

**ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA  
FITOPLANKTON DALAM SUATU RANTAI MAKANAN  
PADA EKOSISTEM LAUT**

**S K R I P S I**



**Oleh :**

**SUMARNI**

**H 111 06 030**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin  
Makassar  
2011

**ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA  
FITOPLANKTON DALAM SUATU RANTAI MAKANAN  
PADA EKOSISTEM LAUT**

**SKRIPSI**

*Melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat  
untuk meraih gelar Sarjana Sains*

*Pada Jurusan Matematika*

*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*

*Universitas Hasanuddin*

Oleh :

**SUMARNI**

**H 111 06 030**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin  
Makassar  
2011

## LEMBAR KEOTENTIKAN

*Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:*

**ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA FITOPLANKTON  
DALAM SUATU RANTAI MAKANAN PADA EKOSISTEM LAUT**

*Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.*

Makassar, 04 Agustus 2011

**SUMARNI**

**NIM: H 111 06 030**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA FITOPLANKTON  
DALAM SUATU RANTAI MAKANAN PADA EKOSISTEM LAUT**

*Disetujui Oleh :*



Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama

**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**

**Drs. Khaeruddin, M.Sc.**

**NIP. 19680114 199412 1 001**

**NIP. 19650914 199103 1 003**

**Pada tanggal : 04 Agustus 2011**

Pada hari ini, Kamis 04 Agustus 2011, panitia ujian skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul:

**ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA  
FITOPLANKTON DALAM SUATU RANTAI MAKANAN PADA  
EKOSISTEM LAUT**

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Makassar, 04 Agustus 2011

Panitia Ujian Skripsi

Tanda Tangan

1. Ketua : Drs. Budi Nurwahyu, MS. ( )

2. Sekertaris : Kasbawati, S.Si., M.Si. ( )

3. Anggota : Drs. Diaraya, M.Ak. ( )

4. Anggota : Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. ( )

5. Anggota : Drs. Khaeruddin, M.Sc. ( )

## KATA PENGANTAR

*Sesungguhnya segala puji bagi Allah, kita memuji-Nya, memohon pertolongan-Nya, meminta ampunan dari-Nya, dan meminta perlindungan kepada-Nya dari kejahatan diri kita serta keburukan amal perbuatan kita. Barangsiapa yang diberikan petunjuk oleh Allah, tak seorang pun yang dapat menyesatkannya, dan barangsiapa yang disesatkan oleh Allah, maka tak seorang pun yang dapat memberinya petunjuk. Aku bersaksi, bahwa tiada Ilah yang berhak diibadahi dengan benar melainkan Allah dan tiada sekutu bagi-Nya dan Aku bersaksi bahwa Muhammad adalah hamba dan utusan-Nya.*

Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Selama perkuliahan hingga detik-detik Ujian Akhir telah begitu banyak mengalami proses pembelajaran sehingga Alhamdulillah dapat terselesaikan, yang tentunya dengan pertolongan-Nya kemudian bantuan dari berbagai pihak. Olehnya itu, syukuran jazakum,ullahu khairan kepada Ayahanda tercinta **Hammadiyah Rahimahullah** dan Ibunda tersayang **Rasma** yang telah mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan limpahan cinta dan kasih sayang yang tak dapat teruraikan dengan kata-kata.

Ucapan terima kasih juga yang tiada terhingga kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**, Bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc.** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang penuh kesabaran dalam memberikan bimbingan sehingga kesulitan penulis dapat teratasi dan akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, MS.**, dan Ibu **Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku penguji terima kasih atas masukan dan arahan selama penulis menyusun skripsi ini.

3. Bapak **Drs. Diaraya, M.Ak.** selaku Penasehat akademik yang telah banyak memberikan arahan dan nasehat selama menjadi mahasiswa di kampus tercinta ini. Seluruh **Dosen Jurusan Matematika** yang telah memberikan bekal ilmu dan pengetahuan yang tiada ternilai dan para staf Jurusan Matematika **Pak Nasir, Pak Sutamin, S.Sos., Pak Akbar** yang telah memberikan bantuan mulai dari awal perkuliahan hingga ujian akhir "*terima kasih atas bantuannya pak.*"
4. Kakakku **Salmawati, Sukmawati, Sirajuddin**, adikku **Sarkia, Syarifuddin**, kakak iparku **Sukriadi, Yulianti** dan seluruh **keluargaku**...terima kasih atas semuanya. Semoga selalu diberikan terbaik menurut-Nya. *Aamiin.*
5. Saudariku **Sulfayanti, Andini, Firah**..syukran atas semuanya. Saya tunggu kalian di Mamuju. Adik-adikku **Ayu, Munira, Kimia 2010, biologi 2010** syukran telah banyak memberikan dukungan.
6. Saudara-saudariku yang ada **di Math06**..masya Allah, masa itu kan selalu terkenang. Dan seluruh keluarga **MIPA** dan **MI Crew**, syukran atas semangat dan kebersamaannya selama ini.
7. Kakak-kakakku yang telah banyak membantu dan para **Murabbiyahku**..syukran ka, hingga nikmat itu *Alhamdulillah* kurasakan juga. *Aamiin.*
8. Dan yang terakhir untuk **Sakan Crew** syukran atas kebersamaannya yang masih kurasakan saat ini.

Semoga segala bantuan dan dukungannya ikhlas karena-Nya sehingga bernilai pahala di sisi-Nya. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membutuhkan dan terutama bagi penulis. *Aamiin, Allahumma Aamiin.*

Makassar, Agustus 2011

Penulis

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dilakukan suatu pengkajian mengenai siklus sederhana dari ekosistem laut yang berupa hubungan antara Nutrisi, Fitoplankton, Zooplankton dan detrius dengan membangun sebuah model matematika untuk menalisis hubungan NPPZD. Metode linearisasi disekitar titik kesetimbangan menghasilkan nilai-nilai eigen yang kemudian kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan. Dari analisis yang dilakukan di peroleh kestabilan titik kesetimbangan yang jika bagian riil dari akar karakteristik semua bernilai negatif maka titik kesetimbangan tersebut dikatakan stabil. Sebaliknya, jika bagian riil dari akar karakteristik terdapat satu atau lebih yang bernilai positif maka titik kesetimbangan tersebut dikatakan tidak stabil.

*Kata Kunci: Fitoplankton, Zooplankton, Titik kesetimbangan, Kestabilan.*



## ABSTRACT

In this writing there is a research about the simple cycle of the ocean ecosystem to explain the relation among Nutrition, Phytoplankton, Zooplankton, and Detritus by built mathematic model to analyze the relation of NPPZD. The result of the linearization method of equilibrium point are eigen values which can be determined the stability of the equilibrium point. From the analysis is acquired the stability of the equilibrium if all the real part of the root characteristic is negative. On contrary, instability of the equilibrium point if the real part of the root characteristic only consists of one or more positive values.

*Keywords: Phytoplankton, Zooplankton, Equilibrium Point, Stability.*

# DAFTAR ISI

	<b>HALAMAN</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	i
<b>ABSTRAK</b>	iii
<b>ABSTRACT</b>	iv
<b>DAFTAR ISI</b>	v
<b>DAFTAR TABEL</b>	vii
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	viii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar belakang	1
1.2 Asumsi-asumsi	3
1.3 Rumusan Masalah	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Tujuan Penulisan	5
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Fitoplankton dan Zooplankton	6
2.2 Kestabilan Sistem Linear	10
2.3 Persamaan dengan Koefisien yang Memiliki Limit	12
2.4 Kestabilan dengan Linearisasi	13
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Model Ekosistem NPPZD	15
3.2 Titik kesetimbangan Model	18
3.3 Analisis Kestabilan Model	20

3.4 Simulasi Numeril Model	23
<b>BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
4.1 Kesimpulan	41
4.2 Saran	42
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	43
<b>LAMPIRAN</b>	44

## DAFTAR TABEL

### HALAMAN

Tabel 3.1 Parameter Model Ekosistem NPPZD

17

## DAFTAR GAMBAR

### HALAMAN

Gambar 1.1 Siklus sederhana rantai makanan NPZD	2
Gambar 1.2 Diagram Kompartemen ekosistem NPPZD	4
Gambar 2.1 Contoh fitoplankton dan zooplankton	7
Gambar 3.1 Diagram Kompartemen ekosistem NPPZD	16
Gambar 3.2 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t) pada $T_1$	25
Gambar 3.3 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil ( $P_1$ ) terhadap waktu (t) pada $T_1$	26
Gambar 3.4 Grafik hubungan antara fitoplankton besar ( $P_2$ ) terhadap waktu (t) pada $T_1$	26
Gambar 3.5 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) pada $T_1$	27
Gambar 3.6 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t) pada $T_2$	28
Gambar 3.7 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil ( $P_1$ ) terhadap waktu (t) pada $T_2$	29
Gambar 3.8 Grafik hubungan antara fitoplankton besar ( $P_2$ ) terhadap waktu (t) pada $T_2$	29
Gambar 3.9 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) pada $T_2$	30
Gambar 3.10 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t) pada $T_3$	31
Gambar 3.11 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil ( $P_1$ ) terhadap waktu (t) pada $T_3$	32
Gambar 3.12 Grafik hubungan antara fitoplankton besar ( $P_2$ ) terhadap waktu (t) pada $T_3$	32
Gambar 3.13 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) pada $T_3$	33
Gambar 3.14 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t) pada $T_4$	34

Gambar 3.15 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil ( $P_1$ ) terhadap waktu ( $t$ ) pada $T_4$	35
Gambar 3.16 Grafik hubungan antara fitoplankton besar ( $P_2$ ) terhadap waktu ( $t$ ) pada $T_4$	35
Gambar 3.17 Grafik hubungan antara zooplankton ( $Z$ ) terhadap waktu ( $t$ ) pada $T_4$	36

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

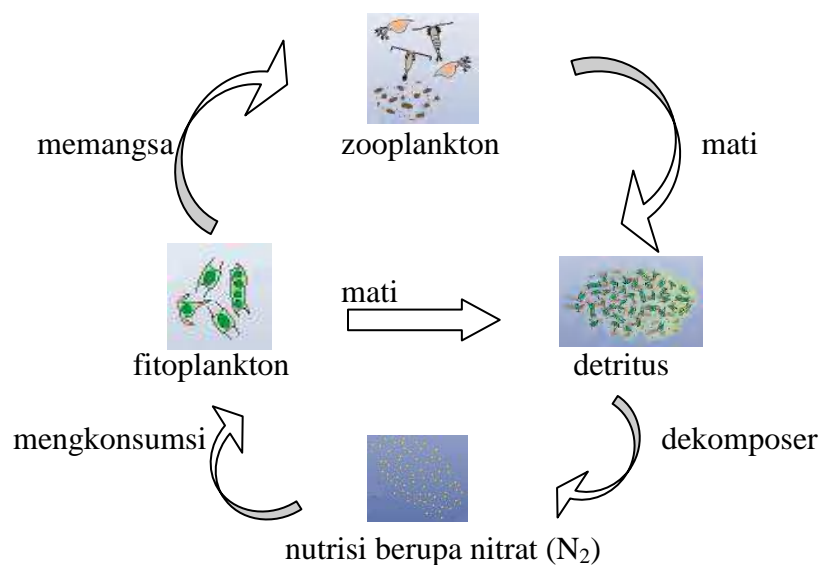
Makhluk hidup yang beraneka ragam seperti plankton selalu memiliki daya tarik untuk diketahui bagaimana bentuk kompetisinya dan dinamika model mangsa-pemangsa dari rantai makanan fitoplankton. Suatu organisme hidup akan selalu membutuhkan organisme lain di lingkungan hidupnya, organisme yang memakan organisme lain dinamakan predator atau pemangsa, sedangkan yang dimakannya disebut mangsa.

Hubungan yang terjadi antara individu sangat kompleks dan bersifat saling mempengaruhi atau timbal balik. Hubungan timbal balik antara unsur-unsur hayati membentuk sistem ekologi yang disebut ekosistem. Di dalam ekosistem terjadi rantai makanan, aliran energi dan siklus biogeokimia. Rantai makanan adalah pengalihan energi dalam sumbernya pada tumbuhan melalui sederetan organisme yang makan dan yang dimakan. Fungsi rantai makanan adalah untuk menjaga jumlah makhluk hidup di dalamnya. Jangan sampai jumlah pemangsa lebih banyak daripada mangsanya karena akan mengakibatkan kepunahan makhluk hidup. (Nontji, 2008)

Rantai makanan yang terjadi pada ekosistem laut berupa fitoplankton sebagai produsen primer dianggap sebagai tingkat trofik I, zooplankton herbivor pemakan fitoplankton sebagai tingkat trofik II, karnivor pemakan herbivor sebagai tingkat trofik III, dan seterusnya. Namun pada kenyataannya tiap individu sebenarnya terkait satu dengan lainnya dalam jaring pakan yang amat kompleks. (Nontji, 2008)

Proses pertumbuhan fitoplankton dipengaruhi oleh ketersediaan nutrisi, sedangkan zooplankton yang merupakan predator tingkat tinggi yang pertumbuhannya dipengaruhi

oleh ketersediaan fitoplankton. Selanjutnya dari fitoplankton dan zooplankton akan terjadi kematian secara alami yang kemudian akan terjadi dekomposer. Dekomposer adalah pengurai jasad makhluk hidup yang telah mati. Dekomposer ini akan mengurai bangkai atau sisa-sisa makhluk hidup menjadi komponen yang lebih kecil lagi agar bisa digunakan kembali oleh fitoplankton sebagai sumber nutrisi untuk membuat makanan. Peranan dekomposer sangat penting di dalam menjaga keseimbangan rantai makanan di laut. Siklus rantai makanan ini dapat dilihat pada Gambar 1. Siklus ini dikenal sebagai siklus NPZD (*Nutrient, Phytoplankton, Zooplankton, Detritus*).



