

**ANALISIS MODEL EPIDEMIK SEIS MELALUI TRANSPORTASI
ANTAR DUA KOTA DENGAN WAKTU TUNDA**

*THE ANALYSIS OF SEIS EPIDEMIC MODEL THROUGH
TRANSPORTATION BETWEEN TWO CITIES
WITH TIME DELAY*

HIKMAWATI PATHUDDIN



**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2013

**ANALISIS MODEL EPIDEMIK SEIS MELALUI TRANSPORTASI
ANTAR DUA KOTA DENGAN WAKTU TUNDA**

Tesis
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi
Matematika

Disusun dan diajukan oleh

HIKMAWATI PATHUDDIN

Kepada

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2013

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Hikmawati Pathuddin

Nomor Mahasiswa : P3500211002

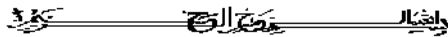
Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar,
Yang menyatakan

Hikmawati Pathuddin

PRAKATA



Alhamdulillah, segala puji hanya milik Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Salam dan shalawat tak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Rasulullah SAW dan semoga keselamatan senantiasa tercurah kepada keluarga beliau, para sahabat, tabi'in, serta umat yang senantiasa istiqomah di jalan-Nya.

Dalam menyelesaikan tesis ini, tidak sedikit hambatan dan kesulitan yang dihadapi penulis. Namun berkat dorongan dan bimbingan dari berbagai pihak, hambatan dan kesulitan tersebut dapat diatasi. Karenanya, sudah sepantasnyalah penulis menghaturkan ucapan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah memberikan andil dalam penyusunan tesis ini. Dalam kesempatan penulis dengan tulus menyampaikan terima kasih kepada Bapak Dr. Jeffry Kusuma selaku Ketua Komisi Penasehat dan Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc sebagai Anggota Komisi Penasehat sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas bantuan dan bimbingan yang telah diberikan. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S, Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc, dan Dr. Eng. Mawardi sebagai Tim Penguji atas nasehat dan saran yang

telah diberikan. Dan yang terakhir terima kasih juga kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu tapi telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

Akhirnya penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT dengan pahala yang berlipat ganda. Amin.

Makassar, November 2013

Hikmawati Pathuddin

ABSTRAK

HIKMAWATI PATHUDDIN. Analisis Model Epidemik SEIS Melalui Transportasi Antar Dua Kota Dengan Waktu Tunda (dibimbing oleh Jeffry Kusuma dan Syamsuddin Toaha)

Penelitian ini bertujuan mengetahui (1) cara menganalisis titik kesetimbangan dan kestabilan dari model epidemik SEIS, (2) pengaruh transportasi terhadap dinamika penyebaran penyakit menular SEIS antar dua kota, (3) pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan model epidemik SEIS.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur untuk mengkonstruksi model, menentukan titik kesetimbangan, dan menganalisis kestabilan. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan software Matlab.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat dua jenis titik kesetimbangan dari masing-masing model yang dianalisis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Dari hasil analisis diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik jika $R_0 > 1$. Hasil analisis pengaruh transportasi menunjukkan bahwa jumlah individu rentan di kedua kota akan berkurang dengan peningkatan laju penularan antar kota, sebaliknya jumlah individu jumlah individu laten dan terinfeksi akan bertambah dengan meningkatnya laju penularan antar kota. Sementara dari analisis waktu tunda diperoleh hasil bahwa adanya waktu tunda mempengaruhi cepat atau lambatnya titik kesetimbangan untuk mencapai kestabilan. Namun, waktu tunda tidak mempengaruhi perubahan kestabilan.

ABSTRACT

HIKMAWATI PATHUDDIN. The Analysis of SEIS Epidemic Model Through Transportation Between Two Cities with Time Delay (supervised by Jeffry Kusuma dan Syamsuddin Toaha).

The study aims to find out: (1) how to analyze the equilibrium and stability of SEIS epidemic model; (2) the effect of transportation to the dynamic of infectious disease spreading between two cities; and (3) the effect of time delay to the stability of SEIS epidemic model.

The research used literature study method to construct models, determine equilibrium points, and analyze stability. Numeric simulation was performed by using Matlab software.

The results reveal that there are two kind of equilibrium point in each model, i.e disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. The analysis reveals that disease free equilibrium is asymptotically stable if $R_0 < 1$, and endemic equilibrium is asymptotically stable if $R_0 > 1$. The analysis of transportation effect reveals that the number of susceptible individuals will be reduced by the increase of the rate of transmission between cities. In contrast, the number of latent and infected individuals will increase by the increase of the rate of transmission between cities. Meanwhile, the analysis of time delay reveals that time delay affects to the time period needed by the equilibrium point to reach stability. On the other hand, time delay does not affect stability change.

DAFTAR ISI

	Halaman
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	4
D. Kegunaan Penelitian	4
E. Sistematika Penulisan	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
A. Model Epidemik	7
B. Nilai Eigen	9
C. Kriteria Kestabilan	10
D. Bilangan Reproduksi Dasar	11
E. Aturan Tanda Descartes	11

F. Metode Kajian	12
G. Definisi Istilah	14
BAB III MODEL EPIDEMIK SEIS MELALUI TRANSPORTASI ANTAR DUA KOTA	
A. Model Tanpa Waktu Tunda	16
1. Tidak Ada Individu yang Bepergian	18
a. Keadaan Kestimbangan	19
b. Analisis Kestabilan	20
2. Hanya Individu Rentan dan Laten yang Bepergian	24
a. Keadaan Kestimbangan	25
b. Analisis Kestabilan	27
3. Semua Individu Melakukan Transportasi	32
a. Keadaan Kestimbangan	32
b. Analisis Kestabilan	33
4. Simulasi Numerik	42
5. Analisis Pengaruh Transportasi	53
B. Model Dengan Waktu Tunda	55
1. Analisis Kestabilan	56
2. Simulasi Numerik	63
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan	69
B. Saran	71

DAFTAR PUSTAKA	73
LAMPIRAN	74

DAFTAR GAMBAR

Nomor		halaman
1.	Diagram alur kerja	14
2.	Diagram kompartemen model SEIS melalui transportasi antar dua kota	17
3.	Diagram kompartemen model SEIS melalui transportasi antar dua kota	24
4.	Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 1$)	43
5.	Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 1$)	43
6.	Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 1$)	43
7.	Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0.1$)	44
8.	Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0.1$)	45
9.	Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0.1$)	45
10.	Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1$)	46
11.	Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1$)	46
12.	Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1$)	47
13.	Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 0.1$)	48
14.	Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 0.1$)	48
15.	Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 0.1$)	49

16. Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0$)	50
17. Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0$)	50
18. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0$)	51
19. Populasi individu rentan terhadap waktu	52
20. Populasi individu laten terhadap waktu	52
21. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu	53
22. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 1 ($\beta = 0.1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	64
23. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 2 ($\beta = 0.1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	65
24. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 1 ($\beta = 1, \tau = 0, \tau = 20, \tau = 40$)	66
25. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 2 ($\beta = 1, \tau = 0, \tau = 20, \tau = 40$)	67

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	halaman
1. Sintaks program Matlab untuk Gambar 4, 5, dan 6	74
2. Sintaks program Matlab untuk Gambar 7, 8, dan 9	75
3. Sintaks program Matlab untuk Gambar 10, 11, dan 12	76
4. Sintaks program Matlab untuk Gambar 13, 14, dan 15	77
5. Sintaks program Matlab untuk Gambar 16, 17, dan 18	78
6. Sintaks program Matlab untuk Gambar 19, 20, dan 21	79
7. Sintaks program Matlab untuk Gambar 22 dan 23	80
8. Sintaks program Matlab untuk Gambar 24 dan 25	81

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Model matematika merupakan suatu alat yang digunakan untuk mempelajari dan menjelaskan suatu fenomena yang terjadi. Pemodelan matematika dewasa ini semakin berkembang. Salah satu penerapannya adalah di bidang kesehatan atau epidemiologi yang banyak menjelaskan tentang penyebaran penyakit, khususnya penyakit menular. Pemodelan matematika di bidang ini memiliki peranan dalam analisis dan mengontrol penyebaran penyakit.

Kajian tentang model penyebaran penyakit telah banyak dilakukan oleh peneliti dan sebagian besar peneliti mengasumsikan bahwa populasi berada pada tempat yang tetap, tanpa adanya perjalanan ke tempat lain. Namun pada kenyataannya, orang-orang biasanya melakukan perjalanan ke tempat-tempat yang berbeda. Hal ini menyebabkan banyak penyakit yang dapat dengan mudah menular dari satu daerah ke daerah lain.

Model epidemik SEIS (*Susceptible, Exposed, Infection, Susceptible*) yang diperkenalkan oleh Fan *et al* (2000) merupakan model epidemik yang mengasumsikan bahwa populasi berada pada tempat yang tetap. Model epidemik SIS (*Susceptible, Infection, Susceptible*) dengan penularan melalui

transportasi yang diperkenalkan oleh Cui *et al* (2006) merupakan salah satu model yang mempertimbangkan kemungkinan individu terinfeksi penyakit selama melakukan perjalanan. Beberapa penyakit memiliki periode laten, sehingga adanya periode laten menjadi alasan Wan dan Cui (2007) membentuk model epidemik SEIS (*Susceptible, Exposed, Infection, Susceptible*) yang kemudian diperkenalkan kembali oleh Fathoni (2013). Pada perkembangan selanjutnya, Denphentnong dan Chinviriyasit (2010) membentuk model SEIRS (*Susceptible, Exposed, Infection, Removed, Susceptible*) pada penyebaran penyakit melalui transportasi. Model ini dibentuk dengan alasan bahwa pada beberapa penyakit, seperti influenza, cacar, dll, setelah penyembuhan, seseorang biasanya mempunyai imunitas terhadap penyakit.

Untuk membangun model yang lebih realistis yaitu dengan mempertimbangkan waktu tunda pada saat terjadinya perpindahan dari satu kota ke kota lain melalui transportasi, Nakata (2011) mengembangkan model delay pada model SIS di mana individu rentan dan individu terinfeksi melakukan perjalanan antar kota dengan mempertimbangkan waktu yang digunakan selama dalam transportasi. Di sini diberikan asumsi bahwa kedua kota memiliki parameter yang identik. Pada perkembangan selanjutnya, Nakata dan Rost (2012) kembali mengembangkan model delay pada model SIS namun dengan asumsi berbeda, yakni kedua kota tidak identik di mana terdapat perbedaan jumlah populasi dan laju transportasi.

Dari pembahasan di atas, muncul sebuah ide agar model epidemik SEIS melalui transportasi antar dua kota mempertimbangkan waktu tunda pada saat berlangsungnya transportasi. Model ini merupakan pengembangan model SEIS yang telah diteliti oleh Fan *et al* (2000).

B. Rumusan Masalah

Model yang akan dikaji adalah model epidemik SEIS yang telah dikembangkan oleh Fan *et al* (2000) dengan tambahan asumsi yang diberikan oleh Wan dan Cui (2007) yang selanjutnya menjadi model epidemik SEIS dengan transportasi antar dua kota. Kemudian dengan asumsi yang diberikan oleh Nakata (2011) bahwa penyebaran penyakit juga dipengaruhi oleh waktu yang digunakan selama bertransportasi, maka diperoleh model epidemik SEIS dengan transportasi antar dua kota dengan mempertimbangkan waktu tunda.

Dari model tersebut, selanjutnya dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, yaitu:

- a. Bagaimana menganalisis titik kesetimbangan dan kestabilan dari model penyebaran penyakit menular SEIS?
- b. Bagaimana pengaruh transportasi terhadap dinamika penyebaran penyakit menular SEIS antar dua kota?

- c. Bagaimana pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan model penyebaran penyakit menular SEIS?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

- a. Mengetahui cara menganalisis titik kesetimbangan dan kestabilan dari model epidemik SEIS.
- b. Mengetahui pengaruh transportasi terhadap dinamika penyebaran penyakit menular SEIS antar dua kota.
- c. Mengetahui pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan model penyebaran penyakit menular SEIS.

D. Kegunaan Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman tentang model matematika di bidang kesehatan atau epidemiologi, serta memberikan informasi mengenai pengaruh penyebaran penyakit menular melalui transportasi sehingga dapat diambil langkah-langkah yang tepat untuk pencegahannya. Meskipun model matematika tidak mampu menyembuhkan penyakit, namun dapat membantu dalam prediksi dan pengendalian penyakit menular di masa mendatang.

E. Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah

BAB I PENDAHULUAN

- A. Latar Belakang
- B. Rumusan Masalah
- C. Tujuan Penelitian
- D. Kegunaan Penelitian

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

- A. Model Epidemik
- B. Keadaan Keseimbangan
- C. Bilangan Reproduksi Dasar
- D. Aturan Tanda Descartes
- E. Metode Kajian
- F. Definisi Istilah

BAB III MODEL EPIDEMIK SEIS MELALUI TRANSPORTASI ANTAR DUA KOTA

- C. Model Tanpa Waktu Tunda
 - 6. Tidak Ada Individu yang Bepergian
 - c. Keadaan Keseimbangan
 - d. Analisis Kestabilan
 - 7. Hanya Individu Rentan dan Laten yang Bepergian
 - c. Keadaan Keseimbangan
 - d. Analisis Kestabilan
 - 8. Semua Individu Melakukan Transportasi
 - c. Keadaan Keseimbangan
 - d. Analisis Kestabilan
 - 9. Simulasi Numerik

10. Analisis Pengaruh Transportasi

D. Model Dengan Waktu Tunda

3. Analisis Kestabilan

4. Simulasi Numerik

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

B. Saran

DAFTAR PUSTAKA

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Model Epidemik

Pada model epidemik, terdapat elemen dasar untuk mendeskripsikan penyebaran penyakit yang dibagi ke dalam tiga kelas epidemiologi, yaitu:

- (a) *Susceptible*, merupakan keseluruhan individu yang sehat dan dapat terjangkit penyakit
- (b) *infectious*, merupakan keseluruhan individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit
- (c) *removed*, merupakan keseluruhan individu yang memiliki imunitas karena telah terinfeksi dan telah sembuh

Kelas-kelas epidemiologi menunjukkan karakter masing-masing penyakit sehingga model dasar epidemik ini dapat berubah sesuai karakter penyakit.

1. Model Epidemik SEIS

Model epidemik SEIS merupakan model epidemik tanpa kekebalan, di mana penyakit mengalami masa inkubasi dan dapat sembuh, namun tidak ada kekebalan setelah sembuh (masih rentan terhadap penyakit). Pada model ini, populasi terbagi menjadi tiga kelas individu (kompartemen), yaitu rentan (S), laten (E), dan terinfeksi (I).

Individu rentan dapat terinfeksi karena berinteraksi dengan individu yang telah terinfeksi. Individu rentan yang telah terinfeksi tidak langsung menampakkan tanda-tanda penyakitnya, dengan kata lain ada suatu periode laten di mana belum ada tanda-tanda terjangkitnya penyakit. Individu ini dimasukkan ke dalam populasi laten. Selain itu, individu rentan, laten, dan terinfeksi juga dapat mengalami kematian secara alami.

Menurut Fan *et al* (2000), peningkatan jumlah populasi individu rentan (S) disebabkan oleh dua hal, yaitu adanya laju rekrutmen yang konstan dan laju kesembuhan individu terinfeksi yang kembali menjadi rentan, sementara penurunan jumlah populasi kompartemen S disebabkan oleh kematian alami dan laju infeksi atau laju penularan penyakit ketika terjadi kontak antara individu rentan dan terinfeksi. Jumlah populasi individu laten (E) meningkat karena adanya laju infeksi dan menurun akibat laju kematian alami dan laju perkembangan individu laten menjadi terinfeksi. Jumlah populasi individu terinfeksi (I) meningkat karena adanya laju perkembangan individu laten menjadi terinfeksi dan menurun akibat laju kesembuhan individu terinfeksi yang kembali rentan serta laju kematian yang terdiri dari laju kematian alami dan laju kematian yang disebabkan oleh penyakit.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, dibentuk model matematika sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta SI - bS + dI \quad (2.1a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (b + c)E \quad (2.1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = cE - dI - eI \quad (2.1c)$$

dengan semua parameter bernilai positif.

B. Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk menentukan solusi system linear dari sebuah system dinamik.

Definisi (Anton dan Rorres,2005)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x dinamakan vektor eigen dari A jika dan hanya jika terdapat skalar λ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x \quad (2.2)$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A .

Solusi dari nilai eigen dapat dituliskan secara ekuivalen sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.3)$$

dengan I menyatakan matriks identitas. Sistem dikatakan memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan ini dinamakan persamaan karakteristik dari A .

C. Kriteria Kestabilan

Diberikan persamaan karakteristik,

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + p_2\lambda^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \quad (2.5)$$

di mana koefisien p_i adalah konstan, $i = 1, 2, \dots, n$

Didefinisikan matriks Hurwitz:

$$H_1 = (p_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{pmatrix}, \text{ dan}$$

$$H_n = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

di mana $p_j = 0$ jika $j > n$.

Titik kesetimbangan stabil secara asimtotik, jika dan hanya jika determinan dari matriks Routh-Hurwitz positif, yaitu :

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Dengan kata lain semua akar dari persamaan karakteristik $p(\lambda)$ adalah real negatif atau kompleks dengan bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif, $\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$.

(Edelstein dan Keshet, 2005)

D. Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi bila individu terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka individu terinfeksi memproduksi rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru selama periode penularan, sehingga infeksi tidak dapat berkembang. Namun, jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka setiap individu terinfeksi memproduksi rata-rata lebih dari satu infeksi baru sehingga penyakit akan menyerang populasi atau dengan kata lain, penyakit akan berkembang menjadi wabah (Driessche dan Watmough, 2002).

