POLINOMIAL KARATERISTIK DAN DETERMINAN SERTA INVERS DARI BEBERAPA MATRIKS *SYLVESTER-KAC*

JEKI SAPUTRA

H011 18 1025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022

POLINOMIAL KARATERISTIK DAN DETERMINAN SERTA INVERS DARI BEBERAPA MATRIKS *SYLVESTER-KAC*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

JEKI SAPUTRA
H011 18 1025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

MEI 2022

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Polinomial Karakteristik dan Determinan serta Invers dari Beberapa Matriks Sylvester-Kac

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 23 Agustus 2022

Jeki Saputra
H011181025

POLINOMIAL KARAKTERISTIK DAN DETERMINAN SERTA INVERS DARI BEBERAPA MATRIKS *SYLVESTER-KAC*

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc	**Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**
NIP. 196808031992021001	**NIP. 199012282018031001**

Pada 23 Agustus 2022

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: Jeki Saputra
NIM	: H011181025
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Polinomial Karakteristik dan Determinan serta Invers dari Beberapa Matriks *Sylvester-Kac*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar sarjana Sains pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Dewan Penguji

Ketua	: Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	( )
Sekretaris	: Andi Muhammad Anwar, S.Si. M.Si.	( )
Anggota	: Dr. Firman, S.Si., M.Si.	( )
Anggota	: Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 23 Agustus 2022

HALAMAN PENGESAHAN

POLINOMIAL KARAKTERISTIK DAN DETERMINAN SERTA INVERS DARI BEBERAPA MATRIKS *SYLVESTER-KAC*

Disusun dan diajukan oleh:

JEKI SAPUTRA

H011181025

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang (jangan lupa diubaha yah) dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc
NIP. 196808031992021001

Pembimbing Pertama,

Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.
NIP. 199012282018031001

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si. M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains. Saya menyadari bahwa sulit untuk menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
4. Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku Pembimbing Utama yang senantiasa meluangkan waktu dan pikiran dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini
5. Bapak Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Pertama yang senantiasa meluangkan waktu dan pikiran dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini sekaligus dunia perkuliahan penulis.
6. Bapak Dr. Firman, S.Si, M.Si. selaku Penguji yang telah banyak memberi masukan demi tersusunnya skripsi ini yang lebih baik
7. Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah banyak memberi masukan dalam penyusunan skripsi ini, dan selaku Penasihat Akademik yang telah membimbing penulis selama perkuliahan
8. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan
9. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.

10. Ayah tercinta yang selalu memberi dukungan, motivasi, dan perhatian penuh selama penulis menjalani perkuliahan.
11. Keluarga dan kerabat atas dukunganya selama ini.
12. Sahabat-sahabat saya Nando, Andry, Andhika dan masih banyak lagi yang telah banyak membantu dalam perkuliahan ini.
13. Kakak tingkat saya Nurhidaya Rahim, S.Si. yang selalu memotivasi dan memberi pencerahan penulis selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
14. Kawan-kawan Tadika Mesra yang menemani perjuangan penulis selama perkuliahan ini.
15. Teman-teman Matematika 2018.
16. Teman-teman KKN SIDRAP 1, IPMI SIDRAP, dan Pusat Konsultasi Matematika satu kalimat untuk kalian “bersyukur pernah menjadi bagian dari kalian”.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu dan kemajuan peradaban.

Makassar, 23 Agustus 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Jeki Saputra
NIM	: H011181025
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmih saya yang berjudul:

Polinomial Karakteristik dan Determinan serta Invers dari Beberapa Matriks *Sylvester-Kac*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya

Dibuat di Makassar pada tanggal 23 Agustus 2022

Yang menyatakan,

Jeki Saputra

ABSTRAK

Matriks *Sylvester-Kac* disebut juga matriks clement. Matriks *Sylvester-Kac* memiliki banyak kegunaan dan banyak pengaplikasian pada abad ini. Matriks *Sylvester-Kac* yang dikembangkan dalam tugas akhir ini adalah matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* dan matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac*. Perhitungan polinomial karakteristik, determinan, bahkan invers selalu menjadi tantangan bagi matematikawan untuk menemukannya. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan diberikan rumusan polinomial karakteristik, determinan dan invers dari matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* dan matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac*.

Kata kunci: *Matriks T-Sequence-Sylvester-Kac, Matriks T-Sequence-Double-Sylvester-Kac, Polinomial Karakteristik, Determinan, Invers.*

Judul	:	Polinomial Karakteristik dan Determinan serta Invers dari Beberapa Matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac*
Nama	:	Jeki Saputra
NIM	:	H011181025
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

The Sylvester-Kac matrix is also known as the Clement matrix. The Sylvester-Kac matrix has many uses and applications in this century. The Sylvester-Kac matrix developed in the final project is the T-Sequence-Sylvester-Kac matrix and the T-Sequence-Double-Sylvester-Kac matrix. The calculation of the characteristic polynomial, the determinant, and inverse has always been a challenge for mathematicians to find. Therefore, in this final project will be given the formulation of the characteristics polynomial, determinant and inverse of the T-Sequence-Sylvester-Kac matrix and the T-Sequence-Double-Sylvester-Kac matrix.