Gambar 1.1 Siklus sederhana rantai makanan NPZD (R. Stewart, 2004)

Keseimbangan rantai makanan dalam siklus NPZD dapat terganggu oleh sebab-sebab fisis, seperti intensitas cahaya, arus, panas, salinitas, kadar oksigen dan sebagainya. Sebagai contoh, bakteri pengurai tidak dapat bekerja secara optimal jika kandungan oksigen terlarut dalam air laut rendah. Hal ini berakibat pada rendahnya produksi nutrisi dan selanjutnya menghambat laju pertumbuhan fitoplankton dan zooplankton. (Nontji, 2008)



Jika dalam sistem kesetimbangan tersebut diasumsikan terdapat dua jenis fitoplankton maka model ekosistem akan menjadi NPPZD dengan variabel yakni :  $N$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Z$ , dan  $D$  yaitu nutrisi, fitoplankton 1, fitoplankton 2, zooplankton, dan detritus.

Berdasarkan uraian di atas maka penulis akan mencoba membuat konstruksi model matematika tentang dinamika ekosistem fitoplankton yang berjudul

**“Analisis Kestabilan Model Kompetisi Dua Fitoplankton Dalam Suatu Rantai Makanan Pada Ekosistem Laut”**

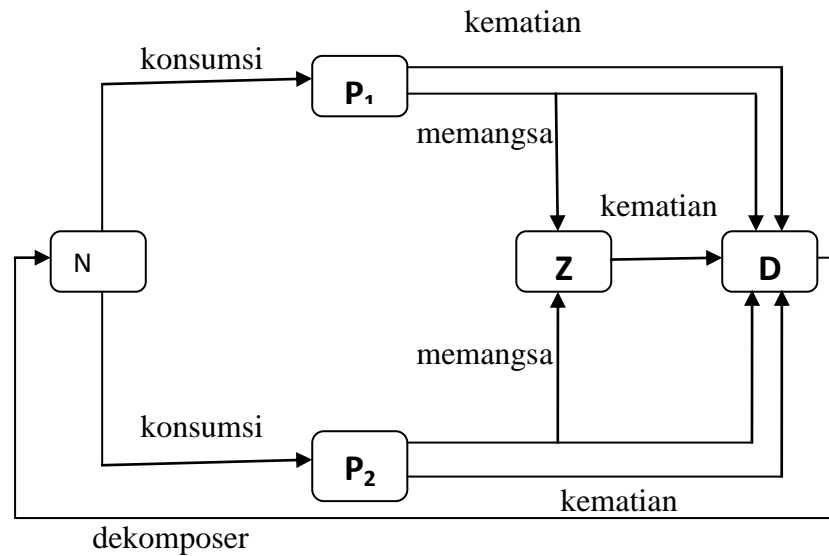
Pada model ini telah diteliti sebelumnya oleh Perruche dkk (2010) kemudian penulis akan meneliti kembali dengan merekonstruksi parameter-parameter dari variabel tersebut yang tidak dilakukan sebelumnya.

### **1.2 Asumsi-asumsi**

Misal sebuah ekosistem laut sederhana yang mengikuti siklus rantai makanan sederhana seperti yang dijelaskan pada bagian sebelumnya, dimana terdapat 2 jenis fitoplankton ( $P_1$  dan  $P_2$ ), sejenis zooplankton ( $Z$ ), bakteri pengurai (dekomposer atau detritus,  $D$ ) yang mengikuti asumsi tambahan sebagai berikut:

1.  $P_1$  dan  $P_2$  hanya mengkonsumsi nutrisi berupa nitrat ( $N_2$ )
2.  $P_1$  dan  $P_2$  berkompetisi dalam memperoleh makanan
3.  $P_1$ ,  $P_2$  dan  $Z$  mengalami kematian secara alami
4.  $Z$  hanya mengkonsumsi kedua jenis fitoplankton ( $P_1$  dan  $P_2$ )
5. Pada saat  $Z$  mengkonsumsi  $P_1$  dan  $P_2$ , maka akan memberikan peluang kedua fitoplankton tersebut ( $P_1$  dan  $P_2$ ) mengalami kematian.
6. Detritus akan mengalami dekomposer dan membentuk nutrisi.

Berdasarkan asumsi di atas diperoleh diagram kompartemen seperti terlihat pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Diagram kompartemen ekosistem NPPZD

Secara alamiah sistem akan mengikuti aturan berikut:

1. Jika jumlah nutrisi dalam ekosistem bertambah, maka akan mengakibatkan kedua fitoplankton, zooplankton dan detritus juga akan ikut bertambah.
2. Jika kedua fitoplankton melimpah, mengakibatkan nutrisi akan berkurang dalam ekosistem dan zooplankton melimpah, sehingga detritus akan bertambah.
3. Jika zooplankton melimpah, mengakibatkan kedua fitoplankton akan berkurang dalam ekosistem sehingga nutrisi dan detritus bertambah.

### I.3 Rumusan Masalah

Permasalahan yang di bahas pada tulisan ini adalah bagaimana kesetimbangan siklus sistem ekosistem tersebut pada suatu waktu  $t$ .

### I.4 Batasan Masalah

Pada penulisan ini, yang akan dibahas berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan pada model ekosistem NPPZD.

## **1.5 Tujuan Penulisan**

Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji hubungan antara faktor rantai makanan yang dinyatakan dalam suatu sistem persamaan differensial non-linear dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

**BAB I PENDAHULUAN**

**BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

**BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN**

**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

**DAFTAR PUSTAKA**

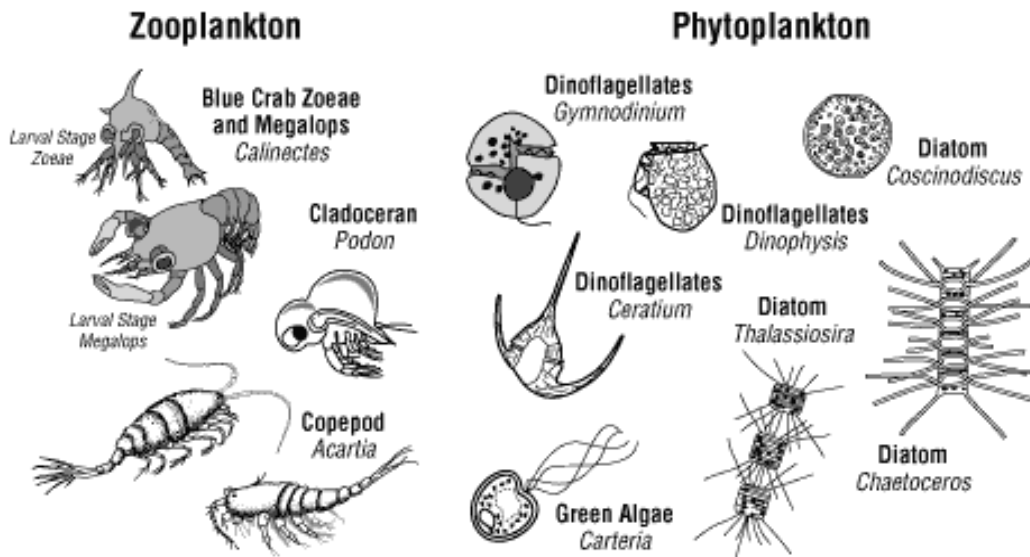
## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Indonesia merupakan negara kepulauan yang memiliki wilayah laut lebih besar daripada luas daratannya. Dalam suatu perairan terdapat berbagai macam organisme yang sangat kompleks baik yang berukuran besar maupun yang berukuran kecil (mikroskopik). Adapun organisme yang berukuran kecil ini sangat beraneka ragam. Organisme yang tidak bergerak aktif, melayang dalam perairan dan gerakannya cenderung bervariasi sesuai dengan adaptasi terhadap lingkungan disebut plankton. Plankton adalah mikroorganisme yang ditemui hidup di perairan baik di sungai, waduk, payau dan laut yang dari segi jumlahnya dan jenis sangat banyak. Plankton merupakan salah satu komponen utama dalam sistem mata rantai (food chain) dan jaring makanan (food web) yang dijadikan pakan bagi sejumlah konsumen yang ada di perairan. Mikro organisme (plankton) ini ada yang dapat bergerak aktif seperti hewan disebut plankton hewani (Zooplankton) dan ada juga yang dapat melakukan asimilasi (fotosintesis) seperti halnya tumbuhan di darat yang disebut plankton nabati (phytoplankton). (Nontji, 2008)

#### **2.1 Fitoplankton dan Zooplankton**

Fitoplankton didefinisikan sebagai organisme-tumbuhan mikroskopik yang hidup melayang, mengapung di dalam air dan memiliki kemampuan gerak yang terbatas. Sedangkan Zooplankton bersifat heterotrofik, maksudnya tak dapat memproduksi sendiri bahan organik dari bahan anorganik. Oleh karena itu, untuk kelangsungan hidupnya, ia sangat bergantung pada bahan organik dari fitoplankton yang menjadi makanannya. Jadi, zooplankton lebih berfungsi sebagai konsumen (consumer) bahan organik. (Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985)



Gambar 2.1 Contoh Fitoplankton dan Zooplankton (R. Stewart, 2004)

### 2.1.1 Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Pertumbuhan Fitoplankton dan Zooplankton

Faktor yang mempengaruhi pertumbuhan plankton dibagi dalam dua kelompok, yaitu: faktor fisik dan faktor kimia.

1. Faktor fisik : cahaya, suhu, kekeruhan/kecerahan, pergerakan air/arus.
2. Faktor kimia : oksigen terlarut, ph, salinitas, nutrisi

Faktor-faktor fisik, diantaranya:

1. Cahaya

Ketersediaan cahaya di perairan baik secara kuantitatif maupun kualitatif sangat tergantung pada waktu (harian, musiman, tahunan), tempat (kedalaman, letak geografis). Bagi hewan laut, cahaya mempunyai pengaruh terbesar secara tidak langsung, yakni sebagai sumber energi untuk proses fotosintesis tumbuh-tumbuhan yang menjadi tumpuan hidup mereka karena menjadi sumber makanan. Cahaya juga merupakan faktor penting dalam hubungannya dengan perpindahan populasi hewan laut. Laju pertumbuhan fitoplankton sangat tergantung pada ketersediaan cahaya di dalam perairan. Menurut heyman dan lundgren (1988). Laju pertumbuhan maksimum

fitoplankton akan mengalami penurunan bila perairan berada pada kondisi ketersediaan cahaya yang rendah. (Lundgren, 1988)

## 2. Suhu

Suhu air mempengaruhi kandungan oksigen terlarut dalam air, semakin tinggi suhu maka semakin kurang kandungan oksigen terlarut. Suhu air mempunyai pengaruh yang besar terhadap proses pertukaran zat atau metabolisme dari makhluk hidup dan suhu juga mempengaruhi pertumbuhan plankton. Perkembangan plankton optimal terjadi dalam kisaran suhu antara 25cc-30cc. (Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985)

## 3. Kekeruhan/kecerahan

Kekeruhan sangat mempengaruhi perkembangan plankton, apabila kekeruhan tinggi maka cahaya matahari tidak dapat menembus perairan dan menyebabkan fitoplankton tidak dapat melakukan proses fotosintesis. (Hutagalung, dkk., 1997).

## 4. Pergerakan Air

Arus berpengaruh besar terhadap distribusi organisme perairan dan juga meningkatkan terjadinya difusi oksigen dalam perairan. Arus juga membantu penyebaran plankton dari satu tempat ke tempat lainnya dan membantu menyuplai bahan makanan yang dibutuhkan plankton. (Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985)

Faktor-faktor kimia, diantaranya

### 1. Derajat Keasaman (ph)

Derajat keasaman (ph) berpengaruh sangat besar terhadap tumbuh-tumbuhan dan hewan air sehingga sering digunakan sebagai petunjuk untuk menyatakan baik atau tidaknya kondisi air sebagai media hidup. Apabila derajat keasaman tinggi apakah itu asam atau basa menyebabkan proses fisiologis pada plankton terganggu. (Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985)

## 2. Oksigen Terlarut

Oksigen terlarut diperlukan oleh tumbuhan air, plankton dan fauna air untuk bernapas serta diperlukan oleh bakteri untuk dekomposisi. Dengan adanya proses dekomposisi yang dilakukan oleh bakteri menyebabkan keadaan unsur hara tetap tersedia di perairan. Hal ini sangat menunjang pertumbuhan plankton. (Hutagalung dkk., 1997).

## 3. Salinitas

Salinitas berperan penting dalam kehidupan organisme, misalnya distribusi biota akuatik. Nybakken (1992) menyatakan bahwa pada daerah pesisir pantai merupakan perairan dinamis, yang menyebabkan variasi salinitas tidak begitu besar. Organisme yang hidup cenderung mempunyai toleransi terhadap perubahan salinitas sampai dengan 15 %. (Nybakken, 1992)

## 4. Nutrisi

Nutrisi sangat berperan penting untuk pertumbuhan plankton, nutrisi yang paling penting dalam hal ini adalah nitrat ( $\text{NO}_3$ ) dan fosfat ( $\text{PO}_4$ ) fitoplankton mengkonsumsi nitrogen dalam banyak bentuk, seperti nitrogen dari nitrat, ammonia, urea, asam amino. Tetapi fitoplankton lebih cenderung mengkonsumsi nitrat dan ammonia. Nitrat lebih banyak didapati di dasar yang banyak mengandung unsur organik ketimbang dari air laut, nitrat juga bisa diperoleh dari siklus nitrogen. Nitrogen dari nitrat adalah salah satu unsur penting untuk pertumbuhan fitoplankton. (Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985)

## 2.2 Kestabilan Sistem Linear

Pertimbangkan persamaan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

dengan  $A$  adalah matriks konstan non-singular berukuran  $n \times n$ . Nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  merupakan solusi dari persamaan karakteristik:

$$\text{Det}(A - \lambda I) \quad (2.2)$$

Jika  $n \geq 4$ , perhitungannya biasanya lebih kompleks.

