

**NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF
HELM YANG DIMODIFIKASI**

SKRIPSI



HARRY MAULANA BUHARI

H011171004

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF
HELM YANG DIMODIFIKASI**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.**



HARRY MAULANA BUHARI

H011171004

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Harry Maulana Buhari

NIM : H011171004

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1 (Strata Satu)

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF HELM YANG DIMODIFIKASI

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilalihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 10 Agustus 2022

Yang menyatakan,



Harry Maulana Buhari
NIM. H011171004

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF HELM YANG DIMODIFIKASI

Disusun dan diajukan oleh

HARRY MAULANA BUHARI

H011171004

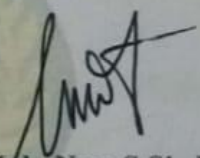
Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 10 Agustus 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pertama,


Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002


Dr. Mah. Nur, S.Si., M.Si.
NIP. 198505292008121002

Ketua Program Studi,


Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002



KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah *subhaanahu wa ta'ala*, atas berkat rahmat dan taufik-Nya sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan. *Shalawat* dan *salam* juga tak luput dikirimkan kepada *Rasulullah*, Nabi Muhammad *Shallallahu 'alaihi wa sallam*.

Skripsi ini berjudul “Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Helm Helm yang Dimodifikasi” diajukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih atas bimbingan, bantuan, dan motivasi dari berbagai pihak dalam penyelesaian skripsi ini.

1. Keluarga penulis yakni **Drs. Buhari Iskandar, Mardiana dan Putri Haliza Safira** atas segala doa dan dukungannya baik secara moril maupun finansial sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin dan **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin sekaligus selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan dan membimbing saya dalam penyelesaian tugas akhir ini.
4. Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing pertama yang telah memberikan banyak masukan dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu **Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, M.S.**, selaku dosen penasihat akademik sekaligus dosen penguji tugas akhir yang selama ini senantiasa memberikan dukungan, nasehat, masukan, dan saran baik itu dalam pengambilan mata kuliah maupun dalam perbaikan tugas akhir ini.
6. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**, selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukan, kritik dan saran yang membangun untuk kebaikan penulis dan perbaikan tugas akhir ini.
7. Bapak, Ibu Dosen, dan Staff Administrasi Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang

8. telah memberikan banyak ilmu, memberikan banyak dukungan dan membantu dalam pengurusan kelancaran studi.
9. Saudara dan saudari Matematika 2017 terkhusus **Wahyu Iqbal Maulana, S.Si., Abrian Wira Sakti S.Si., Riswan, S.Si., Alfian Dwi Putra Taufik, S.Si., Cahyudi Gratio Tandirerung, S.Si., Muhammad Agung Kurniawan, Heru Permana, Defi Lestari, S.Si., Ika Indriani Rahayu, S.Si., Sri Wahyuni DM, S.Si., Andi Nurul Atika, S.Si., Farah Ramadhana Iqbal, S.Si., Nurfadillah Rahim, S.Si., dan Mutmainnah Mukhtar Jaya** yang senantiasa kebersamai dalam pengerjaan tugas akhir di laboratorium serta seluruh teman-teman Matematika 2017 yang telah mendoakan, memberikan semangat dan motivasi serta menjadi tempat berbagi ilmu dan juga cerita. Semoga kita semua diberikan kelancaran dalam penyelesaian segala urusan terkait tugas akhir. *Aamiin.*
10. Seluruh *ikhwah* pengurus maupun alumni UKM LDK MPM Unhas, Mushalla Istiqamah BEM FMIPA Unhas, dan LDF se-Unhas yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi selama menjalani kehidupan kampus di Universitas Hasanuddin. Semoga kita semua tetap diistiqamahkan dalam ketaatan dan memperoleh *hidayah* serta *taufiq* dari Allah *subhaanahu wa ta'ala*. *Aamiin.*

Akhir kata, penulis berdoa agar Allah *subhaanahu wa ta'ala* berkenan membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan ke depannya.