Keyword : *The T-Sequence-Sylvester-Kac matrix, The T-Sequence-Double-Sylvester-Kac, Charateristics Polynomial, Determinant, Inverse.*

Title	:	*Charateristic Polynomials and Determinants along Inverses of Some Sylvester-Kac Matrices*
Name	:	*Jeki Saputra*
Student ID	:	*H011181025*
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$A_{m\times n}$	: Matriks dengan m baris dan n kolom
A_n	: Matriks dengan n baris dan n kolom
$\det(A)$	: Determinan matriks A
A^{-1}	: Invers matriks A
A^T	: Transpose matriks A
$P_{n,A}(\lambda)$	: Polinomial Karakteristik matriks A yang berukuran n
(x_n)	: Barisan bilangan real

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar linear merupakan bidang studi matematika yang mempelajari tentang persamaan linear dan solusinya, vektor, transformasi linear maupun matriks. Aljabar linear banyak digunakan di bidang lain seperti menyelesaikan persamaan diferensial, teori koding, dan banyak lainnya.

Dalam aljabar linear, topik yang cukup menarik dibahas yaitu matriks. Istilah matriks sendiri pertama kali digunakan oleh matematikawan Inggris James Sylvester, yang mendefinisikan istilah tersebut pada tahun 1850 "**Oblong arrangement of terms**" yang artinya pengaturan istilah dalam bentuk persegi (persegi panjang). Sylvester memperkenalkan pekerjaannya dalam suatu buku yang berjudul "**Memoir on the Theory of Matrices**" yang dipublikasi pada tahun 1858 (Anton, dkk., 2019).

Matriks yang berbentuk persegi dapat dipetakan oleh fungsi tertentu ke suatu bilangan rill. Fungsi ini disebut sebagai fungsi determinan. Determinan atau fungsi determinan bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear atau mencari invers dari matriks. Karena matriks persegi merupakan suatu gelanggang yang mempunyai identitas, maka wajar jika dikatakan bahwa matriks punya invers, dengan syarat bahwa matriks yang mempunyai invers tersebut merupakan matriks non-singular (Anton, dkk., 2019).

Dilain hal terdapat suatu konstanta λ dan vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ sehingga $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Konstanta λ ini disebut sebagai nilai eigen dari matriks persegi A. Nilai eigen atau eigenvalue merupakan kata yang terdiri dari setengah Bahasa Jerman dan setengah Bahasa Inggris, eigen yang dalam Bahasa Jerman berarti "memiliki", dan value yang dalam Bahasa Inggris yang berarti "nilai". Jadi secara etimologi nilai eigen (*eigenvalue*) adalah nilai yang dimiliki oleh suatu matriks (Anton, dkk., 2019).

Untuk menemukan determinan, nilai eigen, dan invers dari suatu matriks, dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Perhitungan yang dilakukan secara numerik atau komputasi membutuhkan waktu jika ukuran matriks yang diberikan sudah cukup besar. Oleh karena itu, jika digunakan suatu relasi rekurensi dalam menghitung, maka waktu komputasi yang dibutuhkan lebih sedikit daripada setiap unsur yang ditentukan rumus tersendirinya, dikarenakan dalam relasi rekurensi cukup menghitung beberapa nilai awal dari relasi yang dibutuhkan.

Pada tahun 1854 James Sylvester menerbitkan jurnal yang berjudul "**Théoreme sur les determinants**" dalam jurnal tersebut Sylvester memperkenalkan matriks Sylvester-Kac dimana dalam penelitian yang dilakukan oleh Kac memberikan determinan dan polinomial karaktertistik dari matriks tersebut. Oleh de Fonseca (2020) dan Chu (2019) pada penelitian yang berbeda memberikan determinan, polinomial, spektrum, dan nilai eigen dari matriks Sylvester-Kac. Pada penelitian lain dilakukan oleh Jiang, Zheng, Li (2022) tentang matriks Fibonacci-Sylvester-Kac dimana dalam penelitian oleh Jiang, Zheng,Li menemukan polinomial karateristik, determinan dan invers dari Fibonacci-Sylvester-Kac.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis mengambil judul penelitian "**Polinomial Karakteristik dan Determinan serta Invers dari beberapa Matriks *Sylvester-Kac***".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana polinomial karakteristik, determinan, dan invers dari matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac*?
2. Bagaimana polinomial karateristik, determinan, dan invers dari matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac*?

1.3 Batasan Masalah

Adapun Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Barisan yang diberikan tidak terdapat suku yang nol
2. Vektor eigen yang dibahas hanya bentuk dan nilai eigen yang bersesuaian.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penelitian ini bertujuan:

1. Menemukan polinomial karakterisitik, determinan, dan invers dari matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac*.
2. Menemukan polinomial karakteristik, determinan, dan invers dari matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:
   a. Sebagai sarana untuk memperkaya pengetahuan dan wawasan mengenai ilmu matematika khususnya pada bidang aljabar linear
   b. Sebagai sarana untuk menambah keterampilan dalam menerapkan teori-teori yang telah diperoleh dalam perkuliahan maupun yang diperoleh dari studi mandiri.
2. Bagi Pembaca:
   a. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman tentang teori-teori dalam bidang aljabar linear
   b. Sebagai bahan referensi dalam kajian keilmuan matematika.
3. Bagi Universitas Hasanuddin:

   Sebagai pelengkap literatur mengenai matematika khususnya aljabar linear yang dapat dimanfaatkan oleh setiap civitas akademik Universitas Hasanuddin.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Menurut Bartle (2011) barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ ke himpunan bilangan real. Notasi x_n menyatakan nilai barisan tersebut di n.