Misalkan nilai-nilai eigen  $\lambda_k$ , berbeda yang berhubungan dengan vektor-vektor eigen  $c_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Pada kasus ini

$$c_k e^{\lambda_k t}, k = 1, 2, \dots, n$$

adalah  $n$  solusi yang bebas dari persamaan (2.1)

Sekarang anggap bahwa tidak semua nilai eigennya berbeda, sebagai contoh  $\lambda$  memiliki penggandaan  $m > 1$ . Nilai eigen  $\lambda$  membangkitkan sebanyak  $m$  solusi yang bebas yang berbentuk:

$$P_0 e^{\lambda t}, P_1(t) e^{\lambda t}, P_2(t) e^{\lambda t}, \dots, P_{m-1}(t) e^{\lambda t}$$

dimana  $P_k(t), k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$  adalah vektor-vektor polynomial berderajat  $k$  atau lebih kecil. Merupakan hal yang berguna untuk membuat  $n$  solusi yang bebas dari  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  dari persamaan (2.1) menjadi suatu matriks  $\Phi(t)$  dengan solusi dalam bentuk kolom:

$$\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$\Phi(t)$  disebut matriks fundamental dari persamaan (2.1). setiap solusi dari persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$x(t) = \Phi(t)c$$

dengan  $c$  adalah vector konstan. Dengan penambahan kondisi nilai awal  $x(t_0) = x_1$  ke persamaan (2.1), maka diperoleh solusi dari persoalan nilai awal

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 \quad (2.3)$$

Sering kali pemilihan satu matriks fundamental  $\Phi(t)$  seperti  $\Phi(t_0) = I$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas berukuran  $n \times n$ . Ketika mempelajari kestabilan dari solusi  $x = 0$ , maka



kita hanya akan menggunakan bagian riil dari nilai eigen. Dari persamaan (2.3) dan bentuk eksplisit dari solusi yang bebas, kita memperoleh:

**Teorema 1:** (Velhust, Ferdinand, 1990)

Pertimbangkan persamaan (2.1),

$\dot{x} = Ax$ , dengan  $A$  non-singular, matriks konstan berukuran  $n \times n$ , nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

- a. Jika  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = 1, \dots, n$ , maka  $\forall x(t_0) = x_0 \in R^n$  dengan pemilihan konstanta positif  $C$  dan  $\mu$  yang sesuai maka diperoleh

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu t} \text{ dan } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- b. Jika  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0, k = 1, \dots, n$ , dimana nilai eigen dengan  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$  berbeda-beda, maka  $x(t)$  terbatas untuk  $t \geq t_0$ . Secara eksplisit berlaku:

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|$$

Dengan  $C$  adalah konstanta positif

- c. Jika terdapat suatu nilai eigen  $\lambda_k$  dengan  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , maka pada setiap persekitaran di  $x = 0$ , terdapat nilai awal sedemikian sehingga diperoleh solusi yang bersesuaian:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = +\infty$$

Pada kasus a, solusi  $x = 0$  stabil secara asimptotik, pada kasus b,  $x = 0$  disebut stabil Lyapunov, dan untuk kasus c solusinya tidak stabil.

### 2.3 Persamaan Dengan Koefisien Yang Memiliki Limit

Pertimbangkan persamaan:

$$\dot{x} = Ax + B(t)x \tag{2.4}$$

dengan  $A$  non-singular, matriks konstan berukuran  $n \times n$ ,  $B(t)$  adalah matriks kontinu berukuran  $n \times n$ . Jika:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$$

Maka solusi persamaan (2.4) menuju ke solusi dari persamaan (2.1):

$$\dot{x} = Ax$$

**Teorema 2:** (Verhulst, Ferdinand, 1990)

Pertimbangkan persamaan (2.4)

$\dot{x} = Ax + B(t)x$ ,  $B(t)$  kontinu untuk  $t \geq t_0$  dengan sifat:

- a. Nilai-nilai eigen  $\lambda_k$  dari  $A$ ,  $k = 1, \dots, n$  mempunyai  $Re \lambda_k \leq 0$ , nilai-nilai eigen yang berhubungan dengan  $Re \lambda_k = 0$  berbeda.
- b.  $\int_{t_0}^{\infty} \|B\| dt$  terbatas

Maka solusi dari persamaan (2.4) terbatas dan  $x = 0$  stabil Lyapunov.

**Teorema 3:** (Verhulst, Ferdinand, 1990)

Pertimbangkan persamaan (2.4)

$\dot{x} = Ax + B(t)x$ ,  $B(t)$  kontinu untuk  $t \geq t_0$  dengan sifat:

- a.  $A$  merupakan matriks konstan dengan nilai-nilai eigen  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  sedemikian sehingga  $Re \lambda_k < 0$
- b.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$

Maka untuk semua solusi dari persamaan (2.4) diperoleh :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

dan  $x = 0$  adalah stabil asimptotik

## 2.4 Kestabilan dengan Linearisasi

Kestabilan dari solusi equilibrium atau solusi periodik dapat dipelajari dengan menganalisis sistemnya yang dilinearkan pada persekitaran dari solusi-solusi khususnya. Untuk persamaan yang non-linear akan digunakan metode linearisasi pada persamaan autonomous yang berbentuk:

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{2.5}$$

dengan  $A$  matriks konstan berukuran  $n \times n$  dengan nilai eigen bagian riil tidak nol.

**Teorema 4:** (Velhust, Ferdinand, 1990)

Pertimbangkan persamaan pada  $R^n$

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \quad (2.6)$$

Dengan  $A(t)$  adalah matriks kontinu pada periode  $T$ , fungsi vektor  $f(t, x)$  kontinu pada  $t$  dan  $x$  dan kontinu-Lipshitz di  $x$  untuk setiap  $t \in R, x$  dalam persekitaran  $x = 0$ .

Lebih lanjut diperoleh:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ seragam pada } t.$$

Jika bagian real dari persamaan karakteristik pada persamaan linear

$$\dot{y} = A(t)y$$

Adalah negatif, solusi  $x = 0$  dari persamaan (2.6) stabil asimptotik.

## BAB III

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Model Ekosistem NPPZD

Model ekosistem NPPZD dibentuk berdasarkan siklus rantai makanan yang ada dilautan. Dimulai dengan adanya makanan berupa nutrisi yang kemudian di konsumsi oleh 2 fitoplankton, sehingga mengakibatkan adanya persaingan fitoplankton. Selanjutnya zooplankton akan mengkonsumsi fitoplankton yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan kedua fitoplankton tersebut. Dari fitoplankton dan zooplankton akan terjadi kepunahan secara alami, kemudian akan terbentuk detritus yang akan diurai melalui dekomposer dan berubah menjadi nutrisi.

Asumsi-Asumsi yang digunakan pada model ekosistem NPPZD sebagai berikut:

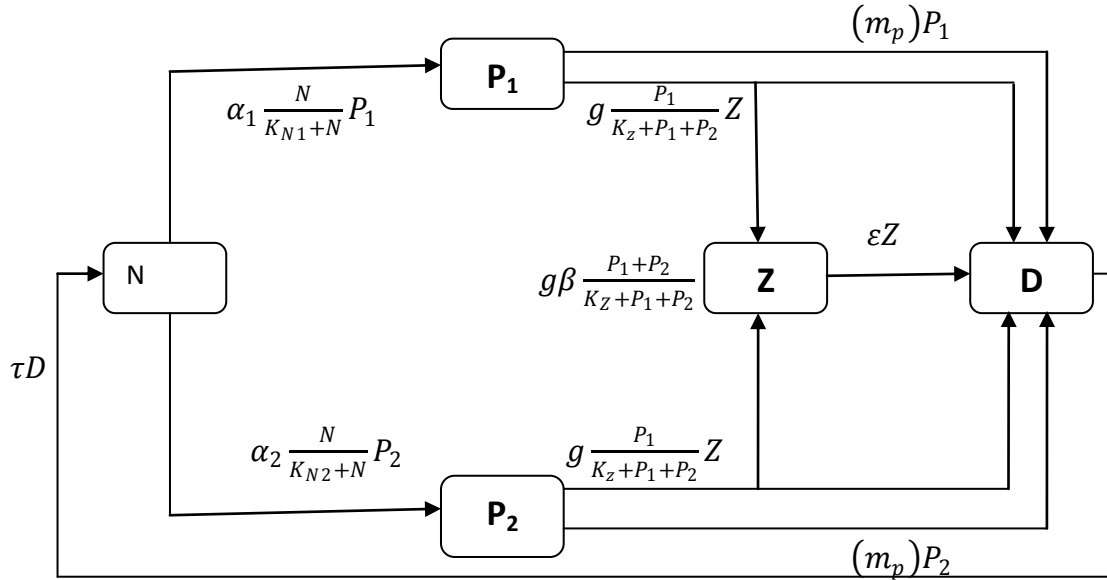
1.  $P_1$  dan  $P_2$  hanya mengkonsumsi nutrisi berupa nitrat ( $N_2$ )
2.  $P_1$  dan  $P_2$  berkompetisi dalam memperoleh makanan
3.  $P_1$ ,  $P_2$  dan  $Z$  mengalami kematian secara alami
4.  $Z$  hanya mengkonsumsi kedua jenis fitoplankton ( $P_1$  dan  $P_2$ )
5. Pada saat  $Z$  mengkonsumsi  $P_1$  dan  $P_2$ , maka akan memberikan peluang kedua fitoplankton tersebut ( $P_1$  dan  $P_2$ ) mengalami kematian.
6. Detritus akan mengalami dekomposer dan membentuk nutrisi.

Secara alamiah sistem akan mengikuti aturan berikut:

1. Jika jumlah nutrisi dalam ekosistem bertambah, maka akan mengakibatkan kedua fitoplankton, zooplankton dan detritus juga akan ikut bertambah.
2. Jika kedua fitoplankton melimpah, mengakibatkan nutrisi akan berkurang dalam ekosistem dan zooplankton melimpah, sehingga detritus akan bertambah.

3. Jika zooplankton melimpah, mengakibatkan kedua fitoplankton akan berkurang dalam ekosistem sehingga nutrisidan detritus bertambah.

Konstruksi Model kedalam Diagram kompartemen



Gambar 3.1 Diagram kompartemen ekosistem NPPZD

Secara matematis, diagram tersebut dapat ditulis dalam bentuk persamaan differensial non linearnya:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \tau D - \alpha_1 \frac{N}{K_{N1}+N} P_1 - \alpha_2 \frac{N}{K_{N2}+N} P_2 \\
 \frac{dP_1}{dt} &= \left( \alpha_1 \frac{N}{K_{N1}+N} - m_p \right) P_1 - g \frac{P_1}{K_Z+P_1+P_2} Z \\
 \frac{dP_2}{dt} &= \left( \alpha_2 \frac{N}{K_{N2}+N} - m_p \right) P_2 - g \frac{P_2}{K_Z+P_1+P_2} Z \\
 \frac{dZ}{dt} &= \left[ g \beta \frac{P_1+P_2}{K_Z+P_1+P_2} - \epsilon \right] Z \\
 \frac{dD}{dt} &= \left[ g(1-\beta) \frac{P_1+P_2}{K_Z+P_1+P_2} \right] Z + m_p(P_1 + P_2) + \epsilon Z - \tau D
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dengan  $\alpha_1 = \mu_1 \left( 1 - \exp\left(\frac{-1}{K_{11}}\right) \right)$  dan  $\alpha_2 = \mu_2 \left( 1 - \exp\left(\frac{-1}{K_{12}}\right) \right)$

dan parameternya:

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
Fitoplankton			
$\mu_1$	1.9	1/hari	Laju pertumbuhan maksimum $P_1$
$\mu_2$	1.5	1/hari	Laju pertumbuhan maksimum $P_2$
$K_{N1}$	0.15	mmol N m <sup>-3</sup>	Setengah kejenuhan $P_1$ untuk mengkonsumsi Nutrisi
$K_{N2}$	0.6	mmol N m <sup>-3</sup>	Setengah kejenuhan $P_2$ untuk mengkonsumsi Nutrisi
$K_{I1}$	30	Wm <sup>-2</sup>	Daya serap $P_1$ terhadap cahaya
$K_{I2}$	5	Wm <sup>-2</sup>	Daya serap $P_2$ terhadap cahaya
$m_p$	0.045	1/hari	Laju kematian fitoplankton
Zooplankton			
$g$	1.5	1/hari	Laju zooplankton dalam memangsa fitoplankton
$K_Z$	1.4	mmol N m <sup>-3</sup>	Setengah kejenuhan untuk memangsa fitoplankton
$\beta$	0.2	-	Efisiensi pertumbuhan kotor untuk $P_1$ dan $P_2$
$\varepsilon$	0.06	1/hari	Laju kematian zooplankton
Detritus			
$\tau$	0.1	1/hari	Laju detritus membentuk nutrisi
$C_0$	1.2	Mmol N m <sup>-3</sup>	Total Nitrogen

Tabel 1.1 : Parameter Model Ekosistem NPPZD

### 3.2 Titik Keseimbangan Model

Tinjau kembali model yang telah dibentuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \tau D - \alpha_1 \frac{N}{K_{N1}+N} P_1 - \alpha_2 \frac{N}{K_{N2}+N} P_2, \\
 \frac{dP_1}{dt} &= \left( \alpha_1 \frac{N}{K_{N1}+N} - m_p \right) P_1 - g \frac{P_1}{K_z+P_1+P_2} Z, \\
 \frac{dP_2}{dt} &= \left( \alpha_2 \frac{N}{K_{N2}+N} - m_p \right) P_2 - g \frac{P_2}{K_z+P_1+P_2} Z, \\
 \frac{dZ}{dt} &= \left[ g\beta \frac{P_1+P_2}{K_z+P_1+P_2} - \varepsilon \right] Z, \\
 \frac{dD}{dt} &= \left[ g(1-\beta) \frac{P_1+P_2}{K_z+P_1+P_2} \right] Z + m_p(P_1 + P_2) + \varepsilon Z - \tau D,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Titik keseimbangan model dapat diperoleh dengan membuat persamaan (3.2) sama dengan nol, yaitu;