Menurut Giesecke (1994), kondisi yang akan timbul adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut:

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

E. Aturan Tanda Descartes

Aturan tanda Descartes dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan $p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$ adalah polinomial dengan koefisien real a_i dan b_i merupakan bilangan bulat yang memenuhi $0 < b_0 < b_1 < \dots < b_n$. Maka banyaknya akar real positif dari $p(x)$ sama

dengan banyaknya variasi tanda dari koefisien polinomialnya a_0, a_1, \dots, a_n (Wang, 2004).

Contoh :

Tinjau polinomial derajat tiga $p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$. Tunjukkan bahwa polinom tersebut mempunyai akar real positif dengan menggunakan aturan tanda Descartes !

Penyelesaian :

Koefisien polinomial $p(x)$ berturut-turut $a_3 = 1, a_2 = -5, a_1 = 2, \text{ dan } a_0 = 8$.

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2}$

Variasi tandanya adalah +1, -5 dan -5, +2 artinya diperoleh dua kali pergantian tanda antar koefisiennya. Dengan demikian menurut aturan tanda Descartes polinomial $p(x)$ memiliki dua akar real positif.

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x - 2)(x - 4)(x + 1) = 0$$

Akar-akar polinomial $p(x)$ adalah 2, 4, dan -1.

F. Metode Penelitian

Penelitian akan dilakukan sesuai dengan langkah-langkah berikut:

a. Studi Literatur

Studi literatur dilakukan terhadap jurnal penelitian yang telah dilakukan dan sumber pendukung lainnya untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan model epidemik SEIS.

b. Pembuatan Model

Setelah dilakukan studi literatur, kemudian dilanjutkan dengan penyusunan masalah dan mengkontruksi model dengan menyusun asumsi-asumsi terhadap model tersebut.

c. Analisis Kestabilan

Untuk menganalisis kestabilan dari model yang telah dibuat, terlebih dahulu ditentukan titik kesetimbangan.

d. Analisis Pengaruh Transportasi dan Pengaruh Waktu Tunda

Setelah dilakukan analisis terhadap kestabilan dari titik kesetimbangan model, kemudian dilakukan analisis terhadap pengaruh transportasi dan pengaruh waktu tunda.

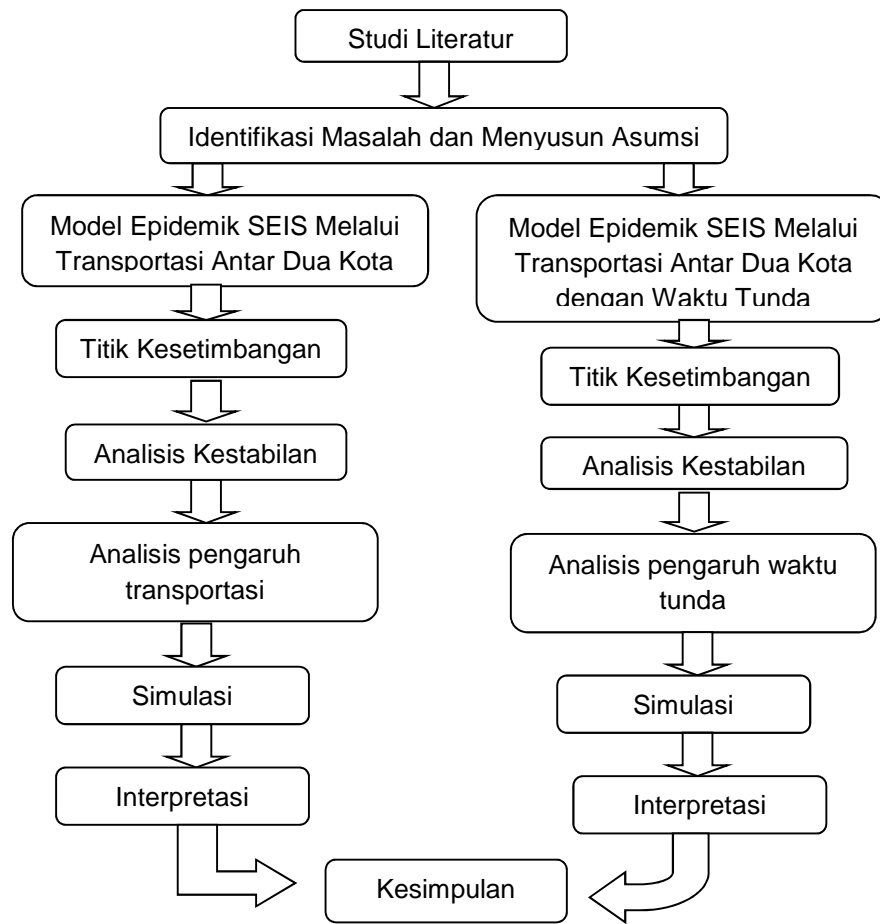
e. Simulasi Model

Simulasi numerik dari model dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab.

f. Pengambilan Kesimpulan

Setelah menganalisa dan melakukan simulasi numerik terhadap model, maka selanjutnya diambil suatu kesimpulan terhadap hasil-hasil yang diperoleh.

Adapun alur kerja penelitian ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Alur Kerja

G. Definisi Operasional

- a. Periode laten adalah waktu antara masuknya suatu bibit penyakit ke dalam tubuh sampai timbulnya gejala penyakit.
- b. Epidemik adalah penyebaran suatu penyakit secara cepat sehingga dalam waktu yang bersamaan atau secara bergiliran banyak orang menderita penyakit yang sama.

- c. Laju rekrutmen adalah laju individu yang masuk ke dalam suatu wilayah. Laju rekrutmen dapat berupa laju kelahiran dan migrasi.
- d. Model Epidemik SIS adalah model epidemik yang terdiri dari dua kompartemen, yaitu *Susceptible* (Rentan) dan *Infected* (Terinfeksi). Pada model ini, individu yang terinfeksi dapat sembuh tapi tidak ada kekebalan setelah sembuh sehingga individu kembali menjadi rentan.
- e. Model Epidemik SEIS adalah model epidemik yang terdiri dari tiga kompartemen yaitu *Susceptible* (Rentan), *Exposed* (Laten), dan *Infected* (Terinfeksi). Model ini mempertimbangkan periode laten pada penyakit. Individu yang telah terinfeksi dapat sembuh, namun kembali menjadi rentan karena tidak ada kekebalan setelah sembuh.
- f. Model Epidemik SEIR adalah model epidemik yang terdiri dari empat kompartemen yaitu *Susceptible* (Rentan), *Exposed* (Laten), *Infected* (Terinfeksi), dan *Removed* (Sembuh). Pada model ini, individu yang telah terinfeksi dapat sembuh, dan terdapat kekebalan setelah sembuh sehingga tidak kembali menjadi rentan.

BAB III

Model Epidemik SEIS Melalui Transportasi Antar Dua Kota

A. Model Tanpa Waktu Tunda

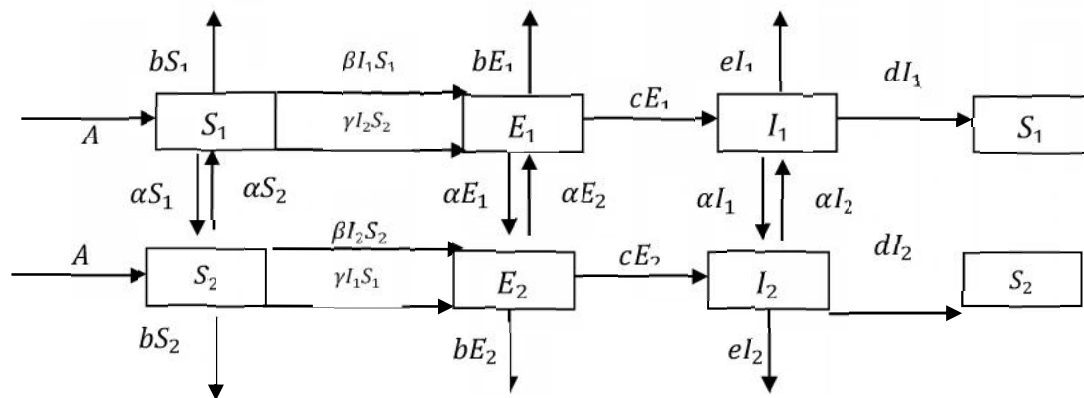
Penyebaran populasi yang merupakan fenomena umum dalam kehidupan menyebabkan banyak penyakit yang menular dengan mudah dari satu wilayah ke wilayah lain. Berdasarkan model yang dikembangkan oleh Fan *et al* (2000) dengan mempertimbangkan asumsi penularan penyakit antar dua kota yang disusun oleh Wan dan Cui (2007), maka diperoleh beberapa asumsi yaitu sebagai berikut.

- a. Laju kelahiran individu rentan, dinotasikan dengan A .
- b. Laju kematian alami untuk individu rentan dinotasikan dengan b .
- c. c adalah laju perkembangan individu laten menjadi terinfeksi.
- d. d adalah laju kesembuhan individu terinfeksi yang kembali menjadi rentan.
- e. Laju kematian untuk individu terinfeksi dinotasikan dengan e . Karena parameter ini mencakup kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit, maka $e > b$.
- f. Penyakit ditularkan dengan laju insidensi (jumlah kasus infeksi per unit waktu) $\beta I_j S_j$ di dalam kota $j, j = 1, 2$. Laju penularan penyakit di dalam kota dinotasikan dengan β .

- g. α adalah laju transportasi antar dua kota. Diasumsikan bahwa kedua kota terkoneksi dengan transportasi langsung seperti pesawat atau kereta.
- h. Diasumsikan bahwa individu tidak mempunyai kekuatan menginfeksi pada periode laten.
- i. Diasumsikan bahwa individu laten tidak dapat sembuh menjadi individu rentan.
- j. Diasumsikan bahwa kedua kota identik.
- k. Diasumsikan bahwa selama dalam perjalanan (transportasi), individu tidak melahirkan dan tidak meninggal.
- l. γ adalah laju penularan melalui transportasi antar dua kota.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, diperoleh diagram kompartemen

sebagai berikut.



Gambar 2. Diagram Kompartemen Model SEIS Melalui Transportasi Antar Dua Kota

Dari gambar di atas, dapat disusun sebuah model matematika sebagai berikut.

$$\frac{dS_1}{dt} = A - bS_1 - \beta S_1 I_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma S_2 I_2 \quad (3.1a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \beta S_1 I_1 - (b + c)E_1 - \alpha E_1 + \alpha E_2 + \gamma S_2 I_2 \quad (3.1b)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = cE_1 - (d + e)I_1 - \alpha I_1 + \alpha I_2 \quad (3.1c)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = A - bS_2 - \beta S_2 I_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma S_1 I_1 \quad (3.1d)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \beta S_2 I_2 - (b + c)E_2 - \alpha E_2 + \alpha E_1 + \gamma S_1 I_1 \quad (3.1e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = cE_2 - (d + e)I_2 - \alpha I_2 + \alpha I_1 \quad (3.1f)$$

dengan semua parameter bernilai positif.

Pada model ini, terdapat tiga kasus yang berbeda yaitu kasus di mana tidak ada individu yang bepergian, kasus di mana hanya individu rentan dan laten yang bepergian, dan kasus di mana semua individu melakukan transportasi (bepergian).

1. Tidak Ada Individu yang Bepergian

Jika perpindahan individu diabaikan, sehingga $\alpha = 0$ dan $\gamma = 0$, maka model (3.1) direduksi menjadi

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta SI - bS + dI \quad (3.2a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (b + c)E \quad (3.2b)$$

$$\frac{dI}{dt} = cE - dI - eI \quad (3.2c)$$

dengan semua parameter bernilai positif.

a. Keadaan Setimbang

Pada keadaan setimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (3.2) memenuhi sistem persamaan

$$A - \beta SI - bS + dI = 0 \quad (3.3a)$$

$$\beta SI - (b + c)E = 0 \quad (3.3b)$$

$$cE - dI - eI = 0 \quad (3.3c)$$

Pada keadaan di mana tidak ada infeksi, maka $I = 0$. Substitusi $I_0 = 0$ pada persamaan (3.3a) dan (3.3b), sehingga diperoleh $S_0 = \frac{A}{b}$ dan $E_0 = 0$. Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{A}{b}, 0, 0 \right)$$

Sebaliknya pada saat terjadi infeksi, $I \neq 0$. Persamaan (3.3a) dan (3.3b) secara berturut-turut dapat dinyatakan sebagai

$$I = \frac{A - bS}{\beta S - d} \quad (3.4)$$

$$E = \frac{\beta SI}{b + c} \quad (3.5)$$

Substitusi nilai I dan E ke persamaan (3.3c), diperoleh

$$S^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta} \quad (3.6)$$

Selanjutnya, substitusi nilai S^* ke persamaan (3.4) dan (3.5), sehingga diperoleh

$$I^* = \frac{A\beta c - b(b+c)(d+e)}{\beta(bd+be+ce)} \quad (3.7)$$

dan

$$E^* = \frac{(d+e)[A\beta c - b(b+c)(d+e)]}{c\beta(bd+be+ce)} \quad (3.8)$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan endemik,

$$P^* = \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}, \frac{A\beta c - b(b+c)(d+e)}{\beta(bd+be+ce)}, \frac{(d+e)[A\beta c - b(b+c)(d+e)]}{c\beta(bd+be+ce)} \right)$$

b. Analisis Kestabilan

Untuk melihat perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan, maka terlebih dahulu dilakukan pelinearan pada model (3.2) di sekitar titik kesetimbangan $E^* = (S^*, E^*, I^*)$. Matriks Jacobi dinyatakan oleh

$$J = \begin{pmatrix} -b - \beta I & 0 & -\beta S + d \\ \beta I & -(b+c) & \beta S \\ 0 & c & -(d+e) \end{pmatrix}$$

Analisis Kestabilan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{A}{b}, 0, 0\right)$, persamaan karakteristik dinyatakan oleh

$$\begin{vmatrix} b - \lambda & 0 & -\frac{\beta A}{b} + d \\ c & -(b + c) - \lambda & \frac{\beta A}{b} \\ 0 & c & -(d + e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(b + \lambda)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad (3.9)$$

di mana

$$a_1 = b + c + d + e$$

$$a_0 = (b + c)(d + e) - \frac{A\beta c}{b}$$

Faktor pertama pada ruas kiri persamaan memberikan nilai eigen $\lambda_1 = -b < 0$

dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.10)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0, a_0 > 0$. Karena $a_1 = b + c + d + e$, maka $a_1 > 0$.

Untuk a_0 akan positif jika

$$(b + c)(d + e) - \frac{A\beta c}{b} > 0 \text{ atau } \frac{A\beta c}{b(b+c)(d+e)} < 1$$

Konstanta $\mathcal{R}_0 = \frac{A\beta c}{b(b+c)(d+e)}$ dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar dari model (3.2). Dengan demikian titik kesetimbangan bebas infeksi E_0 akan stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Analisis Kestabilan Endemik

Titik kesetimbangan endemik dapat dinyatakan dalam \mathcal{R}_0 , yaitu

$$P^* = \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}, \frac{(d+e)b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{c\beta(bd+be+ce)}, \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{\beta(bd+be+ce)} \right)$$

Karena semua komponen pada titik ini bernilai positif, pada titik kesetimbangan endemik berlaku $\mathcal{R}_0 > 1$. Persamaan karakteristik untuk kesetimbangan ini diberikan oleh persamaan

$$\begin{vmatrix} b - \left(\frac{b(b+d)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce} \right) - \lambda & 0 & - \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right) + d \\ \left(\frac{b(b+d)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce} \right) & -(b+c) - \lambda & \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right) \\ 0 & c & -(d+e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Misalkan

$$\gamma_1 = \frac{b(b+d)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce}$$

$$\gamma_2 = \frac{(b+c)(d+e)}{c}$$

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$\begin{vmatrix} -b - \gamma_1 - \lambda & 0 & -\gamma_2 + d \\ \gamma_1 & -(b+c) - \lambda & \gamma_2 \\ 0 & c & -(d+e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \tag{3.11}$$

di mana

$$A = (b+c+d+e+b+\gamma_1)$$

$$B = (b + c)(d + e) + (b + \gamma_1)(b + c + d + e) - c\gamma_2$$

$$C = (b + \gamma_1)(b + c)(d + e) - c(b\gamma_2 + d\gamma_1)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $A > 0$, $C > 0$, dan $AB - C > 0$. Jelas bahwa $A > 0$.

