceil x \rceil - \{x\}) - 2h - 1 = hk\lceil x \rceil + (hk)^2$$

$$(2hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil - (2hk + 2h + k + 1)\{x\} - 2h - 1 = hk\lceil x \rceil + (hk)^2$$

$$(hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil - 2h - 1 - (hk)^2 = (2hk + 2h + k + 1)\{x\}$$

$$\frac{(hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil - 2h - 1 - (hk)^2}{(2hk + 2h + k + 1)} = \{x\}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (4.8) maka diperoleh:

$$0 \le \frac{(hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil - 2h - 1 - (hk)^2}{(2hk + 2h + k + 1)} < 1$$

$$0 \le (hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil - 2h - 1 - (hk)^2 < (2hk + 2h + k + 1)$$

$$2h + 1 + (hk)^2 \le (hk + 2h + k + 1)\lceil x \rceil < (hk)^2 + 2hk + 4h + k + 2$$

$$\frac{(hk)^2 + 2h + 1}{hk + 2h + k + 1} \le \lceil x \rceil < \frac{(hk)^2 + 2hk + 4h + k + 2}{hk + 2h + k + 1}$$

$$k \le \lceil x \rceil < \cdots$$

Jadi diperoleh minimal $\lceil x \rceil = k$ yang berakibat $|Q| = k + hk = k(h + 1)$.

Dengan demikian, $n = (hk + 1)|Q| = (hk + 1)(hk + k) = (hk^2 + k)(h + 1)$.

Teorema 2. Misalkan n adalah banyaknya anggota himpunan semesta. Jika m genap $(m = 2h)$ maka ukuran korum untuk sistem korum (h, k)-koteri majority sama dengan ukuran korum untuk (hk)-koteri majority untuk n yang sama.

Bukti. Berdasarkan pembuktian Teorema 1 untuk m genap diperoleh $n = (hk)^2$ dan $|Q| = hk$.

Dengan demikian untuk (hk)-koteri majority diperoleh

$$|Q| = \left\lceil \frac{n+1}{hk+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{(hk)^2+1}{hk+1} \right\rceil = hk$$

Teorema 3. Ukuran Koteri dan Sistem Korum

Misalkan $B = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ adalah sistem korum (h, k)-koteri majority maka $\forall C \in B$ berlaku:

Ukuran koteri $\|C\|$ memenuhi persamaan

$$\|C\| = \begin{cases} k^{\left\lfloor \left| \frac{P_i - k^2}{k} \right| \right\rfloor + 1} & t = 0 \\ k^{\left\lfloor \left| \frac{P_i - k^2}{k} \right| \right\rfloor + 1} \cdot t & t \neq 0 \end{cases}$$

dengan $t = |P_i - k^2| mod\ k$.

Ukuran sistem korum $\|B\|$ memenuhi persamaan

$$\|B\| = m\|C\|$$

Bukti. Berdasarkan tahap konstruksi korum untuk sistem korum (h, k)-koteri majority dketahui bahwa jika $C_i \subset 2^{P_i}$ dan $C_j \subset 2^{P_j}$ saling bikoteri maka $\left|P_i \cap P_j\right| = k^2$. Tiap korum yang ditempatkan dalam koteri C_i

merupakan hasil penggabungan himpunan kombinasi $\{P_i \cap P_j\}$ dan kombinasi $\{P_i - (P_i \cap P_j)\}$ menggunakan operasi join.

Misalkan A adalah himpunan kombinasi $\{P_i \cap P_j\}$ maka berdasarkan tahap konstruksi dietahui $|A| = k$.

Misalkan B adalah himpunan kombinasi $\{P_i - (P_i \cap P_j)\}$ maka berdasarkan tahap konstruksi diketahui

$$|B| = k^{\left|\frac{P_i - k^2}{k}\right|}$$

Dengan demikian diperoleh ukuran korum:

$$\|C\|_i = |A| \cdot |B|$$

$$= k \cdot k^{\left|\frac{P_i - k^2}{k}\right|}$$

$$= k^{\left|\frac{P_i - k^2}{k}\right| + 1}$$

Karena setiap koteri C_i memilki ukuran P_i sama untuk setiap i maka dapat dituliskan

$$\|C\| = k^{\left|\frac{P_i - k^2}{k}\right| + 1} \ \forall C \in B$$

Untuk ukuran sistem korum bergantung pada ukuran koteri. Karena sistem korum (h, k)-koteri majority terdiri dari m unsur k-koteri maka ukuran sistem korum dapat dinyatakan

$$\|B\| = m\|C\|$$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Sistem korum (h, k)-koteri majority merupakan sistem korum baru yang setiap korumnya memenuhi persamaan $|Q| = \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1}{k+1} \right\rceil + (m - h - 1)k$ dengan $m \geq 2h$ dan $n \geq hk|Q|$.

2. Tahap konstruksi sistem korum (h, k)-koteri majority ialah:
   a. Menentukan unsur semesta masing-masing koteri
   b. Mengkonstruksi koteri dengan ukuran korum $|Q|$
   c. Memilih korum untuk tiap koteri sedemikian sehingga sistem korum memenuhi sifat bikoteri dan disjoint.

   Cara lain untuk mengkonstruksi sistem korum (h, k)-koteri majority ialah diawali dengan menentukan unsur semesta masing-masing koteri yang memenuhi sifat disjoint. Kemudian menyusun koteri dengan menggunakan operasi join.

B. Saran

Pada penelitian ini, penyusunan sistem himpunan berorientasi pada ketersediaan himpunan m. Untuk penelitian selantutnya disarankan untuk membuat konstruksi sistem dengan berorientasi pada himpunan n.

DAFTAR PUSTAKA

Agrawal, D., dan Abbadi, *A.E. 1991. An Efficient and Fault-Tolerant Solution for Distributed Mutual Exclusion. ACM Transactions on Computer Systems,* 9(1):1-20.

Ibaraki, T. dan Kameda, T. 1993. *A Teory of Coteries: Mutual Exclusion in Distributed Systems. IEEE Transaction on Parallel and Distributed Computing,* 4:779-794.

Jiang, J.R. 2011. *Nondominated Local Coteries for Resource Allocation in Grids and Clouds. Elsevier Information Processing Letters,* 111:379-384.

Joung, Y. 2004. *On Quorum Systems for Group Resources with Bounded Capacity. LNCS 3274 Distributed Computing,* Hal. 86-101.

Joung, Y. 2010. *On Quorum Systems for Group Resources Alloction. NSC 072 Distributed Computing,* 22:197-214.

Kakugawa, H., Fujita, S., Yamashita, M., dan Ae, T. 1992. *A Distributed k-Mutual Exclusion Algorithm Using k-Coterie. Elsevier Information Processing Letters,* 49: 213-218.

Lawi, A., Oda, K., dan Yoshida, T. 2006. *A Quorum Based (m, h, k)-Resource Allocation Algorithm. Conf. on Parallel Dist. Proc. Tech & Appl.,* Hal. 399-405.

Maekawa, M. 1985*. A $\sqrt{n}$ Algorithm for Mutual Exclusion in Decebtralized Systems. ACM Trans. Comput. Systems,* 3(2):145-159.

Molina, H.G. dan Barbara, D. 1985. *How to Assign Votes in A Distributed System. Journal of The ACM,* 32(4):841-860.

Thomas, R.H. 1979. *A Majority Consensus Approach to Concurrency Control for Multiple Copy Databases. ACM Transactions on Database Systems,* 4(2):180-209.