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = \frac{dZ}{dt} = \frac{dD}{dt} = 0 \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.3) diperoleh tujuh titik keseimbangan.

$$T_1 = (N, P_1, P_2, Z, D) = (N, 0, 0, 0, 0).$$

$$T_2 = (N, P_1, P_2, Z, D) = \left( \frac{m_p K_{N2}}{-\alpha_1 + m_p}, 0, P_2, 0, \frac{m_p P_2}{\tau} \right)$$

$$\begin{aligned}
 T_3 &= (N, P_1, P_2, Z, D) \\
 &= \left( N, 0, \frac{\varepsilon K_z}{g\beta - \varepsilon}, \frac{K_z \beta (-\alpha_2 N + m_p K_{N2} + m_p N)}{(g\beta - \varepsilon)(K_{N2} + N)}, \frac{\alpha_2 N \varepsilon K_z}{\tau (g\beta - \varepsilon)(K_{N2} + N)} \right)
 \end{aligned}$$

$$T_4 = (N, P_1, P_2, Z, D) = \left( -\frac{m_p K_{N1}}{-\alpha_1 + m_p}, P_1, 0, 0, \frac{m_p P_1}{\tau} \right)$$

$$\begin{aligned}
 T_5 &= (N, P_1, P_2, Z, D) \\
 &= \left( N, \frac{\varepsilon K_z}{g\beta - \varepsilon}, 0, -\frac{K_z \beta (-\alpha_1 N + m_p K_{N1} + m_p N)}{(g\beta - \varepsilon)(K_{N1} + N)}, \frac{\alpha_1 N \varepsilon K_z}{\tau (g\beta - \varepsilon)(K_{N1} + N)} \right)
 \end{aligned}$$

$$T_6 = (N, P_1, P_2, Z, D) = \left( 0, \frac{-g\beta P_2 - \varepsilon K_z - \varepsilon P_2}{g\beta - \varepsilon}, P_2, -\frac{m_p K_z \beta}{(g\beta - \varepsilon)}, 0 \right)$$

$$T_7 = (N, P_1, P_2, Z, D)$$

$$= \left( \frac{-K_{N2}\alpha_1 + K_{N1}\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \frac{-g\beta P_2 - \varepsilon K_Z - \varepsilon P_2}{g\beta - \varepsilon}, P_2, -\frac{K_Z\beta(K_{N2}\alpha_1 - K_{N1}\alpha_2 + m_p K_{N1} - m_p K_{N2})}{-gK_{N2}\beta + K_{N2}\varepsilon + gK_{N1}\beta - K_{N1}\varepsilon}, \frac{(-K_{N2}\alpha_1 + K_{N1}\alpha_2)}{(g\beta - \varepsilon)\tau(K_{N1} - K_{N2})} \right)$$

Dari tujuh titik kesetimbangan yang didapatkan dapat terlihat bahwa solusi kestabilannya sangat banyak sehingga tidaklah menarik untuk di analisis. Dan kami mencoba melakukan pereduksian dengan menggunakan:

$$C_0 = N + P_1 + P_2 + Z + D$$

Maka

$$D = C_0 - N - P_1 - P_2 - Z$$

$$\frac{dN}{dt} = \tau(C_0 - N - P_1 - P_2 - Z) - \alpha_1 \frac{N}{K_{N1} + N} P_1 - \alpha_2 \frac{N}{K_{N2} + N} P_2$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \left( \alpha_1 \frac{N}{K_{N1} + N} - m_p \right) P_1 - g \frac{P_1}{K_Z + P_1 + P_2} Z$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \left( \alpha_2 \frac{N}{K_{N2} + N} - m_p \right) P_2 - g \frac{P_2}{K_Z + P_1 + P_2} Z \quad (3.4)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \left[ g\beta \frac{P_1 + P_2}{K_Z + P_1 + P_2} - \varepsilon \right] Z$$

Dari persamaan (3.4) maka akan ditentukan titik kestabilannya dengan memasukkan nilai parameter-parameter dari persamaan tersebut sehingga menghasilkan lima titik kesetimbangan yang memenuhi:

$$T_1 = (N, P_1, P_2, Z) = (1.2, 0, 0, 0)$$

$$T_2 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.064, 0, 0.463, 0)$$

$$T_3 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.012, 0.484, 0, 0)$$

$$T_4 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.091, 0, 0.350, 0.062)$$

$$T_5 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.019, 0.35, 0, 0.08)$$



### 3.3 Analisis Kestabilan Model

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis kestabilan dari titik kestimbangan  $T_1$ ,  $T_2$ ,

$T_3$ ,  $T_4$  dan  $T_5$ :

a.  $T_1 = (N^*, P_1^*, P_2^*, Z^*) = (1.2, 0, 0, 0)$

tinjau kembali persamaan (3.4), yang dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= f_1(N, P_1, P_2, Z) , \\ \frac{dP_1}{dt} &= f_2(N, P_1, P_2, Z) , \\ \frac{dP_2}{dt} &= f_3(N, P_1, P_2, Z) , \\ \frac{dZ}{dt} &= f_4(N, P_1, P_2, Z),\end{aligned}\tag{3.5}$$

Misalkan  $J$  adalah matriks Jacobi dari persamaan (3.5) yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial P_2} & \frac{\partial f_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial P_2} & \frac{\partial f_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial P_1} & \frac{\partial f_3}{\partial P_2} & \frac{\partial f_3}{\partial Z} \\ \frac{\partial f_4}{\partial N} & \frac{\partial f_4}{\partial P_1} & \frac{\partial f_4}{\partial P_2} & \frac{\partial f_4}{\partial Z} \end{pmatrix}\tag{3.6}$$

Linearisasi persamaan (3.5) di sekitar titik kesetimbangan  $T_1$  yang menghasilkan matriks Jacobi  $J^*(T_1)$

$$J^*(T_1) = \begin{bmatrix} -0.1 & -1.788888889 & -1.100000000 & -0.1 \\ 0. & 1.543888889 & 0. & -0. \\ 0. & 0. & 0.855000000 & -0. \\ 0 & 0. & 0. & -0.06 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Nilai eigen dari matriks  $J^*(T_1)$  dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik

$$|J^*(T_1) - \lambda I| = 0$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar-akar karakteristik;

$$\lambda_1 = -0.100, \lambda_2 = 1.543 \lambda_3 = 0.855 \lambda_4 = -0.060$$

$$b. T_2 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.064, 0, 0.463, 0)$$

$$J^*(T_2) = \begin{bmatrix} -1.045734693 & -0.6695090438 & -0.2450000000 & -0.1 \\ 0. & 0.4245090438 & 0. & -0. \\ 0.9457346931 & 0. & 0. & -0.3731421690 \\ 0 & 0. & 0. & 0.01462843380 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar-akar karakteristik;

$$\lambda_1 = -1.727, \lambda_2 = -0.318 \lambda_3 = 0.424 \lambda_4 = 0.014$$

$$c. T_3 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.012, 0.484, 0, 0)$$

$$J^*(T_3) = \begin{bmatrix} -5.338609022 & -0.2450000000 & -0.1303558967 & -0.1 \\ 5.238609021 & 0. & 0. & -0.3857864732 \\ 0. & 0. & -0.1146441033 & -0. \\ 0 & 0. & 0. & 0.01715729463 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar-akar karakteristik;

$$\lambda_1 = -5.086, \lambda_2 = -0.252 \lambda_3 = -0.114 \lambda_4 = 0.017$$

$$d. T_4 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.091, 0, 0.35, 0.062)$$

$$J^*(T_4) = \begin{bmatrix} -0.7584820430 & -0.8205844362 & -0.2987546200 & -0.1 \\ 0. & 0.5218298162 & 0. & -0. \\ 0.6584820431 & 0.01075092399 & 0.01075092404 & -0.3000000000 \\ 0 & 0.008600739189 & 0.008600739189 & 0. \end{bmatrix}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar-akar karakteristik;

$$\lambda_1 = -0.366 + 0.215I, \lambda_2 = -0.366 - 0.215I \lambda_3 = -0.013 \lambda_4 = 0.521$$

$$e. T_5 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.019, 0.35, 0, 0.08)$$

$$J^*(T_5) = \begin{bmatrix} -3.589638438 & -0.3143064549 & -0.1462061171 & -0.1 \\ 3.489638439 & 0.01386129094 & 0.01386129100 & -0.3000000000 \\ 0. & 0. & -0.1681003379 & -0. \\ 0 & 0.01108903279 & 0.01108903279 & 0. \end{bmatrix}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar-akar karakteristik;

$$\lambda_1 = -3.254, \lambda_2 = -0.305 \lambda_3 = -0.015 \lambda_4 = -0.168$$

Dari kelima akar karakteristik nilai eigen yang didapatkan, dapat disimpulkan bahwa untuk titik kesetimbangan satu sampai keempat dikatakan *tidak stabil* dan untuk titik kesetimbangan kelima dikatakan *stabil*.

### 3.4 Simulasi Numerik Model

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi secara numerik terhadap solusi model dari persamaan (3.2) untuk mengetahui karakteristik solusi dari model tersebut. Nilai-nilai parameter dari tabel 1.1 akan digunakan dalam simulasi numerik.

Titik kesetimbangan yang dihasilkan adalah  $T_1$  dan  $T_2$ , yaitu  $N = 1.2, P_1 = 0, P_2 = 0, Z = 0$  dan  $N = 0.064, P_1 = 0, P_2 = 0.463, Z = 0$  dengan nilai eigen  $-0.1000, 1.543, 0.855, -0.0600$  dan  $-0.727, -0.318, 0.424, 0.014$ . Karena terdapat dua nilai eigen yang bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $T_1$  dan  $T_2$  dikatakan titik kesetimbangan tidak stabil.

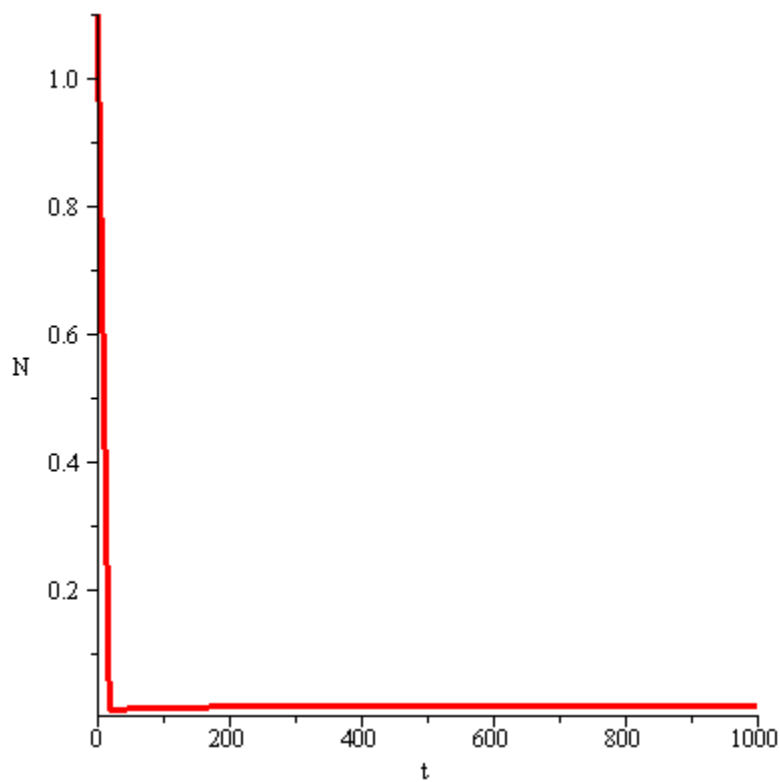
Titik kesetimbangan yang ketiga dan keempat adalah  $T_3$  dan  $T_4$ , yaitu  $N = 0.012, P_1 = 0.484, P_2 = 0, Z = 0$  dan  $N = 0.091, P_1 = 0, P_2 = 0.35, Z = 0.062$  dengan nilai eigen  $-5.086, -0.252, -0.114, 0.017$  dan  $-0.366+0.215I, -0.366-0.215I, -0.013, 0.521$ . Karena terdapat satu nilai eigen yang bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $T_3$  dan  $T_4$  dikatakan titik kesetimbangan tidak stabil.

Dan titik kesetimbangan yang kelima adalah  $T_5$ , yaitu  $N = 0.019$ ,  $P_1 = 0.35$ ,  $P_2 = 0$ ,  $Z = 0.08$  dengan nilai eigen  $-3.254$ ,  $-0.305$ ,  $-0.015$ ,  $-0.168$ . dari semua nilai eigen bernilai negatif maka titik kesetimbangan  $T_5$  merupakan titik kesetimbangan stabil.