Beberapa barisan yang umum dikenal saat ini adalah barisan aritmatika, dan barisan geometri.

Contoh 2.1

1. 1,2,3,… yang dapat dinyatakan $(x_n) = (n)$ merupakan barisan aritmatika.
2. 2,4,8,16,… yang dapat dinyatkan $(x_n) = (2^n)$ yan merupakan barisan geometri.

2.2 Relasi Rekurensi

Relasi rekurensi memiliki banyak jenis, salah satunya yaitu relasi rekurensi linier yang akan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1

Relasi rekurensi linier yang berorder k mempunyai bentuk

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k} \qquad (2.\ 1)$$

dengan $a_1, a_2, ..., a_k$ suatu konstanta (Detemple & Webb, 2014).

Persamaan (2.1) disebut juga relasi rekurensi linier homogen yang berorde k untuk suatu barisan (h_n). Dalam relasi rekurensi terdapat suatu nilai awal untuk menentukan barisan relasi khusus dari suatu relasi rekurensi yang umum (Chuan-Chong & Khee-Meng, 1992).

Contoh 2.2

Misalkan diberikan relasi rekurensi berikut dengan $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = 2a_n \ , n = 1,2, \ldots$$

maka relasi rekurensi tersebut membentuk barisan $1,2,4, \ldots$, karena $a_2 = 2a_1 = 2, a_3 = 2a_2 = 4$, dan seterusnya.

2.3 Matriks

2.3.1 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan angka yang berbentuk persegi (persegi panjang). Susunan angka ini disebut sebagai entri dalam matriks. Ukuran suatu matriks dinyatakan oleh banyaknya baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dimilikinya. Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom), dan matriks yang hanya terdiri atas satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Matriks dengan m baris dan n kolom dapat dituliskan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.\ 2)$$

dengan a_{ij} menyatakan entri baris ke-i kolom ke-i (Anton, dkk., 2019). Matriks A dengan banyak baris m dan kolom n dinotasikan $A_{m \times n}$.

Contoh 2.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 27 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Jenis-jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yaitu:

1. Matriks Nol

   Matriks disebut matriks nol jika semua entri dari matriks tersebut nol (Anton, dkk., 2019). Matriks nol disimbolkan O.

Contoh 2.4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Persegi

   Matriks dengan n baris dan n kolom disebut dengan matriks persegi berorde n, dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut dengan elemen diagonal utama dari matriks persegi. Matriks persegi dapat dituliskan (Anton, dkk., 2019)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e & 3 & \pi \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Identitas

   Matriks identitas adalah matriks persegi dengan diagonal utamanya 1 dan lainnya nol. Matriks identitas disimbolkan dengan huruf kapital I, dan untuk menyertakan ukuran matriks identitas dituliskan I_n (Anton, dkk, 2019).

Contoh 2.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Kebalikan Identitas

   Matriks kebalikan identitas adalah matriks identitas yang dipertukarkan barisnya dimana baris ke-i menjadi baris ke-$n + 1 - i$. Matriks kebalikan identitas dituliskan dengan $\hat{I}_n$ yang menyatakan matriks kebalikan identitas yang berorde n (Jiang, dkk., 2022).

Contoh 2.7

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Diagonal

   Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua entri di luar diagonal utama bernilai nol. Secara umum matriks diagonal $D_{n\times n}$ dapat dituliskan (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.8

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2022 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Tridiagonal

   Matriks tridiagonal adalah matriks persegi dengan entri $a_{ij} = 0$ dimana $|i - j| > 1$ (Zhang, 2010). Diagonal selain diagonal utama disebut sebagai subdiagonal (Fonseca, 2020).

Contoh 2.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Matriks Transpose

   Diberikan matriks $A_{m\times n}$. Matriks transpose A ditulis A^t akan menjadi matriks $n \times m$ dengan $a_{ji}^t = a_{ij}$ untuk semua i dan j dimana $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$ (Jacob, 1990).

Contoh 2.10

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Simetri

Matriks persegi A disebut matriks simetri jika $A = A^t$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.11

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Matriks *Centrosimetri*

   Matriks persegi A disebut matriks *centrosimetri* jika $a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$ atau ekuivalen dengan $\hat{I}_n A \hat{I}_n = A$ (Zhao & Li, 2015).

Contoh 2.12

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Matriks Invers

    Misalkan A adalah matriks persegi, dan jika ada suatu matriks B yang memiliki ukuran sama yang memenuhi $AB = BA = I$, maka A disebut invertibel dan B disebut invers dari A atau $B = A^{-1}$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka berlaku $BA = AB = I$.

11. Matriks Singular

    Matriks A disebut matriks singular jika tidak ada matriks B yang memenuhi $AB = BA = I$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.14

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Matriks Ortogonal

    Matriks persegi A disebut matriks ortogonal jika transposnya sama dengan inversnya, dengan kata lain $A^{-1} = A^t$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.15

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

maka $A^t = A^{-1}$.

