PEMANFAATAN PUSAT DAN BASIS GRAF DALAM MENGOPTIMALKAN PEMASANGAN SENSOR KEBAKARAN

SKRIPSI

WA ODE MASITAROH SALEHA

H011181009

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

PEMANFAATAN PUSAT DAN BASIS GRAF DALAM MENGOPTIMALKAN PEMASANGAN SENSOR KEBAKARAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Progra Studi Matematika Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

WA ODE MASITAROH SALEHA
H011181009

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR
SEPTEMBER 2022

LEMBAR PENGESAHAN

PEMANFAATAN PUSAT DAN BASIS GRAF DALAM MENGOPTIMALKAN PEMASANGAN SENSOR KEBAKARAN

Disusun dan diajukan oleh :

WA ODE MASITAROH SALEHA

H011181009

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 30 September 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Hasmawati, M. Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Ketua Program Studi Matematika,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Wa Ode Masitaroh Saleha
NIM	: H011181009
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 30 September 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

356F3AKX060498950

Wa Ode Masitaroh Saleha
NIM. H011181009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, Tuhan Yang Maha Esa, atas limpahan karunia, rahmat, nikmat serta hidayah yang tak pernah berhenti mengalir dari-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya.

Penulisan skripsi yang berjudul **"Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran"** disusun sebagai syarat bagi penulis dalam memperoleh gelar Sarjana Sains pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis telah banyak mendapat petunjuk dan bimbingan dari berbagai pihak, utamanya kepada Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang telah dengan sabar di tengah berbagai kesibukan dan prioritasnya meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran serta memberikan motivasi kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini, secara ikhlas kepada beliau berdua penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya;

1. Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan Dr. Eng. Amiruddin, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si, selaku Ketua Departemen Matematika terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
3. Ibu Jusmawati Massalasse, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu dosen pada FMIPA UNHAS umumnya dan Prodi Matematika pada khususnya yang telah mendidik, mengajarkan, membimbing dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.

5. Seluruh Staf Administrasi di lingkungan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang banyak membantu selama proses perkuliahan dan berbagai persuratan untuk skripsi ini.
6. Kedua orang tua penulis Bapak La Ode Taslim dan Ibu Ade Irma yang senantiasa mendoakan, memberikan motivasi, nasihat serta memberikan bantuan dukungan baik secara material dan moral.
7. Kedua adikku Ami dan Ama serta seluruh keluarga besarku yang selalu memberikan doa dan semangat kepada penulis.
8. Terima kasih kepada saudari Anggreni Putri Arifin, Rizky Mauliddiyah, Saskia Nurul Jannah, Nur Hakiki, Haspika, Itsnaini Nur, S.Si, Nur Hafika Rafiudin, S.Si, Andi Tenri Ajeng Nur, S.Si, Sitti Rahma, S.Si dan Ajrana, S.Si yang telah memberikan banyak dukungan dengan cara mereka kepada penulis.
9. Segenap sahabat dan rekan-rekan mahasiswa Prodi Matematika Universitas Hasanuddin khususnya angkatan 2018, terima kasih atas kebersamaan, suka dan duka yang telah diberikan kepada penulis.
10. Warga Himatika FMIPA Unhas khususnya Integral 2018, terima kasih atas ilmu dan pengalaman yang telah diberikan kepada penulis baik melalui pengkaderan maupun kegiatan kampus lainnya.
11. Keluarga di HMI Komisariat MIPA Unhas, terima kasih telah memberi pengalaman "Yakin Usaha Sampai (Yakusa)".
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 30 September 2022

Wa Ode Masitaroh Saleha

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Wa Ode Masitaroh Saleha
NIM	: H011181009
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin. Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran

Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini, saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 30 September 2022

Yang menyatakan,

Wa Ode Masitaroh Saleha

ABSTRAK

Kebakaran dapat terjadi di mana saja, baik itu di perumahan, gedung perkantoran atau di tempat umum. Keterlambatan informasi yang diperoleh petugas pemadam kebakaran atau pemilik rumah menjadi salah satu penyebab parahnya kebakaran, sehingga perlu adanya alat atau metode yang dapat memberi informasi yang cepat dan akurat. Salah satu alat yang dapat memberi informasi dengan cepat dan akurat tentang kebakaran adalah sensor kebakaran. Sensor kebakaran secara simultan menerima sinyal dan mengirimkan sinyal yang dapat mendeteksi lokasi kebakaran dengan tepat serta memberikan peringatan tentang kemungkinan terjadinya kebakaran di suatu area tertentu. Namun, dalam banyak kasus, penentuan jumlah dan letak pemasangan sensor kebakaran masih kurang optimal. Untuk mengatasi masalah tersebut digunakan pendekatan graf dengan pemanfaatan pusat dan basis graf sebagai solusi dari permasalahan optimasi jumlah dan letak pemasangan sensor kebakaran. Studi kasus untuk penelitian ini dilakukan di Kota Baubau yang memiliki 43 kelurahan. Berdasarkan analisis, hanya empat kelurahan saja yakni, Kelurahan Kampoenaho, Kelurahan Kadolo, Kelurahan Kaobula dan Kelurahan Lipu yang harus dipasang sensor kebakaran di Kota Baubau.

Kata Kunci: Graf Dual, Himpunan Pembeda, Basis, Dimensi Metrik, Pusat Graf, Sensor Kebakaran.

Judul	: Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran
Nama	: Wa Ode Masitaroh Saleha
NIM	: H011181009
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

A fire can happen anywhere, whether it's in a home, an office building or a public space. The delay in information being obtained by firefighters or homeowners is one of the causes to the severity of fires, so a tool or method that can provide fast and accurate information is required. One of the tools that can provide information about fire quickly and accurately is a fire sensor. The fire sensor simultaneously receives and sends a signal that can detect the exact location of the fire as well as provide a warning about the possibility of a fire in a specific area. However, in many cases, it is less than optimum for determining the number and location of fire sensor installations. To solve this problem, a graph approach is used, with the usage of the graph's center and basis as a solution to the problem of optimizing the number and location of fire sensor installations. The case study for this research was conducted in the city of Baubau, which has 43 urban villages. According to the analysis, only four urban villages, namely Kampoenaho Urban Village, Kadolo Urban Village, Kaobula Urban Village and Lipu Urban Village should have fire sensors installed in Baubau City.

Keywords: *Dual Graph, Resolving Set, Basis, Metric Dimension, Center Graph, Fire Sensor.*

Title : *Utilization of Graph Center and Basis in Optimizing Fire Sensor Installation*

Name : Wa Ode Masitaroh Saleha

Student ID : H011181009

Study Program : *Math*

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan	Pemakaian Petama Kali pada Halaman
$d(v,w)$	Jarak antara titik v dan w	1
$dim(G)$	Dimensi metrik graf G	1
$V(G)$	Himpunan titik graf G	7
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	7
$p(G)$	Orde graf G	8
$q(G)$	Ukuran graf G	8
$\| \;\; \|$	Kardinalitas	8
$H \subseteq G$	H subgraf dari G	8
$d(v)$	Derajat titik v	9
$\delta(G)$	Derajat minimum di G	9
$\Delta(G)$	Derajat maksimum di G	9
W_k	$Walk$ (jalan)	9
$H \subset G$	H subgraf sejati dari G	12
P_n	Graf lintasan	14
K_n	Graf lengkap	14
C_n	Graf siklus	14
$e(v)$	Eksentrisitas titik v	16
$r(G)$	Jari-jari graf G	17
$diam(G)$	Diameter graf G	17
P	Pusat graf	17
$r(v\|W)$	Representasi titik v terhadap himpunan W	18

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf bermula dari masalah jembatan Konigsberg. Leonhard Euler, seorang ahli matematika Swiss, memecahkan masalah ini untuk pertama kalinya pada tahun 1736. Euler mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, dalam sekali waktu. Euler memberikan menyelesaikan permasalahan tersebut ke dalam bentuk graf dengan empat daerah merepresentasikan titik dan tujuh jembatan merepresentasikan sisi.

Menurut Hasmawati (2020) dalam bukunya yang berjudul Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi. Penelitian tentang graf hingga saat ini terus berkembang pesat. Teori graf memiliki banyak topik penelitian yang menarik diantaranya yaitu bilangan kromatik, dimensi metrik, dimensi partisi, bilangan ramsey, pelabelan dan lain sebagainya.