Dinamika dari solusi model dapat dilihat dalam Gambar dibawah ini:

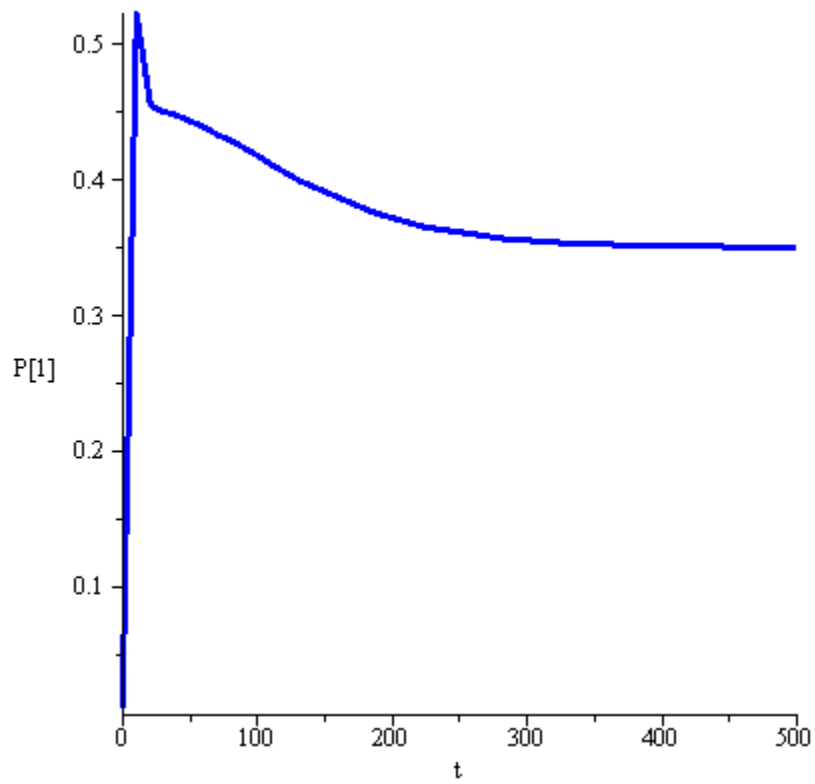
a. Titik kesetimbangan pertama ( $T_1$ )

Disimulasikan dengan menggunakan nilai awal  $N(0) = 1.1$ ,  $P_1(0) = 0.01$ ,  $P_2(0) = 0.01$ ,  $Z(0) = 0.01$ .

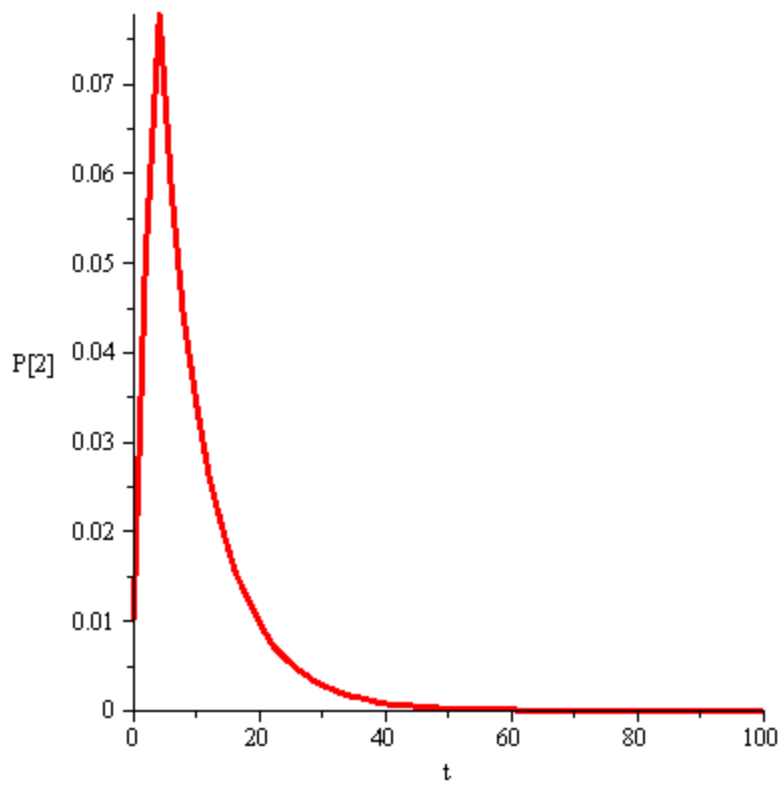


Gambar 3.2 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa jumlah nutrisi dilautan akan mengalami penurunan dari 1.2 sampai 0.019 dalam jangka waktu 25 hari dan selanjutnya akan mengalami jumlah yang setimbang dengan jumlah 0.019.

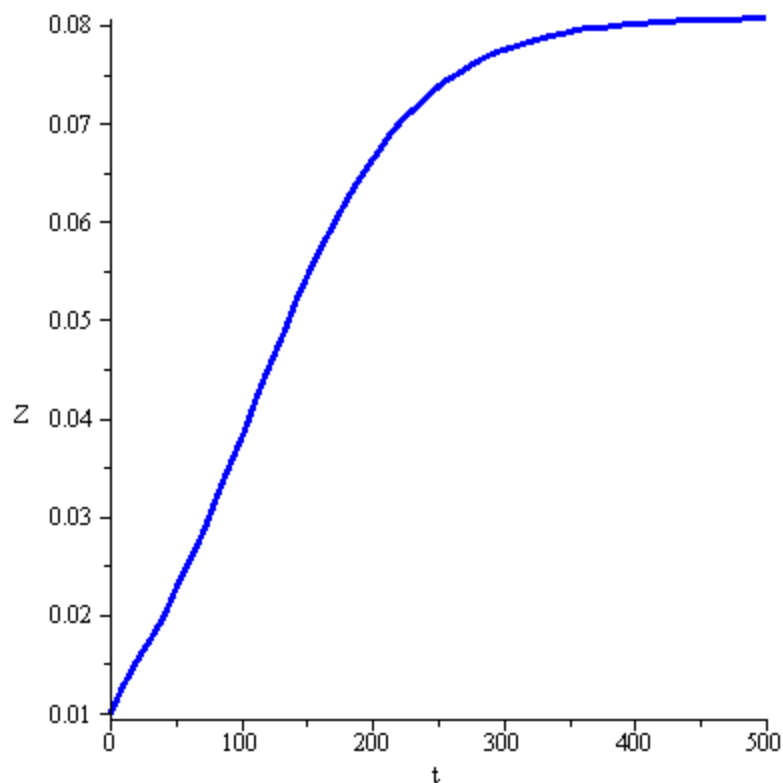


Gambar 3.3 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil (P[1]) terhadap waktu (t)



Gambar 3.4 Grafik hubungan antara fitoplankton besar (P[2]) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.3 dan 3.4 terlihat bahwa jumlah fitoplankton sama-sama mengalami peningkatan dan kemudian akan mengalami penurunan sampai pada jumlah yang setimbang. Fitoplankton kecil (P[1]) akan menurun sampai pada jumlah yang setimbang sebanyak 0.35 sedangkan fitoplankton besar (P[2]) akan menurun sampai pada jumlah yang setimbang sebanyak 0.

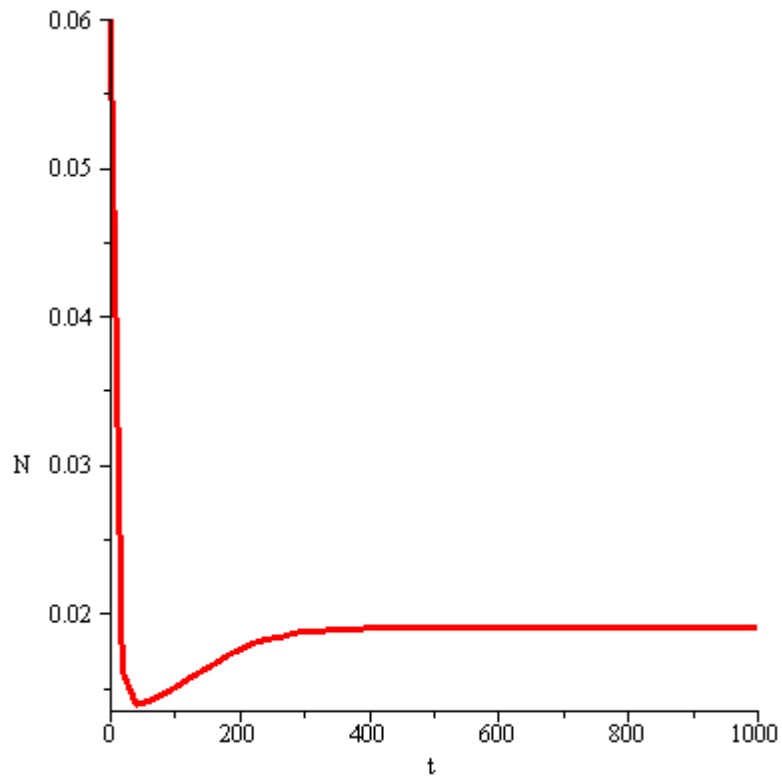


Gambar 3.5 Grafik hubungan antara fitoplankton besar (P[2]) terhadap waktu (t)

Gambar 3.5 menunjukkan hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) yang mengalami peningkatan terus-menerus hingga mencapai jumlah setimbang 0.08 dalam jangka waktu 400 hari.

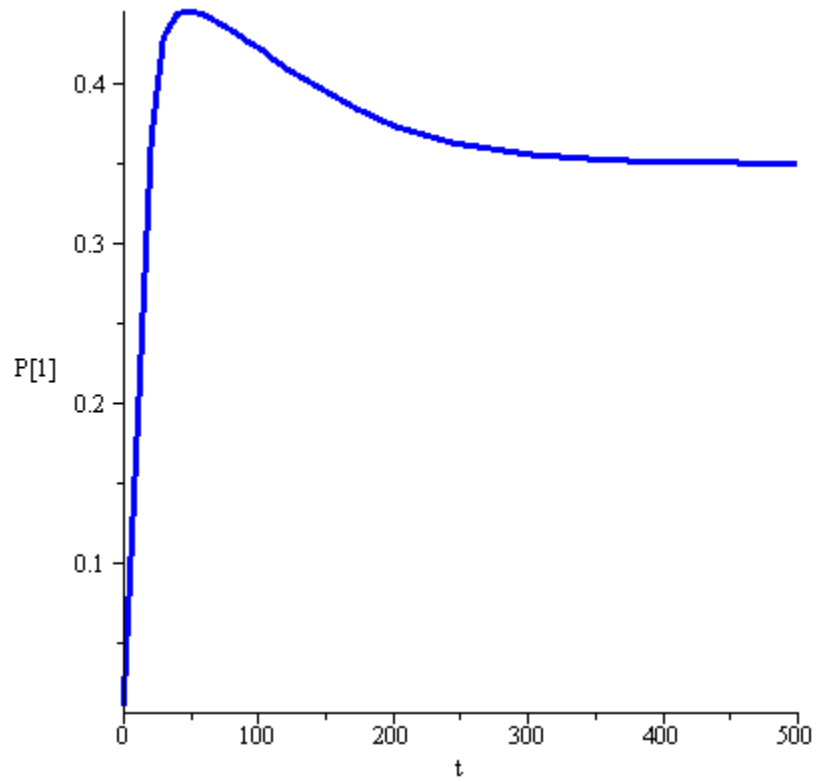
b. Titik kesetimbangan kedua ( $T_2$ )

Disimulasikan dengan menggunakan nilai awal  $N(0) = 0.06$ ,  $P_1(0) = 0.01$ ,  $P_2(0) = 0.46$ ,  $Z(0) = 0.01$ .

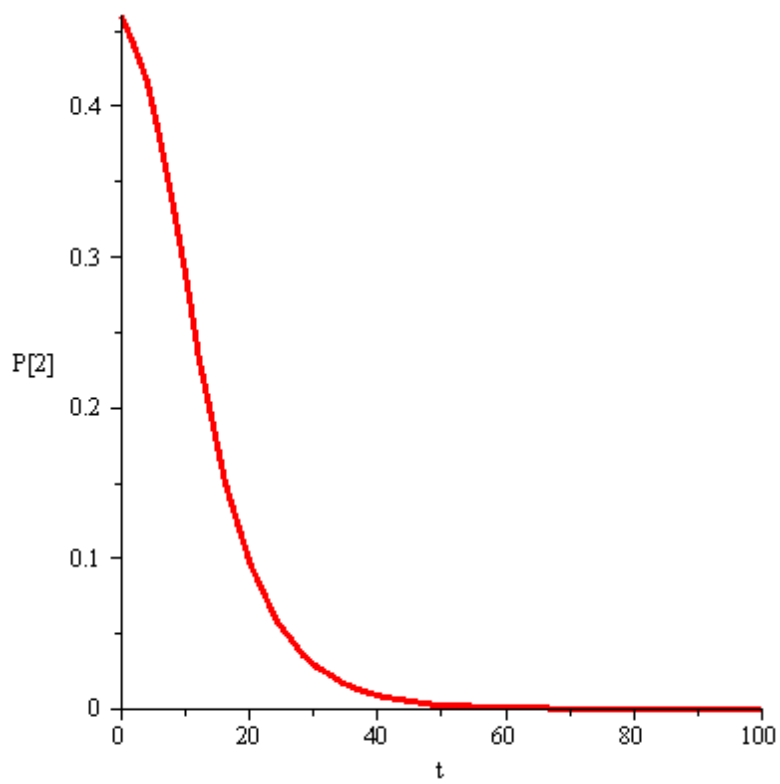


Gambar 3.6 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.6 terlihat bahwa jumlah nutrisi dilautan akan mengalami penurunan dalam jangka waktu 40 hari dengan jumlah 0.014 dan jumlah tersebut akan meningkat sampai pada jumlah setimbang yaitu 0.019.



