PELABELAN HARMONIS PADA GRAF MATAHARI SU_n, DENGAN n BILANGAN GANJIL

SKRIPSI

DHEA PUSPITA SARI

H011181301

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2022

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF MATAHARI SU_n, DENGAN n BILANGAN GANJIL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

DHEA PUSPITA SARI

H011 18 1301

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2022

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Pelabelan Harmonis pada Graf Matahari SU_n, dengan n Bilangan Ganjil

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 23 Agustus 2022

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL. 20 METERAI TEMPEL BF57AAKX014170145

Dhea Puspita Sari

NIM. H011181301

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF MATAHARI SU_n, DENGAN n BILANGAN GANJIL

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Pada 23 Agustus 2022

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh	:
Nama	: Dhea Puspita Sari
NIM	: H011181301
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Pelabelan Harmonis pada Graf Matahari SU_n, dengan n Bilangan Ganjil

Telah berhasil di pertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	( )
Sekretaris	: Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	( )
Anggota	: Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.	( )
Anggota	: Dra. Nur Erawaty, M.Si.	( )

Ditetapkan di	: Makassar
Tanggal	: 23 Agustus 2022

HALAMAN PENGESAHAN

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF MATAHARI SU_n, DENGAN n BILANGAN GANJIL

Disusun dan diajukan oleh:

DHEA PUSPITA SARI

H011181301

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 23 Agustus 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Ketua Program Studi Matematika,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Pelabelan Harmonis pada Graf Matahari SU_n, dengan n Bilangan Ganjil”**, sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin. Serta sekaligus selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji dan juga Penasehat Akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripai ini, serta telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program studi Matematika Fakultas MIPA UNHAS.
6. Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.

7. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan.
8. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
9. Orang tua dan keluarga saya yang telah memberikan dukungan moral dan material, serta bantuan, nasihat, perhatian, dan doa yang tidak pernah berhenti.
10. Renaldi Akbar Rifai, atas segala dukungan, semangat, perhatian, serta bantuan selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.
11. Teman-teman Tadika, serta Cica dan Kido yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan selalu memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman MATEMATIKA 2018 yang telah mendukung dan berjuang bersama selama masa perkuliahan.
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Makassar, 23 Agustus 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dhea Puspita Sari
NIM	: H011181301
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, meyetetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF MATAHARI SU_n, DENGAN n BILANGAN GANJIL

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database),* merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 23 Agustus 2022

Yang menyatakan,

Dhea Puspita Sari

ABSTRAK

Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul-simpul tidak kosong V dan himpunan busur-busur E yang menghubungkan simpul-simpul pada G. Pada tahun 1980 Graham dan Sloane pertama kali memperkenalkan pelabelan harmonis, graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan apakah graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil merupakan suatu graf harmonis. Dalam penelitian ini, akan diberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n. Pertama, diberikan pelabelan harmonis pada kasus-kasus sederhana yaitu untuk $n = 3, n = 5,$ dan $n = 7$. Selanjutnya dibuktikan bahwa graf matahari SU_n merupakan suatu graf harmonis.

Kata kunci : Graf, Graf Matahari, Pelabelan Harmonis, Graf Harmonis.

ABSTRACT

A graph G consists of two finite sets, namely the set of non-empty vertices V and the set of arcs E connecting the vertices in G. In 1980 Graham and Sloane first introduced harmonious labeling, a graph that has a harmonic label is called a harmonious graph. This study aims to determine whether the sun graph SU_n, with n odd numbers, is a harmonious graph. In this study, a harmonious labeling of the Sun graph will be given. first, given the harmonious labeling in the simple cases, namely for n=3, n=5, and n=7. Furthermore, it is proved that the sun graph SU_n is a harmonious graph.

***Keywords** : Graph, Sun Graph, Harmonious Labeling, Harmonious Graph.*

Judul	: Pelabelan Harmonis pada Graf Matahari SU_n, dengan n Bilangan Ganjil
NIM	: H011181301
Nama	: Dhea Puspita Sari
Program Studi	: Matematika

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
KATA PENGANTAR v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI viii
ABSTRAK ix
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
BAB I 1
PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan 3
1.5 Manfaat 3
BAB II 4
TINJAUAN PUSTAKA 4
2.1 Teori Graf 4
2.2 Jenis-Jenis Graf 7
2.3 Pelabelan Harmonis 15
BAB III 16