Salah satu topik yang dapat dikembangkan dalam teori graf adalah dimensi metrik. Dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan Harary dan Melter pada tahun 1976. Slater menggunakan istilah *reference set* untuk menyatakan himpunan pembeda minimum graf G. Dia menyatakan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut *location number* graf G. Sementara itu, Harary dan Melter menggunakan istilah himpunan pembeda (*resolving set*) untuk mendeskripsikan konsep dimensi metrik seperti yang kita kenal sekarang (wahyudi, 2018).

Untuk menentukan dimensi metrik graf melibatkan konsep jarak antara dua titik pada suatu graf. Misalkan v dan w adalah titik-titik pada graf terhubung G, maka jarak antara titik v dan w pada graf G adalah panjang lintasan terpendek antara v dan w pada G, dinotasikan dengan $d(v, w)$. Konsep lainnya adalah koordinat dan himpunan pembeda (*resolving set*). Jika setiap koordinat titik di graf G terhadap himpunan W memiliki hasil yang berbeda maka W disebut himpunan pembeda. Himpunan pembeda dengan kardinalitas (jumlah anggota) minimum disebut himpunan pembeda minimum (*minimum resolving set*) atau basis dari G. Jadi, basis dalam graf adalah himpunan titik-titik yang dapat merepresentasikan titik-titik yang lain dalam suatu graf. Sedangkan, kardinalitas dari basis disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$.

Penelitian mengenai dimensi metrik masih terus dilakukan. Hal ini dibuktikan dengan banyaknya hasil penelitian tentangnya. Diantaranya penelitian oleh (Chartrand dkk., 2000) telah menentukan dimensi metrik dari graf lintasan, graf lengkap dan graf lingkaran. Utomo dan Dewi (2018) telah menentukan dimensi metrik dari graf $Amal(nK_m)$, dimana untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 4$ dimensi metriknya adalah $(m-2)n$. (Asmiati dkk., 2019) telah mendapatkan dimensi metrik hasil operasi tertentu pada graf petersen diperumum $(sP_{n,1})$ adalah $s+1$, untuk n ganjil dan $s+2$, untuk n genap. Adapula penelitian yang dilakukan oleh (Shulhany dkk., 2021) telah memperoleh dimensi metrik pada graf calendula $(Cl_{3,n})$ adalah 2, dengan $Cl_{3,n}$ adalah graf calendula berorde $3n-3$ dan $n \geq 3$. Selain itu, konsep dimensi metrik juga dapat diterapkan pada permasalahan di dunia nyata. Salah satunya pada pemasangan sensor kebakaran.

Sensor kebakaran adalah salah satu alat penting untuk menjaga keamanan tempat tinggal. Sensor kebakaran dirancang untuk mendeteksi lokasi kebakaran dan memperingatkan orang tentang kemungkinan terjadinya kebakaran di area jangkauan. Sehingga, dapat mengambil tindakan untuk melindungi diri atau mencegah penyebaran api. Saat ini dikembangkan sensor kebakaran yang dapat memberikan sinyal berupa lokasi sumber kebakaran kepada operator atau petugas. Hal tersebut tentunya dapat mempermudah mengurangi laju penyebaran api.

Penelitian yang dilakukan oleh Suhud Wahyudi (2018), menggunakan konsep dimensi metrik untuk meminimalkan pemasangan sensor kebakaran sebuah gedung yang memiliki 12 ruangan. Dari hasil analisa yang dilakukan pada penelitian tersebut, sensor kebakaran yang harus dipasang pada gedung hanya di tiga ruangan saja.

Selain pada sebuah gedung, pemasangan sensor kebakaran sangat baik dilakukan pada sebuah kota. Di kota rawan terjadi kebakaran dan terkadang antisipasi dari petugas pemadam kebakaran terlambat. Namun, sebelum memutuskan berapa banyak sensor kebakaran yang akan dipasang, ada beberapa hal yang perlu dipertimbangkan. Pemasangan sensor yang terlalu banyak akan memakan biaya yang cukup besar, sedangkan pemasangan sensor kebakaran terlalu sedikit dapat menyebabkan kesulitan dalam mendeteksi sumber api. Untuk itu, optimalisasi dalam penentuan banyaknya sensor kebakaran pada suatu kota perlu dilakukan. Penentuan banyaknya sensor kebakaran yang perlu dipasang pada suatu kota dapat dilakukan dengan mengaplikasikan dimensi metrik. Dimensi metrik dari graf terhubung dinyatakan sebagai banyaknya sensor kebakaran yang diperlukan pada suatu kota.

Pemasangan sensor kebakaran akan memberikan efektivitas yang maksimal jika diletakkan di tempat yang tepat. Oleh karena itu, sensor kebakaran harus diletakkan di area-area yang strategis. Salah satu cara untuk menentukan area penempatan sensor kebakaran yang strategis yaitu dengan memanfaatkan pusat dan basis suatu graf terhubung. Dengan memilih salah satu dari basis, dapat ditentukan area mana saja yang dapat dipasang sensor kebakaran untuk mendeteksi asal adanya api. Pencarian basis pada suatu graf memberikan representasi yang berbeda untuk setiap area yang ada. Sehingga, representasi tersebut memberikan lokasi yang identik untuk setiap area, dengan begitu jika terjadi kebakaran sumber api dapat langsung terdeteksi. Sedangkan, titik pusat merupakan titik yang paling representatif dibanding titik-titik yang lain, sehingga area yang dinyatakan oleh titik tersebut adalah area yang paling representatif ditinjau dari segi jarak. Pencarian titik pusat graf suatu wilayah bertujuan untuk memberikan rute terpendek antara suatu area ke setiap area lainnya. Penentuan rute terpendek ini diperlukan untuk mengoptimalkan waktu dan biaya yang dikeluarkan untuk menempuh jarak dari suatu sumber ke tujuan. Oleh karena itu, di sekitar pemasangan sensor kebakaran juga ditempatkan mobil pemadam kebakaran yakni tempat sensor kebakaran tersebut merupakan area yang dinyatakan oleh titik pada basis yang sekaligus merupakan titik pusat dari graf.

Penentuan minimal sensor dan penempatan sensor kebakaran pada suatu kota merupakan masalah yang menarik untuk dikaji karena keberhasilan dari penelitian ini dapat digunakan untuk meminimalkan biaya. Selain itu, dapat mendeteksi dengan cepat kelurahan yang menjadi sumber kebakaran. Oleh karena itu, penulis akan melakukan penelitian dengan mengambil judul **"Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran".**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara modelkan peta suatu wilayah ke dalam bentuk graf terhubung?
2. Bagaimana bentuk pusat suatu graf terhubung?
3. Bagaimana bentuk basis yang memuat pusat suatu graf terhubung?
4. Bagaimana pemanfaatan pusat dan basis graf terhubung dalam mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Titik menyatakan kelurahan.
2. Dua titik dikatakan bertetangga jika dua kelurahan yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut berbatasan dan dihubungkan oleh jalan.
3. Mobil pemadam kebakaran diasumsikan berada pada area yang termuat dalam basis wilayah Kota Baubau yang memuat pusat graf.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memodelkan peta suatu wilayah ke dalam bentuk graf terhubung.
2. Menentukan pusat suatu graf terhubung.
3. Menentukan basis yang memuat pusat suatu graf terhubung.
4. Memanfaatkan pusat dan basis graf terhubung dalam mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah khazanah keilmuan teori graf, terkhusus pada kajian dimensi metrik graf dan dapat dijadikan rujukan bagi peneliti masa depan yang ingin mengeksplorasi pemanfaatan pusat dan basis graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dipaparkan beberapa materi yang dijadikan landasan teori agar dapat memahami pemanfaatan pusat dan basis graf dalam mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran. Materi yang akan dibahas meliputi himpunan, himpunan terbatas, konsep dasar graf, dimensi metrik graf, pusat graf dan pemodelan graf suatu wilayah.

Dalam pemodelan graf menggunakan istilah wilayah dan area. Oleh karena itu, disajikan pengertian wilayah dan area. Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), wilayah adalah daerah (kekuasaan, pemerintahan, pengawasan dan sebagainya). Arti lainnya dari wilayah adalah lingkungan daerah (provinsi, kabupaten, kecamatan). Sedangkan, area adalah wilayah geografis yang digunakan untuk keperluan khusus. Dalam pemodelan ini yang menjadi wilayah adalah suatu kota dan area di mana sensor kebakaran dipasang adalah kelurahan.