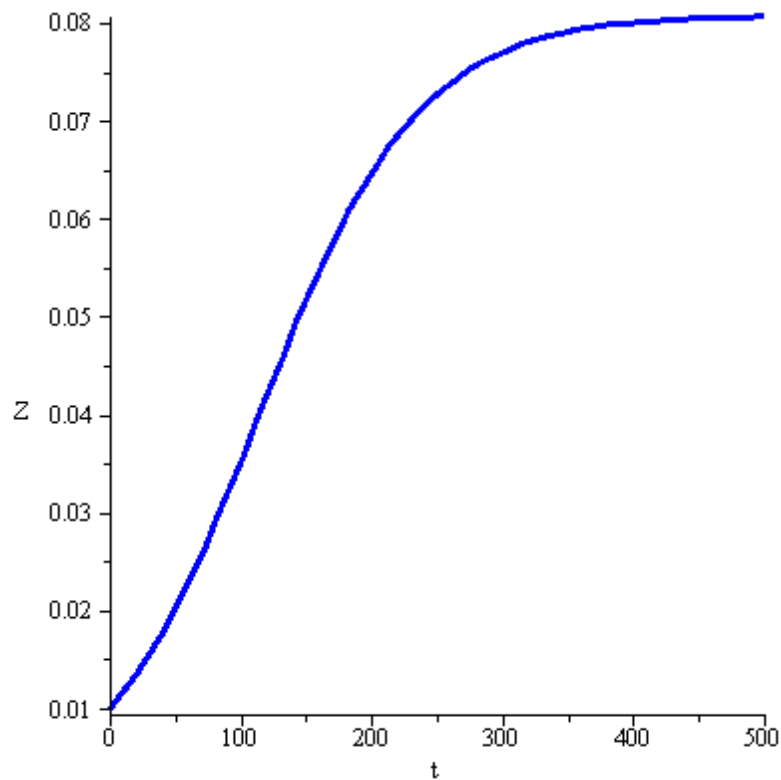
Gambar 3.7 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil (P[1]) terhadap waktu (t)



Gambar 3.8 Grafik hubungan antara fitoplankton besar (P[2]) terhadap waktu (t)



Dari Gambar 3.7 dan 3.8 terlihat perbedaan jelas, yaitu fitoplankton kecil (P[1]) meningkat sampai pada jumlah 0.44 dalam jangka waktu 50 hari dan akan menurun menuju keadaan jumlah setimbang sampai pada jumlah 0.35. sedangkan fitoplankton besar (P[2]) menurun sampai pada jumlah yang setimbang sebanyak 0 (tidak ada).

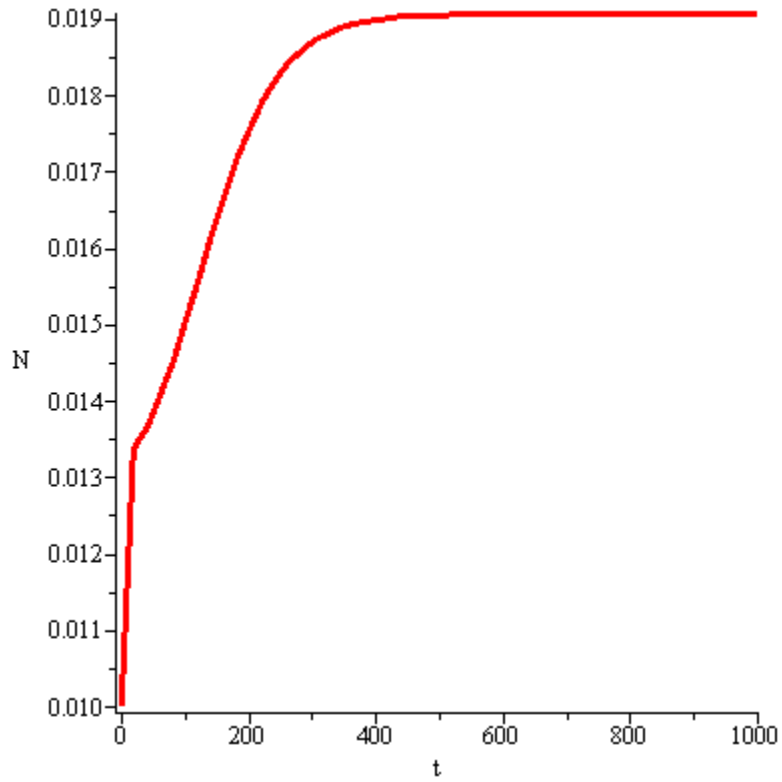


Gambar 3.9 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t)

Gambar 3.9 menunjukkan hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) yang mengalami peningkatan terus-menerus hingga mencapai jumlah setimbang 0.08 dalam jangka waktu 400 hari.

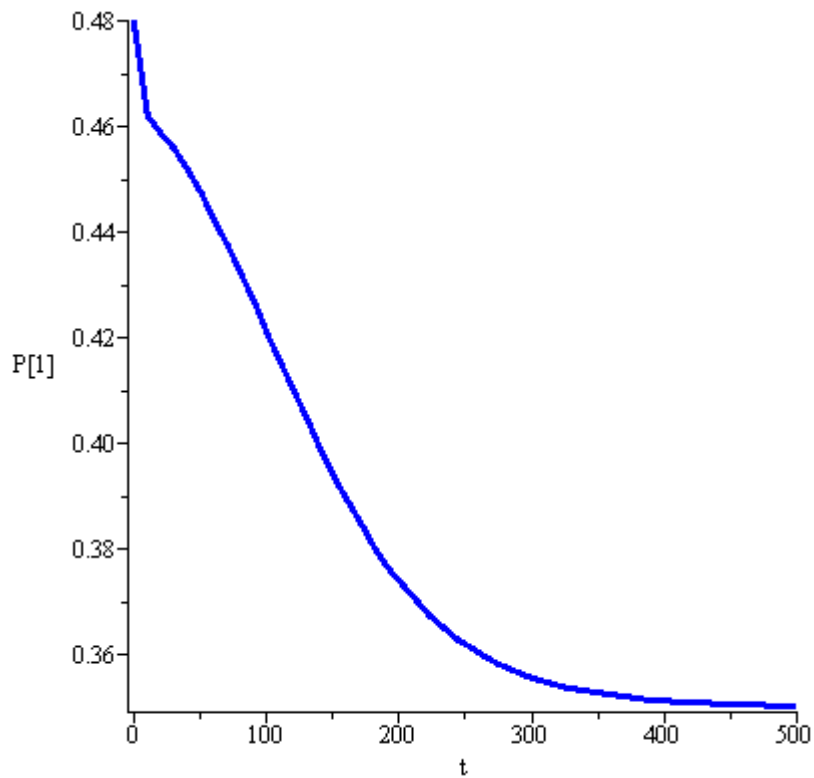
c. Titik kesetimbangan ketiga ( $T_3$ )

Disimulasikan dengan menggunakan nilai awal  $N(0) = 0.01$ ,  $P_1(0) = 0.48$ ,  $P_2(0) = 0.01$ ,  $Z(0) = 0.01$ .

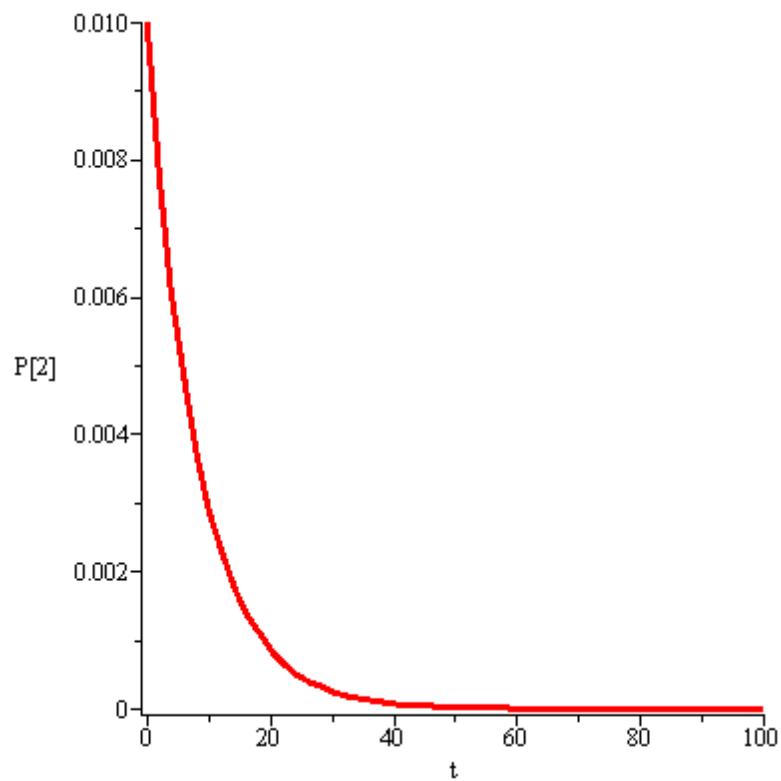


Gambar 3.10 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.10 terlihat bahwa jumlah nutrisi dilautan akan terus meningkat sampai pada jumlah setimbang yaitu 0.019 dalam jangka waktu 400 hari.

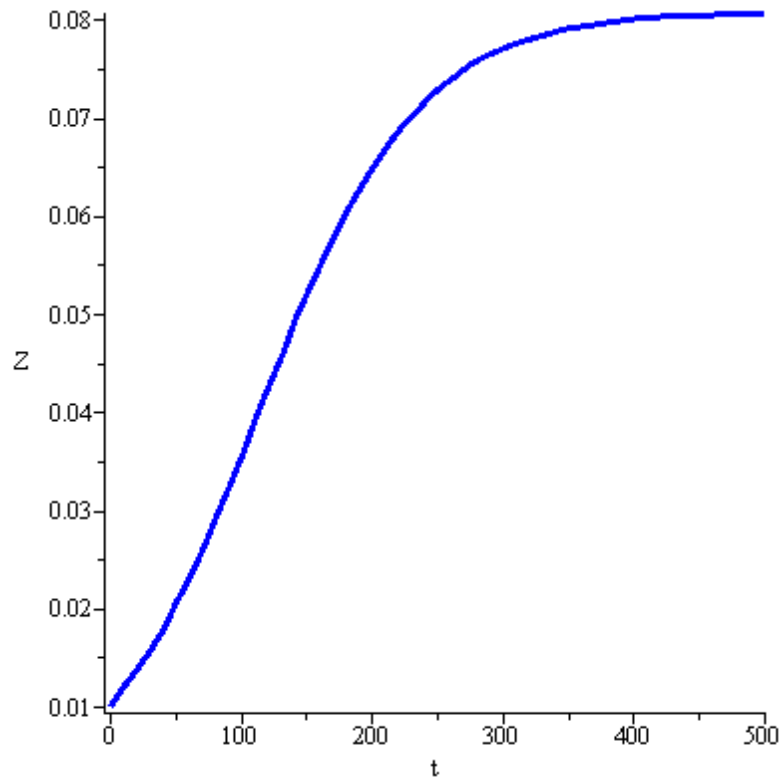


Gambar 3.11 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil (P[1]) terhadap waktu (t)



Gambar 3.12 Grafik hubungan antara fitoplankton besar (P[2]) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.11 dan 3.12 terlihat bahwa jumlah fitoplankton sama-sama mengalami penurunan sampai pada keadaan jumlah yang setimbang. Fitoplankton kecil (P[1]) menurun sampai pada jumlah 0.35 sedangkan fitoplankton besar (P[2]) menurun sampai pada jumlah 0 (tidak ada).

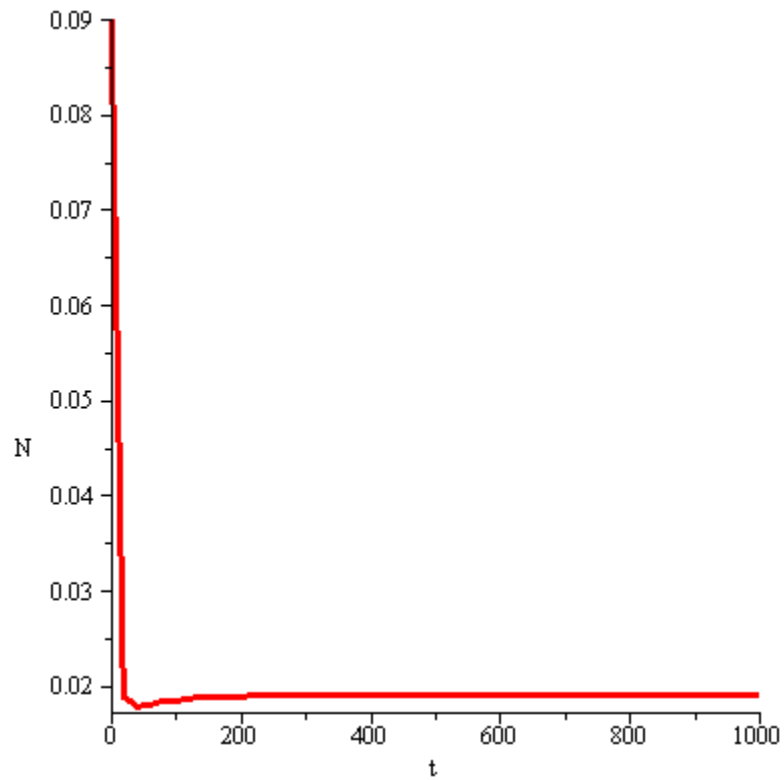


Gambar 3.13 Grafik hubungan antara zooplankton ( $Z$ ) terhadap waktu ( $t$ )

Gambar 3.13 menunjukkan hubungan antara zooplankton ( $Z$ ) terhadap waktu ( $t$ ) yang mengalami peningkatan terus-menerus hingga mencapai jumlah setimbang 0.08 dalam jangka waktu 400 hari.