Selanjutnya,

$$C = (b + \gamma_1)(b + c)(d + e) - c(b\gamma_2 + d\gamma_1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(b + \frac{b(b+d)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{(bd+be+ce)} \right) (b + c)(d + e) - \left(c \left(b \frac{(b+c)(d+e)}{c} + d \frac{b(b+d)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{(bd+be+ce)} \right) \right) \\ &= \frac{b(b+c)^2(d+e)^2(\mathcal{R}_0-1) - bcd(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{(bd+be+ce)} \end{aligned}$$

$$= (b^3d^2 + 2b^3de + b^3e^2 + b^2cd^2 + 3b^2cde + 2b^2ce^2 + bc^2de + bc^2e^2)(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$$

Jelas bahwa $C > 0$.

$$\begin{aligned} AB - C &= (b + c + d + e + b + \gamma_1) \left((b + c)(d + e) + (b + \gamma_1)(b + c + d + e) - c\gamma_2 \right) \\ &\quad - \left((b + \gamma_1)(b + c)(d + e) - c(b\gamma_2 + d\gamma_1) \right) \\ &= (b + c + d + e)\gamma_1^2 \\ &\quad + (2de + ce + 3be + 4bc + e^2 + 3bd + d^2 + 2cd + 3b^2 \\ &\quad + c^2)\gamma_1 + be^2 + 2bce + 2bcd + 2dbe + 3b^2c + bc^2 + 3b^2d \\ &\quad + bd^2 + 3b^2e + 2b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b + c + d + e) \left(\frac{b(b + d)(d + e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{(bd + be + ce)} \right)^2 \\
&\quad + (2de + ce + 3be + 4bc + e^2 + 3bd + d^2 + 2cd + 3b^2 \\
&\quad + c^2) \left(\frac{b(b + d)(d + e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{(bd + be + ce)} \right) + be^2 + 2bce + 2bcd + 2dbe \\
&\quad + 3b^2c + bc^2 + 3b^2d + bd^2 + 3b^2e + 2b^3
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $AB - C > 0$

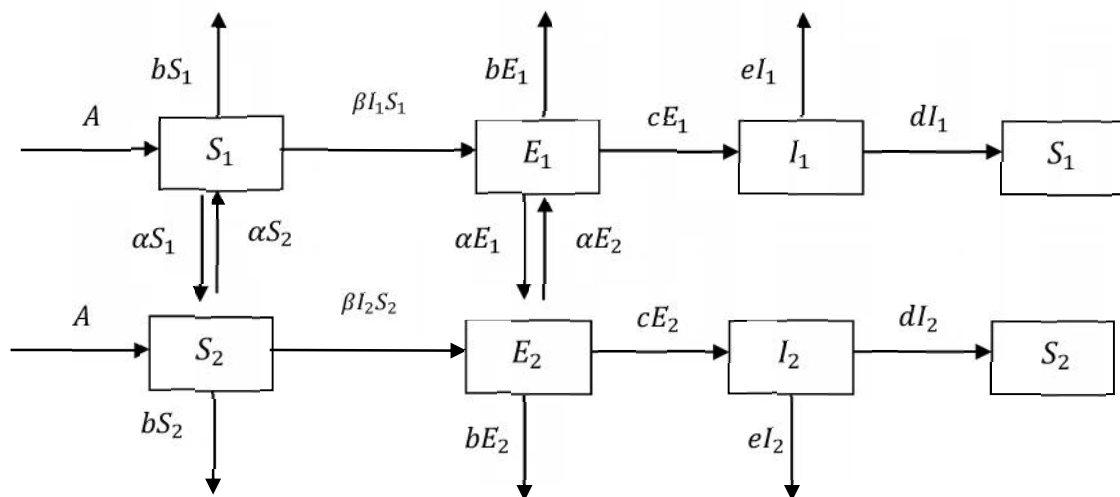
Jadi, bagian real dari semua nilai eigen persamaan akan bernilai negatif.

Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik (P^*) stabil asimptotik jika

$R_0 > 1$.

2. Hanya Individu Rentan dan Laten yang Bepergian

Pada model ini, diasumsikan bahwa hanya individu rentan dan laten yang melakukan transportasi, sedangkan individu terinfeksi tetap berada pada kotanya masing-masing. Berikut diagram kompartemen model ini.



Gambar 3. Diagram Kompartemen Model SEIS Melalui Transportasi Antar Dua Kota

Dari gambar 3 di atas, dapat disusun sebuah model matematika sebagai berikut.

$$\frac{dS_1}{dt} = A - bS_1 - \beta S_1 I_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 \quad (3.12a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \beta S_1 I_1 - (b + c)E_1 - \alpha E_1 + \alpha E_2 \quad (3.12b)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = cE_1 - dI_1 - eI_1 \quad (3.12c)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = A - bS_2 - \beta S_2 I_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 \quad (3.12d)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \beta S_2 I_2 - (b + c)E_2 - \alpha E_2 + \alpha E_1 \quad (3.12e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = cE_2 - dI_2 - eI_2 \quad (3.12f)$$

dengan semua parameter bernilai positif.

1. Keadaan Kesetimbangan

Pada keadaan setimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (3.13) memenuhi sistem persamaan

$$A - bS_1 - \beta S_1 I_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 = 0 \quad (3.13a)$$

$$\beta S_1 I_1 - (b + c)E_1 - \alpha E_1 + \alpha E_2 = 0 \quad (3.13b)$$

$$cE_1 - dI_1 - eI_1 = 0 \quad (3.13c)$$

$$A - bS_2 - \beta S_2 I_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 = 0 \quad (3.13d)$$

$$\beta S_2 I_2 - (b + c)E_2 - \alpha E_2 + \alpha E_1 = 0 \quad (3.13e)$$

$$cE_2 - dI_2 - eI_2 = 0 \quad (3.13f)$$

Pada keadaan di mana tidak ada infeksi, maka $I = 0$. Substitusi $I_1 = 0$ dan $I_2 = 0$ pada persamaan (3.13a-3.13f) sehingga diperoleh $S_1 = \frac{A}{b}$, $E_1 = 0, S_2 = \frac{A}{b}, E_2 = 0$. Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{A}{b}, 0, 0, \frac{A}{b}, 0, 0 \right)$$

Sebaliknya pada saat terjadi infeksi, $I \neq 0$, diperoleh titik kesetimbangan endemik, yaitu

$P^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ di mana

$$S_1^* = S_2^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}$$

$$E_1^* = E_2^* = \frac{(d+e)[Ac\beta - b(b+c)(d+e)]}{c\beta(bd+be+ce)}$$

$$I_1^* = I_2^* = \frac{Ac\beta - b(b+c)(d+e)}{\beta(bd+be+ce)}$$

Titik kesetimbangan endemik tersebut dapat dinyatakan dalam \mathcal{R}_0 , yaitu

$$S_1^* = S_2^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}$$

$$E_1^* = E_2^* = \frac{(d+e)b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta(bd+be+ce)}$$

$$I_1^* = I_2^* = \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta(bd+be+ce)}$$

2. Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan dengan terlebih dahulu melinearisasi model (3.13) di sekitar titik kesetimbangan $P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$.

Matriks Jacobi dinyatakan oleh

$$J = \begin{pmatrix} -b - \beta I_1 - \alpha & 0 & -\beta S_1 + d & \alpha & 0 & 0 \\ \beta I_1 & -(b + c + \alpha) & \beta S_1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & c & -(d + e) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -b - \beta I_2 - \alpha & 0 & -\beta S_2 + d \\ 0 & \alpha & 0 & \beta I_2 & -(b + c + \alpha) & \beta S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix}, \text{ di mana}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b - \beta I_1 - \alpha & 0 & -\beta S_1 + d \\ \beta I_1 & -(b + c + \alpha) & \beta S_1 \\ 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b - \beta I_2 - \alpha & 0 & -\beta S_2 + d \\ \beta I_2 & -(b + c + \alpha) & \beta S_2 \\ 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analisis kestabilan bebas penyakit

Menurut Cui (2006), untuk matriks $J = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, maka nilai eigen J identik dengan $(A + B)$ dan $(A - B)$. Karena $A + B = J(E_0)$, maka $A + B$ stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Selanjutnya, akan ditentukan untuk nilai $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -b - \beta I - 2\alpha & 0 & -\beta S + d \\ \beta I & -(b + c + 2\alpha) & \beta S \\ 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $A - B$

$$\begin{vmatrix} -b - 2\alpha - \lambda & 0 & -\frac{\beta A}{b} + d \\ 0 & -(b + c + 2\alpha) - \lambda & -\frac{\beta A}{b} \\ 0 & c & -(d + e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat ditulis

$$(-b - 2\alpha - \lambda) \left[(-b + c + 2\alpha) - \lambda \right] (-d + e) - \lambda - \frac{A\beta c}{b} = 0$$

$$(-b - 2\alpha - \lambda) \left[\lambda^2 + (b + c + 2\alpha + d + e)\lambda + (b + c + 2\alpha)(d + e) - \frac{A\beta c}{b} \right] = 0$$

$$(-b - 2\alpha - \lambda)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad (3.14)$$

Faktor pertama di ruas kiri persamaan memberikan nilai eigen $\lambda_1 = -b - 2\alpha < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.15)$$

Di mana $a_1 = (b + c + 2\alpha + d + e)$

$$\begin{aligned} a_0 &= (b + c + 2\alpha)(d + e) - \frac{A\beta c}{b} \\ &= (b + c)(d + e)(1 - \mathcal{R}_0) + 2\alpha(d + e) \end{aligned}$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, semua nilai eigen dari persamaan memiliki bagian real negatif jika $a_1 > 0$, dan $a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_1 > 0$ dan

$a_0 > 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 stabil asimtotik jika $R_0 < 1$.

Analisis kestabilan endemik

Menurut Cui (2006), untuk matriks $J = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, maka nilai eigen J identik dengan $(A + B)$ dan $(A - B)$. Karena $A + B = J(P^*)$, maka $A + B$ stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Selanjutnya, akan ditentukan untuk nilai $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -b - \beta I - 2\alpha & 0 & -\beta S + d \\ \beta I & -(b + c + 2\alpha) & \beta S \\ 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $A - B$

$$\begin{vmatrix} -b - \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce} \right) - 2\alpha - \lambda & 0 & -\left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right) + d \\ \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce} \right) & -(b+c+2\alpha) - \lambda & \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right) \\ 0 & c & -(d+e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Misalkan $\gamma_1 = \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0-1)}{bd+be+ce} \right)$ dan $\gamma_2 = \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right)$

Maka persamaan karakteristik $A - B$ dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} -b - \gamma_1 - 2\alpha - \lambda & 0 & -\gamma_2 + d \\ \gamma_1 & -(b+c+2\alpha) - \lambda & \gamma_2 \\ 0 & c & -(d+e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau

$$\begin{aligned} & (-b - 2\alpha - \gamma_1 - \lambda)(-b - c + 2\alpha - \lambda)(-d - e - \lambda) + c\gamma_1(-\gamma_2 + d) \\ & - c\gamma_2(-b - \gamma_1 + 2\alpha - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.16)$$

di mana

$$a_2 = (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1)$$

$$a_1 = [(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2]$$

$$a_0 = (b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_2 > 0$, $a_0 > 0$, dan $a_2a_1 - a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_2 > 0$. Untuk a_0 ,

$$\begin{aligned} a_0 &= (b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1 \\ &= ((b + 2\alpha) + \gamma_1)((b + 2\alpha) + c)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1 \\ &= (b + 2\alpha) \left((b + 2\alpha)(d + e) + c(d + e) - c \frac{(b + c)(d + e)}{c} \right) \\ &\quad + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \\ &= (b + 2\alpha)((b + 2\alpha)(d + e) + c(d + e) - (b + c)(d + e)) \\ &\quad + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \\ &= (b + 2\alpha)(2\alpha d + 2\alpha e) \\ &\quad + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \end{aligned}$$

Jelas bahwa $a_0 > 0$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
a_2 a_1 - a_0 &= (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1)[(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) \\
&\quad + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2] \\
&\quad - \left((b + 2\alpha)(2\alpha d + 2\alpha e) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce)\gamma_1 \right) \\
&= (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1) \left[(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) \right. \\
&\quad \left. + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c \frac{(b + c)(d + e)}{c} \right] \\
&\quad - \left((b + 2\alpha)(2\alpha d + 2\alpha e) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce)\gamma_1 \right) \\
&= (b + c + d + e + 2\alpha)\gamma_1^2 \\
&\quad + (3bd + de + 12b\alpha + 3b^2 + 6\alpha e + 8d\alpha + c^2 + 2be \\
&\quad + 8c\alpha + d^2 + 2cd + 12\alpha^2 + 4bc)\gamma_1 + 14abd + 12abc \\
&\quad + bde + 6ade + 4ace + cbe + 2cbd + 6\alpha cd + 10abe \\
&\quad + 2b^3 + 16\alpha^3 + 3b^2c + 3b^2d + 2b^2e + 12b^2\alpha \\
&\quad + 24b\alpha^2 + c^2b + 2c^2\alpha + 12c\alpha^2 + bd^2 + 4\alpha d^2 \\
&\quad + 16\alpha^2d + 12\alpha^2e + 2\alpha e^2
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $a_2 a_1 - a_0 > 0$.

Jadi, bagian real dari semua nilai eigen persamaan akan bernilai negatif.

Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik (P^*) stabil asimptotik jika

$R_0 > 1$.

3. Semua Individu Melakukan Transportasi

Untuk kasus ini, diasumsikan bahwa semua individu, baik rentan, laten, maupun terinfeksi melakukan transportasi dari kota satu ke kota dua atau sebaliknya. Diagram kompartemen dan model matematika pada kasus ini sama dengan gambar 2 dan model (3.1).

a. Keadaan Kesetimbangan

Pada keadaan setimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (3.1) memenuhi sistem persamaan

$$A - bS_1 - \beta S_1 I_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma S_2 I_2 = 0 \quad (3.17a)$$

$$\beta S_1 I_1 - (b + c)E_1 - \alpha E_1 + \alpha E_2 + \gamma S_2 I_2 = 0 \quad (3.17b)$$

$$cE_1 - (d + e)I_1 - \alpha I_1 + \alpha I_2 = 0 \quad (3.17c)$$

$$A - bS_2 - \beta S_2 I_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma S_1 I_1 = 0 \quad (3.17d)$$

$$\beta S_2 I_2 - (b + c)E_2 - \alpha E_2 + \alpha E_1 + \gamma S_1 I_1 = 0 \quad (3.17e)$$

$$cE_2 - (d + e)I_2 - \alpha I_2 + \alpha I_1 = 0 \quad (3.17f)$$

Pada keadaan di mana tidak ada infeksi, maka $I = 0$. Substitusi $I_1 = 0$ dan $I_2 = 0$ pada persamaan (3.17a-3.17f) sehingga diperoleh $S_1 = \frac{A}{b}$, $E_1 = 0$, $S_2 = \frac{A}{b}$, $E_2 = 0$. Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{A}{b}, 0, 0, \frac{A}{b}, 0, 0 \right)$$

Sebaliknya pada saat terjadi infeksi, $I \neq 0$, diperoleh titik kesetimbangan endemik, yaitu

$$P_\gamma^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$$

di mana

$$S_1^* = S_2^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta + \gamma c}$$

$$E_1^* = E_2^* = \frac{(d+e)[(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)]}{(c\beta + c\gamma)(bd + be + ce)}$$

$$I_1^* = I_2^* = \frac{(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)}{(\beta + \gamma)(bd + be + ce)}$$

b. Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan dengan terlebih dahulu melinearisasi model (3.16) di sekitar titik kesetimbangan $P_\gamma^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$. Matriks Jacobi dinyatakan oleh

$$J = \begin{pmatrix} -b - \beta I_1 - \alpha & 0 & -\beta S_1 + d & \alpha - \gamma I_2 & 0 & -\gamma S_2 \\ \beta I_1 & -(b+c+\alpha) & \beta S_1 & \gamma I_2 & \alpha & \gamma S_2 \\ 0 & c & -(d+e) & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha - \gamma I_1 & 0 & -\gamma S_1 & -b - \beta I_2 - \alpha & 0 & -\beta S_2 + d \\ \gamma I_1 & \alpha & \gamma S_1 & \beta I_2 & -(b+c+\alpha) & \beta S_2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & c & -(d+e) \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ di mana}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b - \beta I_1 - \alpha & 0 & -\beta S_1 + d \\ \beta I_1 & -(b+c+\alpha) & \beta S_1 \\ 0 & c & -(d+e) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b - \beta I_2 - \alpha & 0 & -\beta S_2 + d \\ \beta I_2 & -(b + c + \alpha) & \beta S_2 \\ 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma I_1 & 0 & -\gamma S_1 \\ \gamma I_1 & \alpha & \gamma S_1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma I_2 & 0 & -\gamma S_2 \\ \gamma I_2 & \alpha & \gamma S_2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Analisis kestabilan bebas penyakit

Menurut Cui (2006), untuk matriks $J = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix}$, maka nilai eigen J

identik dengan $(A + B)$ dan $(A - B)$. Untuk nilai $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} -b - (\beta + \gamma)I & 0 & -(\beta + \gamma)S + d \\ (\beta + \gamma)I & -(b + c) & (\beta + \gamma)S \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -b & 0 & \frac{-(\beta + \gamma)A}{b} + d \\ 0 & -(b + c) & \frac{(\beta + \gamma)A}{b} \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} b - \lambda & 0 & \frac{-(\beta + \gamma)A}{b} + d \\ c & -(b + c) - \lambda & \frac{(\beta + \gamma)A}{b} \\ 0 & c & -(d + e) \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat ditulis

$$((-b - \lambda)(-(b + c) - \lambda)(-(d + e) - \lambda)) - (-b - \lambda)c \left(-\frac{Ac(\beta + \gamma)}{b} \right) = 0$$

$$(-b - \lambda) \left[(-(b + c) - \lambda)(-(d + e) - \lambda) - \frac{Ac(\beta + \gamma)}{b} \right] = 0$$

$$(-b - \lambda)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad (3.18)$$

Faktor pertama di ruas kiri persamaan memberikan nilai eigen $\lambda_1 = -b < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.19)$$

Di mana $a_1 = (b + c + d + e)$

$$a_0 = (b + c)(d + e) - \frac{Ac(\beta + \gamma)}{b}$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, semua nilai eigen dari persamaan memiliki bagian real negatif jika $a_1 > 0$, dan $a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_1 > 0$, dan nilai a_0 akan positif jika

$$(b + c)(d + e) - \frac{Ac(\beta + \gamma)}{b} > 0$$

Atau

$$\frac{Ac(\beta + \gamma)}{b(b + c)(d + e)} < 1$$

Karena $\mathcal{R}_0 = \frac{Ac\beta}{b(b+c)(d+e)}$, maka $\frac{Ac(\beta+\gamma)}{b(b+c)(d+e)} = \mathcal{R}_0 + \frac{Ac\gamma}{b(b+c)(d+e)} = \mathcal{R}_{0\gamma}$

Selanjutnya, akan ditentukan untuk nilai $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -b - (\beta - \gamma)I - 2\alpha & 0 & -(\beta - \gamma)S + d \\ (\beta - \gamma)I & -(b + c + 2\alpha) & (\beta - \gamma)S \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $A - B$

$$\begin{vmatrix} -b - 2\alpha - \lambda & 0 & -\frac{(\beta - \gamma)A}{b} + d \\ 0 & -(b + c + 2\alpha) - \lambda & \frac{(\beta - \gamma)A}{b} \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat ditulis

$$((-b - 2\alpha - \lambda)(-(b + c + 2\alpha) - \lambda)(-(d + e + \alpha) - \lambda)) - (-b - 2\alpha - \lambda)c\left(\frac{(\beta - \gamma)A}{b}\right) = 0$$

$$(-b - 2\alpha - \lambda) \left[(-(b + c + 2\alpha) - \lambda)(-(d + e + \alpha) - \lambda) - \frac{Ac(\beta - \gamma)}{b} \right] = 0$$

$$(-b - 2\alpha - \lambda) \left[\lambda^2 + (b + c + 3\alpha + d + e)\lambda + (b + c + 2\alpha)(d + e + \alpha) - \frac{Ac(\beta - \gamma)}{b} \right] = 0$$

$$(-b - 2\alpha - \lambda)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad (3.20)$$

Faktor pertama di ruas kiri persamaan memberikan nilai eigen $\lambda_1 = -b - 2\alpha < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.21)$$

Di mana $a_1 = (b + c + 3\alpha + d + e)$

$$\begin{aligned} a_0 &= (b + c + 2\alpha)(d + e + \alpha) - \frac{Ac(\beta - \gamma)}{b} \\ &= (b + c)(d + e) \left(1 + \mathcal{R}_{0\gamma}\right) + 2Ac\gamma + 2\alpha(d + e + \alpha) + \alpha(b + c) \end{aligned}$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, semua nilai eigen dari persamaan memiliki bagian real negatif jika $a_1 > 0$, dan $a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_{0\gamma} < 1$.