13. Matriks Blok

Matriks blok merupakan matriks yang diblok menjadi beberapa matriks yang mempunyai ukuran yang lebih kecil dengan memasukkan garis vertikal dan garis horizontal di antara baris dan kolom matriks semula. (Sari, dkk., 2020).

Contoh 2.16

Misalkan diberikan matriks persegi $Z_{4\times 4}$ sebagai berikut

$$Z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriks Z dapat dipartisi menjadi 4 buah matriks kecil atau dapat dinyatakan

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dengan ukuran dari masing-masing matriks tersebut 2×2 sehingga masing-masing matriks dapat dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

14. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya memiliki satu baris. Kadang-kadang matriks baris disebut juga dengan vektor baris. Secara umum matriks baris dapat dituliskan (Anton, dkk., 2019)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Contoh 2.17

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya memiliki satu kolom. Terkadang matriks kolom disebut juga dengan vektor kolom. Secara umum matriks kolom dapat dituliskan (Anton, dkk., 2019)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.18

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_1$$

Vektor kolom $\boldsymbol{a}$ dengan banyak entri n disebut simetri jika dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{a} = \begin{cases} \left(\mu, \hat{I}_{\frac{n}{2}}\mu\right)^t, & untuk\ \ n \text{ genap} \\ \left(\nu, a_{\frac{n+1}{2}}, \hat{I}_{\frac{n-1}{2}}\nu\right)^t, & untuk\ n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

dan vektor kolom $\boldsymbol{b}$ dengan banyak entri n disebut *skew* simetri jika dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{b} = \begin{cases} \left(\mu, -\hat{I}_{\frac{n}{2}}\mu\right)^t, & untuk\ \ n \text{ genap} \\ \left(\nu, 0, -\hat{I}_{\frac{n-1}{2}}\nu\right)^t, & untuk\ n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

dimana μ, ν adalah vektor kolom dengan banyak entri masing-masing $\frac{n}{2}$ dan $\frac{n-1}{2}$, sedangkan $\hat{I}_{\frac{n}{2}}$ dan $\hat{I}_{\frac{n-1}{2}}$ merupakan matriks kebalikan identitas dengan orde $\frac{n}{2}$ dan $\frac{n-1}{2}$ masing-masing (Jiang, dkk., 2022).

16. Submatriks

Misalkan A matriks $m \times n$. Untuk indeks-indeks himpunan $i \subseteq \{1, \dots, m\}$ dan $j \subseteq \{1, \dots, n\}$, $A[i, j]$ menyatakan submatriks dengan entri yang terletak di baris dengan indeks i dan terletak di kolom dengan indeks j.

Contoh 2.19

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}[\{2,3\}, \{1,2\}] = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Jika $i = j$, maka submatriks $A[i, i]$ dapat dituliskan $A[i]$. $A[i]$ disebut submatriks utama dari A. Untuk A matriks persegi $n \times n$ dan $k \in \{1, \dots, n\}$, maka $A[\{1, \dots, k\}]$ disebut sebagai submatriks utama terkemuka (*leading* *principal submatrix)* dan $A[\{k,\dots,n\}]$ disebut submatriks utama tertinggal (*trailing principal submatrix)*.

Jika submatriks $r \times r$ adalah submatriks utama, maka determinan dari matriks tersebut disebut determinan minor utama dan jika submatriks tersebut submatriks utama terkemuka maka determinannya disebut determinan minor utama terkemuka (Horn & Johnson, 2013).

17. Matriks Similar

    Misalkan diberikan matriks persegi A dan B. Matriks A dikatakan similar dengan matriks B, jika terdapat matriks invertibel P sedemikian sehingga $B = P^{-1}AP$ (Anton, dkk., 2019).

18. Matriks Modal

    Misalkan diberikan matriks $A_{n\times n}$, dan terdapat matriks diagonal D yang diagonal nya merupakan nilai eigen dari A. Maka terdapat suatu matriks invertibel M sehingga $D = M^{-1}AM$, dimana kolom ke$-i$ matriks M merupakan vektor eigen x_i yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i dari A. Matriks M yang demikian disebut sebagai matriks modal (Bronson, 1970).

19. Matriks *Sylvester-Kac*

    Matriks *Sylvester-Kac* juga dikenal sebagai matriks clement, adalah matriks tridiagonal $(n+1)\times(n+1)$ dimana diagonal utamanya nol semua, satu subdiagonalnya $(1,2,\dots,n)$, sedangkan subdiagonal lainnya dalam urutan terbalik atau $(n,n-1,\dots,1)$. Matriks *Sylvester-Kac* dapat dituliskan (Fonseca, 2020)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ n & 0 & 2 & & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & n-1 & \\ & & & 2 & 0 & n \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.20

Matriks Sylvester-Kac 4×4 yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. Matriks *Fibonacci Sylvester-Kac*

    Matriks *Fibonacci-Sylvester-Kac* merupakan tipe matriks *Sylvester-Kac* dengan bilangan Fibonacci. Matriks *Fibonacci-Sylvester-Kac* $n \times n$ dinotasikan $K_{F,n}$ yang entri

$$\left(K_{F,n}\right)_{ij} = \begin{cases} F_i & j = i+1, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ F_{n+1-i} & j = i-1, \quad 2 \leq i \leq n, \\ 0, & else \end{cases} \tag{2. 3}$$

    dengan $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ merupakan bilangan Fibonacci (Jiang, dkk., 2022).