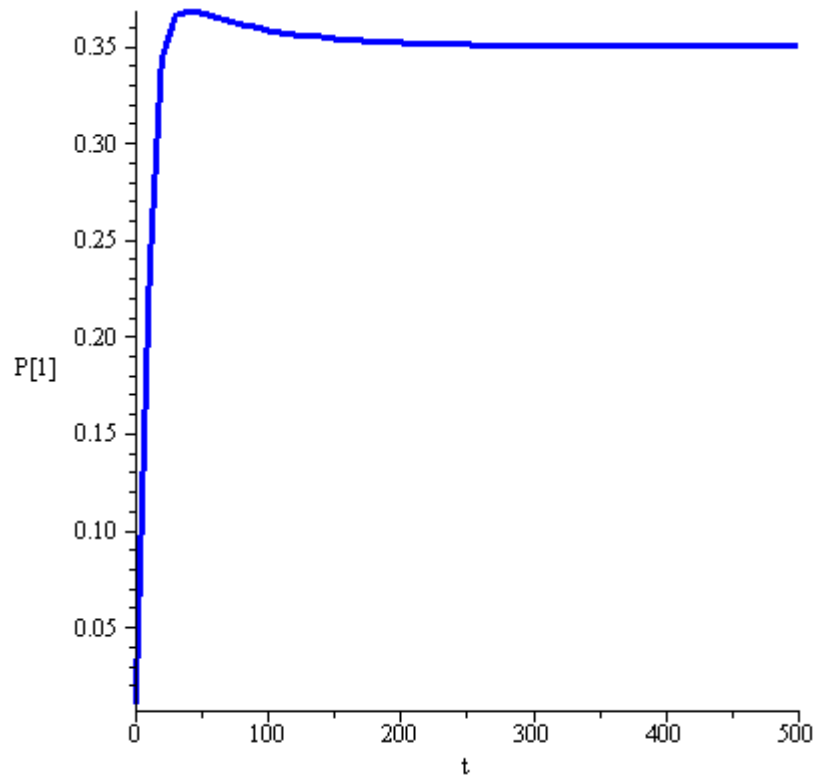
d. Titik kesetimbangan keempat ( $T_4$ )

Disimulasikan dengan menggunakan nilai awal  $N(0) = 0.09$ ,  $P_1(0) = 0.01$ ,  $P_2(0) = 0.30$ ,  $Z(0) = 0.06$

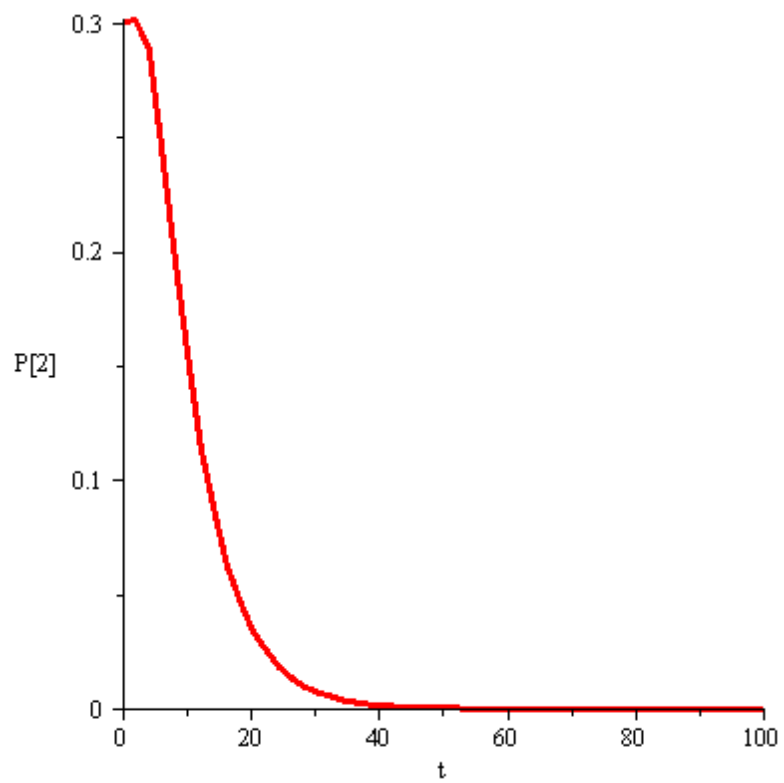


Gambar 3.14 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.14 terlihat bahwa memiliki kondisi yang sama dengan titik kesetimbangan kedua ( $T_2$ ) yaitu, jumlah nutrisi dilautan akan mengalami penurunan dalam jangka waktu 40 hari dengan jumlah 0.014 dan jumlah tersebut akan meningkat sampai pada jumlah setimbang yaitu 0.019.

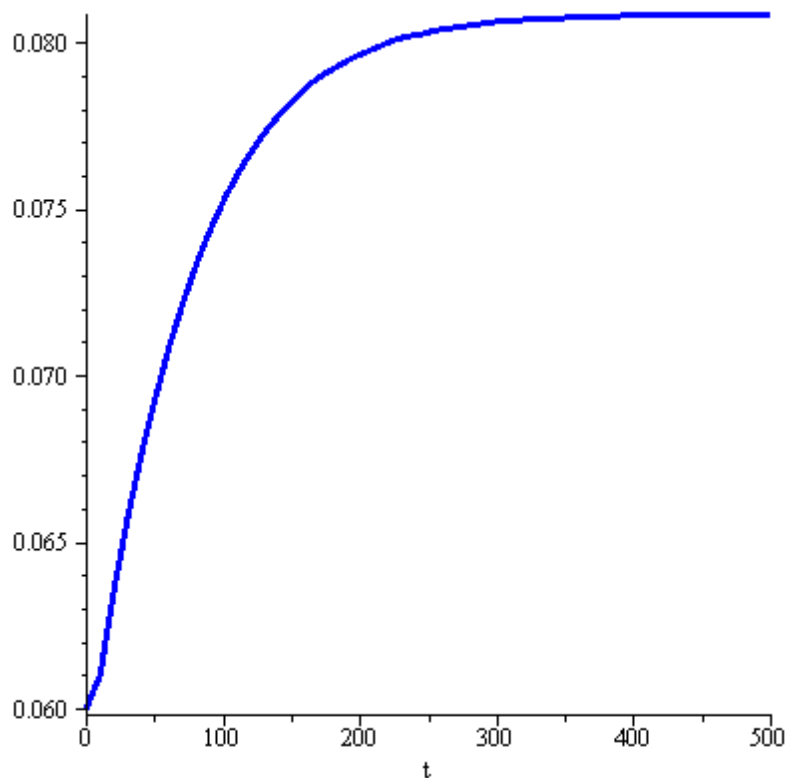


Gambar 3.15 Grafik hubungan antara fitoplankton kecil (P[1]) terhadap waktu (t)



Gambar 3.16 Grafik hubungan antara fitoplankton besar (P[2]) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.15 dan 3.16, kondisi ini sama dengan titik kesetimbangan kedua ( $T_2$ ). Yaitu perbedaan pertumbuhan antara kedua fitoplankton. Fitoplankton kecil (P[1]) mengalami peningkatan sampai pada jumlah 0.36 dalam jangka waktu 40 hari dan akan menurun menuju keadaan jumlah setimbang sampai pada jumlah 0.35. sedangkan fitoplankton besar (P[2]) menurun sampai pada jumlah yang setimbang sebanyak 0 (tidak ada).

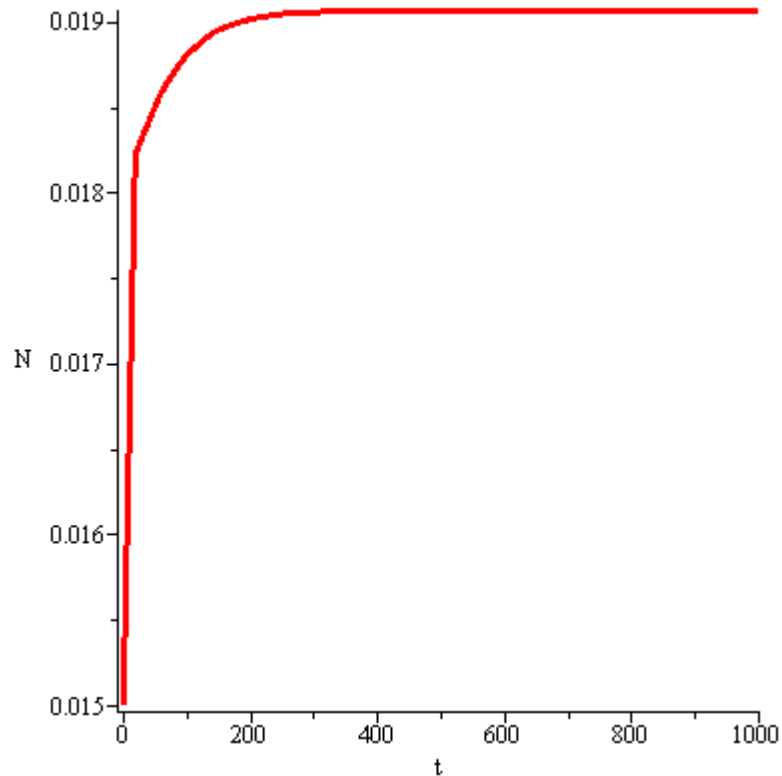


Gambar 3.17 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t)

Gambar 3.17 menunjukkan hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t) yang mengalami peningkatan terus-menerus hingga mencapai jumlah setimbang 0.08 dalam jangka waktu 400 hari.

e. Titik kesetimbangan kelima ( $T_5$ )

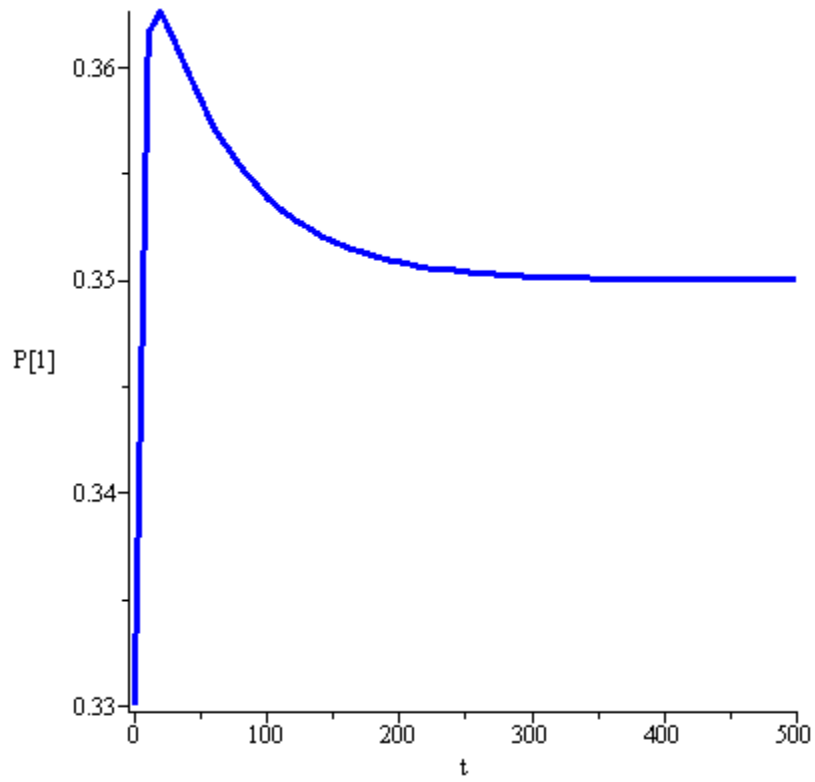
Disimulasikan dengan menggunakan nilai awal  $N(0) = 0.01$ ,  $P_1(0) = 0.30$ ,  $P_2(0) = 0.01$ ,  $Z(0) = 0.05$



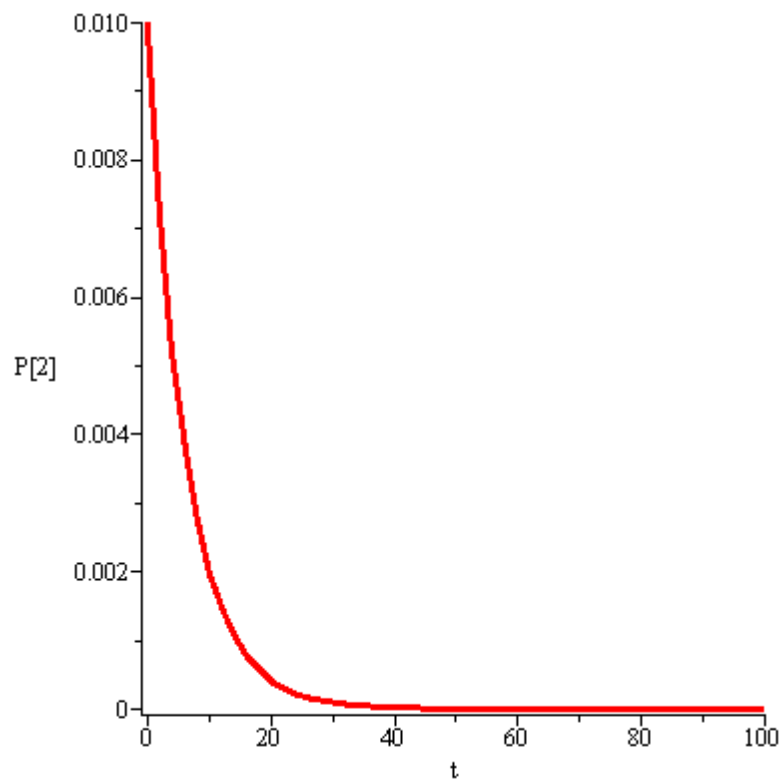
Gambar 3.18 Grafik hubungan antara nutrisi (N) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.18 terlihat bahwa jumlah nutrisi dilautan akan terus mengalami perubahan sampai dalam jangka waktu 100 hari dan jumlah tersebut akan terus meningkat sampai pada jumlah setimbang yaitu 0.019.