Analisis kestabilan endemik

Menurut Cui (2006), untuk matriks $J = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, maka nilai eigen J

identik dengan $(A + B)$ dan $(A - B)$. Untuk nilai $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} -b - (\beta + \gamma)I & 0 & -(\beta + \gamma)S + d \\ (\beta + \gamma)I & -(b + c) & (\beta + \gamma)S \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -b - (\beta + \gamma) \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(\beta + \gamma)(bd + be + ce)} & 0 & -(\beta + \gamma) \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta + c\gamma} + d \\ (\beta + \gamma) \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(\beta + \gamma)(bd + be + ce)} & -(b + c) & (\beta + \gamma) \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta + c\gamma} \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

Misalkan $\psi_1 = \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)}$ dan $\psi_2 = \frac{(b+c)(d+e)}{c}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -b - \psi_1 & 0 & -\psi_2 + d \\ \psi_1 & -(b + c) & \psi_2 \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} -b - \psi_1 - \lambda & 0 & -\psi_2 + d \\ \psi_1 & -(b + c) - \lambda & \psi_2 \\ 0 & c & -(d + e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau

$$(-(b + \psi_1) - \lambda)(-(b + c) - \lambda)(-(d + e) - \lambda) + c\psi_1(-\psi_2 + d)$$

$$-(-(b + \psi_1) - \lambda)c\psi_2 = 0$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.22}$$

Di mana

$$a_2 = 2b + \psi_1 + c + d + e$$

$$a_1 = (2b + \psi_1 + c)(d + e) + (b + \psi_1)(b + c) - c\psi_2$$

$$a_0 = (b + \psi_1)(b + c)(d + e) - c(d\psi_1 + b\psi_2)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_2 > 0$, $a_0 > 0$, dan $a_2 a_1 - a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_2 > 0$. Untuk a_0 ,

$$\begin{aligned} a_0 &= (b + \psi_1)(b + c)(d + e) - c(d\psi_1 + b\psi_2) \\ &= b(b + c)(d + e) + (bd + be + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \\ &\quad - cb \frac{(b + c)(d + e)}{c} \\ &= b(b + c)(d + e) + b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1) - b(b + c)(d + e) \\ &= b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1) \end{aligned}$$

Jadi, $a_0 > 0$.

Untuk $a_2 a_1 - a_0$

$$\begin{aligned} a_2 a_1 - a_0 &= ((2b + \psi_1 + c + d + e)(2b + \psi_1 + c)(d + e) + (b + \psi_1)(b + c) \\ &\quad - c\psi_2) - ((b + \psi_1)(b + c)(d + e) - c(d\psi_1 + b\psi_2)) \\ &= \left[b(d + e + b + c) + (b + c + d + e) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \right] \left((2b + \right. \\ &\quad \left. c + d + e) + \frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \end{aligned}$$

Jadi, $a_2 a_1 - a_0 > 0$.

Dengan demikian, Kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimptotik.

Selanjutnya, akan ditentukan untuk nilai $A - B$.

$$\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta+c\gamma}, \frac{(d+e)b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)}{(c\beta+c\gamma)(bd+be+ce)}, \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)}{(\beta+\gamma)(bd+be+ce)}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -b - (\beta - \gamma)I - 2\alpha & 0 & -(\beta - \gamma)S + d \\ (\beta - \gamma)I & -(b + c + 2\alpha) & (\beta - \gamma)S \\ 0 & c & -(d + e + \alpha) \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $A - B$

$$\begin{vmatrix} -b - (\beta - \gamma) \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)}{(\beta+\gamma)(bd+be+ce)} \right) - 2\alpha - \lambda & 0 & -(\beta - \gamma) \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta+c\gamma} \right) + d \\ (\beta - \gamma) \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)}{(\beta+\gamma)(bd+be+ce)} \right) & -(b+c+2\alpha) - \lambda & (\beta - \gamma) \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta+c\gamma} \right) \\ 0 & c & -(d+e+\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Misalkan $\gamma_1 = \left(\frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)}{(bd+be+ce)} \right)$ dan $\gamma_2 = \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c} \right)$

Maka persamaan karakteristik $A - B$ dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} -b - \gamma_1 - 2\alpha - \lambda & 0 & -\gamma_2 + d \\ \gamma_1 & -(b+c+2\alpha) - \lambda & \gamma_2 \\ 0 & c & -(d+e) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau

$$\begin{aligned} & (-(b+2\alpha+\gamma_1)-\lambda)(-(b+c+2\alpha)-\lambda)(-(d+e)-\lambda) + c\gamma_1(-\gamma_2+d) \\ & - c\gamma_2(-(b+\gamma_1+2\alpha)-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$[-(b + 2\alpha + \gamma_1) - \lambda][(b + c + 2\alpha)(d + e) + (b + c + d + e + 2\alpha)\lambda + \lambda^2 - c\gamma_2] + c\gamma_1(-\gamma_2 + d) = 0$$

$$\lambda + (b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1 = 0$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.23)$$

Di mana

$$a_2 = (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1)$$

$$a_1 = [(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2]$$

$$a_0 = (b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_2 > 0$, $a_0 > 0$, dan $a_2a_1 - a_0 > 0$. Jelas bahwa $a_2 > 0$. Untuk a_0 ,

$$\begin{aligned} a_0 &= (b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1 \\ &= ((b + 2\alpha) + \gamma_1)((b + 2\alpha) + c)(d + e) - c\gamma_2(b + 2\alpha) - cd\gamma_1 \\ &= (b + 2\alpha) \left((b + 2\alpha)(d + e) + c(d + e) - c \frac{(b + c)(d + e)}{c} \right) \\ &\quad + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \\ &= (b + 2\alpha)(bd + be + 2\alpha d + 2\alpha e + cd + ce - bd + be + cd + ce) \\ &\quad + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right) \end{aligned}$$

$$= (b + 2\alpha)(2ad + 2ae) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce) \left(\frac{b(b + c)(d + e)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)}{(bd + be + ce)} \right)$$

Jelas bahwa $a_0 > 0$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a_2 a_1 - a_0 &= (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1)[(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) \\ &\quad + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c\gamma_2] \\ &\quad - \left((b + 2\alpha)(2ad + 2ae) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce)\gamma_1 \right) \\ &= (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1) \left[(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) \right. \\ &\quad \left. + (b + c + 2\alpha)(d + e) - c \frac{(b + c)(d + e)}{c} \right] \\ &\quad - \left((b + 2\alpha)(2ad + 2ae) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce)\gamma_1 \right) \\ &= (2b + c + d + e + 4\alpha + \gamma_1)[(b + 2\alpha + \gamma_1)(b + c + d + e + 2\alpha) \\ &\quad + (2ad + 2ae)] \\ &\quad - \left((b + 2\alpha)(2ad + 2ae) + ((b + 2\alpha)(d + e) + ce)\gamma_1 \right) \\ &= (b + c + d + e + 2\alpha)\gamma_1^2 \\ &\quad + (3bd + de + 12b\alpha + 3b^2 + 6ae + 8d\alpha + c^2 + 2be + 8c\alpha + d^2 \\ &\quad + 2cd + 12\alpha^2 + 4bc)\gamma_1 + 14abd + 12abc + bde + 6ade + 4ace \\ &\quad + cbe + 2cbd + 6acd + 10\alpha be + 2b^3 + 16\alpha^3 + 3b^2c + 3b^2d \\ &\quad + 2b^2e + 12b^2\alpha + 24b\alpha^2 + c^2b + 2c^2\alpha + 12c\alpha^2 + bd^2 + 4\alpha d^2 \\ &\quad + 16\alpha^2d + 12\alpha^2e + 2ae^2 \end{aligned}$$

Jelas bahwa $a_2 a_1 - a_0 > 0$.

Jadi, bagian real dari semua snilai eigen persamaan akan bernilai negatif. Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik (P^*) stabil asimptotik jika $\mathcal{R}_{0\gamma} > 1$.

4. Simulasi Numerik

a. Simulasi Numerik Model I

Pada model ini, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan parameter yang digunakan oleh Wan dan Cui, yaitu $A = 1, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.0002$, dan $e = 0.4$, serta mengambil nilai $\beta = 1$. Dari nilai parameter tersebut diperoleh $\mathcal{R}_0 = 7,4963$. Jadi $\mathcal{R}_0 > 1$, sehingga mengakibatkan kondisi endemik. Nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (3.11) adalah

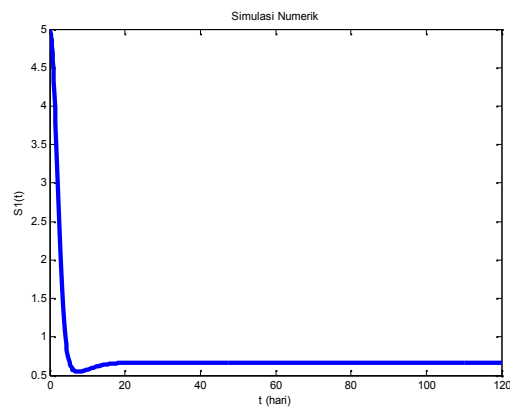
$$\lambda_1 = -0.35 + 0.17i \quad \lambda_2 = -1.69 \quad \lambda_3 = -0.35 - 0.17i$$

Karena bagian real nilai eigen tersebut bernilai negative, maka titik kesetimbangan endemik,

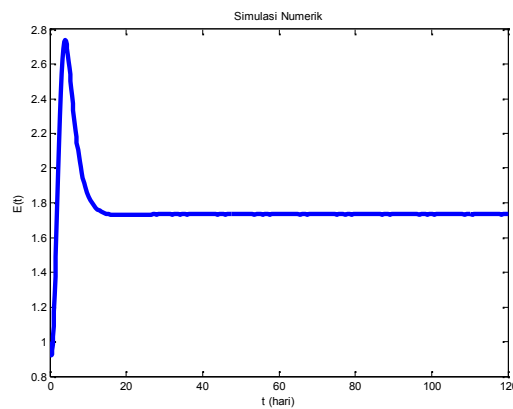
$$P^* = (0.7, 1.7, 1.3)$$

stabil asimptotik.

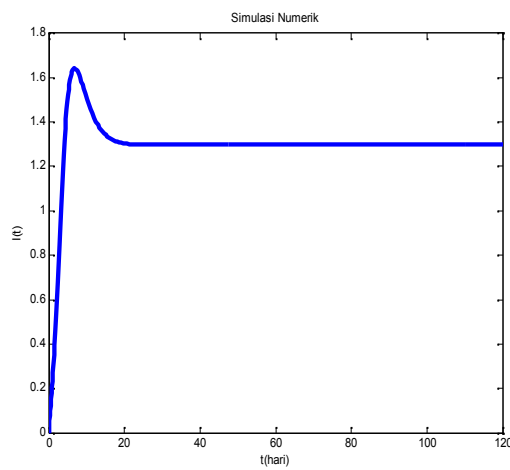
Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu dengan nilai parameter $\beta = 1$ dapat dilihat pada gambar 4, 5, dan 6.



Gambar 4. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 1$)



Gambar 5. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 1$)



Gambar 6. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 1$)

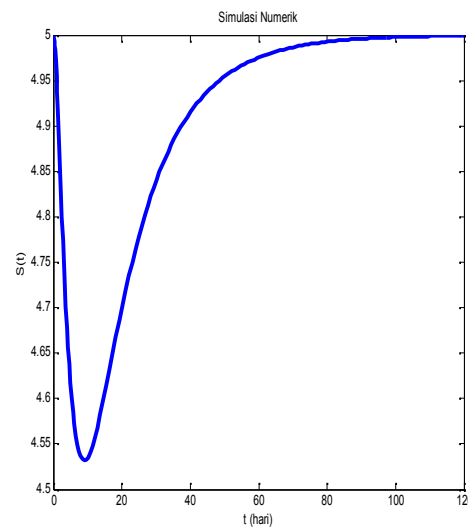
Dengan mengubah nilai β menjadi 0,1 diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0.7496$. Jadi, $\mathcal{R}_0 < 1$, sehingga kondisinya berubah menjadi bebas penyakit. Nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (3.9) adalah

$$\lambda_1 = -0.2 \quad \lambda_2 = -0.06 \quad \lambda_3 = -0.84$$

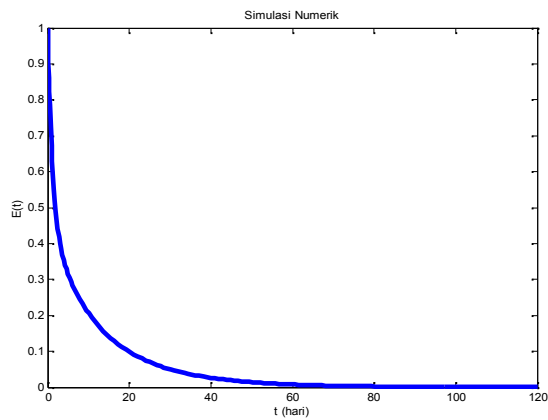
Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (5,0,0)$$

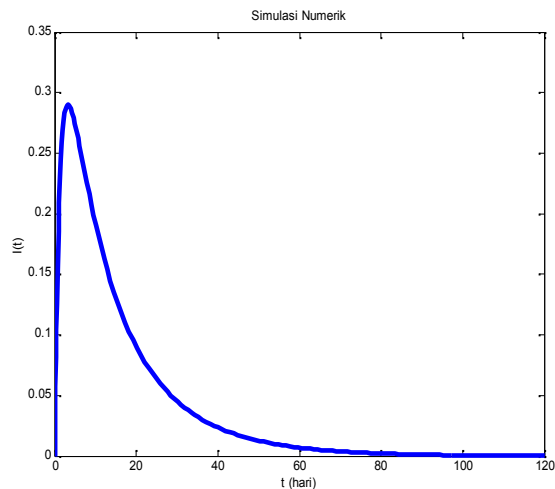
stabil asimptotik. Hal tersebut bersesuaian dengan hasil analisis yang menyatakan bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil. Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu dengan nilai parameter $\beta = 0.1$ dapat dilihat pada gambar 7, 8, dan 9.