Makassar, 10 Agustus 2022



Harry Maulana Buhari

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Harry Maulana Buhari
NIM : H011171004
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Helm yang Dimodifikasi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 10 Agustus 2022

Yang menyatakan,



Harry Maulana Buhari

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf helm yang dimodifikasi dengan notasi \mathcal{H}_n untuk $n \geq 3$. Penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada penelitian ini dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah diperoleh berdasarkan sifat-sifat dari graf \mathcal{H}_n menggunakan teorema pendukung yang sudah ada. Adapun batas atasnya diperoleh dengan pemberian label pada titik dan sisi graf \mathcal{H}_n pada kasus sederhana. Dari pelabelan tersebut akan dikonstruksi fungsi pelabelan total tidak teratur titik untuk sembarang n . Dengan menunjukkan bahwa bobot setiap titik graf \mathcal{H}_n berbeda, maka fungsi yang telah dikonstruksi tersebut benar berlaku untuk sembarang n . Setelah itu akan ditunjukkan bahwa adanya pelabelan- k total tidak teratur titik dengan k adalah label terbesar yang digunakan pada graf \mathcal{H}_n . Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf \mathcal{H}_n yaitu $tvs(\mathcal{H}_n) = \left\lceil \frac{3+3n}{4} \right\rceil$ dengan $n \geq 3$.

Kata Kunci: Nilai Total Ketidakteraturan Titik, Pelabelan- k Total Tidak Teratur Titik, Graf Helm yang Dimodifikasi.

ABSTRACT

This research aims to determine the total vertex irregularity strength of the modified helm graph denoted by \mathcal{H}_n for $n \geq 3$. Determination of the total vertex irregularity strength in this research is done by determining the largest lower bound and the smallest upper bound. The lower bound is obtained based on the properties of the graph \mathcal{H}_n using the existing supporting theorem. The upper bound is obtained by labeling the vertices and edges of the graph \mathcal{H}_n in some simple cases. From this labeling, total vertex irregularity labeling functions will be constructed for any n . By showing that the weight of each vertex of the graph \mathcal{H}_n is different, then the function that has been constructed is true for any n . After that, it will be shown that there is a vertex irregular total k –labeling with k being the largest label used in the graph \mathcal{H}_n . Based on the results of this research, the total vertex irregularity strength of the graph \mathcal{H}_n is $tvs(\mathcal{H}_n) = \left\lceil \frac{3+3n}{4} \right\rceil$ with $n \geq 3$.

Keywords: Total Vertex Irregularity Strength, Vertex Irregular Total k –labeling, Modified Helm Graph.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN KEASLIAN.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR NOTASI	xii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusah Masalah	2
1.3. Batasan Masalah.....	3
1.4. Tujuan Penelitian	3
1.5. Manfaat Penelitian	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1. Pengertian Graf	4
2.2. Terminologi Graf	4
2.3. Operasi Penghapusan (<i>deletion</i>) pada Graf.....	7
2.4. Jenis-Jenis Graf	8
2.5. Pelabelan Graf	11
2.6. Pelabelan Total Tidak Teratur Titik.....	13
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.....	15
3.1. Jenis Penelitian.....	15

3.2. Lokasi dan Waktu Penelitian	15
3.3. Tahapan Penelitian	15
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1. Graf Helm yang Dimodifikasi.....	17
4.2. Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Helm yang Dimodifikasi.....	18
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	89
5.1. Kesimpulan	89
5.2. Saran.....	89
DAFTAR PUSTAKA	90

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G	4
Gambar 2.2 Graf G	5
Gambar 2.3 Graf G	6
Gambar 2.4 Graf G	6
Gambar 2.5 (a) graf terhubung G , (b) graf tak terhubung H	7
Gambar 2.6 (a) graf G , (b) graf $G - v_1$	8
Gambar 2.7 (a) graf sederhana, (b) graf tak sederhana dengan multiple edges, (c) graf tak sederhana dengan loop.....	8
Gambar 2.8 Graf Lintasan P_4 dan P_6	9
Gambar 2.9 Graf Sikel C_3 , C_4 , C_5 , dan C_6	9
Gambar 2.10 Graf Komplit K_3 , K_4 , K_5 , dan K_6	10
Gambar 2.11 Graf Roda W_8	10
Gambar 2.12 Graf Helm H_8	11
Gambar 2.13 (a) graf H_3 , (b) Pelabelan total pada graf H_3	12
Gambar 2.14 Beberapa pelabelan total pada graf helm H_3	13
Gambar 4.1 Graf helm yang dimodifikasi untuk $n = 8$	17
Gambar 4.2 Pelabelan – 3 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_3	20
Gambar 4.3 Pelabelan – 4 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_4	21
Gambar 4.4 Pelabelan – 5 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_5	22
Gambar 4.5 Pelabelan – 6 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_6	23
Gambar 4.6 Pelabelan – 6 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_7	24
Gambar 4.7 Pelabelan – 7 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_8	25
Gambar 4.8 Pelabelan – 8 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_9	26
Gambar 4.9 Pelabelan – 9 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_{10}	27
Gambar 4.10 Pelabelan – 9 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_{11}	28
Gambar 4.11 Pelabelan – 10 Total Tidak Teratur Titik Graf \mathcal{H}_{12}	29