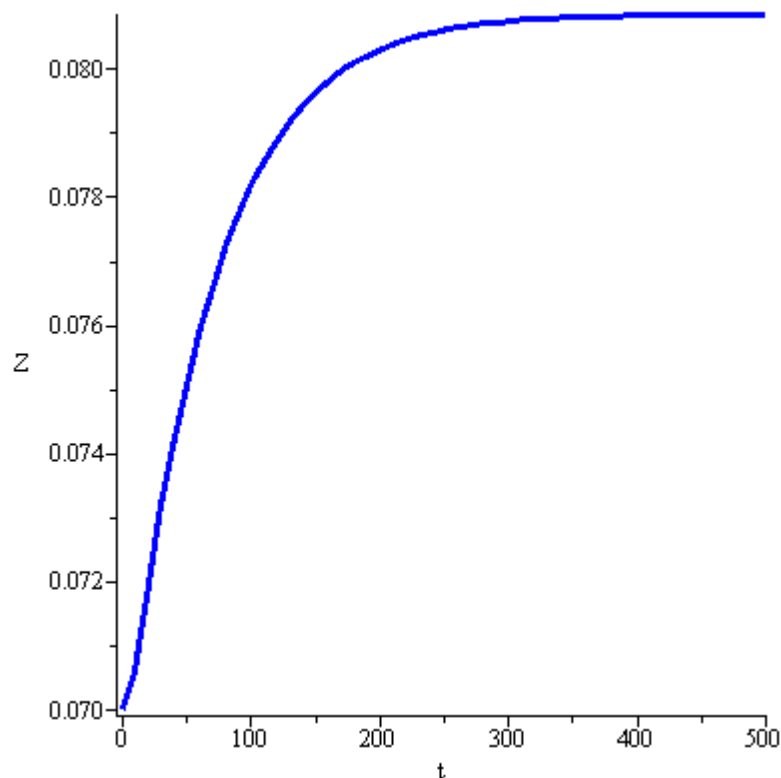


Gambar 3.19 Grafik hubungan antara Fitoplankton (P[1]) terhadap waktu (t)



Gambar 3.20 Grafik hubungan antara Fitoplankton (P[2]) terhadap waktu (t)

Dari Gambar 3.19 dan 3.20 terlihat perbedaan antara kedua jumlah fitoplankton tersebut, yaitu fitoplankton kecil (P[1]) lebih banyak dibandingkan dengan fitoplankton besar (P[2]). Hal ini disebabkan karena laju pertumbuhan kedua fitoplankton tersebut berbeda yang masing-masing dipengaruhi oleh massa dan kuat arusnya. Gambar 3.19 merupakan grafik hubungan antara fitoplankton kecil P[1] terhadap waktu yang menunjukkan pertumbuhan fitoplankton yang mengalami kenaikan sampai pada jangka waktu 15 hari dengan jumlah 0.39, kemudian akan mengalami penurunan hingga jangka waktu yang cukup lama dan mencapai jumlah setimbang hingga 0.35. sedangkan pada Gambar 3.20 pertumbuhan fitoplankton yang mengalami penurunan sampai pada jangka waktu 40 hari, yaitu dari jumlah fitoplankton 0.01 sampai 0 dan mencapai jumlah setimbang 0 fitoplankton.



Gambar 3.21 Grafik hubungan antara zooplankton (Z) terhadap waktu (t)

Gambar 3.21 menunjukkan hubungan antara zooplankton ( $Z$ ) terhadap waktu ( $t$ ) yang mengalami peningkatan terus-menerus hingga mencapai jumlah setimbang 0.08 dalam jangka waktu 300 hari.

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### V.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh model kompetisi dua fitoplankton dalam suatu rantai makanan pada ekosistem laut, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \tau D - \alpha_1 \frac{N}{K_{N1} + N} P_1 - \alpha_2 \frac{N}{K_{N2} + N} P_2 \\ \frac{dP_1}{dt} &= \left( \alpha_1 \frac{N}{K_{N1} + N} - m_p \right) P_1 - g \frac{P_1}{K_z + P_1 + P_2} Z \\ \frac{dP_2}{dt} &= \left( \alpha_2 \frac{N}{K_{N2} + N} - m_p \right) P_2 - g \frac{P_2}{K_z + P_1 + P_2} Z \\ \frac{dZ}{dt} &= \left[ g \beta \frac{P_1 + P_2}{K_z + P_1 + P_2} - \varepsilon \right] Z \\ \frac{dD}{dt} &= \left[ g(1 - \beta) \frac{P_1 + P_2}{K_z + P_1 + P_2} \right] Z + m_p(P_1 + P_2) + \varepsilon Z - \tau D\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dan memiliki lima titik kesetimbangan yaitu

$$T_1 = (N, P_1, P_2, Z) = (1.2, 0, 0, 0)$$

$$T_2 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.064, 0, 0.463, 0)$$

$$T_3 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.012, 0.484, 0, 0)$$

$$T_4 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.091, 0, 0.350, 0.062)$$

$$T_5 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.019, 0.35, 0, 0.08)$$

Yang masing-masing titik kesetimbangan akan diuji kestabilannya sehingga didapatkan hanya ada satu titik kesetimbangan yang stabil yaitu  $T_5 = (N, P_1, P_2, Z) = (0.019, 0.35, 0, 0.08)$  dengan nilai eigen  $\lambda_1 = -3.254$ ,  $\lambda_2 = -0.305$ ,  $\lambda_3 = -0.015$ ,  $\lambda_4 = -0.168$ .

Pada sistem ini, dapat disimpulkan bahwa rantai makanan sederhana pada ekosistem laut yang dinyatakan dalam persamaan differensial non-linear saling mempengaruhi satu

sama lain dan dapat diketahui bahwa dalam jangka waktu yang sangat lama Fitoplankton dan Zooplankton tidak akan pernah mengalami kepunahan.

## **V.2 Saran**

Dalam penulisan tugas akhir ini, dapat diketahui bahwa pertumbuhan fitoplankton memberikan peran yang sangat besar dalam rangka kelangsungan hidup bagi ekosistem laut. Oleh karena itu penulis menyarankan bahwa untuk tetap menjaga keseimbangan ekosistem laut agar tidak terjadi kepunahan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Hutabarat, S. dan S.M, Evans, 1985. **Pengantar Oseanografi**. Universitas Indonesia Press Jakarta.
- Hutagalung, H.P., D. Setiapermana dan S.H. Riyono., 1997. **Metode Analisis Air Laut, Sedimen dan Biota**. Buku 2. Puslitbang Oseanologi LIPI. Jakarta.
- Nontji, Anugrah. 2005. **Laut Nusantara Djambatan**. Jakarta.
- Nontji, Anugrah. 2008. **Plankton Laut**. Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia Pusat Penelitian Oseanografi. Jakarta.
- Nybakken, J. W. 1992. **Biologi Laut Suatu Pendekatan Ekologi**. Gramedia Jakarta
- Stewart, R. 2004. **Marine Genomics Europe**, <http://www.marine-genomics-europe.org>. diakses pada 26 Januari 2011
- Verhulst, Ferdinand, 1990, **Nonlinear Differential Equation and Dynamical System**, Springer-Verlag., Jerman.

# ***Lampiran***

## Lampiran 1: Analitik

- > *restart* := with(*linalg*) :
- >  $\mu[1] := 1.9 : \mu[2] := 1.5 : K[N1] := 0.15 : K[N2] := 0.6 : K[I1]$   
 $:= 30 : K[I2] := 5 : m[p] := 0.145 : g := 1.5 : K[Z] := 1.4 : \beta$   
 $:= 0.2 : \varepsilon := 0.06 : \tau := 0.1 : C[0] := 1.2 :$
- >  $\alpha[1] := \mu[1] \left( 1 - e^{-\frac{1}{K[I1]}} \right) : \alpha[2] := \mu[2] \left( 1 - e^{-\frac{1}{K[I2]}} \right) :$
- >  $d := C[0] - N - P[1] - P[2] - Z :$
- >
- >  $p1 := \tau \cdot (C[0] - N - P[1] - P[2] - Z) - \alpha[1] \cdot \frac{N}{K[N1] + N} \cdot P[1]$   
 $- \alpha[2] \cdot \frac{N}{K[N2] + N} \cdot P[2] : p2 := \left( \alpha[1] \cdot \frac{N}{K[N1] + N}$   
 $- m[p] \right) \cdot P[1] - g \cdot \left( \frac{P[1]}{K[Z] + P[1] + P[2]} \right) \cdot Z : p3 := \left( \alpha[2]$   
 $\cdot \frac{N}{K[N2] + N} - m[p] \right) \cdot P[2] - g \cdot \left( \frac{P[2]}{K[Z] + P[1] + P[2]} \right) \cdot Z :$   
 $p4 := \left( g \cdot \beta \cdot \frac{P[1] + P[2]}{K[Z] + P[1] + P[2]} - \varepsilon \right) \cdot Z :$
- > *solusi* := solve({*p1*, *p2*, *p3*, *p4*}, {*N*, *P[1]*, *P[2]*, *Z*}) :
- > *vek1* := vector([*p1*, *p2*, *p3*, *p4*]) :
- > *jcob* := jacobian(*vek1*, [*N*, *P[1]*, *P[2]*, *Z*]) :
- > *job1* := subs(*solusi*[1], evalm(*jcob*)) :
- > *pkar1* := charpoly(*job1*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job1*) :
- > *job2* := subs(*solusi*[2], evalm(*jcob*)) :
- > *pkar2* := charpoly(*job2*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job2*) :
- > *job3* := subs(*solusi*[3], evalm(*jcob*)) :
- > *pkar3* := charpoly(*job3*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job3*) :
- > *job4* := subs(*solusi*[4], evalm(*jcob*)) :
- > *pkar4* := charpoly(*job4*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job4*) :
- > *job6* := subs(*solusi*[6], evalm(*jcob*)) :
- > *pkar6* := charpoly(*job6*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job6*) :



## Lampiran 2: Simulasi Numerik dengan Parameter Tertentu

- > *restart* : *with(linalg)* :
- >  $\mu[1] := 1.9$  :  $\mu[2] := 1.5$  :  $K[N1] := 0.15$  :  $K[N2] := 0.6$  :  $K[I1]$   
 $:= 30$  :  $K[I2] := 5$  :  $m[p] := 0.145$  :  $g := 1.5$  :  $K[Z] := 1.4$  :  $\beta$   
 $:= 0.2$  :  $\varepsilon := 0.06$  :  $\tau := 0.1$  :  $C[0] := 1.2$  :
- >  $\alpha[1] := \mu[1] \left( 1 - e^{\frac{-1}{K[I1]}} \right)$  :  $\alpha[2] := \mu[2] \left( 1 - e^{\frac{-1}{K[I2]}} \right)$  :
- >  $d := C[0] - N - P[1] - P[2] - Z$  :
- >
- $p1 := \tau \cdot (C[0] - N - P[1] - P[2] - Z) - \alpha[1] \cdot \frac{N}{K[N1] + N} \cdot P[1]$   
 $- \alpha[2] \cdot \frac{N}{K[N2] + N} \cdot P[2]$  :  $p2 := \left( \alpha[1] \cdot \frac{N}{K[N1] + N} \right.$   
 $- m[p] \cdot P[1] - g \cdot \left( \frac{P[1]}{K[Z] + P[1] + P[2]} \right) \cdot Z$  :  $p3 := \left( \alpha[2] \right.$   
 $\cdot \frac{N}{K[N2] + N} - m[p] \cdot P[2] - g \cdot \left( \frac{P[2]}{K[Z] + P[1] + P[2]} \right) \cdot Z$  :
- $p4 := \left( g \cdot \beta \cdot \frac{P[1] + P[2]}{K[Z] + P[1] + P[2]} - \varepsilon \right) \cdot Z$  :
- > *solusi* := *solve* ( {*p1*, *p2*, *p3*, *p4*}, {*N*, *P[1]*, *P[2]*, *Z*} ) :
- > *vek1* := *vector* ( [*p1*, *p2*, *p3*, *p4*] ) :
- > *jcob* := *jacobian* (*vek1*, [*N*, *P[1]*, *P[2]*, *Z*] ) :
- > *job1* := *subs* (*solusi*[1], *evalm*(*jcob*) ) :
- > *pkar1* := *charpoly* (*job1*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job1*) :
- > *job2* := *subs* (*solusi*[2], *evalm*(*jcob*) ) :
- > *pkar2* := *charpoly* (*job2*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job2*) :
- > *job3* := *subs* (*solusi*[3], *evalm*(*jcob*) ) :
- > *pkar3* := *charpoly* (*job3*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job3*) :
- > *job4* := *subs* (*solusi*[4], *evalm*(*jcob*) ) :
- > *pkar4* := *charpoly* (*job4*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job4*) :
- > *job6* := *subs* (*solusi*[6], *evalm*(*jcob*) ) :
- > *pkar6* := *charpoly* (*job6*,  $\lambda$ ) :
- > *eigenvalues* (*job6*) :
- > *sol* := *solve* ( {*p1*, *p2*, *p3*, *p4*}, {*N*, *P[1]*, *P[2]*, *Z*} ) :
- > *with* (*plots*) :

$$\begin{aligned}
\text{sys} := & \frac{d}{dt}N(t) = \tau \cdot (C[0] - N(t) - P[1](t) - P[2](t) - Z(t)) - \alpha[1] \\
& \cdot \frac{N(t)}{K[N1] + N(t)} \cdot P[1](t) - \alpha[2] \cdot \frac{N(t)}{K[N2] + N(t)} \cdot P[2](t), \\
\frac{d}{dt}P[1](t) = & \left( \alpha[1] \cdot \frac{N(t)}{K[N1] + N(t)} - m[p] \right) \cdot P[1](t) - g \\
& \cdot \left( \frac{P[1](t)}{K[Z] + P[1](t) + P[2](t)} \right) \cdot Z(t), \frac{d}{dt}P[2](t) = \left( \alpha[2] \right. \\
& \cdot \frac{N(t)}{K[N2] + N(t)} - m[p] \left. \right) \cdot P[2](t) - g \\
& \cdot \left( \frac{P[2](t)}{K[Z] + P[1](t) + P[2](t)} \right) \cdot Z(t), \frac{d}{dt}Z(t) = \left( g \cdot \beta \right. \\
& \cdot \left. \frac{P[1](t) + P[2](t)}{K[Z] + P[1](t) + P[2](t)} - \epsilon \right) \cdot Z(t) :
\end{aligned}$$

- >  $fns := \{N(t), P[1](t), P[2](t), Z(t)\} :$
- >  $L := dsolve(\{sys, N(0) = 1.1, P[1](0) = 0.01, P[2](0) = 0.01, Z(0) = 0.01\}, fns, type = numeric, method = rkf45) :$
- >  $odeplot(L, [[t, N(t), color = RED, thickness = 3]], 0..1000) :$
- >  $odeplot(L, [[t, P[1](t), color = blue, thickness = 3]], 0..500) :$
- >  $odeplot(L, [[t, P[2](t), color = RED, thickness = 3]], 0..100) :$
- >  $odeplot(L, [[t, Z(t), color = blue, thickness = 3]], 0..500) :$