Gambar 7. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$)



Gambar 8. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,1$)



Gambar 9. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

b. Simulasi Numerik Model 2

Pada model ini, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan parameter yang digunakan oleh Wan dan Cui, yaitu $A = 1, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.0002$, dan $e = 0.4$, serta mengambil nilai $\beta = 1$. Dari nilai parameter tersebut diperoleh $\mathcal{R}_0 = 7,4963$. Jadi $\mathcal{R}_0 > 1$, sehingga mengakibatkan

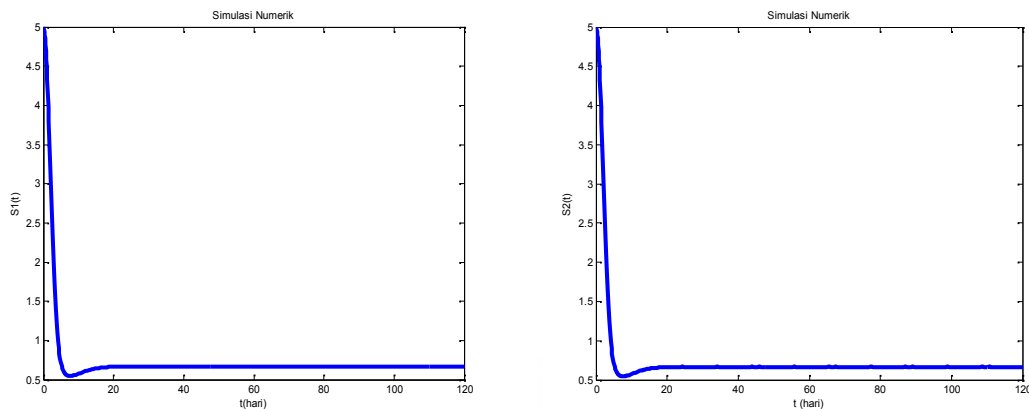
kondisi endemik. Nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (3.13) adalah

$$\lambda_1 = -0.97 + 0.91i \quad \lambda_2 = -4.06 \quad \lambda_3 = -0.97 - 0.91i$$

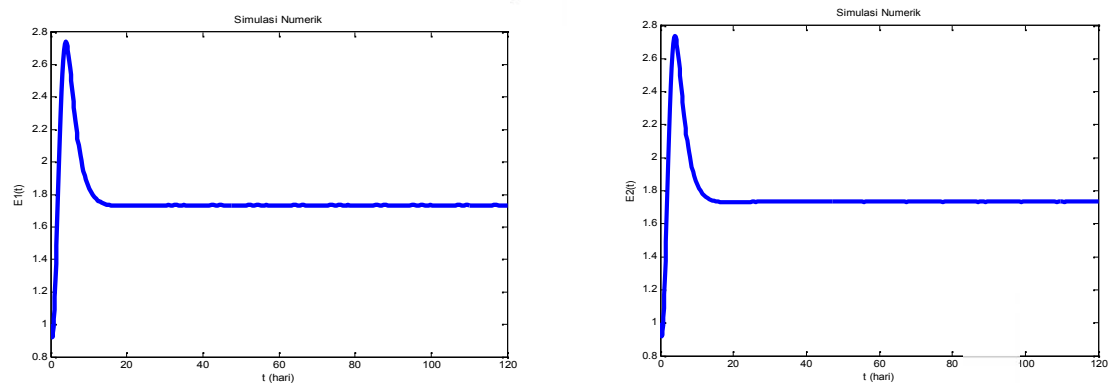
Dengan demikian titik kesetimbangan endemik,

$$P^* = (0.7, 1.7, 1.3, 0.7, 1.7, 1.3)$$

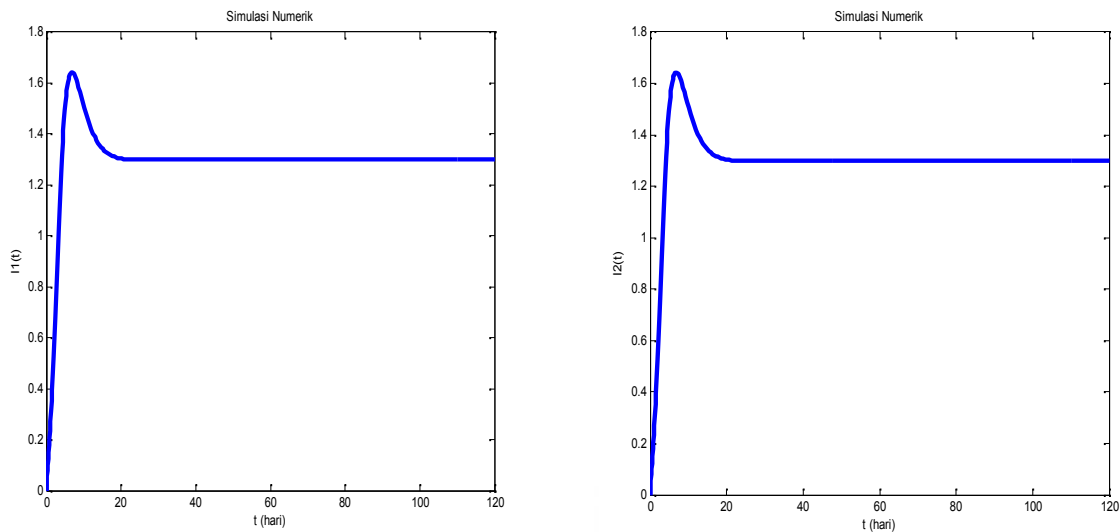
stabil asimptotik. Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi di masing-masing kota terhadap waktu dengan nilai parameter $\beta = 1$ dapat dilihat pada gambar 10, 11, dan 12.



Gambar 10. Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan kota 2 ($\beta = 1$)



Gambar 11. Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan 2 ($\beta = 1$)



Gambar 12. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan 2
($\beta = 1$)

Karena bilangan reproduksi dasar tidak memuat α , maka dengan mengubah α tidak akan mempengaruhi titik kesetimbangan maupun kestabilannya. Dengan mengubah nilai β menjadi 0,1 diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0.7496$. Jadi, $\mathcal{R}_0 < 1$, sehingga kondisi kedua kota berubah menjadi bebas penyakit. Nilai eigen yang memenuhi persamaan (3.13) adalah

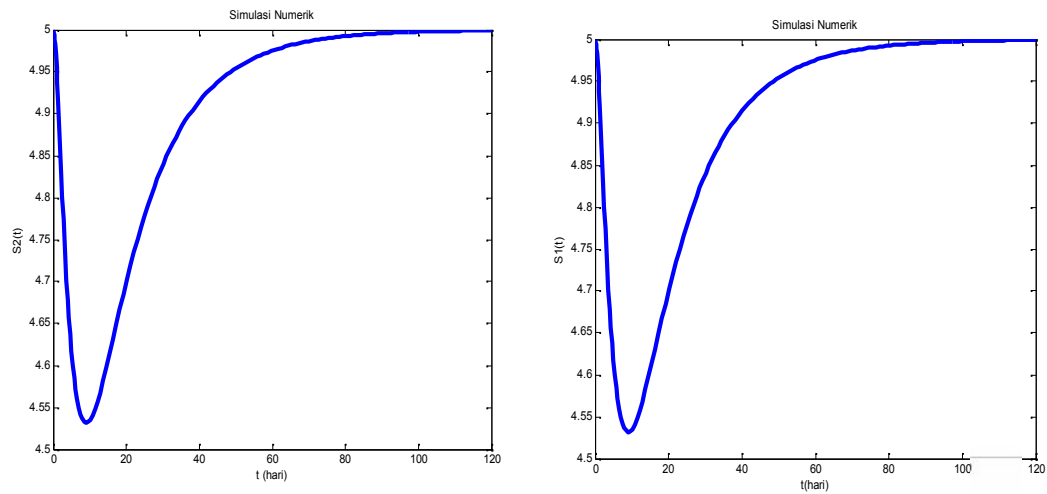
$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -0.38 + 1.6i \quad \lambda_3 = -0.38 - 1.6i$$

Dengan demikian titik kesetimbangan,

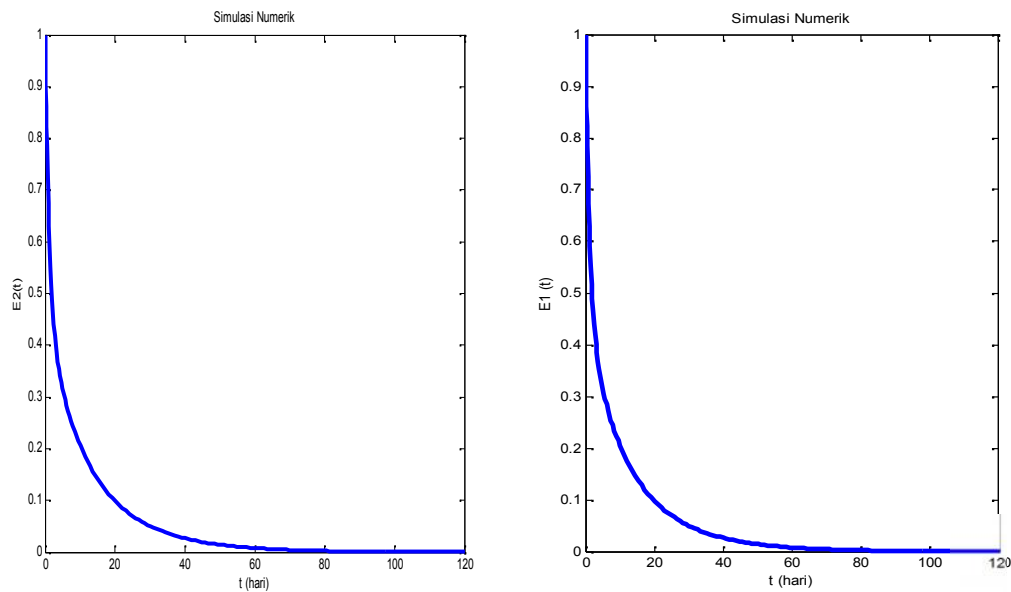
$$E_0 = (5,0,0,5,0,0)$$

stabil asimtotik. Hal tersebut bersesuaian dengan hasil analisis yang menyatakan bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil. Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, laten, dan

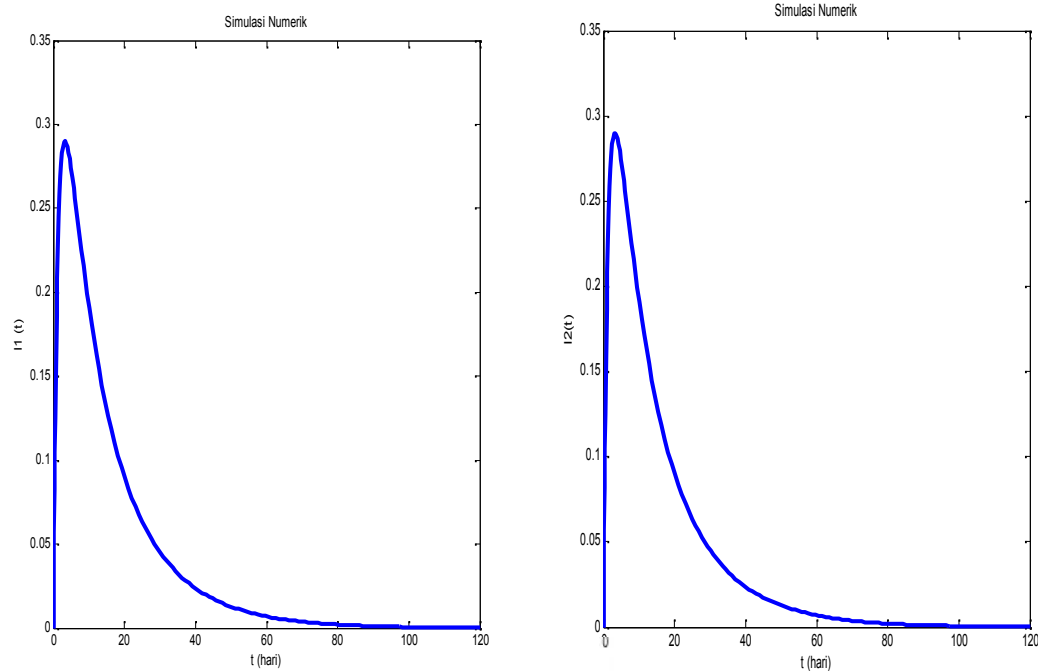
terinfeksi di masing-masing kota terhadap waktu dengan nilai parameter $\beta = 0.1$ dapat dilihat pada gambar 13, 14, dan 15.



Gambar 13. Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan 2 ($\beta = 0,1$)



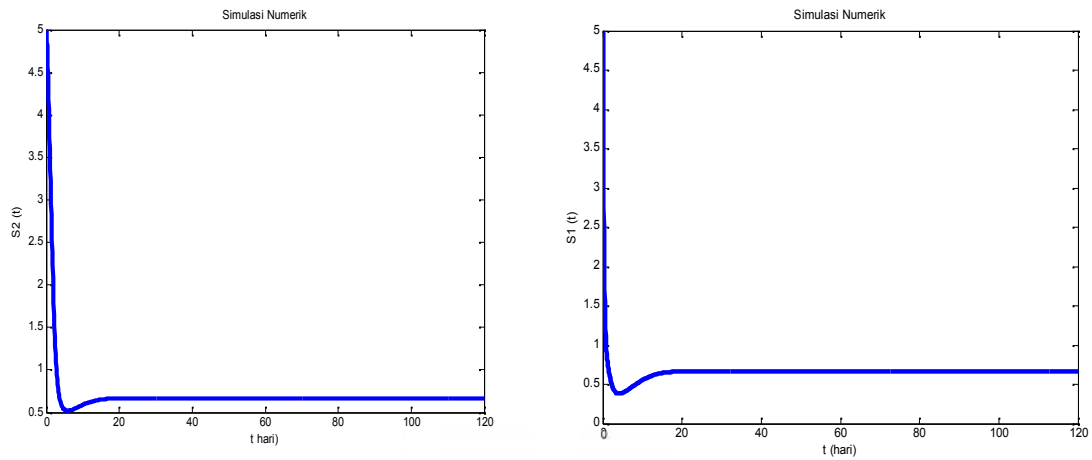
Gambar 14. Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan 2 ($\beta = 0,1$)



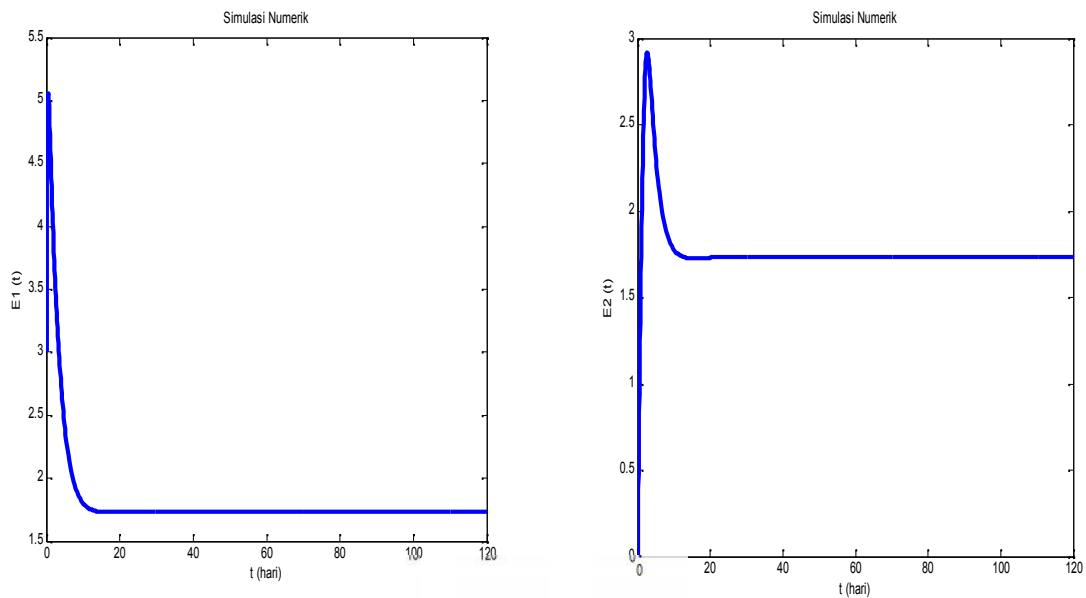
Gambar 15. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan 2 ($\beta = 0,1$)

Pada gambar di atas, terlihat bahwa tidak terdapat perbedaan antara kota 1 dan kota 2. Hal ini menunjukkan bahwa ketika penyakit muncul di kedua kota, kemudian individu rentan dan individu laten melakukan transportasi, maka tidak terjadi perubahan dinamika penyebaran penyakit dan jumlah individu rentan, laten, dan terinfeksi tidak akan berubah. Untuk kasus di mana penyakit hanya muncul di salah satu kota, maka syarat awal haruslah $I_1(0) > 0$ dan $I_2(0) = 0$. Nilai parameter $\beta = 1$, sehingga $\mathcal{R}_0 > 1$. Pada kasus ini, individu laten di kota 1 akan membawa penyakit ke kota 2, dan penyakit akan menyebar di kota 2. Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$, penyakit tidak akan

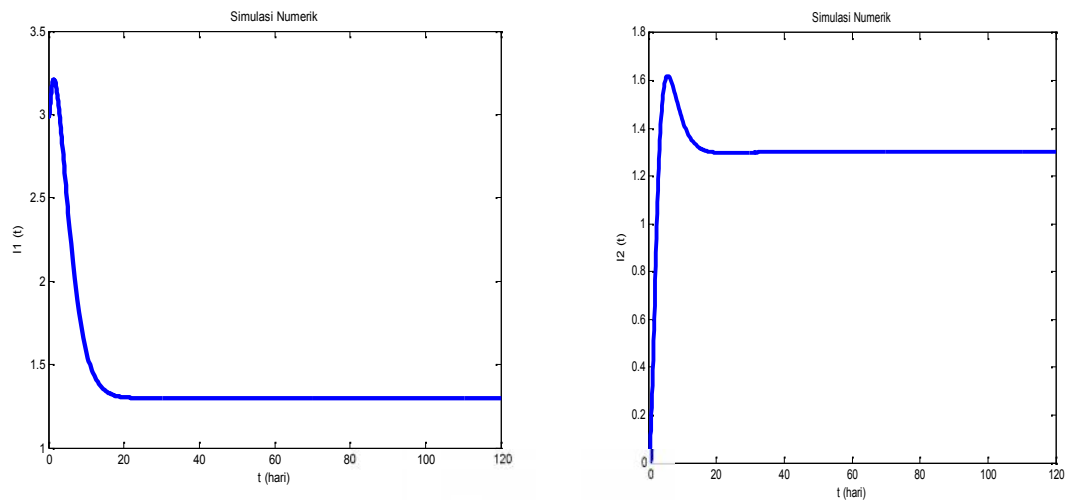
menyebarkan di kedua kota. Hasil simulasi numerik dapat dilihat pada gambar 16, 17, dan 18.



Gambar 16. Populasi individu rentan terhadap waktu di kota 1 dan 2
 $(\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0)$



Gambar 17. Populasi individu laten terhadap waktu di kota 1 dan 2
 $(\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0)$



Gambar 18. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu di kota 1 dan 2
 $(\beta = 1, I_1(0) > 0, I_2(0) = 0)$

c. Simulasi Numerik Model 3

Pada model ini, dilakukan simulasi numerik dengan mengambil nilai parameter $A = 1, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.0002, e = 0.4, \alpha = 0.9, \beta = 0.1, \gamma = 1$ (Wan dan Cui, 2007). Dari nilai parameter ini, diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0,74963 < 1$ dan $\mathcal{R}_{0\gamma} = 8,24588 > 1$.