DAFTAR NOTASI

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$tv_s(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G	2
$V(G)$	Himpunan titik graf G	4
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	4
$e = v_i v_j$	Sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j	4
$\delta(G)$	Derajat terkecil dari graf G	5
$\Delta(G)$	Derajat terbesar dari graf G	5
$\deg(v_i)$	Derajat titik v_i	5
$G - v_i$	Graf G setelah dihapuskan titik v_i	8
P_n	Graf lintasan	9
C_n	Graf sikel	9
K_n	Graf lengkap	10
W_n	Graf roda	10
H_n	Graf helm	10
$wt(v)$	Bobot titik v	11
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v	11
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv	11
$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E	13
k	Label terbesar yang digunakan pada pelabelan graf	13
n_δ	Banyaknya titik yang berderajat terkecil	14
n_Δ	Banyaknya titik yang berderajat terbesar	14
n_i	Banyaknya titik yang berderajat i	14
\mathcal{H}_n	Graf helm yang dimodifikasi	16
$ V(\mathcal{H}_n) $	Banyaknya anggota himpunan titik graf \mathcal{H}_n	18
V_i	Himpunan titik yang berderajat i	19

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Kehidupan sosial tidak dapat terlepas dari masalah. Masalah baru akan sering muncul beriringan dengan berkembangnya zaman dan teknologi saat ini. Permasalahan seperti jalur terbang pesawat, pengaturan jadwal pembelajaran atau perlombaan, distribusi zat kimia, dan beberapa permasalahan lain pada dasarnya dapat dengan mudah diselesaikan menggunakan salah satu cabang ilmu matematika yaitu graf.

Berdasarkan sejarah, orang yang pertama kali menggunakan graf dalam menyelesaikan permasalahan merupakan salah satu matematikawan terhebat yang pernah ada, Leonhard Euler. Euler berhasil menyelesaikan permasalahan dengan memodelkan jembatan Konigsberg pada tahun 1736 ke dalam graf. Berawal dari peristiwa itu, graf telah sering digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan dan penggunaannya berkembang menjadi jauh lebih luas.

Dari berbagai macam pokok pembahasan dalam graf, ada yang disebut pelabelan graf. Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan unsur suatu graf (titik atau sisi) ke bilangan bulat positif atau non-negatif. Jika domain pelabelannya merupakan himpunan titik, maka itu disebut pelabelan titik. Jika domain pelabelannya merupakan himpunan sisi, maka itu disebut pelabelan sisi. Dan jika domain pelabelannya merupakan himpunan titik dan sisi, maka itu disebut pelabelan total (Wallis, 2001) [16]. Pada dasarnya ada begitu banyak jenis pelabelan pada graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan total tidak teratur. Pelabelan ini terbagi atas dua jenis pelabelan, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi.

Beberapa penelitian telah banyak dilakukan menggunakan pelabelan total tidak teratur seperti pada penelitian Andi Dahniah Pahrany yang menentukan nilai total ketidakaturan titik pada graf *Unidentified Flying Object* untuk $3 \leq m \leq 3 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ dan $m > 3 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ pada tahun 2017 [2]. Sitti

Ardianti Badawi menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Grid* untuk $n \geq 2$ pada tahun 2018 [10]. Sitti Fatimah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *splitting* untuk $n \geq 3$ pada tahun 2018 [13]. Laraza Yuliarti menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf seri parallel $(m,1,3)$ untuk $m \geq 4$ pada tahun 2019 [5]. St Maryam Mahaseng telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir untuk $m \geq 2$ pada tahun 2020 [14]. Salamah Fitriani Harianja menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *seri parallel* $(m,1,5)$ untuk $m \geq 4$ pada tahun 2021 [12]. Sisi Saputri menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *seri parallel* $(m,1,5)$ untuk $m \geq 5$ pada tahun 2021 [15]. Nurlindah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Dodecahedral* yang dimodifikasi untuk $n \geq 6$ dengan n bilangan genap pada tahun 2021 [9]. Aarhi pada tahun 2017, menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Helm* dengan $n \geq 4$, diperoleh hasil $tvs(H_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ [11]. Ali Ahmad dkk. pada tahun 2012, menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada gabungan graf *Helm* isomorfik untuk $m \geq 2, n = 3,4$ dan diperoleh hasil $tvs(mH_n) = \left\lfloor \frac{nm+1}{2} \right\rfloor$ [1]. Diari Indriati dkk. pada tahun 2016, menentukan nilai total ketidakteraturan titik untuk graf *Helm* yang diperumum, diperoleh $tvs(H_n^m) \geq \left\lfloor \frac{(m+1)n+1}{3} \right\rfloor$ [3].