2.3.3 Operasi Matriks

Ada beberapa operasi matriks yang akan diperkenalkan yaitu operasi penjumlahan antar matriks, pengurangan antar matriks, perkalian skalar dengan matriks, dan perkalian matriks dengan matriks. Berikut definisi dari operasi dari matriks-matriks tersebut.

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Definisi 2.2

Misalkan A dan B merupakan matriks yang memiliki ukuran sama, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, maka $A + B = C$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dan $A - B = D$ dengan $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.21

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 9 & -13 \end{bmatrix},$$

sedangkan $A + C, A - C, B + C,$ dan $B - C$ tidak terdefinisi, karena ukuran matriks A dan C tidak sama, demikian juga B dengan C.

2. Perkalian skalar dengan matriks

Definisi 2.3

Misalkan A matriks $m \times n$, *dan k adalah sebarang skalar, maka kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri di A dengan k. Matriks kA disebut dengan kelipatan skalar dari A* (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.22

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

maka diperoleh

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Definisi 2.4

Misalkan diberikan matriks $A_{m\times r}$ *dan matriks* $B_{r\times n}$*, maka hasil kali* AB *merupakan matriks* $m \times n$ *yang entrinya ditentukan sebagai berikut: Untuk menentukan baris ke*$-i$ *dan kolom ke*$-j$ *dari* AB*, perhatikan baris ke*$-i$ *dari matriks* A *dan kolom ke*$-j$ *dari matriks* B*. Kemudian kalikan entri yang bersesuaian baris dan kolom secara bersama-sama lalu jumlahkan hasil kali tersebut* (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.23

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A matriks yang memiliki ukuran 2×3 dan B matriks yang memiliki ukuran 3×2, maka AB matriks yang memiliki ukuran 2×2. Untuk menentukan entri $(AB)_{22}$, maka kalikan baris ke-2 A dengan kolom ke-2 B yang bersesuaian, sehingga entri $(AB)_{22} = 3.4 + 1.2 + 2.2 = 18$. Dengan cara yang sama akan diperoleh entri-entri yang lain sehingga hasil kali matriks tersebut

$$AB = \begin{bmatrix} 26 & 26 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}.$$

2.3.4 Operasi Baris/Kolom Elementer (OBE/OKE)

Operasi baris/kolom elementer adalah operasi yang dilakukan terhadap matriks dengan aturan-aturan tertentu. Selanjutnya Operasi baris/kolom elementer di singkat dengan OBE/OKE. Adapun aturan-aturan tersebut adalah (Anton,dkk. 2019):

1. Mengalikan baris/kolom dengan konstanta tak nol.

Contoh 2.24

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke-1 dengan 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Menukar antar baris/kolom

Contoh 2.25

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tukarkan baris ke-1 dengan baris ke-2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Menambahkan kelipatan baris yang satu ke baris lainnya.

Contoh 2.26

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tambahkan 2 kali baris pertama ke baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.4 Determinan Matriks

Determinan atau tepatnya fungsi determinan merupakan pemetaan matriks persegi $n \times n$ ke suatu bilangan real (Anton, dkk., 2019). Ada beberapa cara untuk menghitung determinan. Secara umum metode yang digunakan untuk menghitung determinan adalah ekspansi Laplace dan metode OBE/OKE.

2.4.1 Metode Ekspansi Laplace

Sebelum dibahas lebih lanjut tentang ekspansi laplace diperkenalkan beberapa unsur dari ekspansi Laplace yaitu:

1. Minor Matriks

Minor dari suatu matriks A dituliskan M_{ij} didefinisikan sebagai determinan submatriks setelah menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A (Anton dkk., 2019).

Contoh 2.27

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka untuk menentukan M_{11} dapat diperoleh dengan menghapuskan baris pertama dan kolom pertama akan diperoleh

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

yaitu a_{22}. Jadi $M_{11} = a_{22}$, dengan cara serupa diperoleh $M_{12} = a_{21}, M_{21} = a_{12}$, dan $M_{22} = a_{11}$.

2. Kofaktor Matriks

Kofaktor dari suatu matriks A dituliskan K_{ij} didefinisikan sebagai bilangan yang dinyatakan dengan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dimana M_{ij} minor dari matriks A (Anton, dkk., 2019).

Contoh 2.28

Dari contoh 2.27 matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$, $M_{21} = a_{12}$, dan $M_{22} = a_{11}$. Sehingga $K_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = a_{22}, K_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -a_{21}$, $K_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -a_{12}$, $K_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = a_{11}$.

Secara umum dapat ditentukan positif atau negatif dari K_{ij} dengan memperhatikan indeksnya, jika $i + j$ genap maka $K_{ij} = M_{ij}$, jika $i + j$ ganjil maka $K_{ij} = -M_{ij}$.

Berikut Teorema untuk mencari determinan matriks $n \times n$ dengan metode ekspansi laplace.