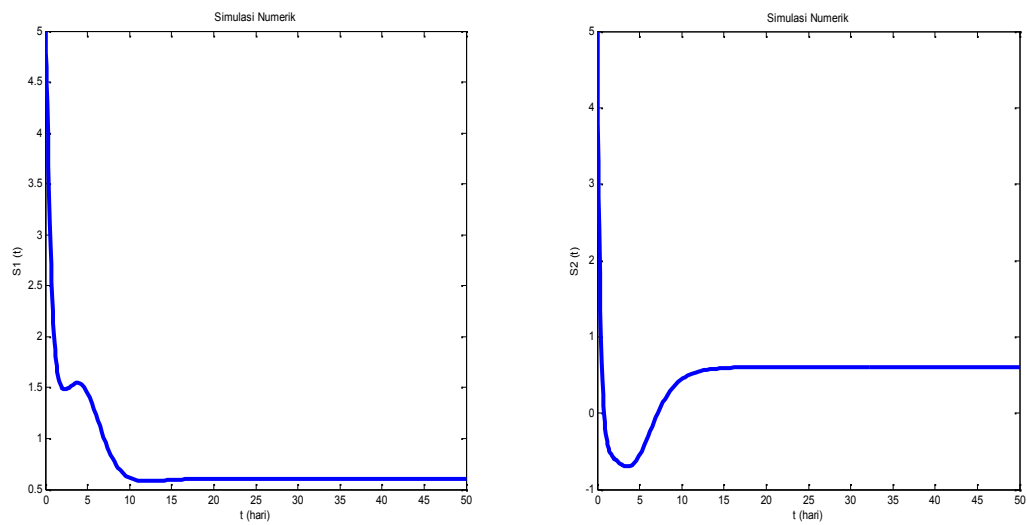
Nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (3.21) adalah

$$\lambda_1 = -0.3 \quad \lambda_2 = -0.45 \quad \lambda_3 = -1.79$$

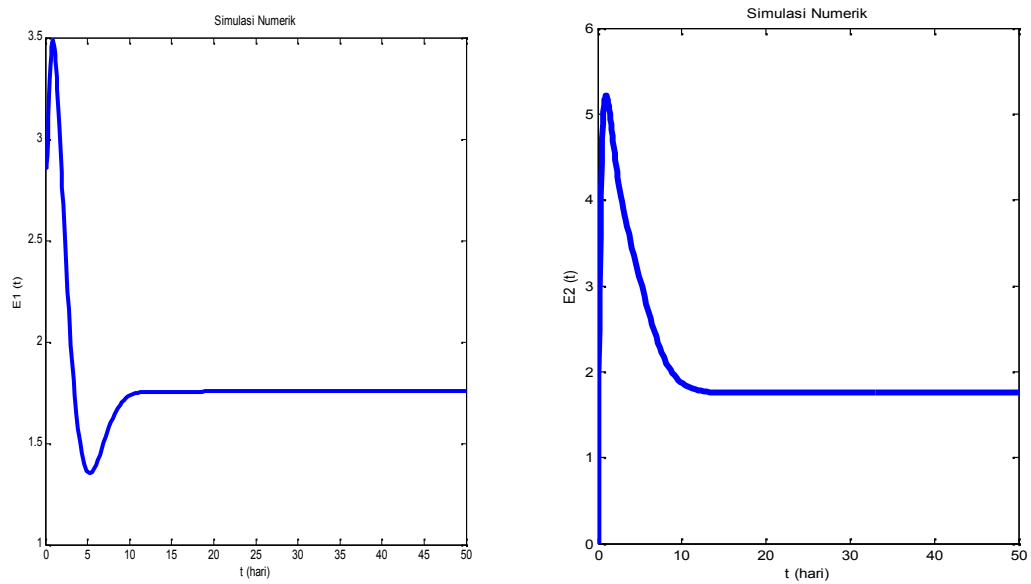
Dengan demikian titik kesetimbangan

$$P_\gamma^* = (0.6, 1.8, 1.3, 0.6, 1.8, 1.3)$$

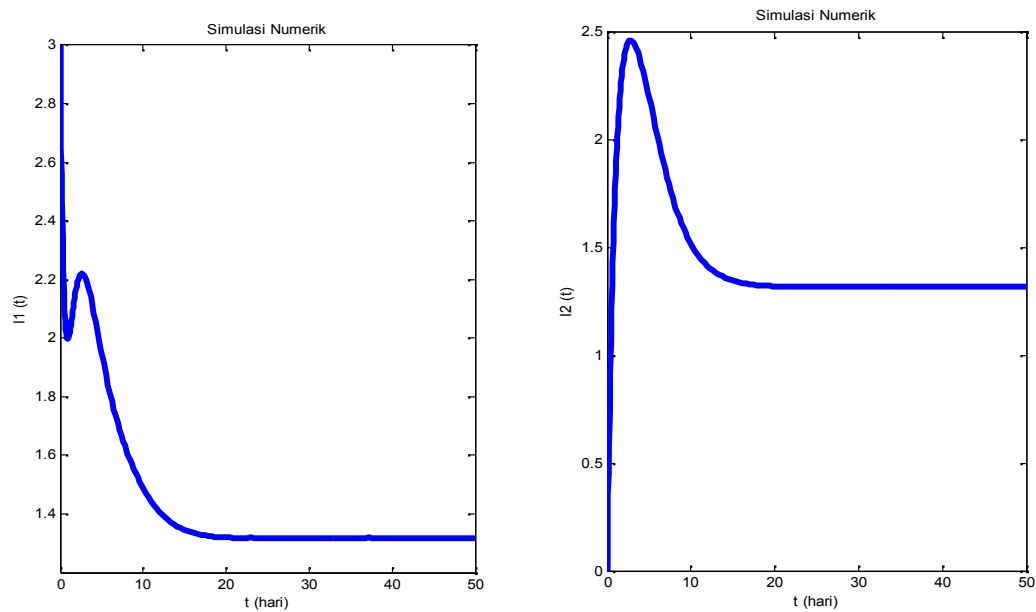
stabil asimptotik. Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi di masing-masing kota terhadap waktu dengan nilai parameter $\beta = 0,1$ dan $\gamma = 1$ dapat dilihat pada gambar 19, 20, dan 21.



Gambar 19. Populasi individu rentan di kota 1 dan 2



Gambar 20. Populasi Individu Laten di kota 1 dan kota 2



Gambar 21. Populasi Individu Terinfeksi di Kota 1 dan Kota 2

Pada ketiga gambar di atas, diberikan nilai awal $I_1 > 0$ dan $I_2 = 0$. Hal ini berarti bahwa penyakit hanya muncul di satu kota (kota 1). Hasil simulasi menunjukkan adanya perubahan dinamika penyebaran penyakit yang terjadi. Individu yang terinfeksi di kota 1 akan membawa penyakit ke kota 2.

5. Analisis Pengaruh Transportasi

Dari hasil analisis, diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu

$P_{\gamma}^* (S_{1\gamma}^*, E_{1\gamma}^*, I_{1\gamma}^*, S_{2\gamma}^*, E_{2\gamma}^*, I_{2\gamma}^*)$ di mana

$$S_{1\gamma}^* = S_{2\gamma}^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta + \gamma c}$$

$$E_{1\gamma}^* = E_{2\gamma}^* = \frac{(d+e)[(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)]}{(c\beta + c\gamma)(bd + be + ce)}$$

$$I_{1\gamma}^* = I_{2\gamma}^* = \frac{(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)}{(\beta + \gamma)(bd + be + ce)}$$

Jika titik kesetimbangan $P_\gamma^* (S_{1\gamma}^*, E_{1\gamma}^*, I_{1\gamma}^*, S_{2\gamma}^*, E_{2\gamma}^*, I_{2\gamma}^*)$ merupakan suatu fungsi terhadap γ , maka jelas bahwa pada saat $\gamma \rightarrow 0$, maka $S_\gamma^* \rightarrow S^*$, $E_\gamma^* \rightarrow E^*$, dan $I_\gamma^* \rightarrow I^*$. Pada saat $\gamma = 0$, maka $S_\gamma^* = S^*$, $E_\gamma^* = E^*$, dan $I_\gamma^* = I^*$ dan pada saat $\gamma > 0$, maka dapat diperoleh

$$\frac{\partial S_\gamma^*}{\partial \gamma} = -\frac{c(b+c)(d+e)}{c(\beta + \gamma)} = -\frac{(b+c)(d+e)}{(\beta + \gamma)} < 0$$

$$\frac{\partial E_\gamma^*}{\partial \gamma} = \frac{(d+e)Ac}{c(bd + be + ce)} > 0$$

$$\frac{\partial I_\gamma^*}{\partial \gamma} = \frac{Ac(bd + be + ce)}{(bd + be + ce)^2} > 0$$

Dari analisis di atas diketahui bahwa jumlah individu rentan di kedua kota akan berkurang seiring dengan meningkatnya γ . Sebaliknya, jumlah individu laten dan terinfeksi akan bertambah dengan meningkatnya γ . Ini menunjukkan bahwa dengan meningkatnya laju penularan melalui transportasi akan semakin memperparah kasus penyebaran penyakit. Oleh karena itu, ketika penyakit menular telah muncul maka sangat penting untuk dilakukan pembatasan terhadap penumpang atau individu yang akan berpindah dari kota 1 ke kota 2 atau sebaliknya.

B. Model dengan Waktu Tunda

Model epidemik SEIS melalui transportasi antar dua kota pada sistem (3.1), (3.2), dan (3.12) tidak mempertimbangkan waktu tunda dalam proses transportasi. Menurut Nakata (2011), dinamika penyebaran penyakit selama melakukan transportasi membutuhkan waktu dan mengasumsikan bahwa dibutuhkan τ unit waktu untuk melengkapi transportasi satu arah antar dua kota, dengan kata lain bahwa penyebaran infeksi penyakit dipengaruhi oleh lama waktu yang dibutuhkan selama individu melakukan transportasi. Jadi analisis model epidemik SEIS akan dilakukan dengan mempertimbangkan waktu tunda. Model yang akan dibahas adalah model (3.12) pada kasus 2, yaitu hanya individu rentan dan laten yang bepergian. Dengan demikian model (3.12) menjadi

$$\frac{dS_1}{dt} = A - bS_1(t) - \beta S_1(t)I_1(t) + vI_1(t) - \alpha S_1(t) + \alpha S_2(t - \tau) \quad (3.24a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \beta S_1(t)I_1(t) - (b + c)E_1(t) - \alpha E_1(t) + \alpha E_2(t - \tau) \quad (3.24b)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = cE_1(t) - vI_1(t) - eI_1(t) \quad (3.24c)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = A - bS_2(t) - \beta S_2(t)I_2(t) + vI_2(t) - \alpha S_2(t) + \alpha S_1(t - \tau) \quad (3.24d)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \beta S_2(t)I_2(t) - (b + c)E_2(t) - \alpha E_2(t) + \alpha E_1(t - \tau) \quad (3.24e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = cE_2(t) - vI_2(t) - eI_2(t) \quad (3.24f)$$

Untuk meninjau pengaruh waktu tunda, selanjutnya model (3.24), akan dianalisis pada titik keseimbangan dari model tanpa waktu tunda seperti pada bagian A.

1. Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan dengan terlebih dahulu melinearisasi model (3.24) di sekitar titik keseimbangannya dan mengabaikan suku-suku nonlinearnya. Misalkan

$$S_1(t) = x_1(t) + S_1^*, \quad E_1(t) = y_1(t) + E_1^*, \quad I_1(t) = z_1(t) + I_1(t)$$

$$S_2(t) = x_2(t) + S_2^*, \quad E_2(t) = y_2(t) + E_2^*, \quad I_2(t) = z_2(t) + I_2(t)$$

Substitusi pada model (3.23), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = (-b - \beta I_1^* - \alpha)x_1(t) + (-\beta S_1^* + d)z_1(t) + \alpha x_2(t - \tau) \quad (3.25a)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \beta I_1^* x_1(t) + (-b - c - \alpha)y_1(t) + \beta S_1^* z_1(t) + \alpha y_2(t - \tau) \quad (3.25b)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = cy_1(t) - (d + e)z_1(t) \quad (3.25c)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (-b - \beta I_2^* - \alpha)x_2(t) + (-\beta S_2^* + d)z_2(t) + \alpha x_1(t - \tau) \quad (3.25d)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \beta I_2^* x_2(t) + (-b - c - \alpha)y_2(t) + \beta S_2^* z_2(t) + \alpha y_1(t - \tau) \quad (3.25e)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = cy_2(t) - (d + e)z_2(t) \quad (3.25f)$$

Dalam notasi matriks, sistem persamaan (3.25) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + M_1 \begin{pmatrix} x_1(t - \tau) \\ y_1(t - \tau) \\ z_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \\ y_2(t - \tau) \\ z_2(t - \tau) \end{pmatrix}$$

di mana

$$M_0 = \begin{pmatrix} -(b + \beta I_1^* + \alpha) & 0 & -\beta S_1^* + d & 0 & 0 & 0 \\ \beta I_1^* & -(b + c + \alpha) & \beta S_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -(d + e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(b + \beta I_2^* + \alpha) & 0 & -\beta S_2^* + d \\ 0 & 0 & 0 & \beta I_2^* & -(b + c + \alpha) & \beta S_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -(d + e) \end{pmatrix}$$

dan

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari sistem persamaan (3.25) ditentukan oleh persamaan karakteristik

$$\det(\lambda I - M_0 - e^{-\lambda\tau} M_1) = 0 \quad (3.26)$$

Karena $I_1^* = I_2^*$, $S_1^* = S_2^*$, $E_1^* = E_2^*$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$(i\omega, \tau) = (\lambda + (b + \beta I^* + \alpha))(\lambda + (b + c + \alpha))(\lambda + (d + e))]^2 - (c\beta S^* \alpha e^{-\lambda\tau})^2 = 0$$

$$(i\omega, \tau) = (\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)^2 - (a_4 e^{-\lambda\tau})^2 = 0 \quad (3.27)$$

di mana

$$a_1 = 2b + c + d + e + \beta I^* + 2\alpha$$

$$a_2 = (2b + c + \beta I^* + 2\alpha)(d + e) + (b + \beta I^* + \alpha)(b + c + \alpha)$$

$$a_3 = (b + \beta I^* + \alpha)(b + c + \alpha)(d + e)$$

$$a_4 = c\beta S^* \alpha$$

Untuk $\tau = 0$, diperoleh persamaan karakteristik seperti pada persamaan (3.15). Menurut kriteria Routh-Hurwitz, bagian real dari semua akar-akar persamaan (3.15) akan bernilai negatif jika dan hanya jika

$$a_2 > 0, a_0 > 0, \text{ dan } a_2 a_1 - a_0 > 0 \quad (3.28)$$

Untuk $\tau > 0$, misalkan $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ adalah akar-akar persamaan karakteristik (3.26), maka diperoleh

$$\begin{aligned} & ((i\omega)^3 + a_1(i\omega)^2 + a_2(i\omega) + a_3)^2 - (a_4 \cos(\omega\tau) - a_4 i \sin(\omega\tau))^2 = 0 \\ & (-i\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2(i\omega) + a_3)^2 - (a_4 \cos(\omega\tau) - a_4 i \sin(\omega\tau))^2 = 0 \\ & -\omega^6 + 2a_1 i \omega^5 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-2a_3 - 2a_1 a_2)i\omega^3 + (-a_2^2 - 2a_1 a_3)\omega^2 \\ & \quad + 2a_2 a_3 i \omega + a_3^2 \\ & \quad - a_4^2 \cos^2(\omega\tau) + 2a_4 i \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) + a_4^2 \sin^2(\omega\tau) = 0 \\ & -\omega^6 + 2a_1 i \omega^5 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-2a_3 - 2a_1 a_2)i\omega^3 + (-a_2^2 - 2a_1 a_3)\omega^2 + \\ & 2a_2 a_3 i \omega + a_3^2 - a_4^2 \cos(2\omega\tau) + a_4^2 i \sin(2\omega\tau) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pisahkan bagian real dan imajiner

$$-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1 a_3)\omega^2 + a_3^2 - a_4^2 \cos(2\omega\tau) = 0 \quad (3.30a)$$

$$2a_1 \omega^5 + (-2a_3 - 2a_1 a_2)\omega^3 + 2a_2 a_3 \omega + a_4^2 \sin(2\omega\tau) = 0 \quad (3.30b)$$

Persamaan (3.30a) dan (3.30b) masing-masing ekuivalen dengan

$$-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2 = a_4^2 \cos(2\omega\tau) \quad (3.31a)$$

$$2a_1\omega^5 + (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 + 2a_2a_3\omega = -a_4^2 \sin(2\omega\tau) \quad (3.31b)$$

Kuadratkan persamaan (3.31a) dan (3.31b)

$$\begin{aligned} \omega^{12} - 2(2a_2 + a_1^2)\omega^{10} + ((2a_2 + a_1^2)^2 - 2(-a_2^2 - 2a_1a_3))\omega^8 + (2(2a_2 + a_1^2)(-a_2^2 - 2a_1a_3) - 2a_3^2)\omega^6 + (2a_3^2(2a_2 + a_1^2) + (-a_2^2 - 2a_1a_3)^2)\omega^4 + 2a_3^2(-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^4 = a_4^2 \cos^2(2\omega\tau) \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} 4a_1^2\omega^{10} + 4a_1(-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^8 + ((-2a_3 - 2a_1a_2)^2 + 8a_1(a_2a_3))\omega^6 + 4(-2a_3 - 2a_1a_2)(a_2a_3)\omega^4 + 4(a_2a_3)^2\omega^2 = a_4^2 \sin^2(2\omega\tau) \end{aligned} \quad (3.32b)$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.32a) dan (3.32b) diperoleh

$$\omega^{12} + A_1\omega^{10} + A_2\omega^8 + A_3\omega^6 + A_4\omega^4 + A_5\omega^2 + A_6 = 0 \quad (3.33)$$

di mana

$$A_1 = (2a_1^2 - 4a_2)$$

$$A_2 = (-4a_1a_3 - 4a_2a_1^2 + a_1^4 + 6a_2^2)$$

$$A_3 = (-4a_2^3 + 2a_1^2a_2^2 + 8a_1a_2a_3 + 2a_3^2 - 4a_1^3a_3)$$

$$A_4 = (a_2^4 - 4a_3^2a_2 - 4a_2^2a_1a_3 + 6a_3^2a_1^2)$$

$$A_5 = (2a_2^2a_3^2 - 4a_1a_3^3)$$

$$A_6 = a_3^4 - a_4^2$$

$$a_1 = 2b + c + d + e + \beta I^* + 2\alpha$$

$$a_2 = (2b + c + \beta I^* + 2\alpha)(d + e) + (b + \beta I^* + \alpha)(b + c + \alpha)$$

$$a_3 = (b + \beta I^* + \alpha)(b + c + \alpha)(d + e)$$

$$a_4 = c\beta S^* \alpha$$

dan

$$(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{A}{b}, 0, 0, \frac{A}{b}, 0, 0 \right) \text{ untuk titik kesetimbangan bebas penyakit}$$

$$(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}, \frac{(d+e)[Ac\beta - b(b+c)(d+e)]}{c\beta(bd+be+ce)}, \frac{Ac\beta - b(b+c)(d+e)}{\beta(bd+be+ce)} \right) \text{ untuk titik kesetimbangan endemik.}$$

Selanjutnya akan ditinjau bahwa persamaan (3.33) memiliki paling tidak satu akar real positif dengan menggunakan aturan tanda Descartes. Dalam hal ini akan ditinjau bahwa $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ memiliki tanda yang berbeda. Dari hasil analisis untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, diperoleh

$$A_1 = (2a_1^2 - 4a_2) > 0$$

$$A_2 = (-4a_1a_3 - 4a_2a_1^2 + a_1^4 + 6a_2^2) > 0$$

$$A_3 = (-4a_2^3 + 2a_1^2a_2^2 + 8a_1a_2a_3 + 2a_3^2 - 4a_1^3a_3) > 0$$

$$A_4 = (a_2^4 - 4a_3^2a_2 - 4a_2^2a_1a_3 + 6a_3^2a_1^2) > 0$$

$$A_5 = (2a_2^2a_3^2 - 4a_1a_3^3) > 0$$

$$A_6 = a_3^4 - a_4^2 > 0$$

Sehingga $A_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Jadi persamaan (3.33) tidak memiliki variasi tanda antar koefisien polinomialnya, sehingga menurut aturan tanda Descartes persamaan tersebut tidak akan menghasilkan akar real positif.