Pengertian dari graf sendiri menggunakan konsep himpunan, karena itu sebelum memberikan pengertian graf, terlebih dahulu disajikan pengertian himpunan. Adapun definisi, notasi dan istilah dalam penulisan skripsi ini pada umumnya merujuk pada buku Prof. Hasmawati, M.Si. tahun 2020 yang berjudul "Pengantar dan Jenis-jenis Graf".

2.1 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang keanggotaannya dapat didefinisikan dengan jelas. Misalkan jika objek yang dimaksud adalah buku, maka disebut dengan himpunan buku. Suatu himpunan disebut terbatas apabila memiliki batas atas dan batas bawah.

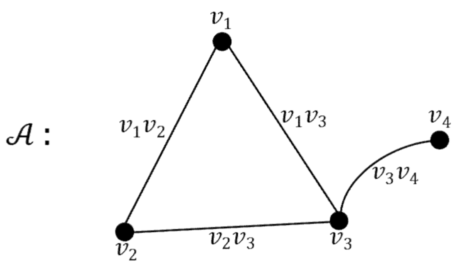
Definisi 2.1.1 *Misalkan* $S \subset N$ *dan* S *merupakan himpunan terbatas. Misalkan pula* a *batas atas* S *dan* b *batas bawah* S, a *disebut batas atas terkecil (maksimum) dari* S *jika untuk sebarang batas atas* a', *maka* $a \leq a'$. *kemudian,* b *disebut batas bawah terbesar (minimum) dari* S *jika untuk sebarang batas bawah* b', *maka* $b' \leq b$.

2.2 Dasar-Dasar Graf

Definisi 2.2.1 *Graf* G *adalah pasangan* $\big(V(G), E(G)\big)$*, dimana* $V(G)$ *adalah himpunan berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan* $E(G)$ *adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota* $V(G)$ *yang disebut sisi (edge).*

Berdasarkan Definisi 2.2.1, $V(G)$ disebut himpunan titik (*vertex set*) dan $E(G)$ disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai nokhta (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk atau garis (*line*).

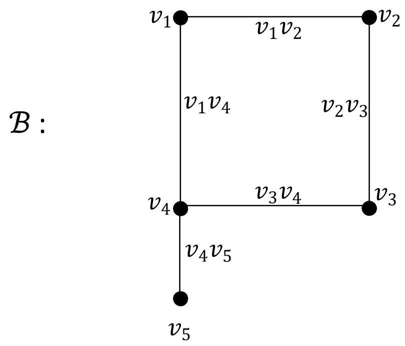
Contoh 2.2.1 Graf $\mathcal{A}$ yang diperlihatkan pada Gambar 2.2.1 terdiri atas himpunan titik $V(\mathcal{A}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(\mathcal{A}) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_4\}$. Bisa dilihat bahwa setiap anggota dari $E(\mathcal{A})$ merupakan pasangan-pasangan yang berbeda dan tak terurut artinya $(v_1v_2) = (v_2v_1)$ dan $V(\mathcal{A})$ tidak kosong. Maka $\mathcal{A}$ merupakan graf.



Gambar 2.2.1 Graf $\mathcal{A}$

Definisi 2.2.2 *Dua buah titik* v *dan* w *dari suatu graf* G *dikatakan bertetangga (adjacent) jika ada sisi* vw *yang menghubungkan keduanya. Sisi yang menghubungkan titik* v *dan* w *kemudian dikatakan terkait (incident) dengan kedua titik tersebut. Begitu pula, dua sisi yang berbeda* e *dan* f *dikatakan bertetangga jika memiliki satu titik yang sama.*

Contoh 2.2.2 Diberikan graf $\mathcal{B}$ pada Gambar 2.2.2. Titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_4. Sisi v_1v_2 dan v_1v_4 dikatakan terkait dengan titik v_1.



Gambar 2.2.2 Graf $\mathcal{B}$

Definisi 2.2.3 *Orde (order) dari graf* G *adalah banyaknya anggota dari* $V(G)$ *atau banyaknya titik pada* G*, dinyatakan dengan simbol* $p(G)$.

Contoh 2.2.3 Pada Gambar 2.2.2 orde dari graf $\mathcal{B}$ adalah 5.

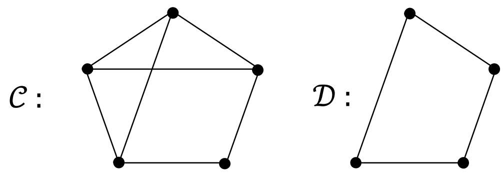
Definisi 2.2.4 *Ukuran (size) dari Graf* G *adalah banyaknya anggota dari* $E(G)$ *atau banyaknya sisi pada* G*, dinyatakan dengan simbol* $q(G)$.

Contoh 2.2.4 Ukuran dari Graf $\mathcal{B}$ yang diperlihatkan pada Gambar 2.2.2 adalah 5.

Definisi 2.2.5 *Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kardinalitas biasanya dinyatakan oleh simbol "| |". Jadi, apabila* $p(G)$ *adalah orde dari* G *dan* $q(G)$ *adalah ukurannya, maka* $p(G) = |V(G)|$ *dan* $q(G) = |E(G)|$.

Definisi 2.2.6 *Misalkan dua graf* $H = \big(V(H), E(H)\big)$ *dan* $G = \big(V(G), E(G)\big)$*. Graf* H *disebut subgraf dari* G*, jika* $V(H) \subseteq {}'V(G)$ *dan* $E(H) \subseteq {}'E(G)$*, dinotasikan* $H \subseteq G$.

Contoh 2.2.5 Diberikan graf $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ pada Gambar 2.2.3, graf $\mathcal{D}$ adalah subgraf dari graf $\mathcal{C}$.



Gambar 2.2.3 Graf $\mathcal{D}$ adalah subgraf dari $\mathcal{C}$

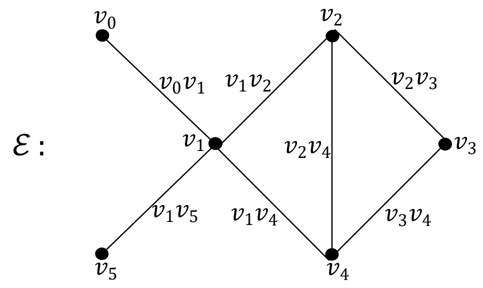
Definisi 2.2.7 *Derajat (degree) suatu titik* v *dalam graf* G *adalah banyaknya sisi* $x \in E(G)$ *yang terkait dengan titik* v. *Derajat titik* v *dilambangkan dengan* $d(v)$.

Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = max\{d(v): v \in V(G)\}$. Suatu graf di sebut reguler jika $\delta(G) = \Delta(G)$.

Contoh 2.2.6 Titik v_4 pada graf $\mathcal{B}$ Gambar 2.2.2 memiliki 3 sisi yang terkait dengannya yaitu sisi v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5. Sehingga, $d(v_4) = 3$.

Definisi 2.2.8 *Misalkan* G *adalah graf dengan himpunan titik* $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n\}$, *dan himpunan sisi* $E(G) = \{e_i: e_i = v_iv_j\ untuk\ suatu\ i, j\}$. *Jalan (walk)* W_k *pada graf* G *dengan panjang* k *adalah barisan titik dan sisi :* $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$ *dengan* $e_i = v_iv_{i+1}, i = 0,1,2, \dots, k-1$. *Jadi, panjang suatu jalan ditentukan oleh jumlah sisi yang dimilikinya.*

Contoh 2.2.7 Diberikan graf $\mathcal{E}$ pada Gambar 2.2.4 dengan $V(\mathcal{E}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(\mathcal{E}) = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_1v_5\}$.



Gambar 2.2.4 Graf $\mathcal{E}$

Salah satu jalan pada graf $\mathcal{E}$ adalah W: v_0,v_0v_1,v_1,v_1v_2,v_2,v_2v_3,v_3,v_3v_4, v_4,v_1v_4,v_1,v_1v_2,v_2,v_2v_4,v_4,v_1v_4,v_1,v_1v_5,v_5. Panjang jalan W adalah 9. Jadi, pada jalan bisa terjadi pengulangan sisi atau pengulangan titik.

Definisi 2.2.9 *Jalan dengan titik awal dan titik akhirnya berbeda* $(v \neq w)$ *disebut jalan terbuka (open walk). Jalan dengan titik awal dan titik akhirnya sama* $(v = w)$ *disebut jalan tertutup (closed walk). Sedangkan, jalan dengan panjang* 0 *disebut sebagai jalan trivial (trivial walk).*

Contoh 2.2.8 Berikut jalan terbuka dan jalan tertutup yang dapat dibentuk dari graf $\mathcal{E}$ pada Gambar 2.2.4.

1. Jalan terbuka pada $\mathcal{E}$ adalah $W = v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4$ adalah jalan terbuka.
2. Jalan tertutup pada $\mathcal{E}$ adalah $W = v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_1v_4, v_1$ adalah jalan tertutup.

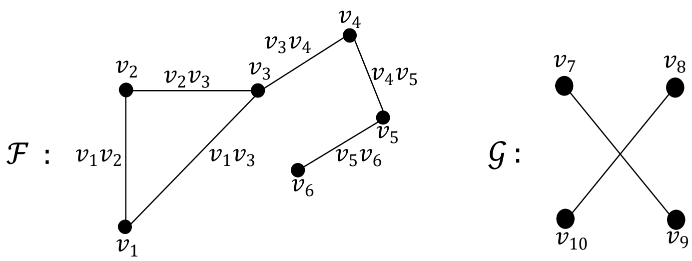
Definisi 2.2.10 *Jalur (trail) adalah jalan yang tidak terdapat pengulangan sisi. Sedangkan, lintasan (path) adalah jalan yang tidak terdapat pengulangan titik. Lintasan dari titik* v *ke* w *dinotasikan dengan lintasan* $v - w$.

Contoh 2.2.9 Pada graf $\mathcal{E}$ pada Gambar 2.2.4 dapat dibentuk jalur dan lintasan.

1. Jalur pada $\mathcal{E}$ adalah $W = v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_1v_4, v_1, v_1v_5, v_5$.
2. Lintasan pada $\mathcal{E}$ adalah $W = v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_4, v_4, v_2v_4, v_2, v_2v_3, v_3$.

Definisi 2.2.11 *Misalkan G adalah graf. Graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap dua titik u dan v di G terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua titik tersebut, sebaliknya graf G disebut graf tidak terhubung jika untuk setiap dua titik u dan v di G tidak terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Contoh 2.2.10 Diberikan graf $\mathcal{F}$ dan graf $\mathcal{G}$ pada Gambar 2.2.5 dengan $V(\mathcal{F}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6,\}$ dan $V(\mathcal{G}) = \{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.



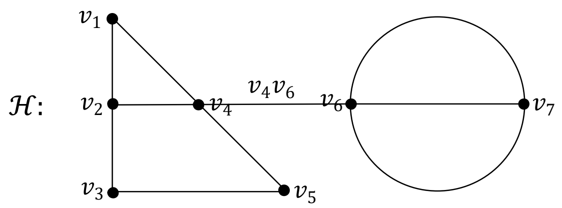
Gambar 2.2.5 (a) Graf Terhubung $\mathcal{F}$ (b) Graf Tak Terhubung $\mathcal{G}$

Graf $\mathcal{F}$ pada Gambar 2.2.5 dikatakan graf terhubung karena untuk setiap dua titik pada graf $\mathcal{F}$ terdapat jalan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan, graf $\mathcal{G}$ pada Gambar 2.2.5 merupakan graf tak terhubung karena terdapat titik di $\mathcal{G}$ yaitu v_7 dan v_8 yang tidak terhubung oleh jalan manapun.

Definisi 2.2.12 *Misalkan v adalah titik di G. Graf $G - v$ adalah subgraf dari G yaitu graf dengan $V(G - v) = V(G)/\{v\}$ dan himpunan sisi $E(G - v) = E(G)/\{uv: u \in V(G)\}$. Titik u disebut titik potong di G apabila $G - u$*

merupakan graf tak terhubung dan sisi e *disebut jembatan jika* $G - e$ *merupakan graf tak terhubung.*

Contoh 2.2.11 Pada graf $\mathcal{H}$ Gambar 2.2.6 berikut, titik v_4 dan v_6 merupakan titik potong. Sedangkan sisi v_4v_6 merupakan jembatan pada graf $\mathcal{H}$.



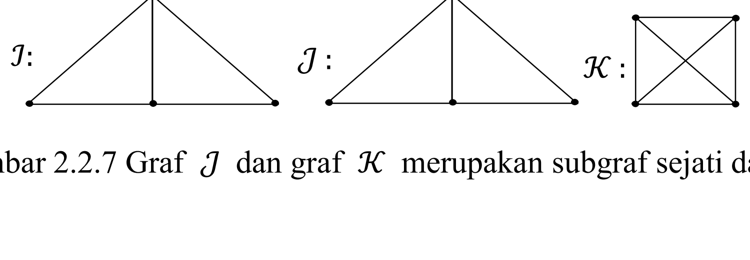
Gambar 2.2.6 Graf $\mathcal{H}$

Definisi 2.2.13 *Graf kompak adalah graf terhubung nontrivial yang tidak memuat titik potong.*

Contoh graf yang tidak memuat titik potong yaitu graf siklus dan graf lengkap.

Definisi 2.2.14 *Misalkan* G *dan* H *adalah graf. Jika* $H \subset G$, *maka* H *disebut subgraf sejati dari graf* G.

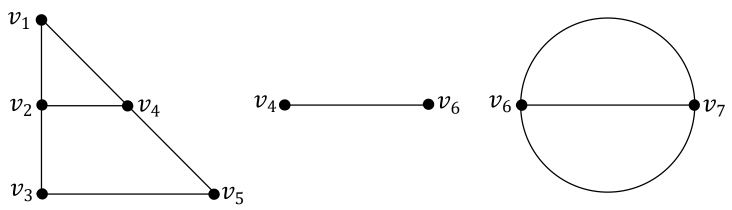
Contoh 2.2.12 Diberikan graf pada Gambar 2.2.7. Graf $\mathcal{J}$ dan graf $\mathcal{K}$ adalah subgraf sejati dari $\mathcal{I}$. Graf $\mathcal{J}$ dan graf $\mathcal{K}$ adalah subgraf sejati yang tidak memuat titik potong dan juga tidak memuat jembatan.



Gambar 2.2.7 Graf $\mathcal{J}$ dan graf $\mathcal{K}$ merupakan subgraf sejati dari graf $\mathcal{I}$

Definisi 2.2.15 *Misalkan H adalah subgraf kompak dari graf G. Graf H disebut blok dari G. Jika $H \nsubseteq H'$ untuk setiap subgraf kompak H' di G.*

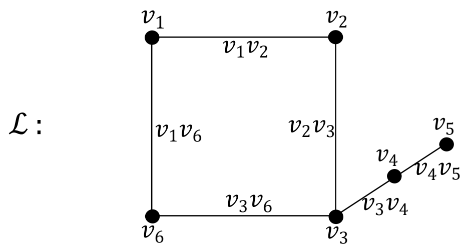
Contoh 2.2.13 Subgraf-subgraf pada Gambar 2.2.8 berikut merupakan blok-blok graf $\mathcal{H}$ pada Gambar 2.2.6.



Gambar 2.2.8 Subgraf-subgraf yang Merupakan Blok

Definisi 2.2.16 *Misalkan v dan w adalah titik pada graf terhubung G didefinisikan jarak antara titik v ke w sebagai panjang lintasan terpendek $v - w$ dari G yang dinotasikan dengan $d(v, w)$.*

Contoh 2.2.14 Diberikan graf $\mathcal{L}$ pada Gambar 2.2.9 dengan $V(\mathcal{L}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(\mathcal{L}) = \{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_5\}$.

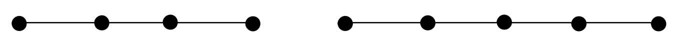


Gambar 2.2.9 Graf $\mathcal{L}$

Semua jarak dari setiap pasangan dua titik yang berbeda di graf $\mathcal{L}$, yaitu $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 3$, $d(v_1, v_5) = 4$, $d(v_1, v_6) = 1$, $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_2, v_5) = 3$, $d(v_2, v_6) = 2$, $d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_3, v_6) = 1$, $d(v_4, v_5) = 1$, $d(v_4, v_6) = 2$, $d(v_5, v_6) = 3$.

Definisi 2.2.17 *Graf lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dan dinotasikan dengan* P_n *apabila berorde* n.

Contoh 2.2.15 Graf pada gambar 2.2.10 adalah graf siklus P_4 dan P_5.

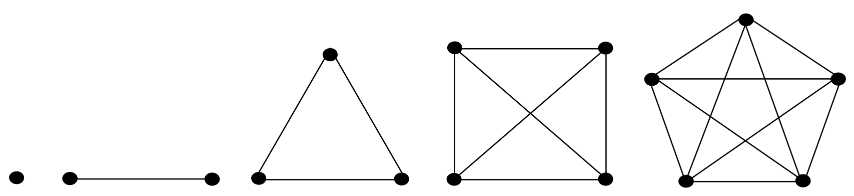


P_4 P_5

Gambar 2.2.10 Graf Lintasan

Definisi 2.1.18 *Misalkan* G *adalah graf dengan himpunan titik* $V(G)$ *dan himpunan sisi* $E(G)$. *Graf* G *disebut graf lengkap apabila* $\forall u, v \in V(G), uv \in E(G)$. *Graf lengkap yang memiliki* n *titik dinotasikan* K_n.

Contoh 2.2.16 Gambar 2.2.11 berikut adalah graf siklus K_1, K_2, K_3, K_4 dan K_5.

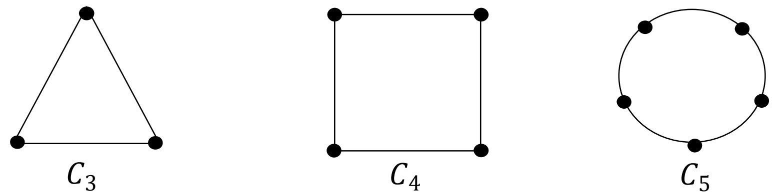


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Gambar 2.2.11 Graf Lengkap

Definisi 2.2.19 *Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat* 2. *Graf siklus dinotasikan dengan* C_n, n *adalah banyaknya titik pada graf tersebut.*

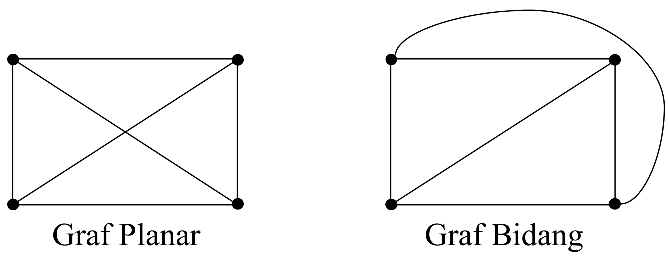
Contoh 2.2.17 Pada gambar 2.2.12 berikut adalah graf siklus C_3, C_4 dan C_5.



Gambar 2.2.12 Graf Siklus

Definisi 2.2.20 *Suatu graf* G *disebut graf planar jika graf tersebut dapat digambar kembali pada bidang sedemikian sehingga tidak terdapat sisi yang berpotongan.*

Contoh 2.2.18 Graf lengkap K_4 merupakan salah satu contoh graf planar. Graf K_4 pada Gambar 2.2.13 dapat digambarkan kembali sehingga tidak ada sisi yang berpotongan.



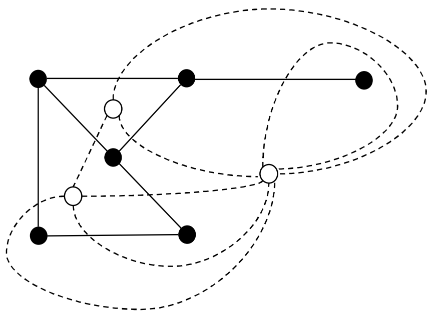
Gambar 2.2.13 (a) Graf planar dan (b) Graf Bidang

Graf bidang merupakan representasi dari graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan. Sisi-sisi yang terdapat pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah. Terdapat satu wilayah tak terbatas pada setiap graf bidang yang disebut wilayah luar.

Definisi 2.2.21 *Diberikan graf planar* G *yang direpresentasikan sebagai graf bidang, dari graf tersebut kita dapat membuat graf lain yaitu* G^* *yang disebut (geometric) dual dari graf planar dengan dua tahap berikut :*

1. *Pada setiap wilayah* f *di* G*, pilih sebuah titik* v^* *yang merupakan titik dari* G^*.
2. *Untuk setiap sisi* e *dari* G*, gambarkan sebuah sisi* e^* *(yang merupakan sisi dari* G^**), yang memotong sisi* e *(tetapi tidak memotong sisi lain pada* G*), dan menghubungkan titik-titik* v^* *di wilayah* f *yang terletak diantara* e.

Contoh 2.2.19 Gambar 2.2.14 berikut adalah contoh pembentukkan graf dual.



Gambar 2.2.14 Pembentukan Graf Dual G^* dari Graf G

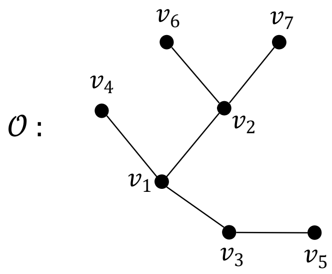
Pada Gambar 2.2.14, garis putus-putus adalah sisi dari graf G^*.

2.3 Pusat (*Center*)

Pengertian pusat adalah titik yang mempunyai karakter sendiri yang bisa diketahui berdasarkan konsep jarak dalam teori graf. Dalam menentukan pusat suatu graf, terlebih dahulu dicari eksentrisitas (*eccentricity*) suatu titik. Pengertian eksentrisitas seperti berikut.

Definisi 2.3.1 *Misalkan* G *adalah graf terhubung dan* $v \in V(G)$. *Maka eksentrisitas titik* v *ditulis* $e(v)$ *yakni* $e(v) = maks\{d(u,v): u \in V(G)\}$.

Contoh 2.3.1 Diberikan sebuah graf seperti pada Gambar 2.3.1 berikut.



Gambar 2.3.1 Graf $\mathcal{O}$

Eksentrisitas setiap titik graf $\mathcal{O}$ pada Gambar 2.3.1 adalah sebagai berikut:

$$e(v_1) = maks\begin{Bmatrix} d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, v_4), \\ d(v_1, v_5), d(v_1, v_6), d(v_1, v_7) \end{Bmatrix} = 2$$

$$e(v_2) = maks\begin{Bmatrix} d(v_2, v_1), d(v_2, v_3), d(v_2, v_4), \\ d(v_2, v_5), d(v_2, v_6), d(v_2, v_7) \end{Bmatrix} = 3$$

$$e(v_3) = maks\begin{Bmatrix} d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_4), \\ d(v_3, v_5), d(v_3, v_6), d(v_3, v_7) \end{Bmatrix} = 3$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$e(v_4) = 3,\ e(v_5) = 4,\ e(v_6) = 4,\ e(v_7) = 4.$

Definisi 2.3.2 *Misalkan G adalah graf terhubung dan $v \in V(G)$. Maka :*

1. *Jari-jari graf G ditulis $r(G)$ yakni $r(G) = min\{e(v): v \in V(G)\}$,*
2. *Diameter graf G ditulis $diam(G)$ yakni $diam(G) = maks\{e(v): v \in V(G)\}$,*
3. *Titik v disebut titik pusat (central vertex) jika $e(v) = r(G)$,*
4. *Himpunan P disebut pusat graf G jika $P = \{v: v\ titik\ pusat\}$.*

Contoh 2.3.2 Untuk graf pada Gambar 2.3.1, $r(\mathcal{O}) = 2$, $d(\mathcal{O}) = 4$, titik pusat $\mathcal{O}$ adalah titik v_1 dan pusat dari $\mathcal{O}$ adalah $P = \{v_1\}$.

2.4 Dimensi Metrik Graf

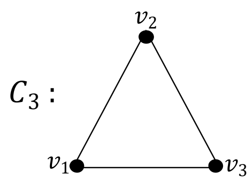
Berikut merupakan beberapa istilah yang berkaitan dengan dimensi metrik dari suatu graf. Serta diberikan pula definisi batas atas dan batas bawah dari suatu graf.

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf terhubung dan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$.

Definisi 2.4.1 *Representasi dari* v *terhadap* W *adalah k-vektor yaitu :*

$$r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k)\big).$$

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4.1 Graf C_3

Misalkan dipilih $W_1 = \{v_1\}$, maka representasi titik-titik pada graf C_3 adalah sebagai berikut :

$r(v_1|W_1) = \big(d(v_1, v_1)\big) = (0)$,

$r(v_2|W_1) = \big(d(v_2, v_1)\big) = (1)$,

$r(v_3|W_1) = \big(d(v_3, v_1)\big) = (1)$.