Teorema 2.1

Diberikan matriks $A_{n\times n}$ *, maka bilangan yang diperoleh dari entri-entri perkalian antara sebarang baris atau kolom dari* A *yang bersesuaian dengan kofaktornya, kemudian dijumlahkan merupakan determinan dari matriks* A *atau biasa tuliskan* $det(A)$*. Secara umum ada dua jenis ekspansi yaitu ekspansi kolom dan ekspansi baris yang mana dapat dituliskan*

$$\det(A) = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} \tag{2. 4}$$

yang merupakan ekspansi kolom dan

$$\det(A) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj} \tag{2. 5}$$

yang merupakan ekspansi baris (Anton dkk., 2019).

Demi pemudahan penulisan maka biasanya determinan matriks A dituliskan $|A|$.

Contoh 2.29

Pada contoh sebelumnya telah ditemukan bahwa $K_{11} = a_{22}, K_{12} = -a_{21}$ sehingga dengan menggunakan ekspansi terhadap baris pertama diperoleh

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12}\\ &= a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21})\\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Adapun Teorema yang dapat diturunkan dari ekspansi laplace yaitu:

Teorema 2.2

Jika A matriks persegi $n \times n$ *maka* (Anton, dkk., 2019).

$$det(A) = det(A^t) \tag{2. 6}$$

2.4.2 Operasi Baris/Kolom Elementer(OBE/OKE)

Sebelum dibahas cara mencari determinan dengan menggunakan OBE/OKE , akan diperlihatkan suatu teorema yang mempermudah untuk mencari determinan.

Teorema 2.3

Jika A merupakan matriks segitiga, baik segitiga atas, segitiga bawah, maupun diagonal memiliki determinan yang merupakan perkalian dari entri-entri di diagonal utamanya atau dapat dinyatakan (Anton, dkk., 2019)

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \tag{2. 7}$$

Berdasarkan teorema di atas maka untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi akan dilakukan OBE/OKE hingga diperoleh matriks segitiga.

Adapun aturan-aturan OBE/OKE telah dijelaskan di atas. Berikut teorema akibat yang diberikan oleh aturan-aturan tersebut.

Teorema 2.4

Misalkan diberikan matriks A $n \times n$ (Anton, dkk., 2019).

a. *Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan suatu skalar k dengan satu baris/kolom dari matriks A, maka $det(B) = k\ det(A)$.*
b. *Jika matriks B diperoleh dengan menukarkan antar baris/kolom dari A maka $det(B) = -det(A)$.*
c. *Jika matriks B diperoleh dengan menambahkan/mengurangkan kelipatan baris/kolom ke baris/kolom lainnya maka $det(B) = det(A)$.*

Contoh 2.30

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. Determinan matriks A dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Kurangkan baris ke-2 dengan 2 kali baris ke-1, maka diperoleh
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$
2. Kurangkan baris ke-3 dengan 2 kali baris ke-1, maka diperoleh
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$
3. Kurangkan baris ke-3 dengan 1 kali baris ke-2, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks terakhir menghasilkan matriks segitiga atas, berdasarkan Teorema 2.2 maka determinan matriks terakhir adalah $1.(-6).2 = -12$, dan berdasarkan Teorema 2.3 poin 3 maka $\det(A) = -12$.

Dengan memperhatikan OBE/OKE diperoleh teorema sebagai berikut

Teorema 2.5

Jika A dan B matriks yang memiliki ukuran yang sama, maka (Anton, dkk., 2019)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{2. 8}$$

2.4.3 Metode Matriks Blok

Metode matriks blok merupakan metode mencari determinan dengan memblok matriks. Blok yang biasa digunakan adalah 2×2, metode dengan memblok seperti ini untuk mencari determinan disebut komplemen Schur yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5

Misalkan M matriks $n \times n$ dan akan diblok menjadi matriks 2×2.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dengan A, B, C, D berturut-turut adalah matriks dengan ukuran $k \times k, k \times (n-k), (n-k) \times k, (n-k) \times (n-k)$. Jika A invertibel maka komplemen Schur dari A adalah $S_A = D - CA^{-1}B$, dan jika D invertibel maka komplemen Schur dari D adalah $S_D = A - BD^{-1}C$ (Sari, dkk., 2020).

Teorema 2.6

Jika $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dan A, D adalah matriks persegi maka determinan dari matriks M adalah (Sari, dkk., 2020)

$$det(M) = det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

atau

$$det(M) = \begin{cases} det(A)\, det(D - CA^{-1}B)\,, jika\ A^{-1}\ ada. \\ det(D)\, det(A - BD^{-1}C)\,, jika\ D^{-1}\ ada. \end{cases} \quad (2.\ 9)$$

Jika pada Teorema 2.5 matriks B atau C merupakan matriks nol akan diperoleh teorema berikut

Teorema 2.7

Misalkan matriks $M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ *adalah matriks blok dimana* $A, B, D,$ *dan* O *masing-masing adalah matriks* $m \times m, m \times n, n \times n,$ *dan matriks nol* $n \times m$*, maka* (Sari, dkk., 2020)

$$\det(M) = \det(A)\det(D). \quad (2.\ 10)$$

2.5 Invers Matriks

Definisi 2.6

Misalkan diberikan matriks persegi A*, dan terdapat sebuah matriks* B *yang memiliki ukuran sedemikian sehingga* $AB = BA = I$*, maka* A *disebut invertibel (atau nonsingular) dan* B *disebut sebagai invers dari* A*. Matriks* B *yang demikian dinotasikan dengan* A^{-1} *(Anton, dkk., 2019).*

Dalam mencari invers ada beberapa metode yang umum digunakan yaitu metode kofaktor, metode gauss, dan definisi dari invers itu sendiri. Berikut penjelasan metode-metode tersebut.

