HYPERGROUP SIKLIK *SINGLE POWER* KOMUTATIF DENGAN ORDER 3 DAN PERIODE 3

SKRIPSI

ABRIAN WIRA SAKTI

H011171010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

HYPERGROUP SIKLIK *SINGLE POWER* KOMUTATIF DENGAN ORDER 3 DAN PERIODE 3

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ABRIAN WIRA SAKTI

H011171010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Abrian Wira Sakti
NIM	: H011171010
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

HYPERGROUP SIKLIK _SINGLE POWER_ KOMUTATIF

DENGAN ORDER 3 DAN PERIODE 3

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 15 Juni 2022

Yang menyatakan,

Abrian Wira Sakti
NIM. H011171010

LEMBAR PENGESAHAN

HYPERGROUP SIKLIK SINGLE POWER KOMUTATIF DENGAN ORDER 3 DAN PERIODE 3

Disusun dan diajukan oleh

ABRIAN WIRA SAKTI

H011171010

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal, 15 Juni 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Dra. Nur Erawaty, M.Si.	**Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**
NIP. 196909121993032001	**NIP. 199012282018031001**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas berkat rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Adapun judul skripsi yang penulis ajukan adalah "*Hypergroup* Siklik *Single Power* Komutatif dengan Order 3 dan Periode 3". Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si) di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuudin Makassar. Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati, penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Keluarga besar penulis yakni ayahanda **Yasdin Yunus**, ibunda **Dwi Rahayu**, kakak **Alif Khamsyar, S.Kom** dan adik-adik tercinta **Aditya Renaldi, Ahmad Alviansyah, Ahmad Azka Rayhan, Athifa Abqoria**, serta tante **Apriani** dan om **Julianto** atas segala doa dan dukungannya baik secara moril maupun finansial sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Keluarga besar Masjid Al Nur Pintu 0 Unhas yakni **Iqbal, Riswal. Fadil,** dan **Iwan** serta guru/murobbi tarbiyah **Ust Zaenal** yang sering memotivasi penulis baik secara sadar maupun tidak sadar ketika penulis berada pada keadaan jenuh dalam mengerjakan skripsi.
3. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya dan bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku Dekan fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
4. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, M.Si,** selaku ketua Departemen Matematika Universitas hasanuddin beserta **Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika** yang senantiasa mendidik, memberi nasehat, memotivasi serta membagikan ilmu dan pengetahuannya kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta kepada para **Staf**

Departemen Matematika yang telah banyak membantu dalam pengurusan berkas.

5. Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si** dan bapak **Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si**, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusun skripsi ini.
6. Bapak **Prof. Amir Kamal Amir, M.Sc**, bapak **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.** Rahimahullah dan ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**. selaku penasehat akademik sekaligus dosen pembimbing yang selama ini senantiasa mendidik, memberi masukkan dan dukungan serta nasehat dan motivasi.
7. Dosen penguji skripsi, bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS** dan **Prof. Eng. Mawardi, M.Sc.** yang telah memberikan masukkan, kritik dan saran yang membangun untuk kebaikan penulis dan perbaikan skripsi ini.
8. **Saudara(i) Matematika 2017** terkhusus **Harry, Heru, Cahyudi, Riswan, Kayis, Alfian, Fatir, Wawan, Teka, Defi, Farah, Dilla** dan seluruh teman-teman Math17 yang telah memberi semangat dan pencerahan serta menjadi tempat berbagi ilmu dan juga cerita. Semoga kita semua diberikan kelancaran dalam menyelesaikan segala urusan terkait tugas akhir. Aamiin.
9. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas segala bentuk doa, dukungan, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini.

Akhir kata, penulis berdoa agar ﷲ Yang Maha Esa membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 15 Juni 2022

Abrian Wira Sakti

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Abrian Wira Sakti
NIM : H011171010
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"*HYPERGROUP* SIKLIK *SINGLE POWER* KOMUTATIF DENGAN ORDER 3 DAN PERIODE 3"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 15 Juni 2022

Yang menyatakan

Abrian Wira Sakti

ABSTRAK

Hyperstruktur aljabar adalah perumuman dari struktur aljabar klasik. *Hyperstruktur* aljabar adalah sebuah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan minimal 1 *hyperoperasi*. *Hyperoperasi* merupakan pasangan dua buah pemetaan $(\circ, *)$ dengan definisi fungsi $\circ : H \times H \to P(H)$ dan $* : W \times W \to P(H)$ dimana $W = H \cup P(H)$ dengan H merupakan sebuah himpunan tak kosong dan $P(H)$ merupakan koleksi semua subhimpunan tak kosong dari H yang dimana pemetaan $(*)$ memenuhi 3 aturan yakni $1. \forall A, B \in P(H),\ A * B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b$, $2. \forall a \in H$ dan $\forall B \in P(H)$ $a * B = \bigcup_{b \in B} a \circ b$, $3. \forall a, b \in H,\ a * b = a \circ b$. Salah satu studi dari *hyperstruktur* aljabar yang banyak dijumpai adalah *hypergroup*. Himpunan tak kosong H yang dilengkapi dengan 1 *hyperoperasi* $(\circ, *)$ disebut *hypergrupoid* yang ketika memenuhi sifat asosiatif dan *aksioma reproduksi* akan membentuk sebuah *hypergroup*. Salah satu jenis *hypergroup* yang telah dipelajari secara intensif adalah *hypergroup* siklik *single power*. Penelitian ini bertujuan untuk mengonstruksi *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dan periode 3 serta mengklasifikasikan *hypergroup* siklik *single power* komutatif yang saling isomorfik. Hasil dari penelitian ini yakni telah dikonstruksi sebanyak 58 *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dan periode 3 dimana telah diklasifikasikan kedalam 10 kelas isomorfisma dengan 32 pasang diantara 58 *hypergroup* siklik *single power* komutatif tersebut saling isomorfik.

Kata kunci: *Hyperstuktur*, *Hyperoperasi*, *Hypergrupoid*, *Hypergroup*, *Hypergroup* Siklik *Single Power*, order, periode, konstruksi, klasifikasi, isomorfik.

ABSTRACT

Algebraic *hyperstructures* are a suitable generalization of classical algebraic structures. Algebraic *hyperstructures* is a nonempty set equipped with at least 1 *hyperoperation*. *Hyperoperation* is pair of two mappings $(\circ,*)$ with definition of function $\circ : H \times H \to P(H)$ and $* : W \times W \to P(H)$ where $W = H \cup P(H)$ with H is a nonempty set and $P(H)$ is collection of all nonempty subset of H where the mapping $(*)$ satisfies 3 rules that is $1. \forall A, B \in P(H),\ A * B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b$, $2. \forall a \in H$ and $\forall B \in P(H)\ a * B = \bigcup_{b \in B} a \circ b$, $3.\ \forall a, b \in H,\ a * b = a \circ b$. One of the most common studied of algebric *hyperstructures* is about *hypergroup*. A nonempty set H equipped with 1 *hyperoperation* $(\circ,*)$ is called *hypergrupoid* which when it satisfies the associative property and *axiom of reproduction* will form a *hypergroup*. One of the types of *hypergroups* that has been studied intensively is *single power cyclic hypergroup*. This research aims to construct several commutative *single power cyclic hypergroups* of order 3 and period 3 and classify several commutative *single power cyclic hypergroups* which are mutually isomorphic. The results of this research are that as many as 58 commutative *single power cyclic hypergroups* with order 3 and period 3 have been constructed which have been classified into an 10 isomorphism class with 32 pairs between the 58 commutative *single power cyclic hypergroups* that are mutually isomorphic.

Keyword: *Hyperstucture, hyperoperation, hypergrupoid, hypergroup, single power cyclic hypergroups,* order, period, constructed, classified, isomorphic.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori hyperstruktur pertama kali diperkenalkan oleh F Marty pada kongres Scandinavian Mathematician tahun 1934. F Marty pada presentasinya mengilustrasikan definisi *hypergroup* dan beberapa aplikasinya, yang hasilnya memberi beberapa kegunaan pada studi tentang group dan beberapa fungsi seperti fungsi aljabar dan fungsi rasional. Jika pada struktur aljabar klasik dikenal konsep grup dan ring/gelanggang maka pada hyperstruktur aljabar dikenal konsep *hypergroup* dan *hyperring*. Hyperstruktur aljabar adalah perumuman yang sesuai dari struktur aljabar klasik. Pada struktur aljabar klasik, hasil operasi dari 2 elemen juga merupakan sebuah elemen, namun pada hyperstruktur aljabar hasil operasi dari 2 elemen adalah sebuah himpunan.

Konsep hyperstruktur memberikan banyak kontribusi dalam penerapannya. Lebih dari 700 paper dan buku telah ditulis sampai sekarang mengenai hyperstruktur, diantaranya banyak ditulis tentang penerapan hyperstruktur pada topik lain seperti geometri, kode, kriptografi dan probabilitas, automata, kecerdasan buatan, aljabar Boolean, topology, relasi biner, graph dan hypergraph, himpunan fuzzy, dan lain-lain. Salah satu studi dari hyperstruktur aljabar yang banyak dijumpai adalah mengenai *hypergroup*. *Hypergroup* adalah bagian dari hyperstruktur aljabar yang merupakan sebuah himpunan yang dipasangkan dengan minimal 1 operasi yang disebut *hyperoperation* serta memenuhi sifat-sifat tertentu. Berbagai jenis dari *hypergroup* telah banyak dipelajari secara intensif sampai saat ini, seperti *total hypergroup*, *regular hypergroup*, *reversible regular hypergroup*, *canonical hypergroup*, *cogroup*, *hypergroup* siklik, dan *hypergroup* asosiatif.

Pada teori grup dikenal konsep grup siklik. Sebuah grup $(G,*)$ dikatakan siklik apabila terdapat elemen pembangun/generator dalam himpunan G tersebut, misalkan terdapat $a \in G$ dan bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga $a^k = \underbrace{a * a * \dots * a}_{k} = G$, maka a disebut sebagai pembangun. Konsep siklik juga berlaku pada *hypergroup* walaupun terdapat perbedaan dengan konsep siklik pada grup. *Hypergroup* $(H,*,\circ)$ merupakan *hypergroup* siklik apabila terdapat $h \in H$ dan $s \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^s \cup \ldots$. Jika $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^s$ maka H adalah *hypergroup* siklik dengan periode berhingga dengan h adalah pembangun dan s adalah periode dari *hypergroup* siklik H yang selanjutnya ditulis sebagai $s = per(H)$. Selain itu, H merupakan *hypergroup* siklik dengan tak berhingga periode. $(H,*,\circ)$ disebut *hypergroup* siklik $single\ power$ jika terdapat $h \in H$ dan $s \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^s \cup \ldots$ dan $\{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^{m-1} \subset h^m$, untuk setiap $m \geq 2$. Setidaknya terdapat 2 penelitian mengenai *hypergroup* siklik *single power* komutatif. M. Al Tahan dan B. Davvaz pada tahun 2017 membuat penelitian tentang *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dan periode 2. Pada penelitian tersebut Davvaz dan Al tahan menjelaskan mengenai beberapa definisi dasar tentang *hypergroup*, beberapa sifat pada *hypergroup* siklik, dan mengklasifikasikan semua *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dimana setiap elemen adalah pembangun/generator dengan periode 2. 3 tahun setelahnya B. Davvaz kembali membuat penelitian yang sama bersama dengan M. R. Kheradmand yang berfokus pada order 4 dan periode 2. Pada penelitian tersebut selain menjelaskan tentang definisi dasar *hypergroup*, sifat pada *hypergroup* siklik, dan hasil klasifikasi semua *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 4 dengan setiap elemennya adalah generator dengan periode 2, juga diperlihatkan bahwa terdapat beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 4 dan periode 2 yang saling isomorfik. Selanjutnya, berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk mengklasifikasikan beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan batasan order dan periode yakni order 3 dan dibangun dengan maksimal oleh 3 elemen generator berperiode 3. Hal ini dikarenakan pada penelitian – penelitian sebelumnya oleh davvaz dkk, hasil penelitiannya hanya mengklasifikasikan beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan setiap elemennya merupakan pembangun/generator, namun tidak mengklasifikasikan *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan hanya meninjau minimal 1 elemen pembangun/generator pada *hypergroup*nya. Selain itu pada penelitian ini juga akan diklasifikasikan beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif order 3 dan periode 3 yang saling isomorfik. Berikutnya, hasil dari penelitiannya dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan rencana judul "*Hypergroup siklik single power komutatif dengan order 3 dan periode 3* ".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana mengonstruksi beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 yang dibangun dengan maksimal oleh 3 elemen generator dengan periode 3 ?
2. Bagaimana mengklasifikasikan beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dan periode 3 yang saling isomorfik ?

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, hanya akan membahas mengenai *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan batasan order 3 dan periode 3.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini sebagai berikut :

1. Menunjukkan hasil konstruksi beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 yang dibangun maksimal oleh 3 elemen generator dengan periode 3.
2. Menunjukkan hasil klasifikasi beberapa *hypergroup* siklik *single power* komutatif dengan order 3 dan periode 3 yang saling isomorfik.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi dalam perkembangan bidang ilmu matematika khususnya di bidang aljabar pada topik *hypergroup* siklik *single power*.

BAB II
TINJAUAN PUSATAKA

2.1 *Hyperoperation*

Semua himpunan dalam stuktur aljabar klasik dilengkapi dengan paling sedikit satu operasi biner. Suatu operasi biner pada himpunan H adalah sebuah fungsi dengan daerah asal (domain) $H \times H$ dan daerah hasil (kodomain) H (Shahriari, 2017). Dengan kata lain, sebuah operator biner $'\#'$ yang terdefinisi pada H adalah sebuah fungsi

$$\#: H \times H \to H$$

ini berarti setiap $(h_1, h_2) \in H \times H$ berkawan melalui fungsi $'\#'$ dengan tepat satu unsur $h_3 \in H$. Pernyataan ini dilambangkan oleh :

$$\#: (h_1, h_2) \longmapsto h_3$$

Operasi biner mempunyai 2 bagian definisi yaitu pertama, terdefinisikan dengan baik (*well defined*) yaitu untuk setiap pasangan berurutan x, y dalam A dikawankan dengan tepat satu nilai $x\#y$. Kedua, A tertutup dibawah operasi # yaitu untuk setiap x, y dalam A maka $x\#y$ masih dalam A.

Sama halnya dengan struktur aljabar klasik, pada hyperstruktur aljabar semua himpunan dilengkapi dengan paling sedikit satu hyperoperasi, yang dimana hyperoperasinya bersifat *well defined*.

Definisi 2. 1. Hyperoperasi

Hyperoperasi / hyperkomposisi adalah sebuah hukum sintesis (hukum pengaitan) dari elemen-elemen himpunan tak kosong yang mengaitkan suatu himpunan elemen alih-alih satu elemen ke setiap pasangan himpunan elemen.

Misalkan H adalah sebuah himpunan tak kosong, $P(H)$ adalah koleksi semua subhimpunan tak kosong dari H dan $W = H \cup P(H)$, dan didefenisikan dua pemetaan

$$\circ : H \times H \to P(H) \text{ dan } * : W \times W \to P(H)$$

dengan aturan pemetaan $*$ sebagai berikut :

1) $\forall A, B \in P(H),\ A * B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b$
2) $\forall a \in H$ dan $\forall B \in P(H),\ a * B = \bigcup_{b \in B} a \circ b$

3) $\forall a, b \in H,\ a * b = a \circ b$

pasangan pemetaan $(\circ, *)$ pada himpunan H disebut sebagai *hyperoperation* pada himpunan H.

Contoh 2.1 :

Misalkan terdapat himpunan $H = \{1,2,3,4\}$. Didefenisikan sebuah *law of synthesis* (hukum pengaitan) yakni berupa komposisi / operasi biner dan hyperkomposisi / hyperoperasi $(\circ)$ dalam sebuah table Cayley sebagai berikut :

Tabel 2. 1 Hukum pengaitan berupa operasi biner

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	2	3
2	3	2	1	4
3	1	2	1	1
4	2	3	4	1

Tabel 2. 2 Hukum pengaitan berupa hyperoperasi

$\circ$	1	2	3	4
1	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,4\}$
2	$\{4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4\}$
3	$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1\}$
4	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4\}$	$\{1,3\}$

2.2 Hyperstruktur

Hyperstruktur aljabar adalah sebuah perumuman dari struktur aljabar klasik.

Definisi 2. 2. Hyperstruktur aljabar

Hyperstruktur aljabar adalah sebuah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan minimal satu hyperoperasi.

2.3 *Hypergroup*

Definisi 2. 3. *Hypergroup*

Pasangan objek $(H, *, \circ)$ yang memiliki *hyperoperation* $(*, \circ)$ disebut sebagai *hypergrupoid*. *Hypergrupoid* $(H, *, \circ)$ dikatakan sebagai *semihypergroup* apabila memenuhi sifat asosiatif yakni $(a \circ b) * c = a * (b \circ c)$, $\forall a, b, c \in H$ dan *semihypergroup* $(H,*,\circ)$ dikatakan sebagai *hypergroup* apabila memenuhi aksioma reproduksi yakni $\forall x \in H,\ x * H = H * x = H$. Jadi singkatnya *hypergroup* adalah *hypergrupoid* yang memenuhi sifat asosiatif dan aksioma reproduksi.

Sama halnya dengan konsep grup pada struktur aljabar, pada hyperstruktur aljabar juga dikenal dengan konsep *hypergroup* walaupun dalam pendefenisian *hypergroup* terdapat beberapa aksioma – aksioma yang berbeda dengan aksioma aksioma yang harus dipenuhi dalam pendefenisian grup pada struktur aljabar. Perbedaan nya terletak pada aksioma terkait elemen identitas dan invers. Elemen identitas pada *hypergroup* ada dua jenis, yaitu elemen identitas skalar dan tak skalar. Namun, *hypergroup* belum tentu mempunyai elemen identitas. Jika *hypergroup* mempunyai elemen identitas, maka elemen identitas dari *hypergroup* dapat tunggal atau tak tunggal. Jika *hypergroup* mempunyai elemen identitas skalar, maka elemen identitas skalar tersebut tunggal dan tidak ada elemen identitas tak skalar pada *hypergroup* tersebut. Akan tetapi, elemen identitas tak skalar bisa tidak tunggal. Jika *hypergroup* mempunyai elemen identitas, maka setiap elemen dari *hypergroup* tersebut mungkin memiliki invers. Elemen invers dari suatu elemen di *hypergroup* dapat tunggal atau tak tunggal. Jika suatu *hypergroup* mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers, maka *hypergroup* tersebut dinamakan *hypergroup regular*. Selanjutnya, *hypergroup* dikatakan *hypergroup* komutatif jika hyperoperasi binernya bersifat komutatif. (Dena aurum salehah, 2018).

Contoh 2.2 :

Misalkan terdapat himpunan $H = \{1,2,3,4\}$ dengan sebuah hyperoperasi $(*,\circ)$ sedemikian sehingga diperoleh sebuah hasil operasi dalam bentuk tabel cayley seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.3 Hukum pengaitan berupa hyperoperasi

$\circ$	1	2	3	4
1	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$

Tabel 2. 3 Hukum pengaitan berupa hyperoperasi

$\circ$	1	2	3	4
2	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2\}$
3	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{3,4\}$
4	$\{3,4\}$	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$

Akan ditunjukkan bahwa $(H,*,\circ)$ yang terdefinisi pada tabel diatas memenuhi sifat asosiatif dan aksioma reproduksi.

Pertama, kita tunjukkan bahwa $(H,*,\circ)$ asosiatif. Untuk itu maka kita harus menunjukkan sebanyak 4^3 kondisi yang harus memenuhi sifat asosiatif. Untuk membuktikan $(H,*,\circ)$ bersifat asosiatif maka harus ditunjukkan bahwa $\forall a,b,c \in H$ maka $(a \circ b) * c = a * (b \circ c)$. Salah satu contohnya adalah akan ditunjukkan bahwa :

$$(1 \circ 2) * 3 = 1 * (2 \circ 3)$$

- $(1 \circ 2) * 3 = \{1,2\} * 3 = (1 \circ 3) \cup (2 \circ 3) = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- $1 * (2 \circ 3) = 1 * \{1,3\} = (1 \circ 1) \cup (1 \circ 3) = \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\}$

Sehingga $(1 \circ 2) * 3 = \{1,2,3,4\} = H = \{1,2,3,4\} = 1 * (2 \circ 3)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(H,*,\circ)$ asosiatif dengan menggunakan tabel berikut.

Tabel 2. 4 Pembuktian $(H,*,\circ)$ asosiatif

$1 * (1 \circ 1) = 1 * \{1,2,3,4\} = H$	$(1 \circ 1) * 1 = \{1,2,3,4\} * 1 = H$
$1 * (1 \circ 2) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 1) * 2 = \{1,2,3,4\} * 2 = H$
$1 * (1 \circ 3) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 1) * 3 = \{1,2,3,4\} * 3 = H$
$1 * (1 \circ 4) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 1) * 4 = \{1,2,3,4\} * 4 = H$
$1 * (2 \circ 1) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 2) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$1 * (2 \circ 2) = 1 * \{1,2,3,4\} = H$	$(1 \circ 2) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$1 * (2 \circ 3) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 2) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$1 * (2 \circ 4) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 2) \circ 4 = \{1,2\} * 4 = H$
$1 * (3 \circ 1) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 3) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$1 * (3 \circ 2) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 3) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$1 * (3 \circ 3) = 1 * \{1,2,3,4\} = H$	$(1 \circ 3) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$1 * (3 \circ 4) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 3) * 4 = \{1,2\} * 4 = H$

$1 * (4 \circ 1) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 4) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$
$1 * (4 \circ 2) = 1 * \{1,2\} = H$	$(1 \circ 4) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$1 * (4 \circ 3) = 1 * \{3,4\} = H$	$(1 \circ 4) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$1 * (4 \circ 4) = 1 * \{1,2,3,4\} = H$	$(1 \circ 4) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$2 * (1 \circ 1) = 2 * \{1,2,3,4\} = H$	$(2 \circ 1) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$2 * (1 \circ 2) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 1) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$2 * (1 \circ 3) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 1) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$2 * (1 \circ 4) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 1) * 4 = \{1,2\} * 4 = H$
$2 * (2 \circ 1) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 2) * 1 = \{1,2,3,4\} * 1 = H$
$2 * (2 \circ 2) = 2 * \{1,2,3,4\} = H$	$(2 \circ 2) * 2 = \{1,2,3,4\} * 2 = H$
$2 * (2 \circ 3) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 2) * 3 = \{1,2,3,4\} * 3 = H$
$2 * (2 \circ 4) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 2) * 4 = \{1,2,3,4\} * 4 = H$
$2 * (3 \circ 1) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 3) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$
$2 * (3 \circ 2) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 3) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$2 * (3 \circ 3) = 2 * \{1,2,3,4\} = H$	$(2 \circ 3) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$2 * (3 \circ 4) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 3) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$2 * (4 \circ 1) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 4) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$2 * (4 \circ 2) = 2 * \{1,2\} = H$	$(2 \circ 4) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$2 * (4 \circ 3) = 2 * \{3,4\} = H$	$(2 \circ 4) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$2 * (4 \circ 4) = 2 * \{1,2,3,4\} = H$	$(2 \circ 4) * 4 = \{1,2\} * 4 = H$
$3 * (1 \circ 1) = 3 * \{1,2,3,4\} = H$	$(3 \circ 1) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$3 * (1 \circ 2) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 1) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$3 * (1 \circ 3) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 1) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$3 * (1 \circ 4) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 1) * 4 = \{1,2\} * 4 = H$
$3 * (2 \circ 1) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 2) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$
$3 * (2 \circ 2) = 3 * \{1,2,3,4\} = H$	$(3 \circ 2) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$3 * (2 \circ 3) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 2) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$3 * (2 \circ 4) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 2) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$3 * (3 \circ 1) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 3) * 1 = \{1,2,3,4\} * 1 = H$
$3 * (3 \circ 2) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 3) * 2 = \{1,2,3,4\} * 2 = H$
$3 * (3 \circ 3) = 3 * \{1,2,3,4\} = H$	$(3 \circ 3) * 3 = \{1,2,3,4\} * 3 = H$
$3 * (3 \circ 4) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 3) * 4 = \{1,2,3,4\} * 4 = H$
$3 * (4 \circ 1) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 4) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$

$3 * (4 \circ 2) = 3 * \{1,2\} = H$	$(3 \circ 4) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$3 * (4 \circ 3) = 3 * \{3,4\} = H$	$(3 \circ 4) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$3 * (4 \circ 4) = 3 * \{1,2,3,4\} = H$	$(3 \circ 4) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$4 * (1 \circ 1) = 4 * \{1,2,3,4\} = H$	$(4 \circ 1) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$
$4 * (1 \circ 2) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 1) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$4 * (1 \circ 3) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 1) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$4 * (1 \circ 4) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 1) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$4 * (2 \circ 1) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 2) * 1 = \{1,2\} * 1 = H$
$4 * (2 \circ 2) = 4 * \{1,2,3,4\} = H$	$(4 \circ 2) * 2 = \{1,2\} * 2 = H$
$4 * (2 \circ 3) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 2) * 3 = \{1,2\} * 3 = H$
$4 * (2 \circ 4) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 2) * 4 = \{1,2\} * 4 = H$
$4 * (3 \circ 1) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 3) * 1 = \{3,4\} * 1 = H$
$4 * (3 \circ 2) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 3) * 2 = \{3,4\} * 2 = H$
$4 * (3 \circ 3) = 4 * \{1,2,3,4\} = H$	$(4 \circ 3) * 3 = \{3,4\} * 3 = H$
$4 * (3 \circ 4) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 3) * 4 = \{3,4\} * 4 = H$
$4 * (4 \circ 1) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 4) * 1 = \{1,2,3,4\} * 1 = H$
$4 * (4 \circ 2) = 4 * \{1,2\} = H$	$(4 \circ 4) * 2 = \{1,2,3,4\} * 2 = H$
$4 * (4 \circ 3) = 4 * \{3,4\} = H$	$(4 \circ 4) * 3 = \{1,2,3,4\} * 3 = H$
$4 * (4 \circ 4) = 4 * \{1,2,3,4\} = H$	$(4 \circ 4) * 4 = \{1,2,3,4\} * 4 = H$

Selanjutnya, jelas bahwa $(H,*,\circ)$ memenuhi aksioma reproduksi yakni $\forall x \in H,\ x * H = H = H * x$. Oleh karena $(H,*,\circ)$ asosiatif dan memenuhi aksioma reproduksi maka $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup*.

Proposisi $\mathbf{2.1.}$

Misalkan $H = \{a, b, c\}$ dan $(*,\circ)$ adalah hyperoperasi komutatif pada H. Maka $(H,*,\circ)$ asosiatif jika semua kondisi dibawah ini terpenuhi :

1. $a * (a \circ b) = (a \circ a) * b$,
2. $a * (a \circ c) = (a \circ a) * c$,
3. $a * (b \circ b) = (a \circ b) * b$,
4. $a * (b \circ c) = (a \circ b) * c$,
5. $a * (c \circ b) = (a \circ c) * b$,
6. $a * (c \circ c) = (a \circ c) * c$,
7. $b * (a \circ a) = (b \circ a) * a$,
8. $b * (a \circ c) = (b \circ a) * c$,
9. $b * (b \circ c) = (b \circ b) * c$,
10. $b * (c \circ c) = (b \circ c) * c$

Bukti :

Karena $(H,\circ)$ komutatif, maka $\forall x,y,z \in H$ diperoleh $x*(x\circ x)=(x\circ x)*x$ dan $z*(y\circ z)=(y\circ z)*z=(z\circ y)*z$.

Pasangan himpunan dan hyperoperasi $(H,*,\circ)$ bersifat komutatif mengimplikasikan bahwa $b*(c\circ a)=(c\circ a)*b=(a\circ c)*b$ dan $a*(c\circ b)=(a\circ c)*b$ mengimplikasikan bahwa $b*(c\circ a)=(a\circ c)*b=a*(c\circ b)=(c\circ b)*a=(b\circ c)*a$. (menggunakan sifat ke 5).

Pasangan himpunan dan hyperoperasi $(H,*,\circ)$ bersifat komutatif mengimplikasikan bahwa $c*(a\circ a)=(a\circ a)*c=a*(a\circ c)$ (sifat 2). Sekarang diperoleh $c*(a\circ a)=(a\circ c)*a=(c\circ a)*a$.

Dengan cara yang serupa, dibuktikan bahwa $c*(b\circ a)=(c\circ b)*a$, $c*(c\circ a)=(c\circ c)*a$, $c*(b\circ b)=(c\circ b)*b$ dan $c*(c\circ b)=(c\circ c)*b$ menggunakan sifat $4,6,9$ dan 10. **Q.E.D.**

Proposisi 2.2.

Misalkan $H=\{a,b,c,d\}$ dan $(\circ,*)$ adalah hyperoperasi komutatif pada H. Maka $(H,*,\circ)$ asosiatif jika semua kondisi dibawah ini terpenuhi :

1. $a*(a\circ b)=(a\circ a)*b$,
2. $a*(a\circ c)=(a\circ a)*c$,
3. $a*(a\circ d)=(a\circ a)*d$,
4. $a*(b\circ b)=(a\circ b)*b$,
5. $a*(b\circ c)=(a\circ b)*c$,
6. $a*(b\circ d)=(a\circ b)*d$,
7. $a*(c\circ b)=(a\circ c)*b$,
8. $a*(c\circ c)=(a\circ c)*c$,
9. $a*(c\circ d)=(a\circ c)*d$,
10. $a*(d\circ b)=(a\circ d)*b$,
11. $a*(d\circ c)=(a\circ d)*c$,
12. $a*(d\circ d)=(a\circ d)*d$,
13. $b*(a\circ a)=(b\circ a)*a$,
14. $b*(a\circ c)=(b\circ a)*c$,
15. $b*(a\circ d)=(b\circ a)*d$,
16. $b*(b\circ c)=(b\circ b)*c$,
17. $b*(b\circ d)=(b\circ b)*d$,
18. $b*(c\circ c)=(b\circ c)*c$,
19. $b*(c\circ d)=(b\circ c)*d$,
20. $b*(d\circ a)=(b\circ d)*a$,
21. $b*(d\circ c)=(b\circ d)*c$,
22. $b*(d\circ d)=(b\circ d)*d$,
23. $c*(c\circ d)=(b\circ c)*d$,
24. $c*(d\circ d)=(c\circ d)*d$.

Bukti :

Karena $(H,*,\circ)$ komutatif, maka $\forall x,y,z \in H$ diperoleh $x*(x\circ x)=(x\circ x)*x$ dan $z*(y\circ z)=(y\circ z)*z=(z\circ y)*z$. Pasangan himpunan dan hyperoperasi $(H,*,\circ)$ bersifat komutatif mengimplikasikan bahwa $b*(c\circ a)=b*(a\circ c)=(a\circ c)*b$ dan $(a\circ c)*b=a*(c\circ b)$ mengimplikasikan bahwa $b*(c\circ a)=b*(a\circ c)=(a\circ c)*b=a*(c\circ b)=a*(b\circ c)=(b\circ c)*a$. (menggunakan sifat ke 7).

Pasangan himpunan dan hyperoperasi $(H,*,\circ)$ bersifat komutatif mengimplikasikan bahwa $c*(a\circ a)=(a\circ a)*c=a*(a\circ c)$ (sifat 2). Sekarang diperoleh $c*(a\circ a)=(a\circ a)*c=a*(a\circ c)=(a\circ c)*a=(c\circ a)*a$. Dengan cara yang serupa, dibuktikan bahwa $c*(b\circ d)=(c\circ b)*d$ (menggunakan sifat 19,21), $c*(d\circ a)=(c\circ d)*a$ (menggunakan sifat 11), $c*(b\circ a)=(c\circ b)*a$ (menggunakan sifat 5), dan $d*(c\circ b)=(d\circ c)*b$ (menggunakan sifat 19). **Q.E.D.**

Contoh 2.3.

Misalkan terdapat himpunan $H=\{1,2,3,4\}$ dengan sebuah hyperoperasi $(\circ,*)$ sedemikian sehingga diperoleh sebuah hasil operasi dalam bentuk tabel cayley seperti pada **Tabel 2.2**.

Tabel 2.2 Hukum pengaitan berupa hyperoperasi

$\circ$	1	2	3	4
1	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,4\}$
2	$\{4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4\}$
3	$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1\}$
4	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4\}$	$\{1,3\}$

Perhatikan bahwa :

- $1*(2\circ 1)=1*\{4\}=\{1\}*\{4\}=1\circ 4=\{1,3,4\}$
- $(1\circ 2)*1=\{1,3\}*1=(1\circ 1)\cup(3\circ 1)=\{1,2,3\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$

Maka $1*(2\circ 1)=\{1,3,4\}\neq\{1,2,3\}=(1\circ 2)*1$. Jelas bahwa $(H,*,\circ)$ tidak memenuhi sifat asosiatif sehingga $(H,*,\circ)$ bukanlah sebuah *hypergroup*.

2.4 Isomorfisma Pada *Hypergroup*

Definisi 2.4. *Hypergroup* yang saling isomorfik

Misalkan H adalah himpunan tak kosong berhingga dan $P(H)$ adalah koleksi semua subhimpunan tak kosong dari H. Misalkan pula $(H,*,\circ)$ dan

$(H,*',\circ')$ keduanya adalah *hypergroup*. Didefinisikan himpunan $W = H \cup P(H)$. Sebuah fungsi $f : W \to W$ dengan aturan $\forall\, x_1, \dots, x_n \in H$ untuk $n \in \mathbb{N}$ berlaku :

1. $f(\{x_i\}) = \{f(x_i)\}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$
2. $f(\{x_i, x_j\}) = \{(f(x_i), f(x_j)\}$, untuk setiap $i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j$
3. $f(\{x_i, x_j, x_k\}) = \{(f(x_i), f(x_j), f(x_k)\}$, untuk setiap $i, j, k \in \mathbb{N},\ i \neq j \neq k$

$\vdots$

$\vdots$ dan seterusnya

$\vdots$

dikatakan sebagai *homomorfisma* jika $f(x_1 \circ x_2) \subseteq f(x_1) \circ' f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in H$. Dan fungsi tersebut disebut sebagai *good homomorfisma* jika $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) \circ' f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in H$. Dua *hypergroup* dikatakan saling isomorfik jika terdapat *good homomorfisma* yang bijektif antara keduanya.

Contoh 2.4.

Misalkan terdapat himpunan tak kosong $H = \{a, b, c, d\}$ dan dua hyperoperasi $\circ_1$ dan $\circ_2$ sedemikian sehingga $(H,*_1,\circ_1)$ dan $(H,*_2,\circ_2)$ adalah dua buah *hypergroup* yang berbeda yang didefenisikan seperti pada tabel berikut :

Tabel 2.5 *Hypergroup* $(H,*_1,\circ_1)$

$\circ_1$	a	b	c	d
a	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c,d\}$
b	$\{a,b\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b\}$
c	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{c,d\}$
d	$\{a,c,d\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$

Tabel 2.6 *Hypergroup* $(H,*_2,\circ_2)$

$\circ_2$	a	b	c	d
a	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$
b	$\{a,b\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,d\}$
c	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{c,d\}$
d	$\{c,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$

Didefenisikan sebuah fungsi $f : W \to W$ oleh $f(a) = d,\ f(b) = c,\ f(c) = a$ dan $f(d) = b$. Karena $(H,*_1,\circ_1)$ dan $(H,*_2,\circ_2)$ komutatif, maka cukup diperiksa hasil fungsi seperti pada tabel berikut :

Tabel 2. 7 Pengecekan syarat *good homomorfisma* $(H,*_1,\circ_1)$ dan $(H,*_2,\circ_2)$

$f(a \circ_1 a) = f(H) = H$	$f(a) *_2 f(a) = d *_2 d = H$
$f(b \circ_1 b) = f(H) = H$	$f(b) *_2 f(b) = c *_2 c = H$
$f(c \circ_1 c) = f(H) = H$	$f(c) *_2 f(c) = a *_2 a = H$
$f(d \circ_1 d) = f(H) = H$	$f(d) *_2 f(d) = b *_2 b = H$
$f(a \circ_1 b) = f(\{a,b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{c,d\}$	$f(a) *_2 f(b) = d *_2 c = \{c,d\}$
$f(a \circ_1 c) = f(\{a,b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{c,d\}$	$f(a) *_2 f(c) = d *_2 a = \{c,d\}$
$f(a \circ_1 d) = f(\{a,c,d\}) = \{f(a), f(c), f(d)\}$ $= \{a,b,d\}$	$f(a) *_2 f(d) = d *_2 b = \{a,b,d\}$
$f(b \circ_1 c) = f(\{c,d\}) = \{f(c), f(d)\} = \{a,b\}$	$f(b) *_2 f(c) = c *_2 a = \{a,b\}$
$f(b \circ_1 d) = f(\{a,b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{c,d\}$	$f(b) *_2 f(d) = c *_2 b = \{c,d\}$
$f(c \circ_1 d) = f(\{c,d\}) = \{f(c), f(d)\} = \{a,b\}$	$f(c) *_2 f(d) = a *_2 b = \{a,b\}$

Perhatikan bahwa fungsi pada tabel diatas memenuhi aturan $f(x_1 \circ_1 x_2) = f(x_1) \circ_2 f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in H$. Maka berdasarkan penjelasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa f merupakan *good homomorfisma*. Selanjutnya perhatikan bahwa fungsi yang didefenisikan jelaslah merupakan sebuah fungsi bijektif, sehingga karena f merupakan *good homomorfisma* dan bersifat bijektif maka fungsi f merupakan isomorfisma dari $(H,*_1,\circ_1)$ ke $(H,*_2,\circ_2)$ atau dengan kata lain $(H,*_1,\circ_1)$ dan $(H,*_2,\circ_2)$ saling isomorfik.

2.5 *Hypergroup* Siklik

Definisi 2. 5. *Hypergroup* siklik

Sebuah *hypergroup* $(H,*,\circ)$ dikatakan siklik jika terdapat $h \in H$ dan $s \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $H = \{h\} \cup h^2 \cup \dots h^s \cup \dots$ dimana $h^n = \underbrace{h * h * \dots * h}_{n}$ dengan $n \geq 2$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Jika $H = \{h\} \cup h^2 \cup \dots h^s$ maka H adalah *hypergroup* siklik dengan periode berhingga dengan h adalah generatornya dan s adalah periode dari *hypergroup* siklik $(H,*,\circ)$ yang selanjutnya ditulis sebagai $s = per(H)$. Selain itu, H dikatakan *hypergroup* siklik dengan tak berhingga periode.

Contoh 2. 5.

Misalkan $H = \{a, b, c, d\}$ dan $(*,\circ)$ adalah sebuah hyperoperasi sedemikian sehingga $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* seperti pada tabel berikut.

Tabel 2. 8 *Hypergroup* $(H,*,\circ)$

$\circ$	a	b	c	d
a	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
b	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$
c	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
d	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$

Perhatikan : $a^2 = a * a = \{b\}$. Maka $a^3 = a^2 * a = \{b\} * a = b \circ a = \{a,c,d\}$

$c^2 = c * c = \{b\}$. Maka $c^3 = c^2 * c = \{b\} * c = b \circ c = \{a,c,d\}$

$d^2 = d * d = \{b\}$. Maka $d^3 = d^2 * d = \{b\} * d = b \circ d = \{a,c,d\}$

Maka $(H,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dibangun oleh a, c atau d dimana $H = \{a\} \cup a^2 \cup a^3 = \{c\} \cup c^2 \cup c^3 = \{d\} \cup d^2 \cup d^3$.Dengan demikian $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan 3 generator yang semua generator nya berperiode 3.

Proposisi 2. 3.

Misalkan $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan generator $h \in H$. Jika terdapat $k \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $h^{k+1} = h^k$, maka $per(H) \leq k$.

Bukti :

Kita buktikan dengan prinsip induksi matematika yakni $h^{k+r} = h^k$ untuk setiap $r \geq 0$. Jelas bahwa $h^{k+r} = h^k$ untuk $r = 0$ dan $r = 1$. Sekarang di asumsikan bahwa $h^{k+r} = h^k$ untuk $r = s$. Untuk $r = s + 1$, $h^{k+r} = h^{k+s+1} = h^{k+s} \circ h = h^k \circ h = h^{k+1} = h^k$. Sekarang diperoleh $h^i = h^k$ untuk setiap $i \geq k$. Maka $H \subseteq \{h\} \cup h^2 \cup ... \cup h^k$. Jadi, $per(H) \leq k$. **Q.E.D.**

Proposisi 2. 4.

Misalkan $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan generator $h \in H$. Jika terdapat $i \neq j \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $h^i = h^j$, maka $per(H) \leq \max(i,j)$.

Bukti :

Tanpa kehilangan keumuman, kita misalkan $i < j$ dan $d = j - i > 0$. Misalkan $s \in \mathbb{N}$. Kita pertimbangkan beberapa kasus untuk s.

- Kasus $s = d$. Diperoleh $h^{j+s} = h^j \circ h^d = h^i \circ h^d = h^{i+d} = h^j$.

- Kasus $s < d$. Diperoleh $h^{j+s} = h^j \circ h^s = h^i \circ h^s = h^{i+s}$ dan $i + s < i + d \leq j$.
- Kasus $s > d$. Menggunakan algoritma pembagian, terdapat $q \geq 0$ dan r yang memenuhi $s = qd + r$ dan $0 \leq r < d$. Mudah dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika pada q bahwa $h^i * h^{qd} = h^i$. Diperoleh $h^{j+s} = h^j * h^{qd+r} = h^j * (h^{qd} * h^r) = h^i * (h^{qd} * h^r) = (h^i * h^{qd}) * h^r = h^i * h^r$. Menggunakan kasus sebelumnya, diperoleh $h^{j+s} = h^i * h^r = h^k$, $k = i + r < j$. **Q.E.D.**

Proposisi 2.5.

Jika H adalah *hypergroup* siklik berhingga, maka H mempunyai periode yang berhingga.

Bukti :

Himpunan H dapat ditulis sebagai $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Karena H siklik, maka terdapat $h \in H$ yang memenuhi $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots$. Pernyataan terakhir menyatakan $h_i \in h^k$ untuk suatu $k \geq 0$. Misalkan $k_i = \{min_{k \in \mathbb{N}} k : h_i \in h^k\} \geq 0$. Sehingga diperoleh :

$$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \subseteq \{h^{k_1}\} \cup \{h^{k_2}\} \ldots \cup \{h^{k_n}\} \subseteq \{h\} \cup \{h^2\} \cup \ldots \cup \{h^s\},$$

dimana $s = max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} < \infty$. Jadi, $per(H) \leq s$.

Konvers dari **Proposisi 2.5** tidak selalu bernilai benar. Akan dijelaskan pada contoh selanjutnya. **Q.E.D.**

Contoh 2.6.

Misalkan $H = \mathbb{N}$ dan didefenisikan $(H, *, \circ)$ sebagai sebuah *hypergroup* total. Jelas bahwa $per(H) = 2$ ketika $H = \{1^2\}$.

Proposisi 2.6.

Misalkan $(H, *, \circ)$ adalah sebuah *hypergroup* siklik. Maka $per(H) = 1$ jika dan hanya jika H adalah *hypergroup* trivial.

Bukti.

Jelas bahwa jika H adalah *hypergroup* trivial maka $per(H) = 1$. Jika $per(H) = 1$, maka terdapat $h \in H$ yang memenuhi $H = \{h\}$ yang mengimplikasikan bahwa H hanya terdiri atas satu elemen saja. **Q.E.D.**

Proposisi 2.7.

Misalkan $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan order 2. Maka $per(H) = 2$.

Bukti.

Misalkan $h \in H$ adalah generator dari $H = \{h, a\}$. **Proposisi 2.6** dan **2.3** menegaskan bahwa $h^2 \neq \{h\}$ yang mengimplikasikan bahwa $\{a\} \in h^2$. Maka $H = \{h\} \cup \{a\} \subseteq \{h\} \cup h^2$. Jadi, $per(H) = 2$. **Q.E.D.**

Proposisi 2.8.

Misalkan $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan order 3. Maka $per(H) = 2$ atau $per(H) = 3$.

Bukti.

Misalkan $H = \{h, a, b\}$ adalah *hypergroup* siklik dengan generator h. **Proposisi 2.3** menegaskan bahwa $per(H) \geq 2$ ketika $H \neq \{h\}$. Karena $h^2 \neq \{h\}$ maka $\{a\} \in h^2$ atau $\{b\} \in h^2$. Jelas bahwa jika $\{a, b\} \subseteq h^2$, maka $per(H) = 2$. Tanpa kehilangan keumuman misalkan $\{a\} \in h^2$ dan h^2 tidak mengandung elemen b. Maka $h^2 = \{a\}$ atau $h^2 = \{a, h\}$. Berikut ini adalah satu satunya kasus untuk h^3.

- Kasus $h^3 = \{h\}$ atau $h^3 = h^2$. Diperoleh $per(H) \leq 3$ berdasarkan **Proposisi 2.3** dan **2.4**
- Kasus $b \in h^3$. Maka $H = \{h\} \cup h^2 \cup h^3$ dan $per(H) = 3$
- Kasus $h^2 = \{a, h\}$ dan $h^3 = \{a\}$. Mempunyai $\{a\} = h^3 = h^2 * h = \{a, h\} * h$ mengimplikasikan bahwa $a * h = h * h = \{a\}$. Sehingga diperoleh bahwa $h^4 = h^3 * h = \{a\} * h = \{a\}$. Mudah dipahami bahwa $h^i = \{a\}$ untuk setiap $i \geq 3$. Pernyataan terakhir mengimplikasikan bahwa $\{h\} \cup h^2 \cup ... = \{a, h\} \neq H$ yang mana kontradiksi dengan fakta bahwa H itu siklik.
- Kasus $h^2 = \{a\}$ dan $h^3 = \{a, h\}$. Diperoleh $a * h = h^2 * h = h^3 = \{a, h\}$ dan $h^4 = h^3 * h = \{a, h\} * h = \{a, h\} = h^3$. **Proposisi 2.3** menegaskan bahwa $per(H) = 3$. **Q.E.D.**

2.6 *Hypergroup* Siklik *Single Power*

Definisi $\mathbf{2.6}$. *Hypergroup* siklik *single power*

Sebuah *hypergroup* $(H,*,\circ)$ dikatakan sebagai *hypergroup* siklik *single power* jika terdapat $h \in H$ dan $s \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^s \cup \ldots$ dan $\{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^{m-1} \subseteq h^m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Contoh $\mathbf{2.7}$.

Perhatikan kembali **Contoh $\mathbf{2.5}$**.

Tabel $\mathbf{2.8}$ *Hypergroup* $(H,*,\circ)$

$\circ$	a	b	c	d
a	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
b	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$
c	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
d	$\{b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b\}$	$\{b\}$

Telah dibuktikan bahwa $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik dengan 3 generator dan tiap generator nya berperiode 3. Perhatikan bahwa $a^2 = \{b\}$, $c^2 = \{b\}$, dan $d^2 = \{b\}$. Karena $\{a\} \notin a^2$, $\{c\} \notin c^2$, dan $\{d\} \notin d^2$ maka $(H,*,\circ)$ bukanlah *hypergroup* siklik *single power*.

Proposisi $\mathbf{2.9}$.

Jika $(H,*,\circ)$ *hypergroup* siklik *single power* dengan order $n \geq 2$, maka $2 \leq per(H) \leq n$.

Bukti :

Proposisi $\mathbf{2.5}$ menegaskan bahwa $(H,*,\circ)$ memiliki periode s yang berhingga. Karena $(H,*,\circ)$ *hypergroup* siklik *single power*, maka $H = \{h\} \cup h^2 \cup \ldots \cup h^s$ dan $\{h\} \in h^2 \subset h^3 \subset \cdots \subset h^s$. Kalimat terakhir menyatakan bahwa terdapat paling sedikit satu $a_{i+1} \neq \{h\} \in h^{i+1}$ sedemikian sehingga a_{i+1} tidak ada di h^i untuk setiap $i \in \{1,2,\ldots,s-1\}$. $\{h, a_2, \ldots, a_s\} \subseteq H$ menyatakan bahwa $s \leq n$. **Q.E.D.**

Proposisi $\mathbf{2.10}$.

Misalkan $H = \{a,b,c\}$ dan didefenisikan $(H,*,\circ)$ seperti pada tabel berikut :

Tabel 2. 9 Hyperoperasi pada himpunan H

$\circ$	a	b	c
a	H	$\{a\}$	H
b	H	$\{b\}$	H
c	H	H	H

Maka $(H,*,\circ)$ adalah *hypergroup* siklik *single power* nonkomutatif dengan periode 2.

Bukti :

Jelas terlihat pada tabel bahwa $(H,*,\circ)$ tidaklah komutatif, memenuhi aksioma reproduksi dan dibangun oleh a karena $H = a^2$. Beberapa pengoperasian menunjukkan bahwa $(H,*,\circ)$ bersifat asosiatif. **Q.E.D.**