Teorema 1 (Kar,2003).

Syarat kondisi perlu dan cukup titik keseimbangan $(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ menjadi stabil asimptotik untuk semua $\tau \geq 0$ adalah sebagai berikut.

(1) Bagian real untuk setiap akar-akar dari $\Delta(\lambda, 0) = 0$ adalah negatif.

(2) Untuk setiap real ω dan $\tau \geq 0$, $(i\omega, \tau) \neq 0$, di mana $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 2 (Kar,2003).

Jika kondisi (3.28) dan teorema 1 terpenuhi lalu persamaan (3.33) tidak mempunyai akar real positif, maka titik kesetimbangan $(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ adalah stabil asimptotik untuk $\tau \geq 0$.

Misalkan persamaan (3.33) memiliki satu akar real positif ω_0 , maka dari (3.27) akan menghasilkan akar imajiner $i\omega_0$. Dengan mensubstitusi ω_0 ke persamaan (3.31a) dan (3.31b) untuk mendapatkan τ , maka diperoleh

$$-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2 = a_4^2 \cos(2\omega\tau)$$

$$\cos(2\omega\tau) = \frac{-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2}{a_4^2} \quad (3.34a)$$

$$2a_1\omega^5 + (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 + 2a_2a_3\omega = -a_4^2 \sin(2\omega\tau)$$

$$\sin(2\omega\tau) = -\frac{2a_1\omega^5 + (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 + 2a_2a_3\omega}{a_4^2} \quad (3.34b)$$

Dari persamaan (3.34a) dan (3.34b), diperoleh nilai τ

$$\frac{\sin(2\omega\tau)}{\cos(2\omega\tau)} = \frac{-2a_1\omega^5 - (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 - 2a_2a_3\omega}{-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2}$$

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{-2a_1\omega^5 - (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 - 2a_2a_3\omega}{-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2} \quad (3.35)$$

Nilai τ_k yang berhubungan dengan $\omega = \omega_0$ adalah

$$\tau_k = \frac{1}{2\omega_0} \arccos \left[\frac{-2a_1\omega^5 - (-2a_3 - 2a_1a_2)\omega^3 - 2a_2a_3\omega}{-\omega^6 + (2a_2 + a_1^2)\omega^4 + (-a_2^2 - 2a_1a_3)\omega^2 + a_3^2} \right] + \frac{2k\pi}{\omega_0} \quad (3.36)$$

di mana $k = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 3 (Kar, 2003).

Jika kondisi (3.28) terpenuhi lalu persamaan (3.33) mempunyai satu akar real positif ω_0 sehingga diperoleh (3.36), maka titik keseimbangan $(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ adalah stabil asimptotik untuk $\tau < \tau_0$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0$, dan di titik $(S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ akan terjadi bifurkasi.

Selanjutnya, karena persamaan (3.33) tidak memiliki akar real positif, maka tidak dapat diperoleh nilai τ_k pada persamaan (3.36) yang membuat titik kesetimbangan menjadi tidak stabil, sehingga menurut teorema 1 dan 2 titik keseimbangan tersebut akan stabil untuk $\tau \geq 0$. Dengan demikian, waktu tunda yang menyatakan lamanya waktu yang dibutuhkan selama transportasi berlangsung hanya berpengaruh pada cepat atau lambatnya sistem mencapai kestabilan.

2. Simulasi Numerik

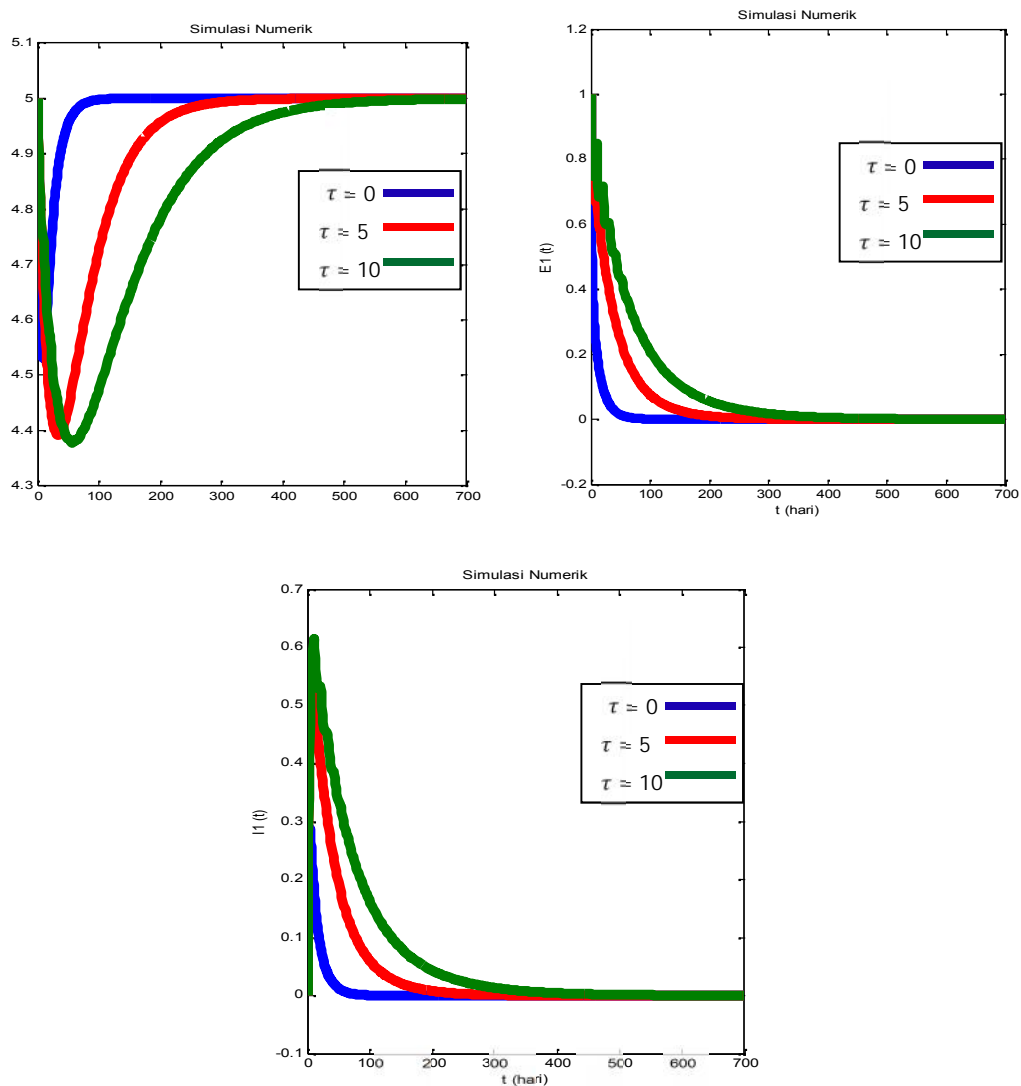
Untuk melihat pengaruh waktu tunda pada model (3.24), maka dilakukan simulasi numerik. Dipilih nilai $\tau = 0, \tau = 5$ dan $\tau = 10$ untuk $\beta = 0,1$ dan $\tau = 0, \tau = 20$ dan $\tau = 40$ untuk $\beta = 1$ dan parameter lain yang diberikan oleh Wan, dkk (2007) yaitu $A = 1, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.0002, e = 0.4$. Simulasi dilakukan dengan mengkombinasikan nilai parameter β dan τ dengan syarat awal

$$S_1(0) = \frac{A}{b}, E_1(0) = 0, I_1(0) = 1, S_2(0) = \frac{A}{b}, E_2 = 0, I_2 = 0.$$

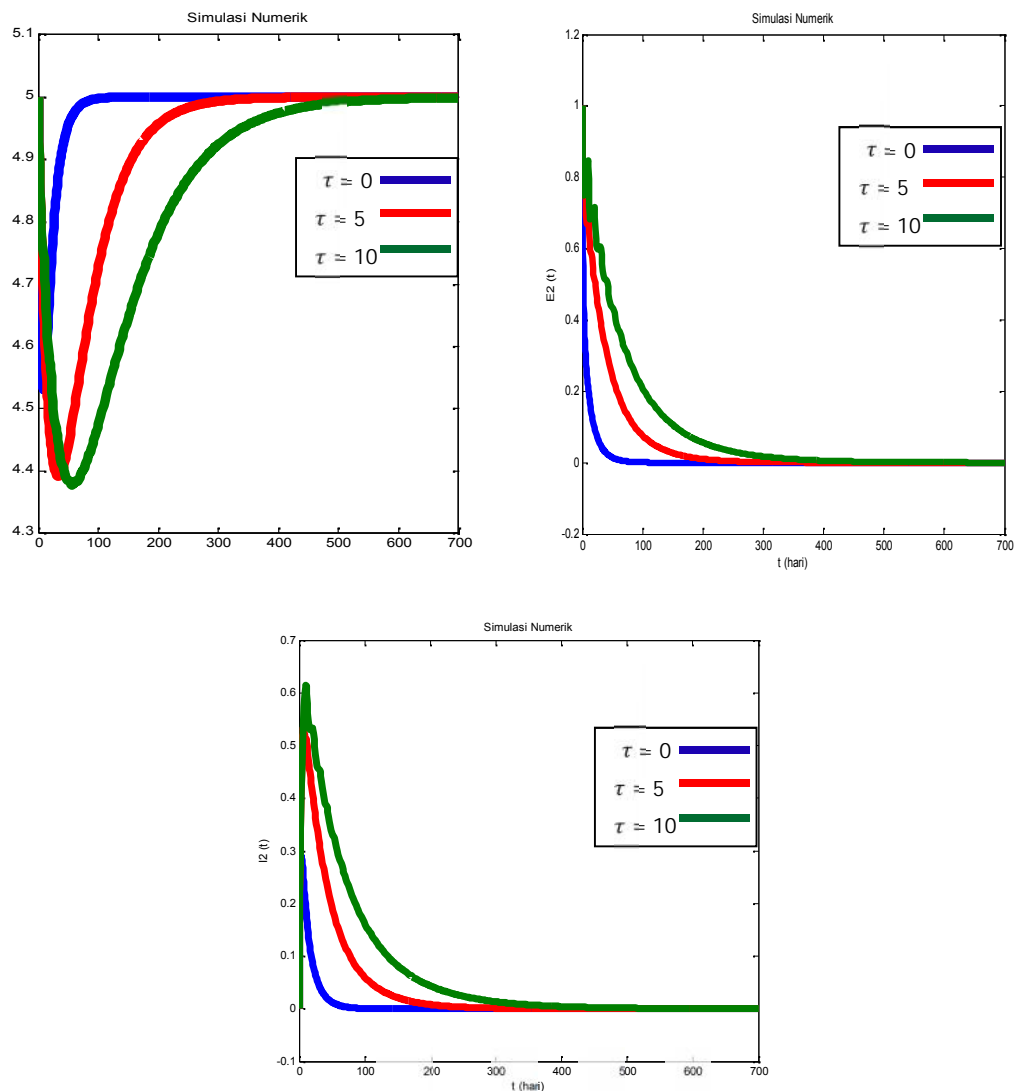
Untuk nilai $\beta = 0,1$ diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0.7496 < 1$. Selanjutnya simulasi dilakukan dengan mengambil $\tau = 5$ dan $\tau = 10$ kemudian dibandingkan dengan $\tau = 0$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa waktu tunda yang diberikan hanya mempengaruhi cepat atau lambatnya model mencapai kestabilan untuk $\tau \geq 0$. Dengan demikian titik keseimbangan bebas penyakit, stabil asimptotik. Gambar 22 dan 23 menunjukkan populasi individu rentan, laten, terinfeksi dan sembuh serta perbandingannya terhadap beberapa nilai τ yang diberikan.

Sedangkan untuk $\beta = 1$, diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 7,4963 > 1$. Selanjutnya simulasi dilakukan dengan mengambil $\tau = 20$ dan $\tau = 40$ kemudian dibandingkan dengan $\tau = 0$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa waktu tunda yang diberikan hanya mempengaruhi cepat atau lambatnya model mencapai

kestabilan untuk $\tau \geq 0$. Dengan demikian titik keseimbangan endemik stabil asimptotik. Gambar 24 dan 25 menunjukkan populasi individu rentan, laten, terinfeksi dan sembuh serta perbandingannya terhadap beberapa nilai τ yang diberikan.



Gambar 22. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 1 ($\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)

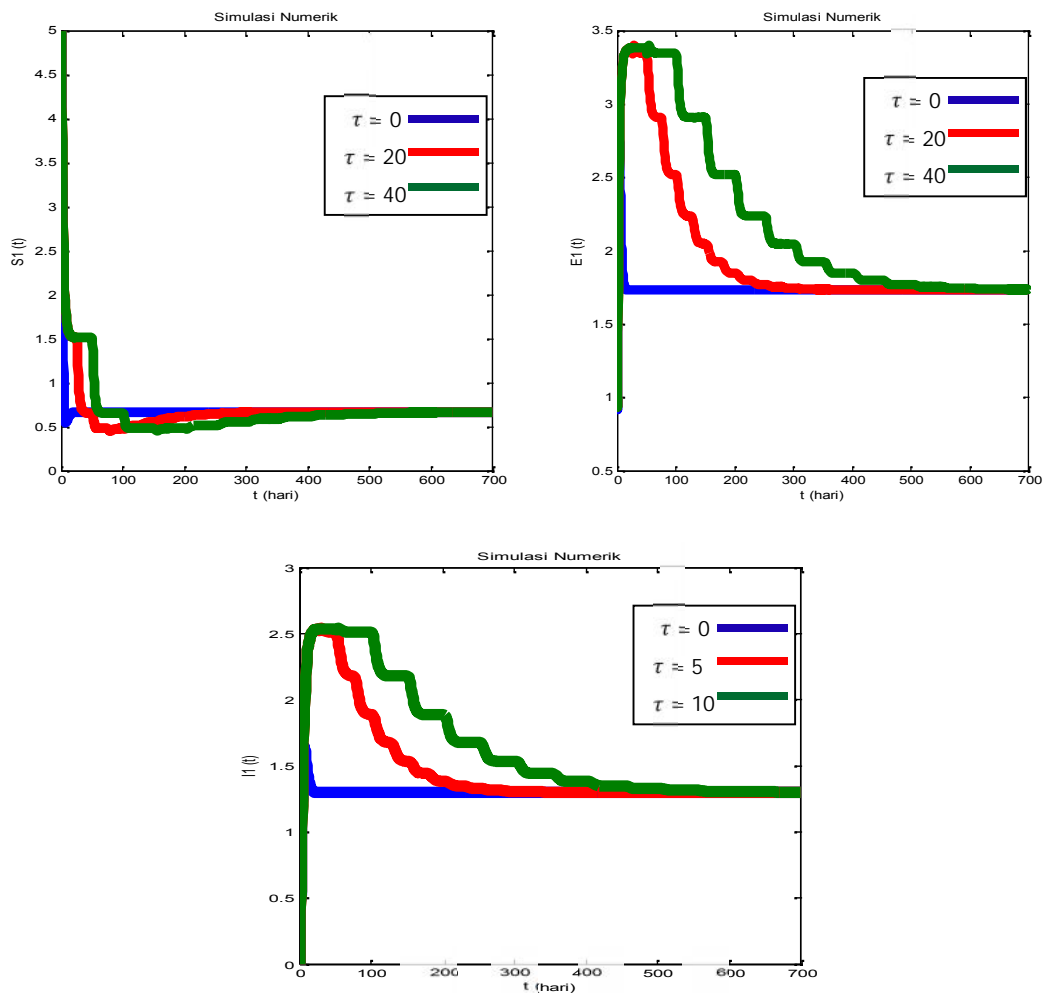


Gambar 23. Populasi individu rentan, laten, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 2 ($\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)