2.5.1 Metode Kofaktor

Definisi 2.7

Misalkan A *matriks* $n \times n$ *dan* K_{ij} *adalah kofaktor dari* a_{ij}*, maka matriks*

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut sebagai matriks kofaktor dari A. Tranpose dari matriks tersebut disebut adjoint A dan dinotasikan $adj(A)$ atau dapat dituliskan $K^t = adj(A)$ (Anton, dkk., 2019).

Berikut teorema yang memberikan hubungan antara invers matriks A dengan $adj(A)$.

Teorema 2.7

Jika A matriks invertibel maka (Anton, dkk., 2019)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \tag{2. 11}$$

Contoh 2.31

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\det(A) = 1.4 - 1.2 = 2$. Perhatikan juga bahwa $K_{11} = 4,\ K_{12} = -1,\ K_{21} = -2,$ dan $K_{22} = 1$, sehingga

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

akibatnya berdasarkan (2.8) diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.5.2 Metode Gauss

Metode gauss ini berpusat pada penggunaan OBE untuk mencari invers dari matriks invertibel.

Teorema 2.8

Misalkan A matriks invertibel $n \times n$, kemudian augmentasi matriks identitas I_n di sebelah kanan matriks A atau

$$[\ A \mid I_n].$$

Kemudian dengan menggunakan OBE pada matriks tersebut sedemikian sehingga bagian kiri dari matriks tersebut tereduksi menjadi I_n maka bagian kanan dari matriks tersebut merupakan A^{-1} atau dinyatakan dalam bentuk matriks (Anton, dkk., 2019)

$$[\ I_n \mid A^{-1}\ ].$$

Contoh 2.32

Pada contoh 2.31 telah diperlihatkan cara untuk mencari invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Berikut diperlihatkan cara mencari invers dengan menggunakan metode Gauss.

Pertama augmentasi matriks A dengan I_2 sehingga diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pada matriks di atas kurangkan baris ke-2 dengan baris pertama maka diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Kalikan baris ke-2 dengan $\frac{1}{2}$, kemudian kurangkan baris ke-1 dengan 2 kali baris ke-2, sehingga diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Karena bagian kiri sudah tereduksi menjadi matriks I_2 maka bagian kanan dari hasil terakhir merupakan invers dari matriks A atau dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.8

Misalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$ dan ada vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di R^n yang disebut sebagai ***vektor eigen*** *dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah suatu kelipatan dari $\mathbf{x}$, atau dapat dituliskan*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{2. 12}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ ini disebut sebagai ***nilai eigen*** *dari* A (Anton dkk, 2019).

Contoh 2.33

Vektor **x**$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

yang bersesuaian nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A dapat digunakan persamaan karakteristik berikut

$$det(\lambda I - A) = 0. \qquad (2.\ 13)$$

Persamaan karakteristik disebut juga dengan polinomial karakteristik. Persamaan (2.13) juga dapat dituliskan $P_{n,A}\,(\lambda) = 0$ dengan n menyatakan orde matriks A (Anton dkk., 2019)

Contoh 2.34

Polinomial karakteristik dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.13) yaitu

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 - (-1)(-1) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Jadi, polinomial karakteristik dari matriks tersebut adalah $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

Adapun Teorema yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks $n \times n$ adalah:

Teorema 2.9

Diberikan A adalah matriks $n \times n$, berikut pernyataaan-pernyataan yang ekuivalen (Anton, dkk., 2019)*:*

1. *λ merupakan nilai eigen dari matriks A.*
2. *λ merupakan solusi dari polinomial karateristik $det(\lambda I - A) = 0$.*

3. *Sistem persamaan* $(\lambda I - A)x = 0$ *mempunyai solusi tidak trivial.*
4. *Terdapat vektor tak nol sedemikian sehingga* $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Adapun penyelesaian umum dari x yang dibangun oleh suatu basis maka basis ini disebut sebagai basis dari ruang eigen.

Contoh 2.35

Berdasarkan contoh sebelumnya diperoleh persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, sehingga dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh bahwa nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$.

Dari definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ. Berdasarkan Teorema 2.9 untuk menentukan vektor eigen dapat diselesaikan sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk kasus

1. $\lambda = 1$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengurangkan baris ke-2 dengan baris ke-1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga $x_2 = -x_1$, oleh karena itu solusi umumnya adalah $x_1 = t,\ x_2 = -t$. Karenanya dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

yang mana mengikuti

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

2. $\lambda = 3$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengurangkan baris ke-2 dengan baris ke-1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $x_2 = x_1$, oleh karena itu solusi umumnya adalah $x_1 = t, x_2 = t$. Karenanya dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang mana mengikuti

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$.