Definisi 2.4.2 *Himpunan* W *disebut himpunan pembeda (resolving set) dari* $V(G)$ *jika* $r(v|W)$ *untuk setiap titik* $v \in V(G)$ *berbeda.*

Contoh 2.4.2 Misalkan $W_2 = \{v_2, v_3\}$ adalah himpunan titik dari graf C_3 pada Gambar 2.4.1, representasi titik-titik di C_3 adalah sebagai berikut :

$r(v_1|W_2) = \big(d(v_1, v_2), d(v_1, v_3)\big) = (1,1)$,

$r(v_2|W_2) = (d(v_2, v_2), d(v_2, v_3)) = (0,1)$,
$r(v_3|W_2) = (d(v_3, v_2), d(v_3, v_3)) = (1,0)$.

Himpunan W_2 merupakan himpunan pembeda bagi graf C_3 karena representasi setiap titik di graf C_3 berbeda. Sedangkan, pada contoh 2.4.1 W_1 bukan merupakan himpunan pembeda karena $r(v_2|W_1) = r(v_3|W_1) = (1)$.

Definisi 2.4.3 *Himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Dimensi metrik dari G adalah kardinalitas dari basis G dan dinotasikan dengan $dim(G)$.*

Definisi 2.4.4 *Basis suatu wilayah adalah kumpulan area yakni area yang dinyatakan oleh titik-titik dalam basis graf.*

Contoh 2.4.3 Berikut adalah himpunan pembeda dan bukan himpunan pembeda dari graf C_3 pada Gambar 2.4.1.

Tabel 2.4.1. Himpunan Pembeda dan Bukan Himpunan Pembeda dari Graf C_3 pada Gambar 2.4.1

No.	W	$r(v\|W), \forall\ v \in V(C_3)$	Himpunan Pembeda/ Bukan Himpunan Pembeda
1.	$W_1 = \{v_1\}$	$r(v_1\|W_1) = (0)$ $r(v_2\|W_1) = (1)$ $r(v_3\|W_1) = (1)$	Bukan Himpunan Pembeda
2.	$W_2 = \{v_2\}$	$r(v_1\|W_2) = (1)$ $r(v_2\|W_2) = (0)$ $r(v_3\|W_2) = (1)$	Bukan Himpunan Pembeda
3.	$W_3 = \{v_3\}$	$r(v_1\|W_3) = (1)$ $r(v_2\|W_3) = (1)$ $r(v_3\|W_3) = (0)$	Bukan Himpunan Pembeda

No.	W	$r(v\|W), \forall\ v \in V(C_3)$	Himpunan Pembeda/ Bukan Himpunan Pembeda
4.	$W_4 = \{v_1, v_2\}$	$r(v_1\|W_4) = (0,1)$ $r(v_2\|W_4) = (1,0)$ $r(v_3\|W_4) = (1,1)$	Himpunan Pembeda
5.	$W_5 = \{v_1, v_3\}$	$r(v_1\|W_5) = (0,1)$ $r(v_2\|W_5) = (1,1)$ $r(v_3\|W_5) = (1,0)$	Himpunan Pembeda
6.	$W_6 = \{v_2, v_3\}$	$r(v_1\|W_6) = (1,1)$ $r(v_2\|W_6) = (0,1)$ $r(v_3\|W_6) = (1,0)$	Himpunan Pembeda
7.	$W_7 = \{v_1, v_2, v_3\}$	$r(v_1\|W_7) = (0,1,1)$ $r(v_2\|W_7) = (1,0,1)$ $r(v_3\|W_7) = (1,1,0)$	Himpunan Pembeda

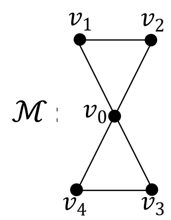
Dari proses perhitungan yang telah dilakukan pada Tabel 2.4.1, terdapat 4 himpunan pembeda yaitu $W_4 = \{v_1, v_2\}$, $W_5 = \{v_1, v_3\}$, $W_6 = \{v_2, v_3\}$, dan $W_7 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Kardinalitas minimum dari semua himpunan pembeda yang mungkin untuk graf C_3 pada Gambar 2.4.1 adalah 2 . Dengan demikian, himpunan pembeda dengan banyak anggota 2 adalah himpunan pembeda minimum atau basis dari C_3 . Jadi, dimensi metrik graf C_3 adalah 2 atau $dim(C_3) = 2$.

Teorema 2.4.1 *Graf G mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika $G = P_n$.* (Chartrand dkk., 2000).

Dalam penentuan batas atas dan batas bawah untuk graf terhubung G diperlukan sifat seperti yang disajikan pada definisi berikut.

Definisi 2.4.5 *Misalkan $u, v \in V(G)$. Titik u, v disebut titik setara terhadap titik w jika $d(u, w) = d(v, w)$.*

Contoh 2.4.4 Diberikan Graf $\mathcal{M}$ dengan $V(\mathcal{M}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(\mathcal{M}) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_2, v_3v_4\}$. Graf $\mathcal{M}$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.4.2 Graf $\mathcal{M}$

Pada Gambar 2.4.2 di atas, titik v_i dan titik v_j untuk $i, j = 1,2,3,4$ dan $i \neq j$ adalah titik setara terhadap titik v_0 sehingga $d(v_i, v_0) = d(v_j, v_0)$.

Lemma 2.4.1 *Setiap graf terhubung G mempunyai himpunan pembeda yang memuat titik pusat.*

Bukti. Misalkan W adalah himpunan pembeda dan v adalah titik pusat dengan $v \notin W$. Didefinisikan himpunan W' dengan $W' = W \cup \{v\}$. Karena W himpunan pembeda, maka $\forall a, b \in V(G),\ r(a|W) \neq r(b|W)$. Sehingga, $r(a|W') \neq r(b|W')$ $\forall a, b \in V(G)$. Akibatnya, W' adalah himpunan pembeda.

Contoh 2.4.5 Graf $\mathcal{M}$ pada Gambar 2.4.2 bukan merupakan graf lintasan maka berdasarkan Teorema 2.4.1 $dim(\mathcal{M}) \geq 2$. Sehingga, proses penelusuran basis pada graf $\mathcal{M}$ dimulai dari himpunan W dengan anggota 2 titik di $\mathcal{M}$. Dalam hal ini, terdapat 10 macam himpunan W.

Tabel 2.4.2. Himpunan Pembeda dan Bukan Himpunan Pembeda dari Graf $\mathcal{M}$ pada Gambar 2.4.2

No.	W	$r(v\|W), \forall\ v \in V(\mathcal{M})$		Himpunan Pembeda/ Bukan Himpunan Pembeda
1.	$W_1 = \{v_1, v_2\}$	$r(v_1\|W_1) = (0,1)$ $r(v_2\|W_1) = (1,0)$ $r(v_3\|W_1) = (2,2)$	$r(v_4\|W_1) = (2,1)$ $r(v_0\|W_1) = (1,1)$	Himpunan Pembeda
2.	$W_2 = \{v_1, v_3\}$	$r(v_1\|W_2) = (0,2)$ $r(v_2\|W_2) = (1,2)$ $r(v_3\|W_2) = (2,0)$	$r(v_4\|W_2) = (2,1)$ $r(v_0\|W_2) = (1,1)$	Himpunan Pembeda
3.	$W_3 = \{v_1, v_4\}$	$r(v_1\|W_3) = (0,2)$ $r(v_2\|W_3) = (1,1)$ $r(v_3\|W_3) = (2,1)$	$r(v_4\|W_3) = (2,0)$ $r(v_0\|W_3) = (1,1)$	Bukan Himpunan Pembeda
4.	$W_4 = \{v_1, v_5\}$	$r(v_1\|W_4) = (0,1)$ $r(v_2\|W_4) = (1,1)$ $r(v_3\|W_4) = (2,1)$	$r(v_4\|W_4) = (2,1)$ $r(v_0\|W_4) = (1,0)$	Bukan Himpunan Pembeda
5.	$W_5 = \{v_2, v_3\}$	$r(v_1\|W_5) = (1,2)$ $r(v_2\|W_5) = (0,2)$ $r(v_3\|W_5) = (2,0)$	$r(v_4\|W_5) = (1,1)$ $r(v_0\|W_5) = (1,1)$	Bukan Himpunan Pembeda
6.	$W_6 = \{v_2, v_4\}$	$r(v_1\|W_6) = (1,2)$ $r(v_2\|W_6) = (0,1)$ $r(v_3\|W_6) = (2,1)$	$r(v_4\|W_6) = (1,0)$ $r(v_0\|W_6) = (1,1)$	Himpunan Pembeda
7.	$W_7 = \{v_2, v_5\}$	$r(v_1\|W_7) = (1,1)$ $r(v_2\|W_7) = (0,1)$ $r(v_3\|W_7) = (2,1)$	$r(v_4\|W_7) = (1,1)$ $r(v_0\|W_7) = (1,0)$	Bukan Himpunan Pembeda
8.	$W_8 = \{v_3, v_4\}$	$r(v_1\|W_8) = (2,2)$ $r(v_2\|W_8) = (2,1)$ $r(v_3\|W_8) = (0,1)$	$r(v_4\|W_8) = (1,0)$ $r(v_0\|W_8) = (1,1)$	Himpunan Pembeda
9.	$W_9 = \{v_3, v_5\}$	$r(v_1\|W_9) = (2,1)$	$r(v_4\|W_9) = (1,1)$ $r(v_0\|W_9) = (1,0)$	Bukan

No.	W	$r(v\|W), \forall \ v \in V(\mathcal{M})$		Himpunan Pembeda/ Bukan Himpunan Pembeda
		$r(v_2\|W_9) = (2,1)$ $r(v_3\|W_9) = (0,1)$		Himpunan Pembeda
10.	$W_{10} = \{v_4, v_5\}$	$r(v_1\|W_{10}) = (2,1)$ $r(v_2\|W_{10}) = (1,1)$ $r(v_3\|W_{10}) = (1,1)$	$r(v_4\|W_{10}) = (0,1)$ $r(v_0\|W_{10}) = (1,0)$	Bukan Himpunan Pembeda
11.	$W_{11} = \{v_1, v_2, v_5\}$	$r(v_1\|W_{11}) = (0,1,1)$ $r(v_2\|W_{11}) = (1,0,1)$ $r(v_3\|W_{11}) = (2,2,1)$	$r(v_4\|W_{11}) = (2,1,1)$ $r(v_5\|W_{11}) = (1,1,0)$	Himpunan Pembeda

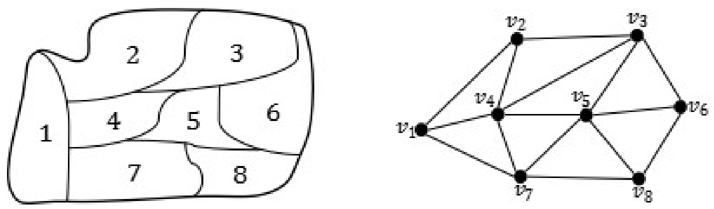
Dari penyelesaian pada Tabel 2.4.2, himpunan pembeda dengan banyak anggota 2 adalah himpunan pembeda minimum atau basis dari $\mathcal{M}$. Perhatikan bahwa basis pada graf $\mathcal{M}$ tidak memuat titik pusat. Namun, terdapat himpunan W_{11} dengan $W_{11} = W_1 \cup \{v_5\}$. Karena W_1 himpunan pembeda, maka $\forall v_i, v_j \in V(\mathcal{M})$, $r(v_i|W_1) \neq r(v_j|W_1)$ dengan $i,j = 1,2,3,4,5$ dan $i \neq j$. Sehingga, $r(v_i|W_{11}) \neq r(v_j|W_{11}) \, \forall v_i, v_j \in V(\mathcal{M})$. Akibatnya, W_{11} adalah himpunan pembeda.

2.5 Pemodelan Graf Suatu Wilayah

Pada sub bab ini dibahas mengenai pemodelan graf suatu wilayah dengan membuat peta kedalam bentuk graf dual. Sebagai contoh, disajikan pula pemodelan graf wilayah Kecamatan Tamalanrea, Kota Madya Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan.

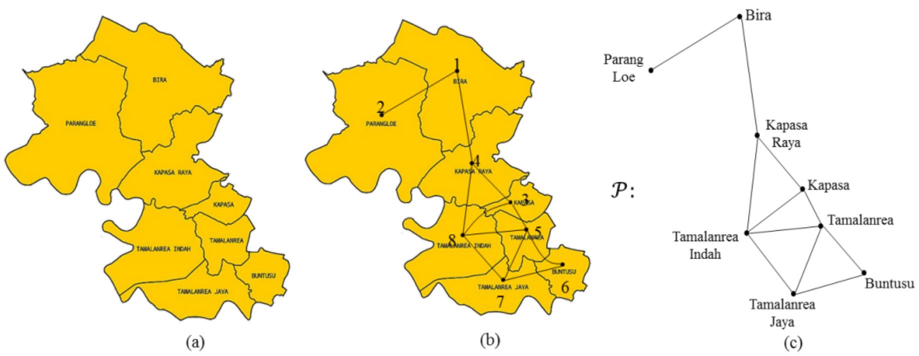
Definisi 2.5.1 *Graf dual dari peta adalah sebuah graf bidang yang merepresentasikan graf planar* G. *Untuk membuat graf tersebut, setiap wilayah pada peta direpresentasikan oleh sebuah titik. Sisi dikatakan menghubungkan dua titik jika wilayah yang direpresentasikan oleh titik tersebut memiliki perbatasan* *bersama. Dua wilayah yang hanya menyentuh satu titik tidak dianggap bertetangga.*

Contoh 2.5.1 Berikut adalah gambar peta dan graf yang merepresentasikannya.



Gambar 2.5.1 (a) Peta (b) Graf yang Merepresentasikan Peta

Contoh 2.5.2 Gambar 2.5.2 merupakan peta wilayah Kecamatan Tamalanrea di Kota Madya Makassar dan graf yang merepresentasikannya. Dalam merepresentasikan peta ke dalam bentuk graf terdapat sedikit perbedaan dengan graf dual yang telah disebutkan sebelum ini yaitu tiap kelurahan pada peta dinyatakan sebagai titik sedangkan sisi yang mengaitkan dua titik menyatakan dua wilayah yang bersesuaian dengan kedua titik yang dimaksud berbatasan dan terdapat jalan yang menghubungkannya.



Gambar 2.5.2 (a) Peta Kelurahan di Kecamatan Tamalanrea, Kota Madya Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan (b) Peta dan Graf yang merepresentasikannya (c) Graf yang Merepresentasikan Peta.

(Sumber: https://id.m.wikipedia.org/wiki/Tamalanrea,_Makassar)

Berdasarkan Gambar 2.5.2, Kecamatan Tamalanrea terdiri atas 8 kelurahan yaitu Kelurahan Bira, Kelurahan Parang Loe, Kelurahan Kapasa, Kelurahan Kapasa Raya, Kelurahan Tamalanrea, Kelurahan Buntusu, Kelurahan Tamalanrea Jaya, dan Kelurahan Tamalanrea Indah.

2.6 Penentuan Penempatan dan Jumlah Sensor Kebakaran

Kardinalitas dari basis dapat digunakan untuk menentukan dimensi metrik dari graf suatu kecamatan, yang kemudian dapat digunakan untuk mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran di kecamatan. Untuk memberikan koordinat yang berbeda untuk setiap kelurahan yang ada, dapat digunakan pencarian basis pada graf terhubung. Dimensi metrik graf dapat dinyatakan sebagai jumlah sensor kebakaran yang diperlukan di suatu kecamatan, sedangkan basis menunjukkan kelurahan tempat sensor kebakaran berada.

Sebagai contoh, pada subbab ini penerapan dimensi metrik akan dilakukan pada Kecamatan Tamalanrea. Untuk mempermudah proses penelusuran setiap kelurahan akan dilabeli dengan nomor pada tabel di bawah ini.

Tabel 2.6.1. Daftar Kelurahan di Kecamatan Tamalanrea, Kota Madya Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan

No	Nama Kelurahan	Titik
1.	Bira	v_1
2.	Parang Loe	v_2
3.	Kapasa	v_3
4.	Kapasa Raya	v_4
5.	Tamalanrea	v_5
6.	Buntusu	v_6
7.	Tamalanrea Jaya	v_7
8.	Tamalanrea Indah	v_8

Jarak antara kelurahan v_1 dan v_2 adalah 1, v_2 dan v_3 adalah 3, v_3 dan v_4 adalah 1, dan seterusnya. Sedangkan, jarak antara suatu kelurahan dengan dirinya sendiri adalah 0. Misalkan dipasang sensor kebakaran berwarna biru pada salah satu kelurahan. Jika terjadi kebakaran pada salah satu kelurahan, maka sensor akan mendeteksi jarak dari kelurahan sumber kebakaran dengan kelurahan yang dipasang sensor biru. Sebagai contoh, misalkan sensor diletakkan di v_4. Jika api muncul di v_1, maka sensor mengidentifikasi bahwa sumber api dari kelurahan yang berjarak 1 dari v_4, namun kelurahan yang berjarak 1 dari v_4 ada 3 yaitu v_1, v_3 dan v_8 sehingga tidak dapat diketahui secara pasti kebakaran bersumber dari kelurahan yang mana. Sebaliknya, apabila semua kelurahan dipasang sensor kebakaran maka dengan pasti dapat diketahui sumber kebakaran. Namun, hal ini bukanlah yang diharapkan. Persoalannya adalah dimana lokasi yang menjadi tempat pemasangan sensor dan berapa jumlah minimal sensor kebakaran yang dibutuhkan sehingga apabila terjadi kebakaran dari kelurahan manapun dapat dideteksi secara cepat. Lebih lanjut, akan dilakukan analisa untuk Kecamatan Tamalanrea Gambar 2.5.2.

Graf $\mathcal{P}$ pada Gambar 2.5.2 terdiri atas 8 titik dan 11 sisi. Graf $\mathcal{P}$ bukan graf lintasan, maka berdasarkan Teorema 2.4.1 dimensi metrik graf $\mathcal{P} \geq 2$. Sehingga, penyelidikan basis untuk graf $\mathcal{P}$ dimulai dari himpunan terurut W dengan anggota 2 titik di $\mathcal{P}$. Dalam kasus ini terdapat 28 macam himpunan terurut W. Dari proses perhitungan yang dilakukan, terdapat 8 himpunan pembeda untuk graf $\mathcal{P}$, yaitu $W_1 = \{v_1, v_3\}$, $W_2 = \{v_1, v_7\}$, $W_3 = \{v_2, v_3\}$, $W_4 = \{v_2, v_7\}$, $W_5 = \{v_3, v_4\}$, $W_6 = \{v_3, v_6\}$, $W_7 = \{v_4, v_7\}$, dan $W_8 = \{v_6, v_7\}$.

Berikutnya untuk memperoleh titik-titik yang paling representatif agar dapat menjangkau daerah yang lebih luas, maka dilihat lagi basis yang memuat pusat pada graf $\mathcal{P}$. Untuk menentukan pusat maka terlebih dahulu dicari eksentrisitas titik-titik dari graf $\mathcal{P}$. Berdasarkan Definisi 2.3.1 eksentrisitas setiap titik pada graf $\mathcal{P}$ adalah $e(v_1) = 4$, $e(v_2) = 5$, $e(v_3) = 3$, $e(v_4) = 3$, $e(v_5) = 4$, $e(v_6) = 5$, $e(v_7) = 4$, $e(v_8) = 3$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.3.2 diperoleh $r(\mathcal{P}) = 3$, $d(\mathcal{P}) = 5$, titik pusat $\mathcal{P}$ adalah titik v_3, v_4, dan v_8, dan pusat dari $\mathcal{P}$ adalah $P = \{v_3, v_4, v_8\}$. Setelah memperoleh titik pusat maka dipilih basis yang memuat titik pusat yaitu $W_1 = \{v_1, v_3\}$, $W_3 = \{v_2, v_3\}$, $W_5 = \{v_3, v_4\}$, $W_6 = \{v_3, v_6\}$, dan $W_7 = \{v_4, v_7\}$.

Misalkan dipilih $W_1 = \{v_1, v_3\}$. Maka representasi titik-titik di graf $\mathcal{P}$ terhadap W_1 adalah $r(v_1|W_1) = (0,2)$, $r(v_2|W_1) = (1,3)$, $r(v_3|W_1) = (2,0)$, $r(v_4|W_1) = (1,1)$, $r(v_5|W_1) = (3,1)$, $r(v_6|W_1) = (4,2)$, $r(v_7|W_1) = (3,2)$, $r(v_8|W_1) = (2,1)$. Karena semua representasi titik graf $\mathcal{P}$ terhadap W_1 berbeda, maka $W_1 = \{v_1, v_3\}$ adalah himpunan pembeda. Kardinalitas pada himpunan terurut W_1 adalah 2, dimana 2 merupakan kardinalitas minimum dari semua himpunan pembeda di graf $\mathcal{P}$ yang mungkin. Sehingga, himpunan pembeda dengan kardinalitasnya 2 menjadi himpunan pembeda minimum. Jadi, dimensi metrik graf $\mathcal{P}$ adalah 2. Hal ini berakibat bahwa apabila akan dipasang sensor kebakaran pada kelurahan di Kecamatan Tamalanrea Gambar 2.5.2, maka minimal 2 sensor kebakaran yang dipasang pada kecamatan tersebut. Pemasangan sensor kebakaran haruslah pada himpunan pembeda.

Pemasangan sensor kebakaran pada Kecamatan Tamalanrea dapat dilakukan di titik-titik pada salah satu himpunan berikut $W_1 = \{v_1, v_3\}$, $W_2 = \{v_1, v_7\}$, $W_3 = \{v_2, v_3\}$, $W_4 = \{v_2, v_7\}$, $W_5 = \{v_3, v_4\}$, $W_6 = \{v_3, v_6\}$, $W_7 = \{v_4, v_7\}$, dan $W_8 = \{v_6, v_7\}$. Andaikan yang dipilih adalah $W_1 = \{v_1, v_3\}$, misalnya sensor kebakaran dipasang di titik v_1 (Kelurahan Bira) dan v_3 (Kelurahan Kapasa) maka ketika terjadi kebakaran di titik v_2 (Kelurahan Parang Loe), sensor kebakaran yang berada di titik v_1 akan mendeteksi bahwa api bersumber dari kelurahan yang berjarak satu kelurahan dari Kelurahan Bira dan sensor kebakaran yang berada di titik v_3 akan mendeteksi bahwa api bersumber dari kelurahan yang berjarak tiga kelurahan dari Kelurahan Tamalanrea. Dari informasi yang diberikan oleh kedua sensor kebakaran tersebut maka dapat ditemukan bahwa sumber api berasal dari kelurahan dengan jarak $(1,3)$ dari (v_1, v_3). Satu-satunya kelurahan dengan jarak tersebut adalah titik v_2 atau Kelurahan Parang Loe.

Penempatan sensor yang tidak tepat akan mengakibatkan sumber kebakaran tidak dapat terdeteksi secara tepat. Misalnya dipilih kelurahan yang dipasang sensor adalah v_1 (Kelurahan Bira) dan v_2 (Kelurahan Parang Loe) maka apabila terjadi kebakaran di titik v_3 (Kelurahan Kapasa), sensor akan mendeteksi bahwa api bersumber dari kelurahan dengan jarak terhadap (v_1, v_2) adalah $(2,3)$. Selain itu, jarak v_8 (Kelurahan Tamalanrea Indah) terhadap (v_1, v_2) juga $(2,3)$.

Jadi, terdapat kelurahan yang berjarak sama sehingga sumber kebakaran tidak dapat terdeteksi secara tepat. Hal ini dikarenakan bahwa (v_1, v_2) bukan merupakan himpunan pembeda dari graf $\mathcal{P}$ Gambar 2.5.2 di atas. Hal ini dapat diuraikan sebagai berikut :

$W_9 = \{v_1, v_2\}$, maka representasi titik di graf $\mathcal{P}$ terhadap W_5 adalah $r(v_1|W_9) = (0,1)$, $r(v_2|W_9) = (1,0)$, $r(v_3|W_9) = (2,3)$, $r(v_4|W_9) = (1,2)$, $r(v_5|W_9) = (3,4)$, $r(v_6|W_9) = (4,5)$, $r(v_7|W_9) = (3,4)$ dan $r(v_8|W_9) = (2,3)$. Karena terdapat representasi titik yang sama maka $W_9 = \{v_1, v_2\}$ bukan himpunan pembeda. Pada bab IV dibahas pemanfaatan pusat dan basis graf dalam mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran pada kota Baubau.