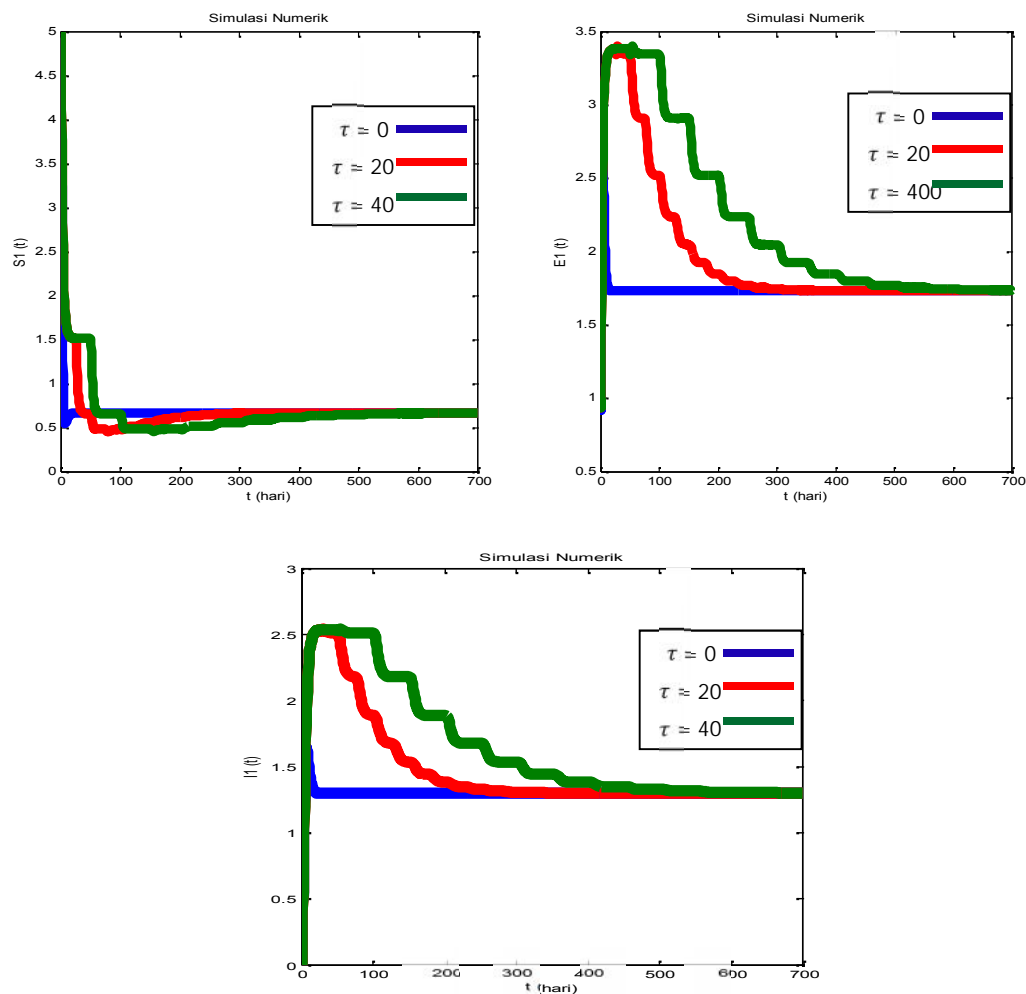
Pada gambar 22 dan 23 terlihat bahwa dengan laju kontak yang kecil ($\beta = 0,1$) antara individu terinfeksi dan rentan dan meninjau beberapa waktu tunda ($\tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$), jumlah populasi individu rentan, laten, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan. Perbedaan nilai waktu tunda yang diberikan hanya sebatas mempengaruhi cepat atau

lambatnya mencapai kestabilan dan tidak mempengaruhi kestabilannya. Dalam hal ini waktu tunda hanya memperlambat hilangnya infeksi penyakit.

Jumlah individu rentan dalam waktu yang panjang akan selalu ada dan jumlah individu laten, terinfeksi akan habis dan berbanding lurus dengan individu yang sembuh dari penyakit. Pada kondisi ini $\mathcal{R}_0 < 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menghilang dalam populasi.



Gambar 24. Populasi individu laten, rentan, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 1 ($\beta = 1, \tau = 0, \tau = 20, \tau = 40$)



Gambar 25. Populasi individu laten, rentan, dan terinfeksi terhadap waktu di kota 2 ($\beta = 1, \tau = 0, \tau = 20, \tau = 40$)

Pada gambar 24 dan 25 terlihat bahwa dengan laju kontak antara individu terinfeksi dan rentan yang lebih besar dari sebelumnya ($\beta = 1$) dan meninjau beberapa waktu tunda ($\tau = 0, \tau = 20, \tau = 40$), jumlah populasi individu rentan, laten, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan. Pada kondisi ini $\mathcal{R}_0 > 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menyebar dan menjadi wabah dalam populasi. Perbedaan nilai waktu

tunda yang diberikan hanya sebatas mempengaruhi cepat atau lambatnya mencapai kestabilan dan tidak mempengaruhi kestabilannya. Dalam hal ini waktu tunda hanya memperlambat penyebaran infeksi penyakit dalam populasi.

BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Dari model epidemik SEIS melalui transportasi antar dua kota, diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Pada model SEIS tanpa melibatkan waktu tunda, dianalisis tiga kasus, yaitu

a. Kasus di mana tidak ada individu yang bepergian. Pada model ini diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(\frac{A}{b}, 0, 0\right)$ yang stabil pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik

$$\left(\frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}, \frac{A\beta c - b(b+c)(d+e)}{\beta(bd+be+ce)}, \frac{(d+e)[A\beta c - b(b+c)(d+e)]}{c\beta(bd+be+ce)}\right)$$

yang stabil pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$.

b. Kasus di mana hanya individu rentan dan laten yang bepergian.

Dari hasil analisis diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$\left(\frac{A}{b}, 0, 0, \frac{A}{b}, 0, 0\right)$ yang stabil pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik

kesetimbangan endemik yang stabil pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik

kesetimbangan endemik yang diperoleh adalah

$$P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*),$$

di mana

$$S_1^* = S_2^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta}$$

$$E_1^* = E_2^* = \frac{(d+e)b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta(bd + be + ce)}$$

$$I_1^* = I_2^* = \frac{b(b+c)(d+e)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta(bd + be + ce)}$$

c. Kasus di mana semua individu bepergian

Pada kasus ini, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$\left(\frac{A}{b}, 0, 0, \frac{A}{b}, 0, 0\right)$ yang stabil asimptotik pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik

kesetimbangan endemik yang stabil pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik

kesetimbangan endemik yang diperoleh adalah

$$P^*_\gamma = \left(S_{1\ \gamma}^*, E_{1\ \gamma}^*, I_{1\ \gamma}^*, S_{2\ \gamma}^*, E_{2\ \gamma}^*, I_{2\ \gamma}^*\right),$$

di mana

$$S_{1\ \gamma}^* = S_{2\ \gamma}^* = \frac{(b+c)(d+e)}{c\beta + \gamma c}$$

$$E_{1\ \gamma}^* = E_{2\ \gamma}^* = \frac{(d+e)[(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)]}{(c\beta + c\gamma)(bd + be + ce)}$$

$$I_{1\ \gamma}^* = I_{2\ \gamma}^* = \frac{(Ac\beta + A\gamma c) - b(b+c)(d+e)}{(\beta + \gamma)(bd + be + ce)}$$

2. Hasil analisis pengaruh transportasi menunjukkan bahwa jumlah individu rentan di kedua kota akan berkurang dengan peningkatan γ ,

sebaliknya jumlah individu jumlah individu laten dan terinfeksi akan bertambah dengan meningkatnya γ .

3. Dari analisis waktu tunda diperoleh hasil bahwa adanya waktu tunda mempengaruhi cepat atau lambatnya titik kesetimbangan untuk mencapai kestabilan. Namun, waktu tunda tidak mempengaruhi perubahan kestabilan.

B. SARAN

Diharapkan pada penelitian berikutnya, model epidemik melalui transportasi antar dua kota lebih dikembangkan dengan meninjau aspek-aspek penting lainnya, terutama yang berkaitan dengan waktu tunda.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Inc.
- Cui, J., Takeuchi, Y., Saito, Y., 2006. Spreading disease with transport related infection. *J. Theor. Biol.* 239, 376–390.
- Denphetnong, A.,Chinviriyasit, W. 2010. Numerical Modeling In Epidemik Modeling With Transport - *Related Infection*. CMIC, 28-46.
- Driessche, P.V.D., Watmough, J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Bioscience*, 180, 29-48.
- Edelstein, L., Keshet. 2005. *Mathematical Models in Biology*. SIAM. New-York, Inc. New York, 150-151.
- Fan, M., Li, M.Y., Wang, K. 2001. Global Stability of an SEIS Epidemik Model With Recruitment and a Varying Total Population Size. *Mathematical Bioscience*, 170, 199-208.
- Fathoni, I.A. 2013. *Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular Tipe Seis Melalui Transportasi Antar-Dua Kota*. Malang: FMIPA Universitas Brawijaya.
- Giesecke, J. 1994. *Modern Infectious Disease Epidemiology*. Oxford University Press, New York.
- Kar,T.K. 2003. Selective Harvesting in a Prey Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical And Computer Modelling*. 38: 449-458.
- Nakata, Y. 2011. On the global stability of a delayed epidemik model with transport-related infection. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 12.6, 3028-3034.
- Nakata, Y., Rost, G. 2012. Global analysis for spread of an infectious disease via human transportation. *Book of Abstracts of Abstracts* 9.

Wan, H., Cui, J. 2007. An SEIS Epidemic Model with Transport-Related Infection. *Journal of Theoretical Biology*, 247. 507-524.

Wang, X. 2004. A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs. *JSTOR*. 111: 525-526.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 4, 5, dan 6

FILE: seis.m

```
function xprime=seis(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt];
```

FILE:plot.m

```
x0=[5 1 0];
tspan=[0 120];
[t,x]=ode45(@seis,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1), t,x(:,2),t,x(:,3))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontzise', 10);
ylabel('S1(t)', 'Fontzise', 10);
```

Lampiran 2. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 7, 8, dan 9

FILE: seis.m

```
function xprime=seis(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=0.1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt];
```

FILE:plot.m

```
x0=[5 1 0];
tspan=[0 120];
[t,x]=ode45(@seis,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1), t,x(:,2),t,x(:,3))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontzise', 10);
ylabel('S1(t)', 'Fontzise', 10);
```


Lampiran 3. Sintaks program Matlab untuk Gambar 10, 11, dan 12

FILE: seis2.m

```
function xprime=seis2(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
alpha=0.9;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3)-alpha*x(1)+alpha*x(4);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2)-alpha*x(2)+alpha*x(5);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3);
dx4dt=A-beta*x(4)*x(6)-b*x(4)+d*x(6)-alpha*x(4)+alpha*x(1);
dx5dt=beta*x(4)*x(6)-b*x(5)-c*x(5)-alpha*x(5)+alpha*x(2);
dx6dt=c*x(5)-d*x(6)-e*x(6);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt;dx4dt;dx5dt;dx6dt];
```

FILE: plot2.m

```
x0=[5 1 0 5 1 0];
tspan=[0 120];
[t,x]=ode45(@seis2,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1), t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),t,x(:,5),t,x(:,6))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontsize', 10), ylabel('S1(t)', 'Fontsize', 10)
```

Lampiran 4. Sintaks program Matlab untuk Gambar 13, 14, dan 15

FILE: seis2.m

```
function xprime=seis2(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=0.1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
alpha=0.9;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3)-alpha*x(1)+alpha*x(4);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2)-alpha*x(2)+alpha*x(5);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3);
dx4dt=A-beta*x(4)*x(6)-b*x(4)+d*x(6)-alpha*x(4)+alpha*x(1);
dx5dt=beta*x(4)*x(6)-b*x(5)-c*x(5)-alpha*x(5)+alpha*x(2);
dx6dt=c*x(5)-d*x(6)-e*x(6);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt;dx4dt;dx5dt;dx6dt];
```

FILE: plot2.m

```
x0=[5 1 0 5 1 0];
tspan=[0 120];
[t,x]=ode45(@seis2,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1), t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),t,x(:,5),t,x(:,6))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontzise', 10), ylabel('S1(t)', 'Fontzise', 10)
```

Lampiran 5. Sintaks program Matlab untuk Gambar 16, 17, dan 18

FILE: seis2.m

```

function xprime=seis2(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
alpha=0.9;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3)-alpha*x(1)+alpha*x(4);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2)-alpha*x(2)+alpha*x(5);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3);
dx4dt=A-beta*x(4)*x(6)-b*x(4)+d*x(6)-alpha*x(4)+alpha*x(1);
dx5dt=beta*x(4)*x(6)-b*x(5)-c*x(5)-alpha*x(5)+alpha*x(2);
dx6dt=c*x(5)-d*x(6)-e*x(6);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt;dx4dt;dx5dt;dx6dt];

```

FILE: plot2.m

```

x0=[5 3 3 5 1 0];
tspan=[0 120];
[t,x]=ode45(@seis2,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1), t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),t,x(:,5),t,x(:,6))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontzise', 10), ylabel('S1(t)', 'Fontzise', 10)

```

Lampiran 6. Sintaks program Matlab untuk Gambar 19, 20, dan 21

FILE: seis4.m

```
function xprime=seis4(t,x);
A=1;
b=0.2;
beta=0.1;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
alpha=0.9;
gamma=1;
dx1dt=A-beta*x(1)*x(3)-b*x(1)+d*x(3)-alpha*x(1)+alpha*x(4)-
gamma*x(4)*x(6);
dx2dt=beta*x(1)*x(3)-b*x(2)-c*x(2)-alpha*x(2)+alpha*x(5)+gamma*x(4)*x(6);
dx3dt=c*x(2)-d*x(3)-e*x(3)-alpha*x(3)+alpha*x(6);
dx4dt=A-beta*x(4)*x(6)-b*x(4)+d*x(6)-alpha*x(4)+alpha*x(1)-
gamma*x(1)*x(3);
dx5dt=beta*x(4)*x(6)-b*x(5)-c*x(5)-alpha*x(5)+alpha*x(2)+gamma*x(1)*x(3);
dx6dt=c*x(5)-d*x(6)-e*x(6)-alpha*x(6)+alpha*x(3);
xprime=[dx1dt;dx2dt;dx3dt;dx4dt;dx5dt;dx6dt];
```

FILE: plot4.m

```
x0=[5 3 3 5 0 0];
tspan=[0 50];
[t,x]=ode45(@seis4,tspan,x0);
figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),t,x(:,5),t,x(:,6))
title('Simulasi Numerik');
xlabel('t (hari)', 'Fontzise', 10), ylabel('S1(t)', 'Fontzise', 10)
```

Lampiran 7. Sintaks program Matlab untuk Gambar 22 dan 23

FILE: delay.m

```
function sol=delay
```

```
lag=5 (bisa diganti dengan nilai lain)
sol=dde23(@delay1f,lag,@delay1h,[0,700]);
figure(1)
plot(sol.x,sol.y);
title('beta=0.1');
xlabel('t (hari)');
ylabel('S(t)');
```

```
function yp=delay1f(t,y,Z)
```

```
A=1;
b=0.2;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
beta=0.1;
alpha=0.9;
%r0=(sigma*beta*lambda)/(mu*(sigma+mu+xi)*(gamma+mu+eta))
%TK1=lambda/(mu*r0)
```

```
ylag=Z(:,1);
```

```
yp=[A-b*y(1)-beta*y(1)*y(3)+d*y(3)-alpha*y(1)+alpha*ylag(4);
    beta*y(1)*y(3)-(b+c)*y(2)-alpha*y(2)+alpha*ylag(5);
    c*y(2)-d*y(3)-e*y(3);
    A-b*y(4)-beta*y(4)*y(6)+d*y(6)-alpha*y(4)+alpha*ylag(1);
    beta*y(4)*y(6)-(b+c)*y(5)-alpha*y(5)+alpha*ylag(2);
    c*y(5)-d*y(6)-e*y(6)];
```

```
function y=delay1h(t)
```

```
y=[5 3 3 5 0 0];
```

Lampiran 8. Sintaks program Matlab untuk Gambar 24 dan 25

FILE: delay.m

```
function sol=delay
```

```
lag=5 (bisa diganti dengan nilai lain)
sol=dde23(@delay1f,lag,@delay1h,[0,700]);
figure(1)
plot(sol.x,sol.y);
title('beta=1');
xlabel('t (hari)');
ylabel('S(t)');
```

```
function yp=delay1f(t,y,Z)
```

```
A=1;
b=0.2;
c=0.3;
d=0.0002;
e=0.4;
beta=1;
alpha=0.9;
%r0=(sigma*beta*lambda)/(mu*(sigma+mu+xi)*(gamma+mu+eta))
%TK1=lambda/(mu*r0)
```

```
ylag=Z(:,1);
```

```
yp=[A-b*y(1)-beta*y(1)*y(3)+d*y(3)-alpha*y(1)+alpha*ylag(4);
    beta*y(1)*y(3)-(b+c)*y(2)-alpha*y(2)+alpha*ylag(5);
    c*y(2)-d*y(3)-e*y(3);
    A-b*y(4)-beta*y(4)*y(6)+d*y(6)-alpha*y(4)+alpha*ylag(1);
    beta*y(4)*y(6)-(b+c)*y(5)-alpha*y(5)+alpha*ylag(2);
    c*y(5)-d*y(6)-e*y(6)];
```

```
function y=delay1h(t)
```

```
y=[5 3 3 5 0 0];
```