METODOLOGI 16

3.1 Jenis Penelitian 16

3.2 Prosedur Penelitian 16

BAB IV 17

HASIL DAN PEMBAHASAN 17

4.1 Graf Matahari $\boldsymbol{SU_n}$ 17

4.2 Pelabelan harmonis pada graf $\boldsymbol{SU_3}, \boldsymbol{SU_5}, \boldsymbol{SU_7}$ 18

4.3 Pelabelan harmonis pada graf $\boldsymbol{SU_n}$, dengan n bilangan ganjil 20

BAB V 25

KESIMPULAN DAN SARAN 25

5.1 Kesimpulan 25

5.2 Saran 25

DAFTAR PUSTAKA 26

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Graf yang merepresentasikan Jembatan Konigsberg. 4
Gambar 2. 2 Graf G dan graf H 6
Gambar 2. 3 Graf siklus C_3, C_4, dan C_5 7
Gambar 2. 4 Graf siklus C_5, penggandaan 5 kali K_1, dan graf matahari SU_5 8
Gambar 2. 5 Graf matahari SU_3 dan SU_7 8
Gambar 2. 6 Contoh graf timbangan.. 9
Gambar 2. 7 Graf Kincir W_3^6 atau graf persahabatan dan graf kincir W_4^4 9
Gambar 2. 8 Graf Kincir Tiga C_5^3 9
Gambar 2. 9 Graf n-ubur-ubur 10
Gambar 2. 10 Graf tangga L_5 10
Gambar 2. 11 Graf tangga segitiga variasi X_5 11
Gambar 2. 12 Graf tangga segitiga 11
Gambar 2. 13 Graf TLP_5 12
Gambar 2. 14 Graf TF_5 12
Gambar 2. 15 Graf tangga segitiga pita 13
Gambar 2. 16 Graf caterpillar 13
Gambar 2. 17 Graf firecracker 14
Gambar 2. 18 Graf prisma... 14
Gambar 2. 19 Graf kipas F_6 14
Gambar 2. 20 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_3 15
Gambar 4. 1 Graf matahari SU_7 17
Gambar 4. 2 Pelabelan harmonis pada Graf SU_3 18
Gambar 4. 3 Pelabelan harmonis pada Graf SU_5 19
Gambar 4. 4 Pelabelan harmonis pada Graf SU_7 20
Gambar 4. 5 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_N 24

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika, yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler. Euler merupakan seorang ahli matematika berkebangsaan Swiss.

Pada tahun 1736, Leonhard Euler dalam karya tulisnya yang berjudul "*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*", menjawab teka-teki jembatan Konigsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Konigsberg yang mempunyai 7 buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tidak dapat dilakukan. Berkat pekerjaan Euler yang diilhami melalui masalah jembatan Konigsberg memunculkan suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (*Graph Theory*) (Hasmawati, 2020).

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan simpul dalam V×V yang disebut busur. V disebut himpunan simpul dan E disebut himpunan busur dari graf G. setiap busur di E menghubungkan dua simpul dari V (Marsudi, 2016).

Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan sebagai $|V|$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$. Suatu pelabelan pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan, biasanya berupa bilangan bulat positif. Suatu pemetaan λ dari V ke $Z_{|E|}$ disebut pelabelan harmonis jika λ merupakan pemetaan sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label dengan $w(xy) = (\lambda(x) + \lambda(y)) \pmod{|E|}$ menghasilkan label yang berbeda. Karena label-label busur merupakan elemen $Z_{|E|}$ dan berbeda maka $\{w(xy) : xy \in E\} = Z_{|E|} = \{0, 1, 2, \ldots, |E| - 1\}$. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis (Grahams & Sloane, 1980).

Pada tahun 1980 Graham dan Sloane memperkenalkan pelabelan harmonis yang berawal dari masalah pada error-correcting code. Pelabelan harmonis memiliki beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan tersedia sebanyak $|E|$ saluran frekuensi, simpul-simpul pada graf merepresentasikan stasiun komunikasi dan busur pada graf tersebut merepresentasikan jalur komunikasi dari satu stasiun ke stasiun yang lain. Dengan memberikan label berbeda pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan label dua stasiun yang berkomunikasi yang menghasilkan label berbeda (Grahams & Sloane, 1980).

Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai pelabelan harmonis, seperti pelabelan harmonis pada graf timbangan (Sari, dkk., 2013), pelabelan harmonis pada graf kincir tiga dan graf n-ubur-ubur (Azka, dkk., 2017), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga variasi X_n (Atmadja & Sugeng, 2017), pelabelan harmonis gabungan graf tangga segitiga LS_n, dengan graf tangga segitiga variasi X_n (Kurniawan, 2019), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga jembatan XJ_n (Atmadja & Marhaeni, 2020), pelabelan harmonious pada beberapa kelas graf yang berhubungan dengan graf *ladder* (Rahim & Susanti, 2017), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga pita (Atmadja, 2021), *harmonious labeling for the corona graphs of small complete graph* (Pradana, dll., 2019), *on harmonious labeling of corona graph* (Bača & Youssef, 2014), *harmonious labeling of certain graph* (Tanna, 2013), *harmonious labeling on prisms graph* (Hinding, dkk., 2019), *harmonious labeling of windmill graphs and relate graphs* (Frank, 1982), pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur (Wirnadian, 2010), dan lain-lain. Sehingga dalam penelitian ini penulis memberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana memberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan pada penelitian ini akan dibatasi pada pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan apakah graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil merupakan graf harmonis.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah mendapatkan informasi mengenai pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n, dengan n bilangan ganjil.

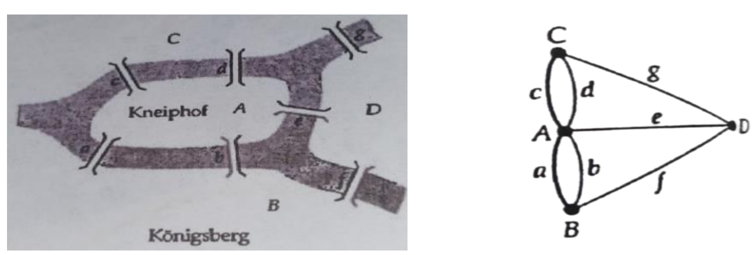
BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan dapat dijelaskan secara lebih sederhana.

Pada tahun 1736, Leonhard Euler dalam karya tulisnya yang berjudul "*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*", menjawab teka-teki jembatan Konigsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Konigsberg yang mempunyai 7 buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tidak dapat dilakukan. Berkat pekerjaan Euler yang diilhami melalui masalah jembatan Konigsberg memunculkan suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (*Graph Theory*) (Hasmawati, 2020).

Leonhard Euler dalam karya tulisnya, walaupun tidak ditulis dalam bahasa Graf, namun ide di dalamnya bersifat graf teoritis. Itulah sebabnya, karya Euler tersebut dapat dianggap sebagai karya pertama tentang teori graf. Dalam karya tulisnya, Euler menyederhanakan jembatan Konigsberg dengan merepresentasi kan daratan sebagai simpul dan jembatan sebagai busur, sehingga bentuk graf dari jembatan Konigsberg seperti pada Gambar 2. 1



Gambar 2. 1 Graf yang merepresentasikan Jembatan Konigsberg.

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Hingga saat ini teori graf banyak digunakan untuk memecahkan berbagai masalah misalnya masalah di bidang fisika, kimia, ilmu komunikasi, rekayasa listrik, genetika, dan lain-lain. teori graf juga erat kaitannya dengan beberapa cabang matematika lainnya diantaranya: teori matriks, analisis numerik, teori peluang dan lain-lain (Hasmawati, 2020).

Secara umum, graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari antara lain: struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain (Siang, 2006).

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan simpul dalam V×V yang disebut busur. V disebut himpunan simpul dan E disebut himpunan busur dari graf G. setiap busur di E menghubungkan dua simpul dari V (Marsudi, 2016).

Definisi 2.1 *Graf adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut simpul, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut busur.*

Secara matematika, dapat ditulis sebagai berikut : graf $G = (V(G), E(G))$ dengan V(G) = {u:u disebut simpul} dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ (Hasmawati, 2020).

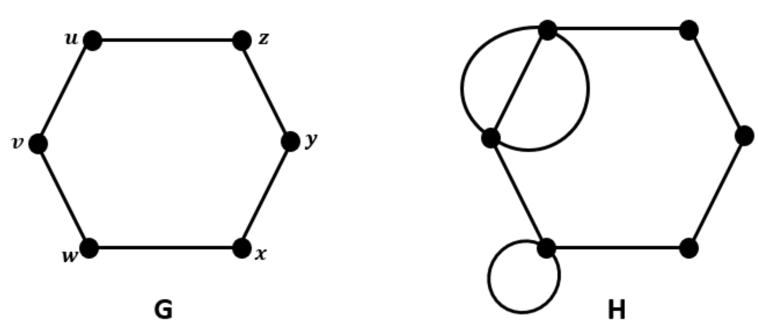
Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul-simpul (*vertices*) tidak kosong V dan himpunan busur-busur (*edge*) E yang menghubungkan simpul-simpul pada G. Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan dengan $|V|$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$. Setiap busur berhubungan dengan satu atau dua simpul. Simpul-simpul tersebut dinamakan titik ujung (*endpoint*).

Dua simpul dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat satu atau lebih busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut atau dengan kata lain, dua simpul dikatakan bertetangga jika keduanya hadir pada busur yang sama. Simpul dan busur yang terhubung dengannya dikatakan saling hadir (*incident*). Derajat (*degree*) dari suatu simpul menyatakan banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut, dinotasikan sebagai deg(v). Simpul terisolasi (*isolated vertex*) adalah simpul yang memiliki derajat 0. Simpul akhir atau daun (*leaf*) adalah simpul yang memiliki derajat 1. Jika pada graf G semua simpul memiliki derajat yang sama maka graf G disebut graf teratur berderajat r (*r-regular graph*). Suatu graf G disebut graf lengkap (*complete graph*) dengan n simpul jika semua simpul saling bertetangga, sehingga graf lengkap juga merupakan graf teratur dengan $r = n - 1$ (Wirnadian, 2010).

Dua busur atau lebih yang menghubungkan satu pasang simpul disebut busur berganda (*multiple edges*). Suatu busur yang simpul ujungnya sama disebut loop. Graph tanpa busur berganda dan tanpa loop disebut graph sederhana (*simple graph*). Jika u dan v simpul-simpul di G dan $e = uv$ suatu busur di G, maka dikatakan:

a. e menghubungkan u dan v,
b. u dan v terhubung langsung (*adjacent*),
c. u terkait (*incident*) dengan e,
d. e terkait (*incident*) dengan u,
e. u dan v disebut simpul ujung dari e. (Rahayuningsih, 2018)

Contoh 2.1



Gambar 2. 2 Graf G dan graf H

Pada Gambar 2.2, graf G adalah graf sederhana, dengan

V(G) $= \{u, v, w, x, y, z\}$ E(G) $= \{uv, vw, wx, xy, yz, zu\}$

|V(G)| = 6 |E(G)| = 6

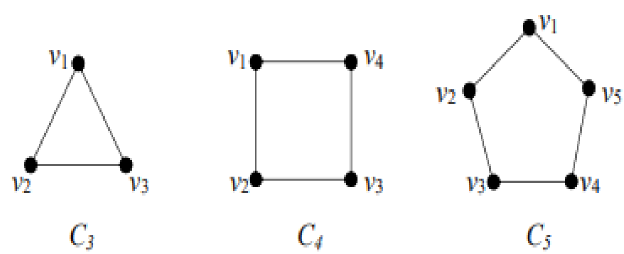
Dan graf H tidak sederhana karena memuat loop dan busur berganda.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Berikut adalah beberapa jenis-jenis graf, diantaranya graf siklus, graf corona, graf matahari, serta beberapa contoh-contoh graf harmonis.

Definisi 2.2 *Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf siklus dengan n simpul dinotasikan dengan* C_n*,* $n \geq 3$*, adalah graf dengan n simpul yaitu* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *dan busur-busurnya* $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$*,* (v_n, v_1). (Alyani, 2019)

Contoh 2.2



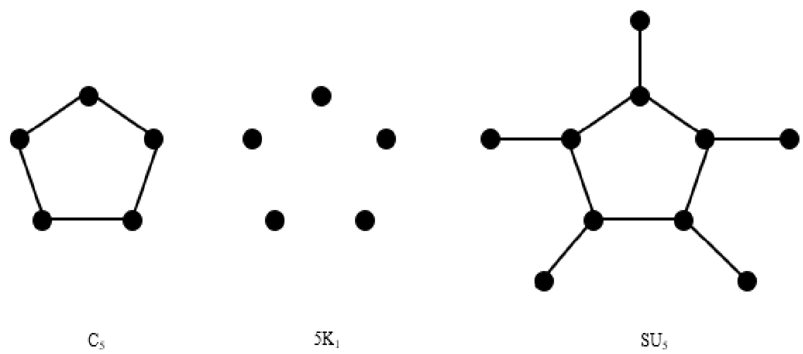
Gambar 2. 3 Graf siklus $\boldsymbol{C_3}$, $\boldsymbol{C_4}$, dan $\boldsymbol{C_5}$

Definisi 2.3 *Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf corona G dan H dinotasikan* $G \odot H$ *adalah graf yang diperoleh dari menggandakan graf H sebanyak n kali namakan* $H_1, H_2, \dots, H_n$*, dan mengaitkan setiap simpul* v_i *di G dengan setiap simpul di graf* $H_i, i = 1,2, \dots, n$.

Definisi 2.4 *Misalkan* $C_n, n \geq 3$ *dan graf trivial* K_1*. Graf matahari adalah graf corona antara siklus* C_n *dan graf trivial* K_1 $(C_n \odot K_1)$*. Graf matahari* $C_n \odot K_1$ *dinotasikan* $SU_n, n \geq 3$*. Graf matahari* $SU_n, n \geq 3$*, adalah graf berorde* $2n$ *yang* *diperoleh melalui penggandaan* K_1 *sebanyak n kali kemudian mengaitkan masing-masing satu simpul di* C_n*ke graf* K_1.

Contoh 2.3

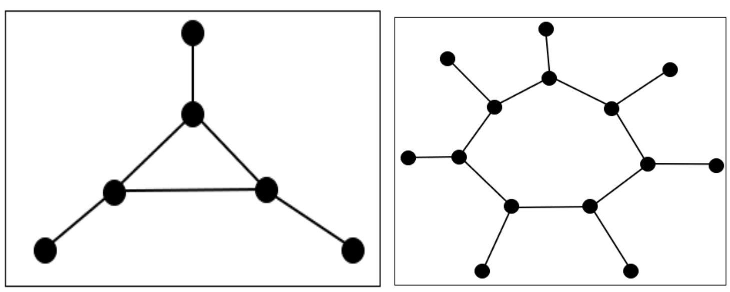
Graf SU_5 diperoleh dengan cara menggandakan K_1sebanyak 5 kali, kemudian masing-masing satu simpul di C_5 dikaitkan dengan satu simpul (K_1). Bentuk graf SU_5 dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut. (Hasmawati, 2020)



Gambar 2. 4 Graf siklus $\boldsymbol{C_5}$, penggandaan 5 kali $\boldsymbol{K_1}$, dan graf matahari $\boldsymbol{SU_5}$
Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Contoh 2.4

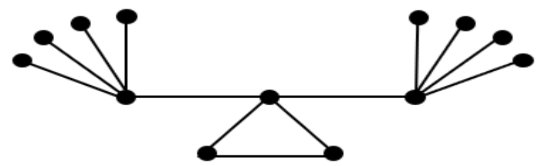
Graf matahari SU_3 dan SU_7



Gambar 2. 5 Graf matahari $\boldsymbol{SU_3}$ dan $\boldsymbol{SU_7}$

Definisi 2.5 *Graf timbangan merupakan gabungan antara graf siklus* C_3 *dengan 2 graf bintang* S_r *(graf bintang dengan r buah simpul), dimana antara pusat* S_r, C_3*, dan* S_r *yang lain dihubungkan dengan sebuah lintasan. Banyaknya simpul pada graf timbangan selalu ganjil.* (Sari, dkk., 2013)

Contoh 2.5

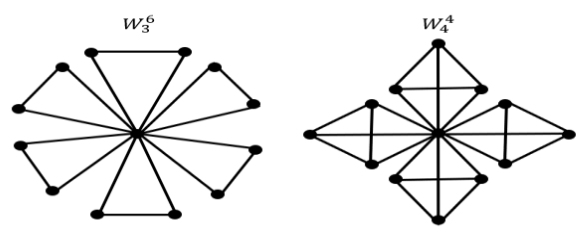


Gambar 2. 6 Contoh graf timbangan

Definisi 2.6 *Graf kincir (windmill graph) dinotasikan* W_n^m *adalah graf yang diperoleh dari m kopi graf lengkap* K_n *dengan mengambil satu simpul sebagai simpul Bersama.*

Khusus untuk $n = 3$ yakni graf kincir W_3^m disebut **graf persahabatan** dan dinotasikan f_m. (Hasmawati, 2020)

Contoh 2.6

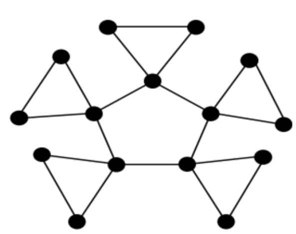


Gambar 2. 7 Graf Kincir $\boldsymbol{W_3^6}$ atau graf persahabatan dan graf kincir $\boldsymbol{W_4^4}$

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Definisi 2.7 *Diberikan* C_n*adalah graf siklus yang memiliki simpul sebanyak n. graf yang diperoleh dengan menempelkan* C_3*di setiap simpul pada* C_n*dinamakan Graf kincir Tiga yang dinotasikan dengan* C_n^3.

Contoh 2.7

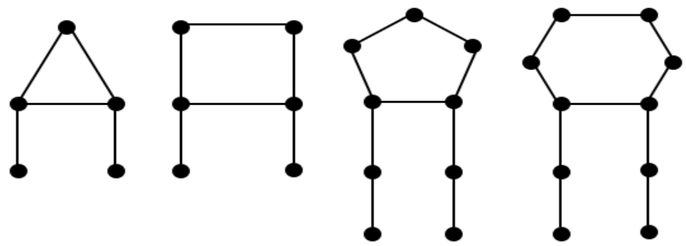


Gambar 2. 8 Graf Kincir Tiga $\boldsymbol{C_5^3}$

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-ubur, 2017

Definisi 2.8 *Graf n-Ubur-ubur* ($n \geq 3$) *adalah graf yang diperoleh dari suatu graf* C_n *dan dua graf* $P_{\left|\frac{n}{2}\right|}$ *dengan melekatkan salah satu ujung simpul masing-masing* $P_{\left|\frac{n}{2}\right|}$ *pada sebarang dua simpul di* C_n *yang berdekatan.* (Azka, dkk., 2017)

Contoh 2.8



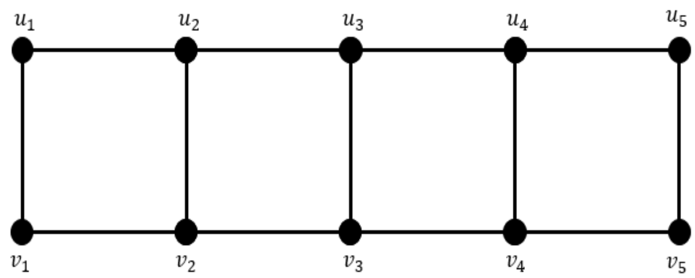
Gambar 2. 9 Graf n-ubur-ubur

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-ubur, 2017

Definisi 2.9 *Graf tangga* L_n *adalah graf tangga sederhana dengan himpunan simpul dan himpunan busur yaitu:*

$$V(L_n) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\}$$
$$E(L_n) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\}$$

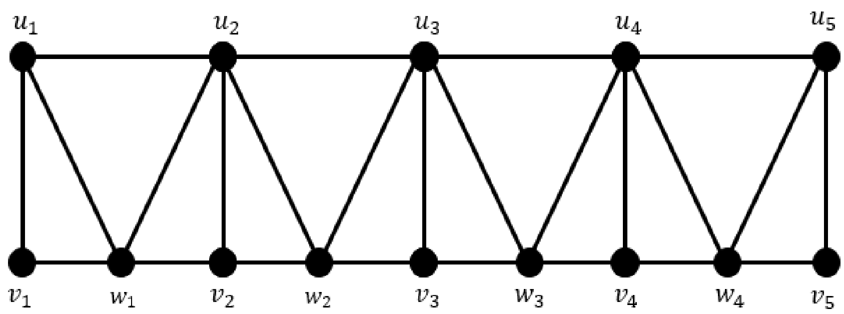
Contoh 2.9



Gambar 2. 10 Graf tangga $\boldsymbol{L_5}$

Definisi 2.10 *Graf tangga* X_n *adalah graf tangga segitiga variasi, dengan himpunan simpul* $V(X_n) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup (w_i | 1 \leq i \leq n-1\}$ *dan himpunan busur* $E(X_n) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i+1} w_i | 1 \leq i \leq n-1\}$. (Atmadja & Sugeng, 2017)

Contoh 2.10

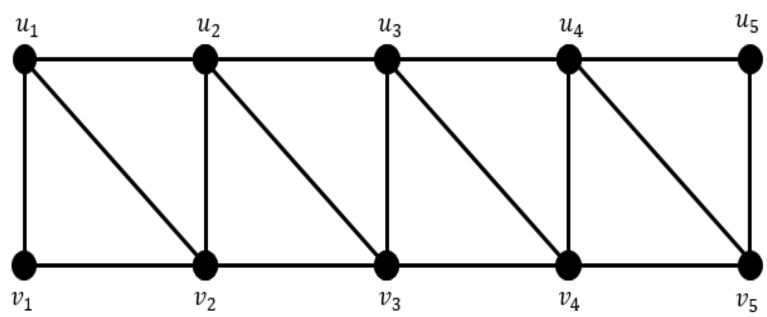


Gambar 2. 11 Graf tangga segitiga variasi $\boldsymbol{X_5}$

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga segitiga variasi Xn, 2017

Definisi 2.11 *Graf tangga segitiga (graf triangular ladder) adalah graf yang diperoleh dari graf* L_n *dengan menambahkan busur* $u_i v_{i+1}$ *untuk setiap* $1 \leq i \leq n-1$ *pada graf* L_n *dengan* $\{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ *dan* $\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ *adalah himpunan simpul pada kedua graf* P_n *pada graf* L_n.

Contoh 2.11

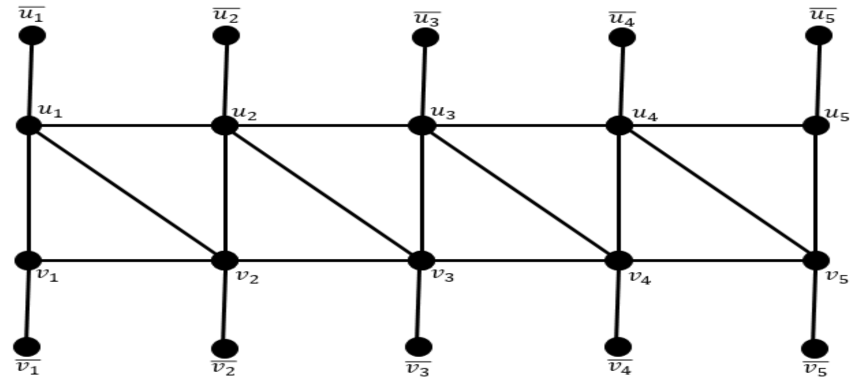


Gambar 2. 12 Graf tangga segitiga

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.12 *Graf triangular ladder pendant dinotasikan dengan* TLP_n *adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu busur pada setiap simpul dari graf tangga segitiga dimana busur tersebut terhubung dengan satu simpul baru yang masing-masing berbeda untuk setiap simpul pada graf tangga segitiga.*

Contoh 2.12

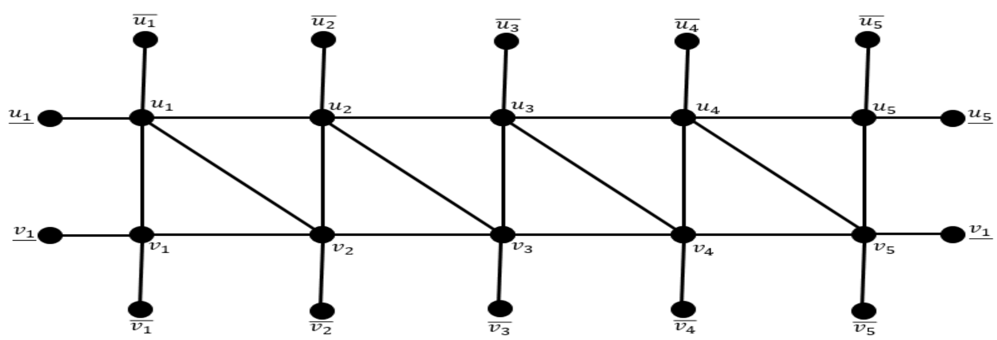


Gambar 2. 13 Graf $\boldsymbol{TLP_5}$

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.13 *Graf triangular fence dinotasikan dengan* TF_n *adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu busur pada simpul* u_1, u_n, v_1*, dan* v_n *dari* TLP_n *di mana busur tersebut terhubung dengan satu simpul baru yang masing-masing berbeda untuk* u_1, u_n, v_1*, dan* v_n. (Rahim & Susanti, 2017)

Contoh 2.13



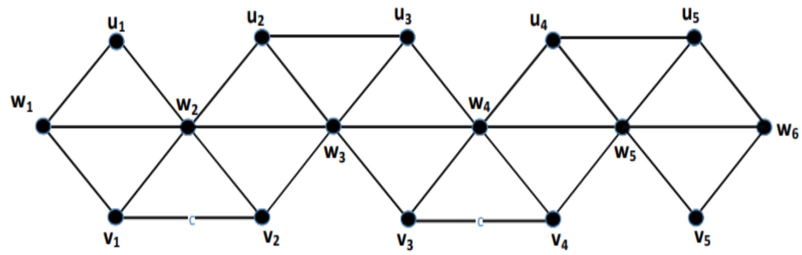
Gambar 2. 14 Graf $\boldsymbol{TF_5}$

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.14 *Graf tangga segitiga pita adalah graf dengan himpunan simpul yaitu* $V(G) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup (w_i, w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ *dan himpunan busur yaitu*

$E(G) = \{w_i u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup$
$\{w_i w_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_{2i-1} v_{2i}, u_{2i} u_{2i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$.
(Atmadja, 2021)

Contoh 2.14

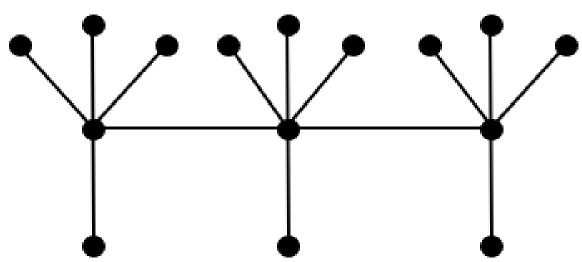


Gambar 2. 15 Graf tangga segitiga pita

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Pita, 2021

Definisi 2.15 *Graf ulat atau pohon ulat (caterpillar tree) adalah graf yang setiap daunnya berjarak 1 dari simpul internal lintasan. Graf caterpillar pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Schwenk pada tahun 1973. Mereka mengatakan bahwa graf caterpillar adalah graf yang apabila simpul-simpul ujungnya dilenyapkan akan diperoleh graf lintasan.* (Hasmawati, 2020)

Contoh 2.15

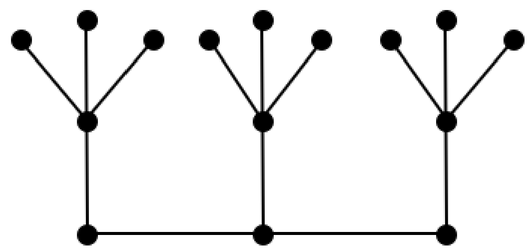


Gambar 2. 16 Graf caterpillar

Definisi 2.*16* *Graf firecracker adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu simpul luar dari barisan graf bintang oleh suatu lintasan. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul luar dari barisan graf bintang disebut backbone dari graf firecracker. Graf firecracker juga bisa diperoleh dengan memindahkan busur-*

busur yang menghubungkan simpul-simpul pusat pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat dari graf caterpillar.(Alyani, 2019)

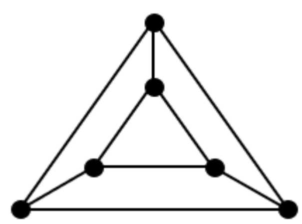
Contoh 2.16



Gambar 2. 17 Graf firecracker

Definisi 2.17 *Graf prisma adalah graf kali antara siklus* $C_m, m \geq 3$ *dengan lintasan* $P_n, n \geq 2$*, ditulis* $C_m \times P_n$*. Graf prisma dinotasikan* $P_{m,n}$.

Contoh 2.17

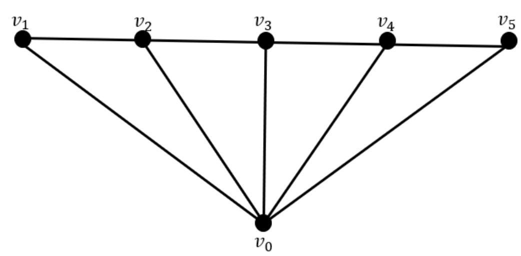


Gambar 2. 18 Graf prisma

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Definisi 2.18 *Graf kipas dengan n simpul,* $n \geq 3$ *dinotasikan sebagai* F_n*, dengan* $F_n = P_{n-1} + K_1$*. Jika* $v_0 \in K_1$ *dan* $v \in P_{n-1}$ *maka busur* $v_0v_i \in E(F_n)$ *disebut jari-jari dari* F_n. (Hasmawati, 2020)

Contoh 2.18



Gambar 2. 19 Graf kipas $\boldsymbol{F_6}$

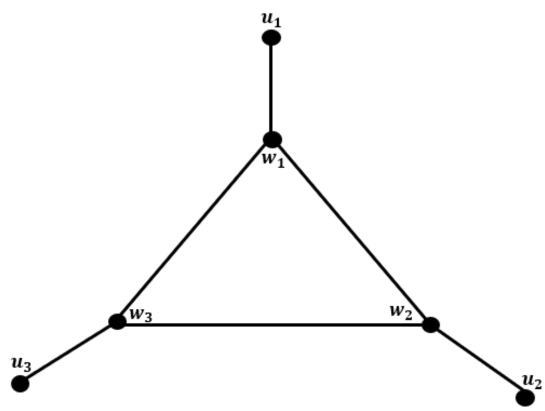
2.3 Pelabelan Harmonis

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.19 *Misal* $G = (V, E)$ *suatu graf maka pemetaan* $\lambda : V \to Z_{|E|}$ *disebut suatu pelabelan harmonis pada* G *jika bobot setiap busur berbeda, dimana bobot bobot busur* xy *adalah* $w(xy) = (\lambda(x) + \lambda(y))\ (mod\ |E|)$.

Definisi 2.20 *Misal* $G = (V, E)$ *suatu graf dan* $\lambda : V \to Z_{|E|}$ *suatu pemetaan harmonis pada* G, *maka disebut* G *graf harmonis.*

Contoh 2.19



Gambar 2. 20 Pelabelan harmonis pada graf matahari $\boldsymbol{SU_3}$

Pada Gambar 2.20, terdapat suatu pemetaan $\lambda : V \to Z_6$ yaitu

$\lambda(u_1) = 0,\ \lambda(u_2) = 2,\ \lambda(u_3) = 4,\ \lambda(w_1) = 1,\ \lambda(w_2) = 3,\ \lambda(w_3) = 5.$

Berdasarkan definisi pemetaan tersebut diperoleh bobot setiap busur dari graf matahari SU_3 adalah

$w(w_1u_1) = 1,$	$w(w_2u_2) = 5,$	$w(w_3u_3) = 3,$
$w(w_1w_2) = 4,$	$w(w_2w_3) = 2,$	$w(w_3w_1) = 0.$

Karena setiap bobot busur berbeda, maka $\lambda : V \to Z_6$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis. Oleh karena itu graf matahari SU_3 merupakan suatu graf harmonis.

BAB III

METODOLOGI

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka (*library research*), yaitu penelitian yang dilakukan oleh peneliti dengan mengumpulkan sejumlah buku-buku atau jurnal-jurnal yang berkaitan dengan masalah dan tujuan penelitian. Yang dilakukan dengan cara menelaah, mencermati, dan membandingkan sumber kepustakaan untuk memperoleh data.

3.2 Prosedur Penelitian

- Mengumpulkan literasi serta menggali informasi mengenai pelabelan harmonis,
- Memberikan pelabelan harmonis pada graf SU_3, SU_5, SU_7,
- Menentukan pola pelabelan harmonis pada graf SUn, dengan n bilangan ganjil.