2.7 Matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac*

Matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* adalah matriks perumuman dari *Fibonacci-Sylvester-Kac* dimana barisan Fibonacci dari subdiagonalnya diganti dengan barisan umum yang tidak mengandung nol dan diagonal utamanya diganti dengan suatu konstanta. Khusus ketika $t = 0$, maka matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* disebut *Sequence-Sylvester-Kac*. Matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* dapat dituliskan

$$\left(K_{a,n}^*\right)_{ij} = \begin{cases} t, & i = j, 1 \le i \le n \\ a_i, & j = i+1, 1 \le i \le n-1, \\ a_{n+1-i}, & j = i-1, 2 \le i \le n, \\ 0, & lainnya, \end{cases} \qquad (2.\ 14)$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ adalah barisan bilangan real dengan $a_i \neq 0$, untuk $i = 1,2, \dots, n-1$ dan t suatu konstanta.

Contoh 2.36

$$K_{a,5}^* = \begin{bmatrix} t & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & t & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & t & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & t & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & t \end{bmatrix}.$$

2.8 Matriks T-*Sequence-Double-Sylvester-Kac*

Matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac* adalah matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* yang pada subdiagonal dari iddiagonal diberikan barisan seperti subdiagonal dari diagonal utamanya dan pada iddiagonalnya diberikan konstanta yang sama diagonal utamanya kecuali pada entri tertentu. Khusus ketika $t = 0$, maka matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac* disebut *Sequence-Double-Sylvester-Kac*. Matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac* dapat dituliskan

a. n ganjil

$$\left(K_{a,n}^{**}\right)_{ij} = \begin{cases} t, & i = j \; atau \; i + j = n + 1, \quad 1 \leq i \leq n, \\ a_i & j - i = 1 \; atau \; j + i = n, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \\ a_{n+1-i} & i - j = 1 \; atau \; i + j = n + 2, \quad 2 \leq i \leq n, \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2. 15}$$

Contoh 2.37

$$K_{a,5}^{**} = \begin{bmatrix} t & a_1 & 0 & a_1 & t \\ a_4 & t & a_2 & t & a_4 \\ 0 & a_3 & t & a_3 & 0 \\ a_4 & t & a_2 & t & a_4 \\ t & a_1 & 0 & a_1 & t \end{bmatrix}$$

b. n genap

$$\left(K_{a,n}^{**}\right)_{ij} = \begin{cases} t, & i = j \; atau \; i + j = n + 1, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+2, \dots, n - 1, \\ t, & i = j, \quad i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1 \\ a_i & j - i = 1 \; atau \; j + i = n, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1, \dots, n - 1, \\ a_i & j - i = 1, \quad i = \frac{n}{2}, \\ a_{n+1-i} & i - j = 1 \; atau \; i + j = n + 2, \quad i = 2, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2, \dots, n - 1, \\ a_{n+1-i} & i - j = 1, \quad i = \frac{n}{2}+1, \\ 0, & lainnya, \end{cases} \tag{2. 16}$$

Contoh 2.38

$$K_{a,6}^{**} = \begin{bmatrix} t & a_1 & 0 & 0 & a_1 & t \\ a_5 & t & a_2 & a_2 & t & a_5 \\ 0 & a_4 & t & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & t & a_4 & 0 \\ a_5 & t & a_2 & a_2 & t & a_5 \\ t & a_1 & 0 & 0 & a_1 & t \end{bmatrix}.$$

2.9 Induksi Matematika

Induksi matematik merupakan teknik pembuktian dalam matematika yang baku. Metode induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas (Munir, 2016)

Pembuktian matematika dengan metode induksi mempunyai beberapa prinsip yang akan dibahas dalam tulisan ini yaitu:

2.9.1 Prinsip Induksi Sederhana

Bunyi prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut (Munir, 2016): Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan atau proposisi tentang bilangan bulat positif dan membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan bahwa proposisi ini, perlu dibuktikan bahwa untuk semua bilangan bulat positif n.

1. Basis induksi yaitu membuktikan bahwa $p(1)$ benar, dan
2. Langkah induksi yaitu jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

2.9.2 Prinsip Induksi Kuat

Metode pembuktian dengan prinsip induksi kuat berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan atau proposisi tentang bilangan bulat dan membuktikan bahwa untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan proposisi ini benar, perlu menunjukkan bahwa (Munir, 2016):

1. Basis induksi yaitu membuktikan bahwa $p(n_0)$ benar, dan
2. Langkah induksi yaitu jika $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup metode penelitian, lokasi dan waktu penelitan, serta prosedur penelitian.

3.1 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan bersifat pengembangan teori keilmuan terkhususnya di bidang Matematika Aljabar dengan menggunakan metode studi literatur.

3.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Lokasi penelitian ini bertempat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin kota Makassar dengan waktu penelitian direncanakan berlangsung mulai dari Februari 2022.

3.3 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

i. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah yang menjadi fokus penelitian.
ii. Melakukan studi literatur terhadap referensi-referensi jurnal penelitian, buku yang berkaitan dengan topik yang diteliti sebagai tahap melengkapi pengetahuan dasar peneliti untuk keperluan pelaksanaan penelitian.
iii. Meneliti dan mencari polinomial karakteristik, determinan, dan invers dari matriks *T-Sequence-Sylvester-Kac* dan matriks *T-Sequence-Double-Sylvester-Kac*.
iv. Setelah melewati langkah penelitian, maka hasil dari penelitian tersebut akan dibuat kesimpulan berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian.