PENERAPAN METODE *BRANCH AND BOUND* DALAM MENENTUKAN KEUNTUNGAN MAKSIMAL DI PT. MEGATAMA BUANA PERDANA

SKRIPSI

Oleh:

MUHAMMAD NUR KHALIQ

H111 15 021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

PENERAPAN METODE *BRANCH AND BOUND* DALAM MENENTUKAN KEUNTUNGAN MAKSIMAL DI PT. MEGATAMA BUANA PERDANA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUHAMMAD NUR KHALIQ

H11115021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

HALAMAN PENGESAHAN

PENERAPAN METODE *BRANCH AND BOUND* DALAM MENENTUKAN KEUNTUNGAN MAKSIMAL DI PT. MEGATAMA BUANA PERDANA

Disusun dan diajukan oleh

MUHAMMAD NUR KHALIQ
H11115021

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin
pada tanggal 1 Juli 2022
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Jeffry Kusuma.	Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19641112 198703 1 002	NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Muhammad Nur Khaliq
NIM	:	H11115021
Program Studi	:	Matematika
Jenjang	:	S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

"Penerapan Metode *Branch and Bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal di PT.Megatama Buana Perdana"

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 1 Juni 2022

Yang Menyatakan

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL D3019AJX397704478

Muhammad Nur Khaliq

NIM: H11115021

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT., karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penerapan Metode *Branch and Bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal di PT.Megatama Buana Perdana**". Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat dan taslim tak lupa dihaturkan kepada Rasulullah SAW, manusia terakhir yang membawa risalah ilahia yang menjadikannya suri tauladan umat manusia agar mencapai kebahagiaan dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan dapat terlewati berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, untaian kata demi kata penulis susun untuk menggambarkan rasa terimakasih kepada segala pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada kedua orang tua penulis Zainuddin dan Nismawati, S. Pd yang selalu mendukung, memotivasi, dan mendoakan demi perjalanan hidup penulis. Serta kepada saudari-saudari penulis, Nur Wahidah, Nur Izzah, S.Pd dan Nurul Kharimah yang selalu memotivasi dan memberikan saran berupa ide dalam perjalanan perkuliahan. Penulis juga menghaturkan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin.,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.,** selaku Sekretaris Departemen.
3. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma.,** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.,** selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, dan kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia

meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis hingga skripsi dapat terselesaikan.

4. *Ibu* ***Naimah Aris, S. Si., M. Math.,*** selaku anggota tim penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. *Serta* Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc.,** *selaku anggota tim penguji* yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak, Ibu dosen dan staff administrasi Program Studi Matematika yang telah memberikan memberikan banyak dukungan dan membantu kelancaran studi.
6. Teman-teman selama perkuliahan **Matematika 2015, KM FMIPA Unhas dan SIMETR15 Himatika FMIPA Universitas Hasanuddin** untuk segala kebersamaan, kerja sama, kenangan suka dan duka. Serta dukungan yang diberikan saat penulis mengalami hambatan dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Keluarga besar **Unit Kegiatan Mahasiswa Bola Basket Universitas Hasanuddin** yang telah memberikan banyak pengalaman bagi penulis baik dalam kepemimpinan, dan *softskill* lainnya.
8. **Astri Aksan, Rifki Nisardi, Alfiandhani Suci Mutiara, Fitri Amalyah, Atikah, KD, Indi, Ita, Fatir, Esty, Wulan, Sakinah, Reza** dan semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu.

Dalam penyusunan skripsi ini dilakukan secara teliti dan mendetail, namun penulis sadar bahwa masih terdapat beberapa bagian dalam skripsi ini yang membutuhkan saran dan kritik membangun. Penulisan skripsi ini juga diharapkan bisa menjadi stimulus bagi teman-teman mahasiswa untuk meneliti berbagai fenomena alam dengan ilmu matematika. Dan semoga semua yang telah dilakukan bernilai ibadah di sisi Allah SWT., *Aamiin Ya Robbal Alamin.*

Makassar, 1 Juni 2022

Muhammad Nur Khaliq

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Nur Khaliq
NIM : H11115021
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Penerapan Metode *Branch and Bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal di PT.Megatama Buana Perdana"

Berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal tersebut, maka pihak Universitas Hasanuddin berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, megelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 1 Juni 2022

Yang menyatakan,

Muhammad Nur Khaliq

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui keuntungan optimal PT.Megatama Buana Perdana yang diperoleh dari pembangunan perumahan. Untuk menyelesaikan permasalahan ini, dibutuhkan data atau informasi mengenai keuntungan, biaya produksi, kesediaan bahan, dan detail pengerjaan rumah yang selanjutnya diolah menggunakan metode simpleks program linear dan metode *branch and bound* program integer. Metode simpleks akan menghasilkan jumlah keuntungan berdasarkan tipe dan jumlah rumahnya yang bernilai desimal. Selanjutnya solusi dari metode ini akan diolah menggunakan metode *branch and bound* pada *software QM* yang pada prosesnya akan mencabangkan dan membatasi hasil dari metode simpleks hingga memperoleh pencabangan yang bernilai *integer* atau infeasible (tidak bisa lagi dicabangkan). Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan mendahulukan pembangunan rumah tipe 125 dalam sekali pembangunan akan menghasilkan keuntungan yang maksimal.

Kata Kunci: Program Linear, Program integer, branch and bound**.**

ABSTRACT

This study aims to determine the optimal profit of PT. Megatama Buana Perdana obtained from housing development. To solve this problem, data or information is needed regarding profits, production costs, availability of materials, and details of home work which are then processed using the simplex linear programming method and the branch and bound integer program method. The simplex method will generate the amount of profit based on the type and number of houses which are decimal values. Furthermore, the solution from this method will be processed using the branch and bound method in the QM software which in the process will branch and limit the results of the simplex method to obtain a branch that has an integer or infeasible value (can no longer be branched). The simulation results show that by prioritizing the construction of a type 125 house in one construction, it will produce maximum profit.

Keywords: Linear Programming, Integer programming, branch and bound**.**

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN i
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN ii
KATA PENGANTAR iii
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR v
ABSTRAK vi
ABSTRACT vii
DAFTAR ISI viii
DAFTAR TABEL x
DAFTAR GAMBAR xi
DAFTAR LAMPIRAN xii
BAB I 1
PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Batasan Masalah 2
1.4. Tujuan Penelitian 3
1.5. Manfaat Penelitian 3
BAB II 4
TINJAUAN PUSTAKA 4
2.1. Program Linear 4
2.1.1. Metode Grafik 8
2.1.2. Metode Simpleks 9
2.2. Program *Integer* 17
2.2.1 Metode Branch and Bound 19
BAB III 32
METODOLOGI PENELITIAN 32
3.1. Lokasi Penelitian 32
3.2. Jenis dan Sumber Data 32
3.3. Pengolahan Data 32
3.3.1 Formulasi Fungsi 32
3.3.2 Analisis Data 33

3.4. Alur Kerja Penelitian 33
BAB IV 34
HASIL DAN PEMBAHASAN 34
4.1. Pengumpulan Data 34
4.2. Pengolahan Data 37
4.3. Analisis Metode Branch and Bound 38
BAB V 46
KESIMPULAN DAN SARAN 46
5.1. Kesimpulan 46
5.2. Saran 46
DAFTAR PUSTAKA 47
LAMPIRAN 48

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Pivot Metode Simpleks 11
Tabel 2. 2 Matriks Awal 14
Tabel 2. 3 Penentuan Kolom Kunci 14
Tabel 2. 5 Penentuan baris kunci 15
Tabel 2. 6 Iterasi Pertama 16
Tabel 4. 1 Data Spesifikasi Rumah, Harga Distributor, Biaya Produksi, Waktu Pengerjaan dan Keuntungan Penjualan 34
Tabel 4. 2 Solusi dari Hasil Iterasi dengan Software QM 37
Tabel 4. 3 Iterasi Kedua 39
Tabel 4. 4 Iterasi Ketiga 39
Tabel 4. 4 Iterasi Ketiga 39
Tabel 4. 5 Iterasi Keempat 41
Tabel 4. 5 Iterasi Keempat 41
Tabel 4. 6 Iterasi Kelima 41
Tabel 4. 6 Iterasi Kelima 41
Tabel 4. 7 Iterasi Keenam 42
Tabel 4. 7 Iterasi Keenam 42
Tabel 4. 8 Iterasi Ketujuh 43
Tabel 4. 8 Iterasi Ketujuh 43

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Pencabangan Metode Branch and Bound 20
Gambar 2. 2 Grafik Kendala Masalah Awal 23
Gambar 2. 3 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 2 24
Gambar 2. 4 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 3 25
Gambar 2. 5 Pencabangan Sub-masalah 1... 26
Gambar 2. 6 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 4 27
Gambar 2. 7 Pencabangan Sub-masalah 3... 28
Gambar 2. 8 Pencabangan Sub-masalah 4... 30
Gambar 2. 9 Alur Kerja Metode Branch and Bound... 31
Gambar 3. 1 Alur Kerja Penelitian.. 33
Gambar 4. 2 Hasil Akhir Metode Branch and Bound 44
Gambar 4. 3 Diagram Penyelesaian dengan Metode Branch and Bound............ 45

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Data RAB Tipe 125 48
Lampiran 2 Data RAB Tipe 75 49

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Setiap individu manusia lebih mengutamakan pemenuhan kebutuhan dasar daripada kebutuhan sekundernya. Selain dari kebutuhan makanan dan minuman, tempat berteduh atau rumah juga menjadi salah satu kebutuhan dasar manusia. Sehingga, setiap orang akan berusaha memenuhi kebutuhan akan rumah dengan memperhatikan selera dan kemampuan yang ada. Beragamnya selera dan kemampuan masyarakat, perusahaan properti melihat potensi pembangunan rumah yang sesuai dengan kebutuhan masyarakat sekitarnya.

Dalam perkembangannya, perusahaan properti yang bergerak di pembangunan perumahan menawarkan berbagai tipe rumah, seperti tipe 36, 45, 60, 70 dan lain-lain. Seperti salah satu perusahaan properti di Makassar, yaitu PT. Megatama Buana Perdana yang menawarkan tiga macam tipe rumah antara lain tipe 75,125 dan 135 dengan tujuan untuk memenuhi keinginan pasar. PT. Megatama Buana Perdana membuat perumahan juga untuk mencapai keuntungan buat perusahaan. Perusahaan perumahan berusaha mencapai keadaan optimal dengan memaksimalkan keuntungan penjualan rumah atau dengan meminimalkan biaya yang dikeluarkan untuk membuat rumah. Sehingga untuk mengambil keputusan terbaik yaitu dengan pengoptimasian terhadap masalahnya.

Pengoptimasian terhadap masalah keuangan dapat diselesaikan menggunakan program linear. Masalah yang mempengaruhi keadaan optimal pendapatan diterjemahkan terlebih dahulu ke kendala yang ada di dalam masalah program linear ke bentuk perumusan matematika. *Integer Programming* adalah model program linear yang digunakan khusus untuk menyelaraskan masalah dimana nilai variabel-variabel keputusan dalam memecahkan optimasi mestilah berupa integer. Syarat bahwa nilai variabel keputusan perlu bilangan bulat melihat jumlahnya yang tidak mungkin berupa pecahan seperti rumah, pabrik, tugas, dan lain-lainnya.

Linear Programming bisa dipecahkan dengan banyak cara, antara lain dengan memanfaatkan grafik, dengan metode subtitusi dan eliminasi, dan sebagainya. Cara yang cukup efisien untuk memecahkan masalah program bilangan bulat dengan mengaplikasikan algoritma *Branch and Bound* dibandingkan metode perhitungan nilai bulat lainnya dan sudah menjadi kode komputer standar bagi *Integer Programming*.

Metode *Branch and Bound* dapat dimanfaatkan untuk memecahkan suatu masalah *Integer Programming* sebab hasil yang didapatkan dalam pemecahan masalah optimasi lebih akurat dan lebih baik dari metode lainnya. Metode ini mempunyai hasil optimal banyak dari metode lainnya sehingga penulis bisa menentukan mana hasil yang paling optimal dari hasil-hasil yang didapat, metode ini dikatakan lebih akurat dan lebih baik dibandingkan dari metode lainnya.

Oleh karena itu, persoalan yang berhubungan dengan cara mengoptimalkan keuntungan pada PT. Megamatama Buana Perdana merupakan cara memilih penyelesaian optimal dalam usaha tersebut. Mengingat bahwa tingkat keuntungan, faktor – faktor sumber daya dan bahan bangunan yang dihasilkan dan digunakan oleh PT. Megatama Buana Perdana memiliki hubungan linear, maka penulis memecahkan masalah menggunakan *Integer Programming* dengan menggunakan metode *Branch and Bound*.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul **"Penerapan Metode *Branch and Bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal di PT. Megatama Buana Perdana".**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana analisis penerapan metode *branch and bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal di PT. Megatama Buana Perdana?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *branch and bound.*

2. Permasalahan yang dibahas adalah tipe rumah tertentu yang dibangun PT. Megatama Buana Perdana.
3. Perusahaan membangun rumah berdasarkan tipe-tipe rumah tertentu dengan menggunakan total bahan bangunan dalam satu kali periode pembangunan.
4. Biaya bahan bangunan yang digunakan perusahaan dianggap konstan selama penelitian.
5. Bahan bangunan tetap tersedia selama masa pembangunan.

1.4. Tujuan Penelitian

Dari permasalahan yang telah diajukan sebelumnya, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penerapan metode *branch and bound* dalam Menentukan Keuntungan Maksimal pada PT. Megatama Buana Perdana.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:
   a. Sebagai sarana untuk menambah pengetahuan dan wawasan dalam penerapan teori-teori yang sudah diperoleh dalam perkuliahan.
   b. Dapat mengaplikasikan teori tentang metode *branch and bound.*
2. Bagi perusahaan PT. Megamatama Buana Perdana:
   a. Memberikan keuntungan yang maksimal bagi perusahaan.
   b. Dapat dijadikan acuan untuk meningkatkan keuntungan pembangunan perumahan.
3. Bagi Pembaca
   a. Menambah pemahaman tentang penerapan metode *branch and bound* dalam menentukan keuntungan maksimal.
   b. Bahan referensi dalam kajian optimasi memaksimalkan keuntungan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Program Linear

Program linear merupakan suatu metode untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (*objective function*), sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala (*constraints*). Adapun tujuan mempelajari pemrograman linear yaitu mampu dalam membuat model matematika dan menguasai analisisnya, memiliki wawasan dalam analisis untuk menentukan fungsi tujuan maksimal dan minimal dengan kendala yang ada, dan mampu menganalisis yang fungsi tujuannya maksimal atau minimal apabila terjadi perubahan pada fungsi tujuan dan kendala dilakukan secara manual serta dengan program Lindo (Aidawayati, 2013).

Program linear merupakan model matematika untuk mendapatkan alternatif penggunaan terbaik atas sumber-sumber organisasi. Kata sifat linear digunakan untuk menunjukkan fungsi-fungsi matematika yang digunakan dalam bentuk linear dalam artian hubungan langsung yang bersifat proporsional. Program menyatakan penggunaan teknik matematika tertentu. Jadi, pengertian program linear adalah suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis yang analisisnya menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan optimal terhadap suatu persoalan (Pasaribu, 2018).

Beberapa penyelesaian optimal dalam program linear dapat ditemukan pada titik ekstrim dalam daerah layak. Titik ekstrim adalah titik potong dari minimal dua garis kendala, sedangkan daerah layak adalah daerah pada grafik yang memuat titik-titik dan memenuhi semua kendala permasalahan (kumpulan dari semua penyelesaian layak). Penyelesaian layak adalah suatu solusi untuk semua kendala dipenuhi, sehingga titik ekstrim akan menunjukkan titik-titik yang dapat menghasilkan nilai fungsi tujuan yang paling besar (untuk kasus maksimal), seperti menghitung laba atau pendapatan dan nilai fungsi yang paling kecil (pada kasus minimal) seperti menghitung biaya *(cost)* atau waktu *(time)* (Aidawayati, 2013).

Pokok pikiran yang paling utama dalam menggunakan program linear adalah merumuskan masalah dengan jelas menggunakan sejumlah informasi yang tersedia. Kemudian menerjemahkan masalah tersebut ke dalam model matematika yang cara pemecahan masalahnya lebih mudah dan terstruktur agar didapatkan solusinya (Pasaribu, 2018).

Bentuk umum model program linear sebagai berikut:

Maksimalkan:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leq atau \ \geq \ b_i \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, untuk\ setiap\ j$$

dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, m$

$j = 1, 2, 3, \cdots, n$

atau dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut:

Maksimalkan fungsi tujuan:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n \tag{2.3}$$

dengan kendala:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 & + \cdots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 & + \cdots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 & + \cdots & + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array} \tag{2.4}$$

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geq 0$$

di samping itu, ada bentuk lain yaitu sebagai berikut:

a. Fungsi tujuan $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$ diminimalkan;

b. Beberapa kendala fungsional dengan pertidaksamaan lebih besar dari atau sama dengan

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_n; \quad (2.5)$$

c. Kendala fungsional dalam bentuk persamaan

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n; \quad (2.6)$$

d. Variabel keputusan memenuhi kendala tidak negatif yaitu

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geq 0; \quad (2.7)$$

dengan:

Z	adalah	fungsi tujuan yang merupakan nilai optimal (memaksimalkan atau meminimalkan)
x_j	adalah	tingkat kegiatan ke- j
c_j	adalah	kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan unit atau sumbangan setiap satuan keluaran kegiatan j terhadap Z
a_{ij}	adalah	banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan j
b_i	adalah	kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan
n	adalah	macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia
m	adalah	macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia.

Model program linear secara umum dapat dirangkaikan sebagai berikut (Aidawayati, 2013):

a. Fungsi yang akan dicari nilai optimalnya (Z) disebut fungsi tujuan *(objective function)* dapat berupa maksimal atau minimal.

b. Fungsi yang mempengaruhi persoalan terhadap fungsi tujuan yang akan dicapai disebut dengan fungsi batasan atau kendala *(constraints function)* yang merupakan ketidaksamaan dan persamaan.

c. Variabel yang memengaruhi persoalan dalam pengambilan keputusan disebut variabel keputusan *(decision variables)* yang berupa *non-negative.*

Persamaan (2.3) dapat disajikan sebagai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$ dengan $\boldsymbol{C}$ suatu vektor baris.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n) \tag{2.8}$$

dan $\boldsymbol{X}$ suatu vektor kolom

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Persamaan (2.4) dapat disajikan sebagai $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ dengan $\boldsymbol{A}$ suatu matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{11} adalah koefisien peubah x_j pada bari s ke-i persamaan (2.4) dan $\boldsymbol{B}$ suatu vektor kolom

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dengan demikian bentuk standar program linear dapat dituliskan sebagai:

1. Meminimalkan nilai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ dengan c suatu vektor baris, $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{B}$ suatu vektor kolom $\boldsymbol{A}$ suatu matriks, dan $\mathbf{0}$ suatu vektor nol disajikan sebagai vektor kolom dimensi n.
2. Meminimalkan nilai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n = p_0$ dengan p_i merupakan kolom ke i dari matriks A dan $p_0 = b$.

Vektor $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi syarat (2.3) dan (2.4) disebut penyelesaian *feasible* (fisibel atau layak) dari masalah program linear.

Ada dua metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model program linear, yaitu metode grafik dan metode simpleks.

2.1.1. Metode Grafik

Masalah program linear dapat diilustrasikan secara grafik jika ia hanya memiliki dua variabel keputusan. Meski masalah-masalah dengan dua variabel jarang terjadi dalam dunia nyata, penafsiran geometris dari metode grafik ini sangat bermanfaat (Mulyono, 2017).

Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dalam menetapkan alokasi sumber daya yang langka secara optimal dengan pendekatan grafik yaitu meminimalkan biaya dan memaksimalkan laba. Dalam proses penetapan kemungkinan-kemungkinan itu terdapat kendala-kendala yang bersifat membatasi dari usaha pencapaian kemungkinan-kemungkinan tersebut. Sehingga dengan adanya kendala-kendala yang bersifat membatasi akan berpengaruh pada besarnya nilai optimal dan tingkat variasi dari yang diharapkan untuk mencapai optimal tersebut. Variasi yang dimaksudkan nantinya akan tampak di dalam persamaan fungsi tujuan, sedangkan kendala-kendala yang bersifat membatasi akan nampak dalam persamaan fungsi kendala atau fungsi batasan-batasan.

2.1.1.1.Tujuan Maksimasi

Tujuan maksimasi dalam metode grafik diberikan sebagai berikut:

Fungsi tujuan (maksimalkan):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

Fungsi kendala:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \ge 0$$

2.1.1.2.Tujuan Minimasi

Tujuan minimasi dalam metode grafik diberikan sebagai berikut (Sunyoto, 2013):

Fungsi tujuan (minimalkan):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

Fungsi kendala:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & & \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & & \geq b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & & \geq b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geq 0$$

2.1.2. Metode Simpleks

Metode grafik tidak dapat menyelesaikan persoalan program linear yang memiliki lebih besar dari dua variabel keputusan, sehingga persoalan ini diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks. Asumsikan masalah program linear adalah fisibel, artinya bahwa persoalan program linear tersebut mempunyai penyelesaian. Metode simpleks adalah suatu metode yang secara sistematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel ke pemecahan dasar fisibel lainnya dan ini dilakukan berulang-ulang (dengan jumlah ulangan yang terbatas) sehingga akhirnya tercapai suatu pemecahan dasar yang optimal dan pada setiap tahapan menghasilkan suatu nilai dari fungsi tujuan yang selalu lebih besar, lebih kecil, atau sama dengan tahapan-tahapan sebelumnya (Aidawayati, 2013).

Penggunaan metode simpleks untuk menyelesaikan masalah-masalah program linear yaitu dengan cara terlebih dahulu diubah ke dalam suatu bentuk umum yang dinamakan bentuk standar *(standard form).* Beberapa bentuk standar model metode simpleks diberikan sebagai berikut:

1) Bentuk Standar Pertidaksamaan *(The Standard Inequality Form)*

   Maksimalkan:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

dengan kendala:

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & + \cdots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & + \cdots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 & + \cdots & + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geq 0$$

dengan $a_{ij}, c_j, dan\ b_j$ adalah konstanta-konstanta yang diketahui dan dapat ditentukan. Dalam notasi matriks, program linear dapat ditulis sebagai berikut:

Maksimalkan:

$$\boldsymbol{Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

dengan kendala:

$$\boldsymbol{AX} \leq \boldsymbol{B}\ dan\ \boldsymbol{X} \geq 0$$

dengan:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

dan

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) Bentuk Standar Persamaan *(The Standard Equality Form)*

Bentuk standar persamaan dapat diperoleh dari bentuk pertidaksamaan dengan mengubah tanda pertidaksamaan ($\geq$ dan $\leq$) menjadi tanda persamaan ($=$).

a) Pertidaksamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

dapat diubah menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

dengan $x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,n$ dan disebut *slack variable.*

b) Pertidaksamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

dapat diubah menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

dengan $x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,n$ dan disebut s*urplus variable*.

Berikut langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan program linier dengan metode simpleks (Handayani, 2014):

Konversikan formulasi persoalan ke dalam bentuk standar. Agar persamaan garis batasan memenuhi persyaratan penyelesaian daerah kelayakan (*feasible*) maka semua pertidaksamaan diubah menjadi persamaan dengan cara menambahkan variabel slack, surplus dan variabel buatan (*artificial variabel*) pada tiap batasan (*constraint*) serta member harga nol pada setiap koefisien tujuannya. Batasan dapat dimodifikasi sebagai berikut:

1) Untuk batasan bernotasi ($\leq$) diubah ke dalam bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*. Untuk batasan bernotasi ($\geq$) atau ($=$) diselesaikan dengan menambahkan variabel surplus dan variabel buatan. Dengan penambahan variabel buatan ini akan merusak sistem batasan, hal ini dapat diatasi dengan membuat suatu bilangan penalty M (M bilangan positif yang sangat besar) sebagai harga dari variabel buatan tersebut dalam fungsi tujuan. Untuk kasus maksimasi maka dibuat $-M$ sebagai harga dari variabel buatan dan untuk kasus minimasi dibuat $+M$ sebagai harga dari variabel buatan. Cara pendekatan ini dikenal dengan metode M besar (*Big M method*).
2) Susun persamaan-persamaan ke dalam tabel simpleks

Tabel 2. 1 Pivot Metode Simpleks

Variabel Basis	Harga Basis	X_1	…	X_n	Basis
X_{B1}	C_{B1}	a_{11}	…	a_{1n}	b_1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
X_{Bm}	C_{Bm}	a_{m1}	…	a_{mn}	b_m
$Z_j - C_j$		$Z_j - C_j$	…	$Z_j - C_j$	$C_B b$

3) Pilih kolom kunci, yaitu kolom yang memiliki nilai $(Z-)$ yang paling positif untuk kasus maksimasi atau yang memiliki nilai $(Z-)$ yang paling negatif untuk kasus minimasi.
4) Pilih baris kunci yang memiliki nilai indeks terkecil. Nilai indeks adalah perbandingan nilai kanan dengan kolom kunci.
5) Tentukan nilai *elemen cell*, yaitu nilai perpotongan antara kolom kunci dan baris kunci.
6) Lakukan iterasi dengan menentukan baris kunci baru, baris Z baru, dan baris variabel-variabel slack baru.
    a. Baris kunci baru ditentukan dengan membagi baris kunci lama dengan elemen cell.
    b. Baris Z baru dan baris-baris lainnya ditentukan dengan cara: Baris lama – (nilai kolom kunci baris yang sesuai × baris kunci baru).
    c. Letakkan nilai-nilai baris yang baru diperoleh ke dalam tabel.
7) Lakukan uji optimalisasi. Jika semua koefisien pada baris $(Z-)$ sudah tidak ada lagi yang bernilai positif (untuk kasus maksimasi) atau sudah tidak ada lagi yang bernilai negatif (untuk kasus minimasi) berarti sudah optimal. Jika kriteria belum terpenuhi, diulangi dari langkah 3.

Metode simpleks didasarkan pada langkah seperti berikut:

a. Dimulai pada suatu titik pojok yang layak, biasanya titik asal (yang disebut sebagai solusi awal).
b. Bergerak dari satu titik pojok layak ke titik pojok layak lain yang berdekatan. Pergerakan ini akan menghasilkan nilai fungsi tujuan yang lebih baik (meningkat untuk masalah maksimasi dan menurun untuk masalah minimasi). Jika solusi yang lebih baik telah diperoleh, prosedur simpleks dengan sendirinya akan menghilangkan semua solusi-solusi lain yang kurang baik.
c. Proses ini diulang sampai suatu solusi yang lebih baik tidak dapat ditemukan. Proses simpleks kemudian berhenti dan solusi optimum diperoleh. Diberikan

suatu permasalahan yang akan diselesaikan dengan metode simpleks sebagai berikut:

Contoh 2.1

Maksimumkan $Z = 3x_1 + 5x_2$

Batasan (constraint)

$$2x_1 \qquad \leq 8$$
$$3x_2 \leq 15$$
$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

Langkah 1: Mengubah fungsi tujuan dan batasan-batasan

Mengubah fungsi tujuan dan batasan-batasan

Fungsi tujuan

$Z = 3x_1 + 5x_2$ diubah menjadi $Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$

Fungsi batasan (diubah menjadi kesamaan dan ditambahkan slack variabel)

$2x_1 \qquad \leq 8$ menjadi $2x_1 \qquad + x_3 \qquad = 8$

$3x_2 \leq 15$ menjadi $3x_2 \qquad + x_4 \qquad = 15$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$ menjadi $6x_1 + 5x_2 \qquad + x_5 = 30$

Langkah 2: Menyusun persamaan-persamaan di dalam tabel

NK adalah nilai kanan persamaan, yaitu nilai di belakang tanda sama dengan (=). Untuk batasan 1 sebesar 8, batasan 2 sebesar 15, dan batasan 3 sebesar 30.

Variabel dasar adalah variabel yang nilainya sama dengan sisi kanan dari persamaan. Pada persamaan $2x_1 + x_3 = 8$, kalau belum ada kegiatan, berarti nilai $x_1 = 0$ dan semua kapasitas masih menganggur, maka pengangguran ada 8 satuan, atau nilai $x_3 = 8$. Pada tabel tersebut nilai variabel dasar $(x_3, x_{4,} x_5)$ pada fungsi tujuan pada tabel permulaan ini harus 0, dan nilainya pada batasan-batasan bertanda positif.

Tabel 2. 2 Matriks Awal

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	0	2	0	1	0	0	8
x_4	0	0	3	0	1	0	15
x_5	0	6	5	0	0	1	30

Langkah 3: Memilih kolom kunci

Kolom kunci adalah kolom yang merupakan dasar untuk mengubah tabel simpleks. Pilihlah kolom yang mempunyai nilai pada garis fungsi tujuan yang bernilai negatif dengan angka terbesar. Dalam hal ini kolom x_2 dengan nilai pada baris persamaan tujuan -5. Berilah tanda segi empat pada kolom x_2, seperti tabel berikut:

Tabel 2. 3 Penentuan Kolom Kunci

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Keterangan (Indeks)
Z	1	-3	-5	0	0	0	
x_3	0	2	0	1	0	0	
x_4	0	0	3	0	1	0	
x_5	0	6	5	0	0	1	

Jika suatu tabel sudah tidak memiliki nilai negatif pada baris fungsi tujuan, berarti tabel tersebut sudah optimal.

Langkah 4: Memilih baris kunci

Baris kunci adalah baris yang merupakan dasar untuk mengubah tabel simpleks, dengan cara mencari indeks setiap baris dengan membagi nilai-nilai pada kolom NK dengan nilai yang sebaris pada kolom kunci.

$$\boldsymbol{Indeks} = \frac{\boldsymbol{Nilai\ Kolom\ NK}}{\boldsymbol{Nilai\ kolom\ kunci}}$$

Untuk baris batasan 1 besarnya indeks $= \frac{8}{0} = \sim$, baris batasan 2 $= \frac{15}{3} = 5$, dan baris batasan 3 $= \frac{30}{5} = 6$. Pilih baris yang mempunyai indeks positif dengan angka terkecil. Dalam hal ini batasan ke-2 yang terpilih sebagai baris kunci. Beri tanda segi empat pada baris kunci. Nilai yang masuk dalam kolom kunci dan juga masuk dalam baris kunci disebut angka kunci.

Langkah 5: Mengubah nilai-nilai baris kunci

Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci, seperti Tabel 2.3. Bagian bawah $\left(\frac{0}{3}=0;\ \frac{3}{3}=1;\ \frac{0}{3}=0;\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3};\ \frac{0}{3}=\ 0;\ \frac{15}{3}=5\right)$. Gantilah variabel dasar pada baris itu dengan variabel yang terdapat di bagian atas kolom kunci (x_2).

Tabel 2. 4 Penentuan baris kunci

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NK	Keterangan (Indeks)
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	0	2	0	1	0	0	8	$8/0=\infty$
x_4	0	0	3	0	1	0	15	$15/3=5$
x_5	0	6	5	0	0	1	30	$30/5=6$
Z								
x_3								
x_2	0	0	1	0	$^1/_3$	0	5	
x_5								

Langkah 6: Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci

Rumus: Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris pertama (Z)

		[-3	-5	0	0	0,	0]	
	(-5)	[0	1	0	$^1/_3$	0,	5]	(-)
Nilai Baru	=	[-3	0	0	$^5/_3$	0,	25]	

Baris ke-2 (batasan 1)

		[2	0	1	0	0,	8]	
	(0)	[0	1	0	$^1/_3$	0,	5]	(-)
Nilai Baru	=	[2	0	0	0	0,	8]	

Baris ke-4 (batasan 3)

		[6	5	0	0	1,	30]	
	(5)	[0	1	0	$^{1}/_{3}$	0,	5]	(-)
Nilai Baru	=	[6	0	0	$^{-5}/_{3}$	1,	5]	

Langkah 7: Melanjutkan perbaikan

Ulangilah langkah-langkah perbaikan mulai langkah 3 sampai langkah ke-6 untuk memperbaiki tabel-tabel yang telah diubah/diperbaiki nilainya. Perubahan baru berhenti setelah pada baris pertama (fungsi tujuan) tidak ada yang bernilai negatif.

Tabel 2. 5 Iterasi Pertama

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NK	Keterangan (Indeks)
Z	1	-3	0	0	$^{5}/_{3}$	0	25	
x_3	0	2	0	1	0	0	8	$= {^{8}/_{2}} = 4$
x_4	0	0	1	0	$^{1}/_{3}$	0	5	
x_5	0	6	0	0	$^{-5}/_{3}$	1	5	$= {^{5}/_{6}}$ (minimum)
Z								
x_3								
x_2								
x_1	0	$^{6}/_{6}$	0	0	$^{-5}/_{18}$	$^{1}/_{6}$	$^{5}/_{6}$	

Baris pertama

		[-3	0	0	$^{5}/_{3}$	0,	25]	
	(-3)	[1	0	0	$^{-5}/_{18}$	$^{1}/_{6}$,	$^{5}/_{6}$]	(-)
Nilai Baru	=	[0	0	0	$^{5}/_{6}$	$^{1}/_{2}$,	27 $^{1}/_{2}$]	

Baris ke-2 (batasan 1)

		[2	0	1	0	0,	8]	
	(2)	[1	0	0	$^{-5}/_{18}$	$^{1}/_{6}$,	$^{5}/_{6}$]	(-)
Nilai Baru	=	[0	0	1	$^{5}/_{9}$	$^{-1}/_{3}$,	$6^{1}/_{3}$]	

Baris ke-3 tidak berubah karena nilai pada kolom kunci = 0

		[0	1	0	$^1/_3$	0,	5]	
	(0)	[1	0	0	$^{-5}/_{18}$	$^1/_6$,	$^5/_6$]	(-)
Nilai Baru	=	[0	1	0	$^1/_3$	0,	5]	

Tabel 2.6 Solusi Optimal

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NK
Z	1	0	0	0	$^5/_6$	$^1/_2$	$27\ ^1/_2$
x_3	0	0	0	1	$^5/_9$	$^{-1}/_3$	$6^1/_3$
x_2	0	0	1	0	$^1/_3$	0	5
x_1	0	1	0	0	$^{-5}/_{18}$	$^1/_6$	$^5/_6$

Baris pertama (Z) tidak ada lagi yang bernilai negatif. Sehingga tabel tidak dapat dioptimalkan lagi dan tabel tersebut merupakan hasil optimal.

Dari tabel final didapat:

$$x_1 = {}^5/_6$$

$$x_2 = 5$$

$$Z_{maksimum} = 27\ {}^1/_2$$

2.2. Program *Integer*

Penyelesaian program linear secara umum bukanlah bilangan bulat. Apabila variabel keputusannya merupakan kuantitas yang harus bulat (misalkan jumlah mobil, jumlah almari, dll), maka model program linear tidak dapat dipakai (Siang, 2014).

Salah satu asumsi teknik program linear adalah *divisibility* atau *fractionality*. Dengan kata lain, setiap variabel model dapat terjadi pada semua nilai *non-negative*, suatu nilai solusi yang kontinu. Dalam situasi keputusan tertentu, asumsi ini tidak realistik dan tidak dapat diterima. Misalnya, suatu solusi yang memerlukan 2,29 kapal selam dalam suatu sistem pertahanan adalah tidak mempunyai makna praktis. Dalam kasus ini, 2 atau 3 kapal selam harus disediakan (bukan 2,29). Masih banyak masalah lain dalam bidang industri dan bisnis yang memerlukan nilai bulat untuk variabel modelnya. Program *integer* adalah suatu program linear dengan tambahan persyaratan bahwa semua atau beberapa variabel bernilai *non-negative* (bulat), tetapi tidak perlu bahwa parameter model juga bernilai bulat (Mulyono, 2017).

Program *integer* merupakan spesialisasi program linear yang berupaya memecahkan program linear yang diselesaikan dengan metode simpleks yang optimal bukan dengan hasil bilangan bulat menjadi optimal dengan hasil bilangan bulat (Haming, 2017).

Program *integer* adalah suatu bentuk dari program matematika. Program *integer* merupakan suatu model program linear khusus yang digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah program linear di mana nilai dari variabel-variabel keputusan dalam penyelesaian optimal harus merupakan bilangan bulat. Persyaratan bahwa nilai variabel keputusan harus bulat mengingat nilai tidak mungkin dalam bilangan pecahan, seperti rumah, pabrik, tugas, dan lain sebagainya. Program *integer* mensyaratkan bahwa (Pasaribu, 2018):

1. Semua keputusan harus merupakan bilangan *integer* disebut *All Integer Linear Programming* (AILP).
2. Hanya sebagian keputusan yang merupakan bilangan *integer* disebut *Mixed Integer Linear Programing* (MILP).
3. Jika variabel keputusan harus bernilai 0 dan 1 disebut *Zero One Integer Linear Programming* (ZOILP).

Model dari program *integer* adalah sebagai berikut (Angeline, 2014):

Maksimalkan atau minimalkan:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leq ; = ; \geq \ b_i$$

$$x_j \geq 0, untuk\ setiap\ j$$

untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, m$

$j = 1, 2, 3, \cdots, n$

dengan:

Z	adalah	fungsi sasaran atau fungsi tujuan
x_j	adalah	variabel keputusan
c_j	adalah	koefisien fungsi tujuan
a_{ij}	adalah	koefisien fungsi kendala
b_i	adalah	nilai ruas kanan.

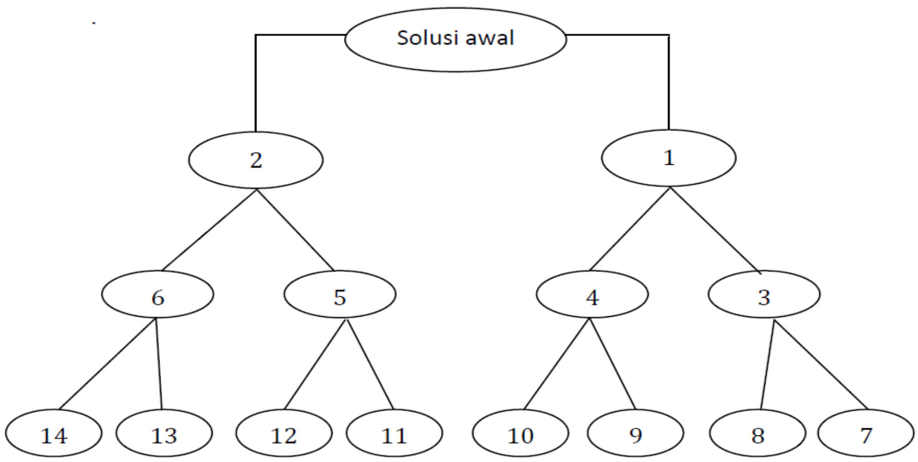
2.2.1 Metode Branch and Bound

Metode *branch and bound* pertama kali diperkenalkan oleh Land dan Doig (1960). Ide dasarnya adalah untuk membagi daerah solusi fisibel menjadi daerah solusi fisibel yang lebih kecil. Ini merupakan prosedur sederhana yang menetapkan batasan yang lebih tinggi atau rendah menjadi solusi saat menyelesaikan sub-masalah secara sistematis. Kemudian metode ini dimodifikasi oleh Dakin (1965) dan dengan sukses menerapkannya di dalam kitab undang-undang hukum dagang sehingga banyak orang dapat dengan mudah memecahkan persoalan program *integer* (Siang, 2014).

Metode *branch and bound* adalah salah satu metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal program linear yang menghasilkan variabel-variabel keputusan bilangan bulat. Sesuai dengan namanya, metode ini membatasi penyelesaian optimal yang akan menghasilkan bilangan pecahan dengan cara membuat cabang atas atau bawah bagi masing-masing variabel keputusan yang bernilai pecahan agar bernilai bulat sehingga setiap pembatasan akan menghasilkan cabang baru. Metode ini sering digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah program *integer* karena hasil yang diperoleh dalam penyelesaian optimal lebih teliti dan lebih baik dibanding metode lainnya. Kelemahan pokok metode ini adalah prosedur untuk mencapai hasil optimal yang sangat panjang. Prinsip dasar metode ini yaitu memecah daerah fisibel layak suatu masalah program linear dengan membuat sub-masalah (Pasaribu, 2018).

2.2.1.1 Pencabangan (Branching)

Pencabangan berarti memecah masalah menjadi dua masalah baru (masing-masing ditambah dengan kendala baru) dan menyelesaikan keduanya. Misalkan penyelesaian optimal program bilangan bulat memuat variabel x_j yang tidak bulat dengan $i_1 < x_j < i_2$ (i_1 dan i_2 merupakan dua bilangan bulat berurutan). Maka program dicabangkan menjadi dua soal baru. Cabang kiri ditambah dengan kendala $x_j \leq i_1$, sedangkan cabang kanan ditambah dengan kendala $x_j \geq i_2$.



Gambar 2. 1 Pencabangan Metode Branch and Bound

2.2.1.2 Pembatasan *(Bounding)*

Misalkan soal adalah memaksimalkan. Pencabangan dilakukan terus hingga ditemukan penyelesaian bilangan bulat (misal X^* dengan nilai maksimal $f(X^*)$). X^* menjadi batas bawah tetapi belum tentu merupakan penyelesaian optimal masalah mula-mula. Akan tetapi apabila X_a adalah penyelesaian lain (bulat ataupun tidak) dengan $f(X_a) < f(X^*)$ maka pencabangan dari titik X_a pasti tidak akan menghasilkan penyelesaian bilangan bulat yang optimal sehingga pencabangan tidak perlu dilakukan.

Jika masalahnya adalah meminimalkan maka penyelesaian bulat X^* yang pertama kali ditemukan menjadi batas atas. Semua penyelesaian lain yang memiliki nilai fungsi lebih besar dari $f(X^*)$ diabaikan dan tidak perlu dicabangkan.

2.2.1.3 Langkah-Langkah Metode *Branch and Bound*

Berikut ini adalah langkah-langkah penyelesaian suatu masalah maksimisasi dengan metode *branch and bound*:

1. Selesaikan masalah program linear dengan metode simpleks selesaikan masalah tanpa pembatasan bilangan integer.
2. Teliti solusi optimalnya, jika variabel keputusan yang diharapkan adalah bilangan *integer*, solusi optimum *integer* telah tercapai. Jika satu atau lebih variabel keputusan yang diharapkan ternyata bukan bilangan *integer*, lanjutkan ke langkah 3.
3. Jadikan solusi pada penyelesaian langkah 1 menjadi batas atas dan untuk batas bawahnya merupakan solusi yang variabel keputusannya telah diintegerkan (*rounded – down*).
4. Pilih variabel yang mempunyai nilai pecahan terbesar (artinya bilangan desimal terbesar dari masing-masing variabel untuk dijadikan pencabangan ke dalam beberapa sub-masalah. Tujuannya adalah untuk menghilangkan solusi yang tidak memenuhi persyaratan integer dalam masalah itu. Pencabangan itu dilakukan secara *mutually exclusive* untuk memenuhi persyaratan *integer* dengan jaminan tidak ada solusi fisibel (layak) yang diikutsertakan. Hasilnya adalah sebuah sub masalah dengan batasan ≤ atau batasan ≥ .
5. Untuk setiap sub-masalah, nilai optimum fungsi tujuan ditetapkan sebagai batas atas. Solusi optimum yang diintegerkan menjadi batas bawah (solusi yang sebelumnya tidak integer kemudian diintegerkan). Untuk semua sub- masalah yang memiliki batas atas kurang dari batas bawah yang ada, tidak diikutsertakan pada analisa selanjutnya. Suatu solusi *integer* fisibel (layak) adalah sama baik atau lebih baik dari batas atas untuk setiap sub masalah yang dicari. Jika solusi yang demikian terjadi, suatu sub masalah dengan batas atas terbaik dipilih untuk dicabangkan. Kembali ke langkah 4.

2.2.1.4 Pemilihan Titik dan Variabel yang Dicabangkan

Misalkan X_a dan X_b merupakan 2 titik yang penyelesaian optimalnya bukan merupakan bilangan bulat sehingga keduanya perlu dicabangkan. Apabila soalnya memaksimalkan, pilihlah titik yang nilai fungsinya lebih besar. Sebaliknya jika soalnya meminimalkan, pilihlah titik yang nilai fungsinya lebih kecil. Sedangkan variabel yang dicabangkan adalah variabel yang memiliki nilai pecahan terbesar (Siang, 2014).

2.2.1.5 Syarat Penghentian Pencabangan *(Fathoming)*

Pencabangan atau pencarian solusi suatu sub masalah dihentikan jika:

a. *Infeasible* atau tidak mempunyai solusi layak.
b. Semua variabel keputusan sudah bernilai *integer*.
c. Pada masalah memaksimalkan, penghentian pencabangan pada suatu sub-masalah dilakukan jika batas atas dari sub-masalah tersebut lebih kecil dari batas bawah.
d. Pada masalah meminimalkan, penghentian pencabangan pada suatu sub-masalah dilakukan jika batas bawah dari sub-masalah tersebut lebih besar dari batas atas.

2.2.1.6 Syarat Kondisi Optimal

Kondisi optimal pada metode *branch and bound* antara lain (Pasaribu, 2018):

a. Jika sudah tidak ada sub-masalah yang perlu dicabangkan lagi, maka solusi optimal sudah diperoleh.
b. Pada masalah memaksimalkan, solusi optimal merupakan solusi sub-masalah yang saat ini menjadi batas bawah *(lower bound).*
c. Pada masalah meminimalkan, solusi optimal merupakan solusi sub-masalah yang saat ini menjadi batas atas *(upper bound).*

2.2.1.7 Contoh Penerapan Metode *Branch and Bound*

Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala: $2x_1 + x_2 \leq 6$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

Penyelesaian:

Karena soal terdiri dari dua variabel maka penyelesaian akan dilakukan dengan metode grafik.

Sub-Masalah 1 (Masalah Mula-Mula)

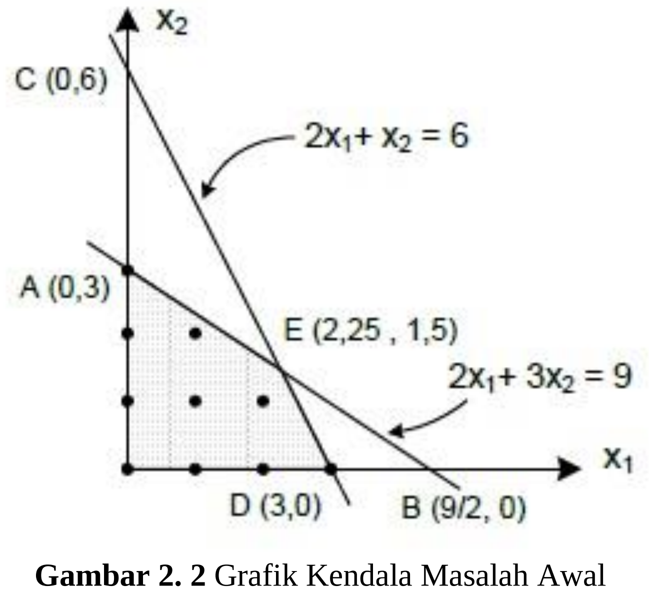
Gambar 2.2 menunjukkan grafik kendala masalah mula-mula. Titik-titik dalam daerah fisibel adalah penyelesaian bulatnya. Titik E merupakan titik perpotongan kedua kendala. Daerah fisibelnya adalah segi empat OAED yang titik sudut dan nilai fungsinya adalah:

$O\ (0,0)\ dengan\ f(O) = 3\ (0) + 4\ (0) = 0$

$A\ (0,3)\ dengan\ f(A) = 3\ (0) + 4\ (3) = 12$

$D\ (3,0)\ dengan\ f(D) = 3\ (3) + 4\ (0) = 9$

$E\ (2{,}25\ , 1{,}5)\ dengan\ f(E) = 3\ (2{,}25) + 4\ (1{,}5) = 12{,}75$



Gambar 2. 2 Grafik Kendala Masalah Awal

Titik maksimalnya adalah titik $E = (x_1, x_2) = (2{,}25\ , 1{,}5)$ dengan $f(E) = 12{,}75$. Baik x_1 maupun x_2 bukan merupakan bilangan bulat sehingga proses pencabangan harus dilakukan. Pecahan x_1 adalah 0,25 sedangkan pecahan x_2 adalah 0,5. Pencabangan dilakukan pada titik x_j

yang pecahannya paling besar yaitu pada x_2. Karena $x_2 = 1{,}5$ terletak antara 1 dan 2, maka pencabangan pertama dilakukan dengan menambahkan kendala $x_2 \leq 1$ (sub-masalah 2) sedangkan pencabangan kedua dilakukan dengan menambahkan kendala $x_2 \geq 2$ (sub-masalah 3).

Sub-Masalah 2 (Sub-Masalah 1 + kendala $x_2 \leq 1$)

Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala: $2x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_2 \leq 1$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

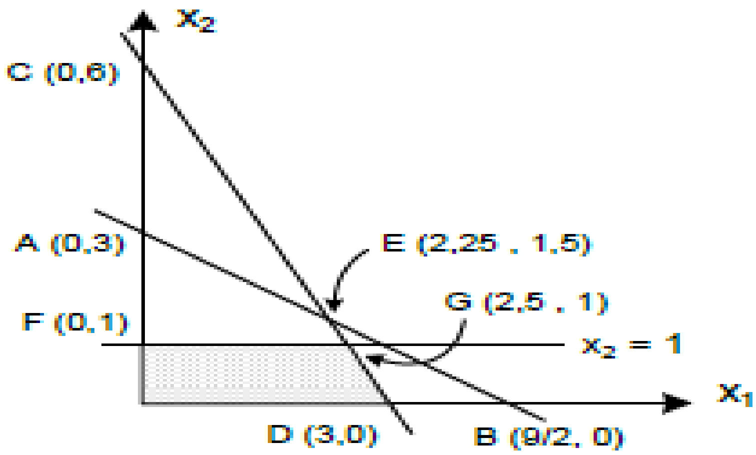
Gambar 2.3 merupakan grafik penyelesaian sub-masalah 2. Daerah fisibel adalah segi empat OFGD yang titik sudut dan nilai fungsinya adalah:

$O\ (0,0)\ dengan\ f(O) = 3\ (0) + 4\ (0) = 0$

$F\ (0,1)\ dengan\ f(F) = 3\ (0) + 4\ (1) = 4$

$D\ (3,0)\ dengan\ f(D) = 3\ (3) + 4\ (0) = 9$

$G\ (2{,}5\ ,1)\ dengan\ f(G) = 3\ (2{,}5) + 4\ (1) = 11{,}5$



Gambar 2. 3 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 2

Nilai maksimal terletak pada titik $G = (x_1, x_2) = (2{,}5\ ,1)$ dengan $f(G) = 11{,}5$. Penyelesaian sub-masalah 2 belum merupakan bilangan bulat sehingga bukanlah batas bawah penyelesaiannya.

Sub-Masalah 3 (Sub-Masalah 1 + kendala $x_2 \geq 2$)

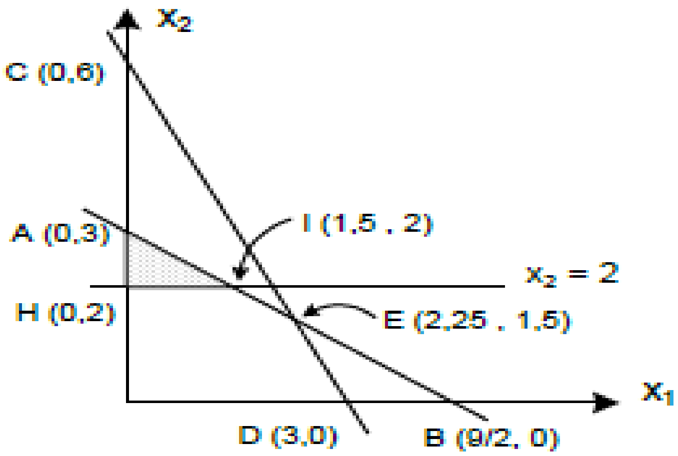
Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala: $2x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_2 \geq 2$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif



Gambar 2. 4 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 3

Gambar 2.4 merupakan grafik penyelesaian sub-masalah 3. Daerah fisibelnya adalah segitiga AHI dengan titik sudut dan nilai fungsi:

$A\ (0, 3)\ dengan\ f(A) = 3(0) + 4(3) = 12$

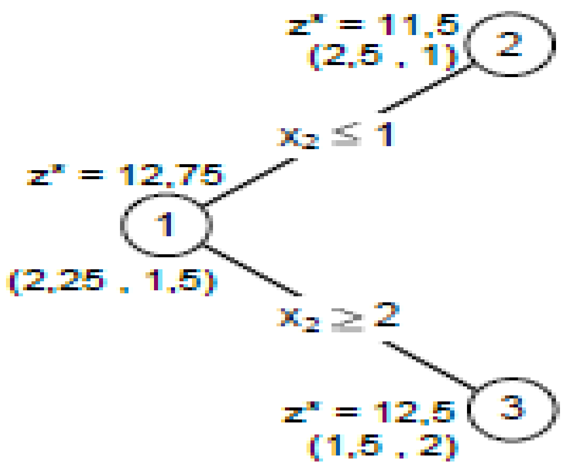
$H\ (0, 2)\ dengan\ f(H) = 3(0) + 4(2) = 8$

$I(1, 5, 2)\ dengan\ f(I) = 3(1{,}5) + 4(2) = 12{,}5$

Nilai maksimal terletak pada titik $I = (x_1, x_2) = (1{,}5\ ,2)$ dengan $f(I) = 12{,}5$. Penyelesaian sub-masalah 3 juga belum merupakan bilangan bulat sehingga bukanlah batas bawah penyelesaiannya.

Pencabangan sub-masalah 1 menjadi sub-masalah 2 dan sub-masalah 3 dapat dilihat pada **Gambar 2.5.**

Tampak dalam gambar tersebut bahwa baik titik 2 maupun 3 (menyatakan sub-masalah 2 dan sub-masalah 3) belum menghasilkan penyelesaian bulat sehingga keduanya memiliki kemungkinan untuk dicabangkan. Karena soalnya memaksimalkan, maka titik yang terlebih dahulu dicabangkan adalah titik yang nilai fungsinya lebih tinggi yaitu titik 3.



Gambar 2. 5 Pencabangan Sub-masalah 1

Satu-satunya variabel dalam penyelesaian sub-masalah 3 yang tidak bulat adalah $x_1 = 1{,}5$ yang terletak antara 1 dan 2. Maka pencabangan dilakukan dengan menambah kendala $x_1 \leq 1$ (sub-masalah 4) dan $x_1 \geq 2$ (sub-masalah 5).

Sub-Masalah 4 (Sub-Masalah 3 + kendala $\boldsymbol{x_1 \leq 1}$)

Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala:
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 \leq 1$$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

Daerah terarsir pada **Gambar 2.6** (segi empat AJKH) menunjukkan daerah fisibel sub-masalah 4 dengan koordinat dan nilai fungsi sebagai berikut:

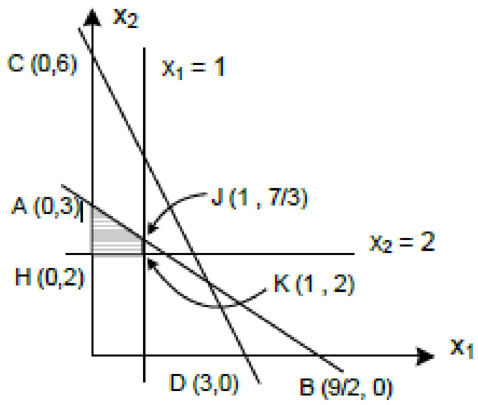
$A\ (0, 3)\ dengan\ f(A) = 3(0) + 4(3) = 12$

$J\ (1, 7/3)\ dengan\ f(J) = 3(1) + 4(7/3) = 12{,}33$

$K\ (1, 2)\ dengan\ f(K) = 3(1) + 4(2) = 11$

$H\ (0, 2)\ dengan\ f(H) = 3(0) + 4(2) = 8$

Titik maksimalnya adalah titik $J(1, 7/3)$ dengan $f(J) = 12{,}33$.



Gambar 2. 6 Grafik Penyelesaian Sub-masalah 4

Sub-Masalah 5 (Sub-Masalah 3 + kendala $x_1 \geq 2$)

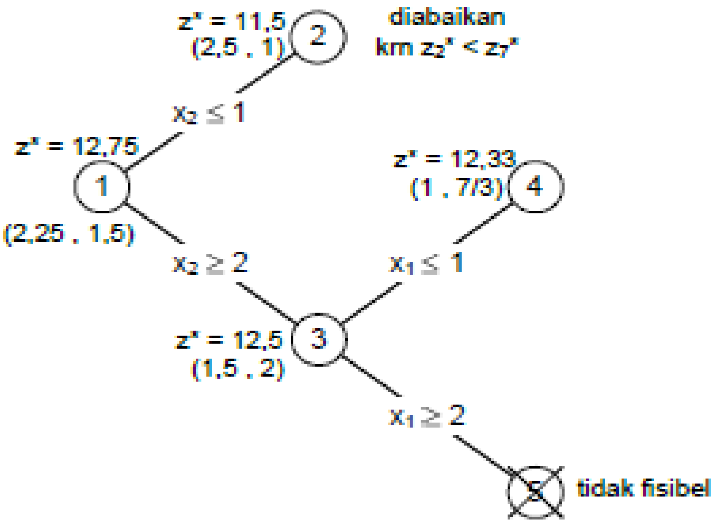
Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 2$$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

Kendala dalam sub-masalah 5 tidak menghasilkan daerah fisibel sehingga tidak memiliki penyelesaian. Keadaan ini dapat digambarkan dalam **Gambar 2.7**. Tampak bahwa ada 2 titik yang mungkin dicabangkan yaitu titik 2 (dengan nilai fungsi 11,5) dan titik 4 (dengan nilai fungsi 12,33). Keduanya bukan batas bawah penyelesaian karena keduanya tidak memiliki penyelesaian bulat. Akan tetapi, titik 4 memiliki nilai fungsi yang lebih besar sehingga titik 4 terlebih dahulu dicabangkan.



Gambar 2. 7 Pencabangan Sub-masalah 3

Variabel yang tidak bernilai bulat pada titik 4 adalah $x_2 = 7/3$ (terletak antara 1 dan 2). Maka pencabangan dilakukan dengan menambahkan kendala $x_2 \leq 2$ (sub-masalah 6) dan $x_2 \geq 3$ (sub-masalah 7).

Sub-Masalah 6 (Sub-Masalah 4 + kendala $x_2 \leq 2$)

Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
x_2 &\geq 2 \\
x_1 \quad &\leq 1 \\
x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

Perhatikan bahwa kendala ketiga dan terakhir dapat digabungkan menjadi kendala $x_2 = 2$ yang berupa sebuah garis horizontal. Dalam **Gambar 2.6**, daerah fisibelnya berupa garis HK dengan koordinat dan nilai fungsi:

$K(1,2)\ dengan\ f(K) = 3(1) + 4(2) = 11$

$H(0,2)\ dengan\ f(H) = 3(0) + 4(2) = 8$

Nilai maksimal fungsi adalah titik $K(1,2)$ dengan nilai fungsi $= 11$. Karena koordinat titik K merupakan bilangan bulat, maka titik K merupakan batas bawah dari masalah mula-mula. Semua titik (penyelesaian bulat ataupun tidak) yang memiliki nilai fungsi lebih kecil dari $f(K) = 11$ akan diabaikan dan tidak perlu dicabangkan.

Perhatikan bahwa hingga titik K diperoleh, satu-satunya titik yang belum dicabangkan adalah titik 2 dengan nilai fungsi 11,5. Karena nilai fungsi ini lebih besar dari $f(K)$ maka titik 2 belum dapat diabaikan.

Selanjutnya harus dihitung terlebih dahulu cabang kedua dari titik 4 dengan penambahan kendala $x_2 \geq 3$ (sub-masalah 7).

Sub-Masalah 7 (Sub-Masalah 4 + kendala $x_2 \geq 3$)

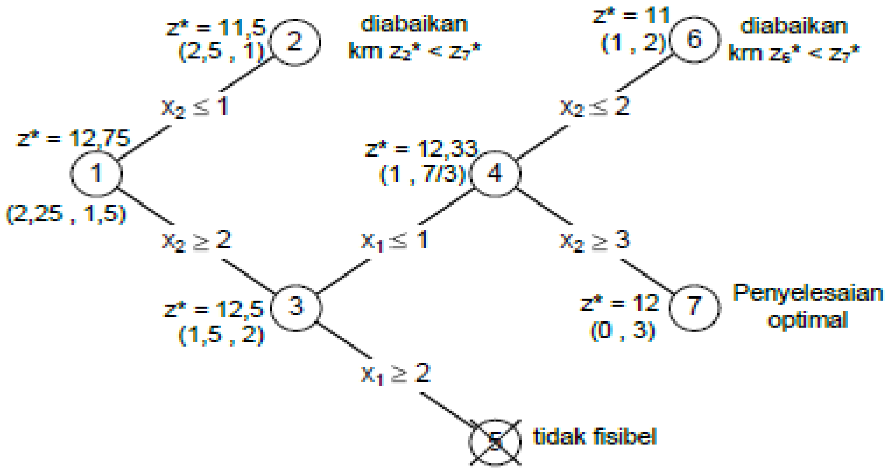
Maksimalkan: $z = 3x_1 + 4x_2$

Kendala:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
x_2 &\geq 2 \\
x_1 \qquad &\leq 1 \\
x_2 &\geq 3
\end{aligned}
$$

x_1, x_2 bilangan bulat tidak negatif

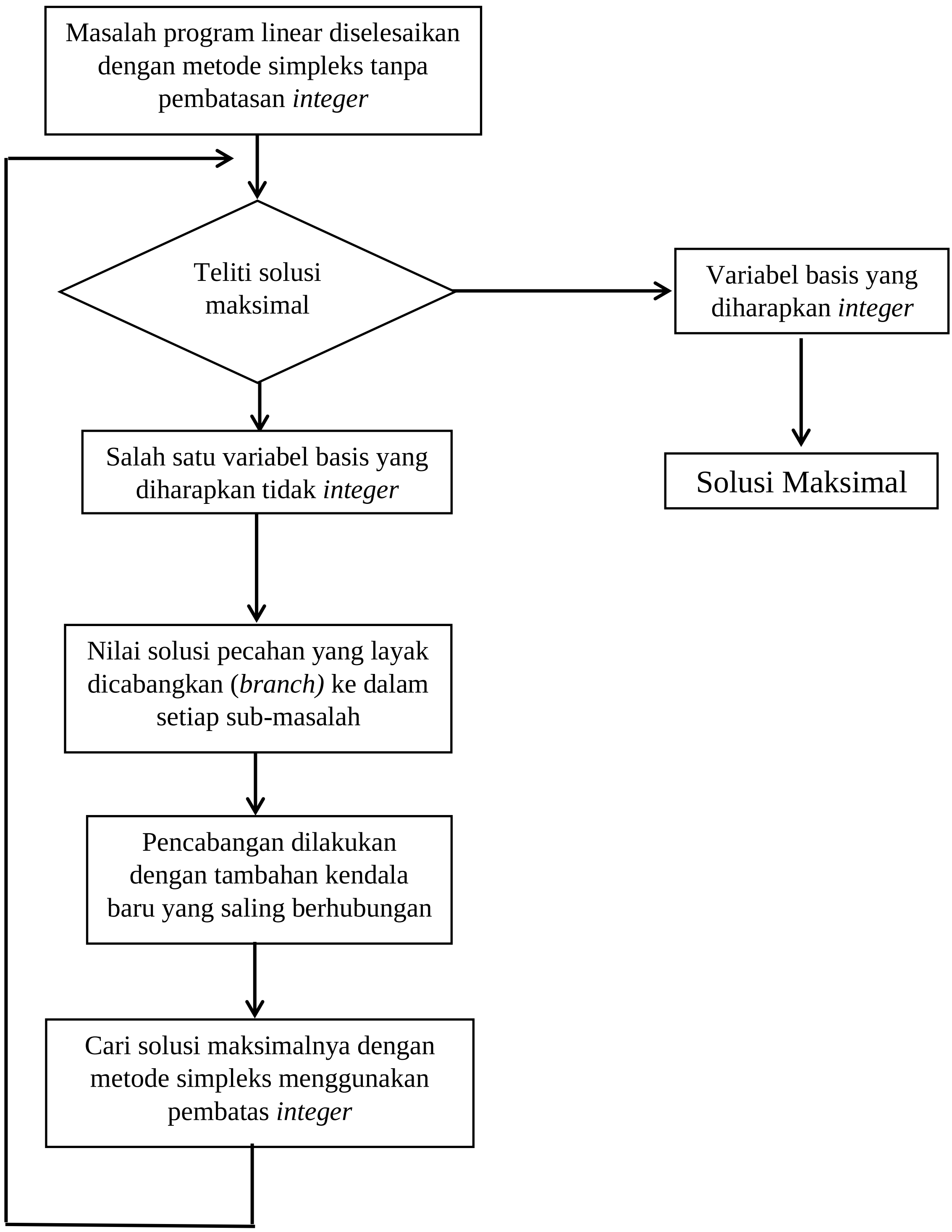
Perhatikan bahwa kendala 2 dan kendala 5 bersama-sama dapat diringkas sebagai $x_2 \geq 3$. Revisi kendala ini dalam **Gambar 2.6** menghasilkan sebuah titik fisibel yaitu titik A (0,3) dengan nilai fungsi yaitu: 3(0)+4(3) = 12. Pencabangan selengkapnya dapat dilihat pada **Gambar 2.8** berikut.



Gambar 2. 8 Pencabangan Sub-masalah 4

Sub-masalah 7 menghasilkan penyelesaian bulat yaitu Z* = 12 dengan nilai fungsi yang lebih besar dari nilai fungsi sub-masalah 6 yaitu Z* = 11 sehingga penyelesaian sub-masalah 7 menjadi batas bawah penyelesaian masalah mula-mula. Titik yang belum dicabangkan (titik 2 dan titik 6) memiliki nilai fungsi yang lebih kecil yaitu titik 6 memiliki nilai fungsi Z*=11 dan titik 2 memiliki nilai fungsi Z* = 11,5 dibanding nilai fungsi sub-masalah 7 yaitu z* = 12 sehingga dapat diabaikan. Berarti titik 7 merupakan penyelesaian optimal masalah mula-mula (Siang, 2014).

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode *branch and bound* disajikan pada **Gambar 2.9** berikut.



Gambar 2. 9 Alur Kerja Metode Branch and Bound