Berdasarkan beberapa hasil penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik graf *Helm* yang telah diuraikan, belum ada penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik graf *Helm* yang dimodifikasi. Berangkat dari permasalahan itu, pada tugas akhir ini akan diteliti nilai total ketidakteraturan titik graf *Helm* yang dimodifikasi dengan derajat minimum titiknya adalah 3 dan derajat maksimumnya adalah 5 sebagai pengembangan penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik graf *Helm* dengan judul “**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Helm yang Dimodifikasi**”.

1.2. Rumusah Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

- 1.2.1. Bagaimana cara menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Helm* yang dimodifikasi?

- 1.2.2. Bagaimana cara menentukan batas atas dari nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Helm* yang dimodifikasi?

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini akan membahas tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Helm* yang telah dimodifikasi dengan derajat titiknya adalah 3 dan 5 untuk $n \geq 3$.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik graf *Helm* yang dimodifikasi.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu :

- 1.5.1. Memperdalam pengetahuan tentang topik kombinatorika secara umum dan secara khusus tentang pelabelan total tidak teratur titik pada graf *Helm*.
- 1.5.2. Dapat menjadi sumber rujukan atau bahan referensi baik bagi pembaca maupun pihak lain yang membutuhkan dalam penelitian selanjutnya.

BAB 2

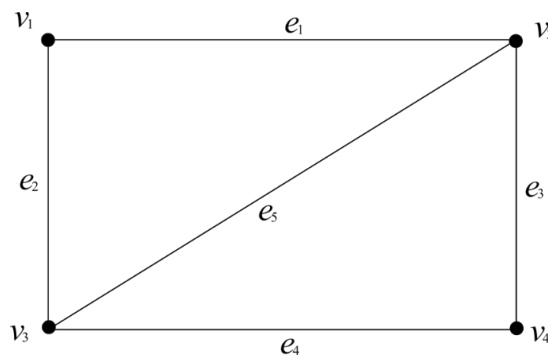
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pengertian Graf

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Suatu graf dapat terbentuk dengan mengaitkan titik-titik pada graf sehingga membentuk sisi yang direpresentasikan menjadi sebuah gambar. Berikut diberikan definisi graf yang dikutip dari buku yang berjudul “Matematika Diskrit Edisi 3” [7].

Definisi 2.1.1. *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (vertices atau node) dan E adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang titik.*

Himpunan titik graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Suatu sisi e di $E(G)$ yang merupakan pasangan tidak terurut dari titik u dan v di $V(G)$ dapat dinyatakan dengan $e = \{u, v\}$. Namun dalam penulisan selanjutnya, sisi $e = \{u, v\}$ hanya akan ditulis $e = uv$.



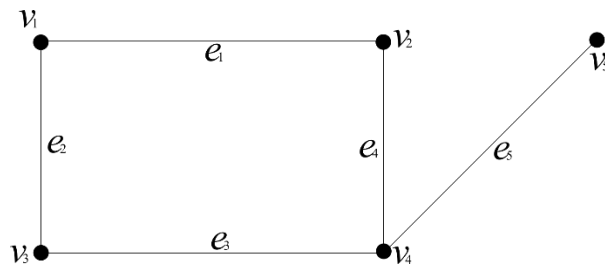
Gambar 2.1 Graf G

Pada Gambar 2.1, himpunan titik graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi graf G adalah $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_4$, $e_4 = v_3v_4$, dan $e_5 = v_2v_3$.

2.2. Terminologi Graf

Ketika membahas terkait graf, ada beberapa istilah (terminologi) yang perlu diketahui yang berkaitan dengan graf. Berikut diberikan definisi titik-titik dan sisi-sisi yang bertetangga yang dikutip dari [7].

Definisi 2.2.1. Jika $e = uv$ adalah sisi dari suatu graf G , maka u dan v dikatakan titik-titik bertetangga (*adjacent vertices*), dan e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v . Selanjutnya, jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda di G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi yang bertetangga (*adjacent edges*).



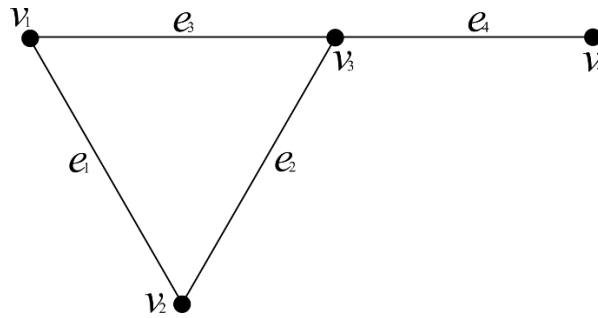
Gambar 2.2 Graf G

Pada Gambar 2.2, graf G memiliki beberapa pasangan titik dan sisi yang bertetangga. Titik v_1 dengan v_2 adalah titik yang bertetangga karena terdapat sisi e_1 yang terkait dengan v_1 dan v_2 , hal yang sama juga berlaku pada titik v_1 dengan v_3 , titik v_2 dengan v_4 , titik v_3 dengan v_4 , serta titik v_4 dan v_5 . Adapun sisi e_1 dengan e_2 adalah sisi-sisi yang bertetangga karena kedua sisi itu terkait dengan satu titik yang sama yaitu v_1 , hal yang sama juga berlaku pada sisi e_1 dengan e_4 , e_2 dengan e_3 , e_3 dengan e_4 , serta e_4 dengan e_5 .

Berikut diberikan definisi yang dikutip dari [7].

Definisi 2.2.2. Banyaknya anggota $V(G)$ dari suatu graf G disebut *order*, sedangkan banyaknya anggota $E(G)$ dari suatu graf G disebut *ukuran (size)*.

Definisi 2.2.3. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan $v \in V(G)$. Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v , dinotasikan dengan $\deg(v)$. Untuk derajat terkecil dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ sedangkan derajat terbesar dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Gambar 2.3 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.3, graf G berorder 4 dan berukuran 4. Simpul berderajat satu dalam hal ini v_4 , disebut simpul anting-anting (*pendant vertex*). Adapaun rincian derajat dari setiap titik pada graf G adalah sebagai berikut.

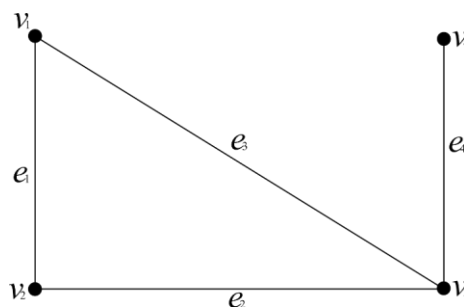
$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2, \quad \deg(v_3) = 3, \quad \deg(v_4) = 1.$$

Sehingga dapat kita peroleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Berikut diberikan definisi lintasan yang dikutip dari [7]

Definisi 2.2.4. *Lintasan dari titik v_0 ke titik v_n pada graf G dinotasikan dengan lintasan $v_0 - v_n$, adalah suatu barisan selang-seling antar titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan sisi dari graf.*

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*). Adapun lintasan yang titik awal dan titik akhirnya berbeda disebut lintasan terbuka (*open path*).

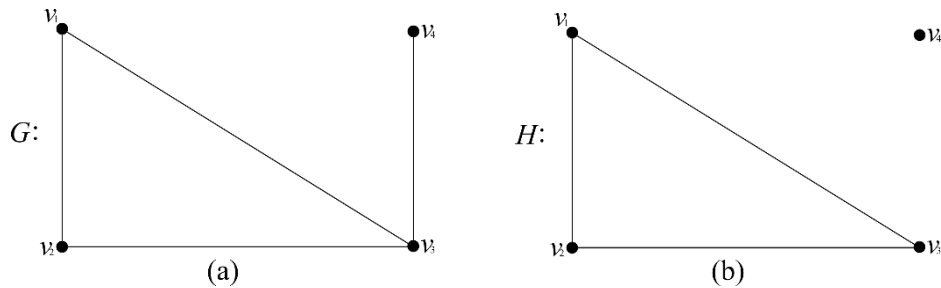
Gambar 2.4 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.4, yang merupakan lintasan tertutup adalah $v_1 - v_2 - v_3 - v_1$ karena berawal dari titik v_1 kembali berakhir di titik v_1 . Adapun

yang merupakan lintasan terbuka adalah $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ karena titik awal v_1 berbeda dengan titik akhir v_4

Berikut diberikan definisi graf terhubung dan tak terhubung yang dikutip dari [7].

Definisi 2.2.5. Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$. Graf G disebut graf terhubung (*connected*), jika setiap dua titik yang berbeda di G terdapat suatu lintasan dari u ke v .



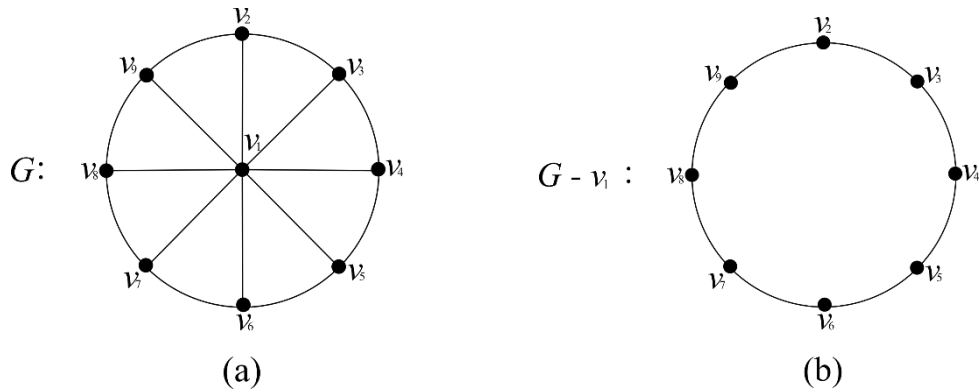
Gambar 2.5 (a) graf terhubung G , (b) graf tak terhubung H

Berdasarkan Gambar 2.5, graf G dikatakan terhubung karena setiap dua titik yang berbeda dari G terdapat lintasan. Sedangkan graf H merupakan graf tak terhubung karena terdapat dua titik yang berbeda yang tidak memiliki lintasan yaitu v_1 dengan v_4 dan v_3 dengan v_4 .

2.3. Operasi Penghapusan (*deletion*) pada Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan operasi penghapusan pada graf. Berikut diberikan definisi penghapusan pada graf yang dikutip dari [4].

Definisi 2.3.1. Jika v adalah suatu titik di graf G , maka graf $G - v$ adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghapus titik v dan semua sisi yang bersisian dengan titik v .



Gambar 2.6 (a) graf G , (b) graf $G - v_1$

Berdasarkan Gambar 2.6, ketika titik v_1 dihapus dari graf G maka setiap sisi yang terkait pada titik v_1 juga ikut terhapus.

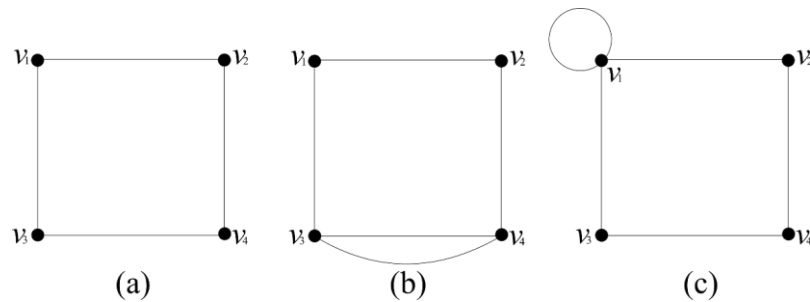
2.4. Jenis-Jenis Graf

Pengelompokan graf selalu didasarkan dengan ciri khusus yang ada pada graf itu. Dalam subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yang akan dijadikan referensi dalam penelitian ini.

Berikut diberikan definisi graf sederhana yang dikutip dari [7].

Definisi 2.4.1. *Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda (multiple edges) dan gelang (loop).*

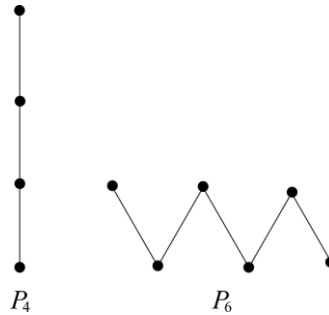
Yang dimaksud dengan gelang (*loop*) disini adalah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Adapun sisi ganda (*multiple edges*) disini adalah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama.



Gambar 2.7 (a) graf sederhana, (b) graf tak sederhana dengan *multiple edges*, (c) graf tak sederhana dengan *loop*

Berikut diberikan definisi graf lintasan yang dikutip dari [7].

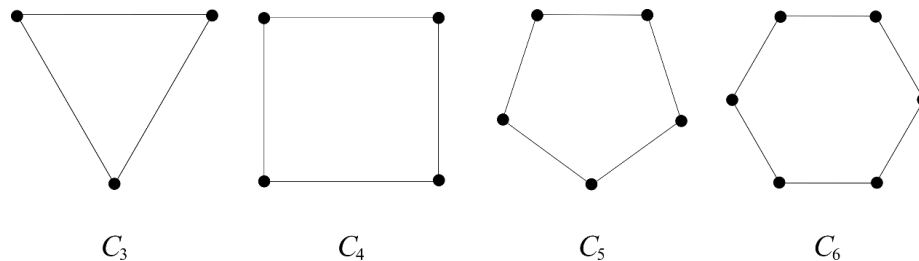
Definisi 2.4.2. *Graf lintasan (path) P_n dengan n titik dan $n - 1$ sisi, dimana $n \geq 2$, dinotasikan dengan P_n adalah graf dengan barisan titik v_1, v_2, \dots, v_n dan $v_i v_{i+1} \in (P_n), i = 1, 2, \dots, n - 1$ dan $v_i \neq v_j$ untuk $i \neq j$.*



Gambar 2.8 Graf Lintasan P_4 dan P_6

Berikut diberikan definisi graf siklus yang dikutip dari [7].

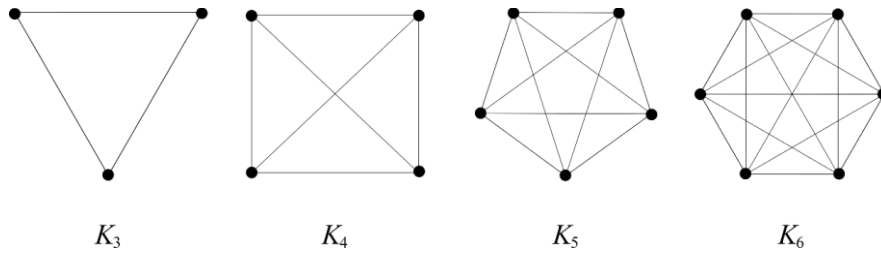
Definisi 2.4.3. *Misalkan $P_k: v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ adalah lintasan orde k dengan Panjang $k - 1$ pada graf G . Siklus C_k pada G dengan panjang k adalah subgraph dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n, v_0\}$. Graf yang hanya terdiri atas satu siklus disebut graf siklus.*



Gambar 2.9 Graf Siklus C_3, C_4, C_5 , dan C_6

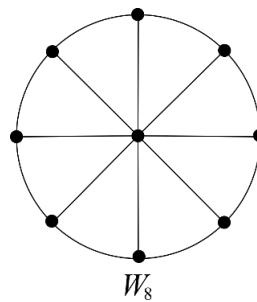
Berikut diberikan definisi graf siklus yang dikutip dari [4].

Definisi 2.4.4. *Graf G_n disebut graf komplit jika setiap dua titik pada G_n bertetangga dan dinotasikan dengan K_n .*

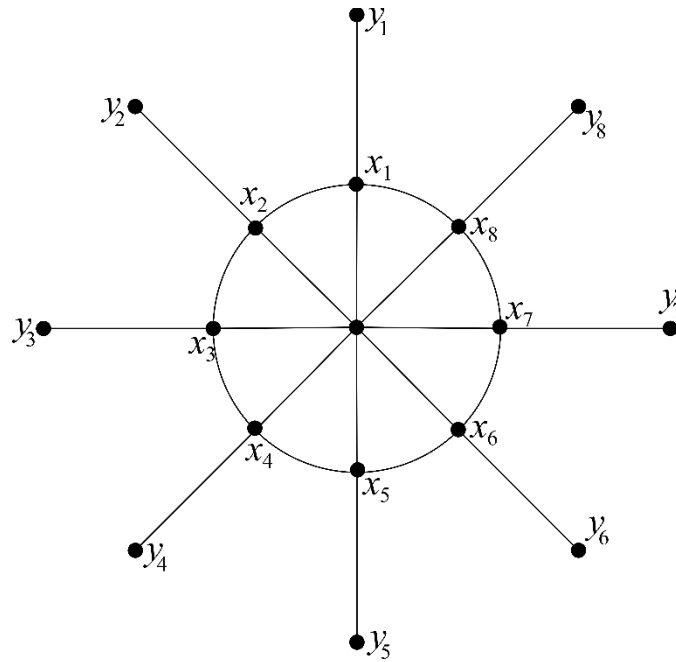
Gambar 2.10 Graf Komplit K_3, K_4, K_5 , dan K_6

Berikut diberikan definisi graf roda, graf helm dan graf helm yang dimodifikasi.

Definisi 2.4.5. *Graf roda (wheel) W_n adalah graf yang dikonstruksi dari graf sikel $C_n = x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ dengan menambahkan titik pusat v sedemikian sehingga $W_n = vx_1, vx_2, \dots, vx_n$ suatu sisi.*

Gambar 2.11 Graf Roda W_8

Definisi 2.4.6. *Graf helm H_n adalah graf yang dikonstruksi dari graf roda W_n dengan menambahkan n titik y_1, y_2, \dots, y_n sedemikian sehingga x_iy_i suatu sisi untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.*

Gambar 2.12 Graf Helm H_8

2.5. Pelabelan Graf

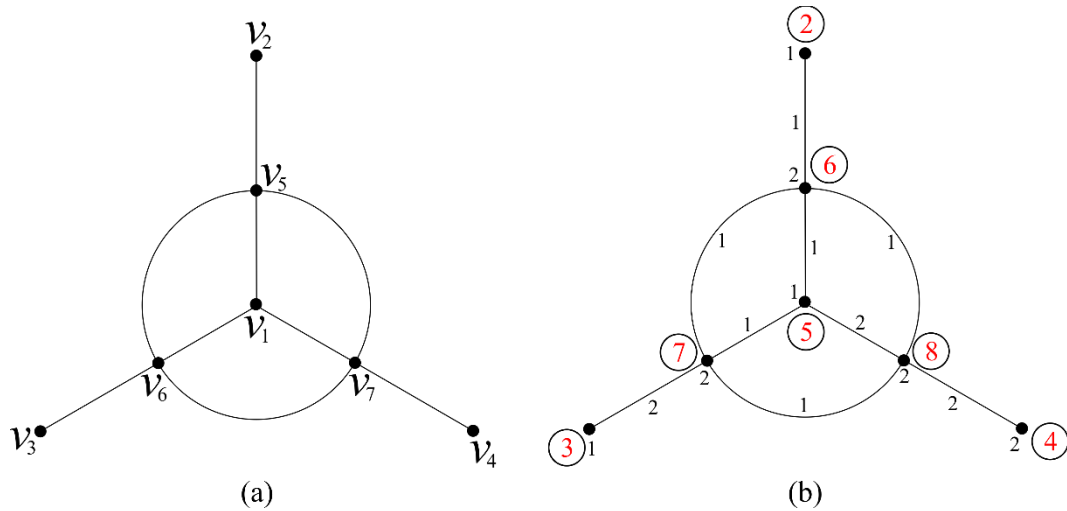
Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Pada subbab ini akan dibahas terkait beberapa hal yang perlu dipahami dalam pelabelan graf. Berikut diberikan definisi pelabelan graf yang dikutip dari [16].

Definisi 2.5.1. *Pelabelan graf G adalah pemetaan himpunan elemen-elemen pada graf (titik dan sisi) ke suatu himpunan bilangan, umumnya bilangan bulat positif atau bilangan non-negatif, yang disebut label.*

Jika domain fungsi pelabelan graf adalah himpunan titik, maka disebut pelabelan titik (*vertex labelling*). Jika domain fungsi pelabelan graf adalah himpunan sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*). Dan jika domain fungsi pelabelan graf adalah himpunan titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labelling*). Adapun himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan graf disebut himpunan label.

Definisi 2.5.2. *Bobot titik v pada pelabelan total f adalah label titik v yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v , yaitu*

$$wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv).$$



Gambar 2.13 (a) graf H_3 , (b) Pelabelan total pada graf H_3

Berdasarkan Gambar 2.13, $V(H_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(H_3) = \{v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_7, v_5v_6, v_6v_7, v_5v_7\}$, dimana masing-masing titik dan sisi graf helm H_3 telah dilabeli dengan bilangan bulat positif, pelabelan ini disebut sebagai pelabelan total. Berikut adalah fungsi pelabelan titik pada graf helm H_3 .

$$f(v_1) = 1, \quad f(v_3) = 1, \quad f(v_5) = 2, \quad f(v_7) = 2,$$

$$f(v_2) = 1, \quad f(v_4) = 2, \quad f(v_6) = 2,$$

Adapun fungsi pelabelan sisi pada graf helm H_3 adalah sebagai berikut.

$$f(v_1v_5) = 1, \quad f(v_2v_5) = 1, \quad f(v_5v_6) = 1,$$

$$f(v_1v_6) = 1, \quad f(v_3v_6) = 2, \quad f(v_6v_7) = 1,$$

$$f(v_1v_7) = 2, \quad f(v_4v_7) = 2, \quad f(v_5v_7) = 1,$$

Bobot titik-titik graf helm H_3 adalah sebagai berikut.

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_5) + f(v_1v_6) + f(v_1v_7) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_2v_5) = 1 + 1 = 2$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_3v_6) = 1 + 2 = 3$$

$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_4v_7) = 2 + 2 = 4$$

$$wt(v_5) = f(v_5) + f(v_1v_5) + f(v_2v_5) + f(v_5v_6) + f(v_5v_7)$$

$$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$wt(v_6) = f(v_6) + f(v_1v_6) + f(v_3v_6) + f(v_5v_6) + f(v_6v_7)$$

$$= 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7$$

$$wt(v_7) = f(v_7) + f(v_1v_7) + f(v_4v_7) + f(v_5v_7) + f(v_6v_7)$$

$$= 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$$

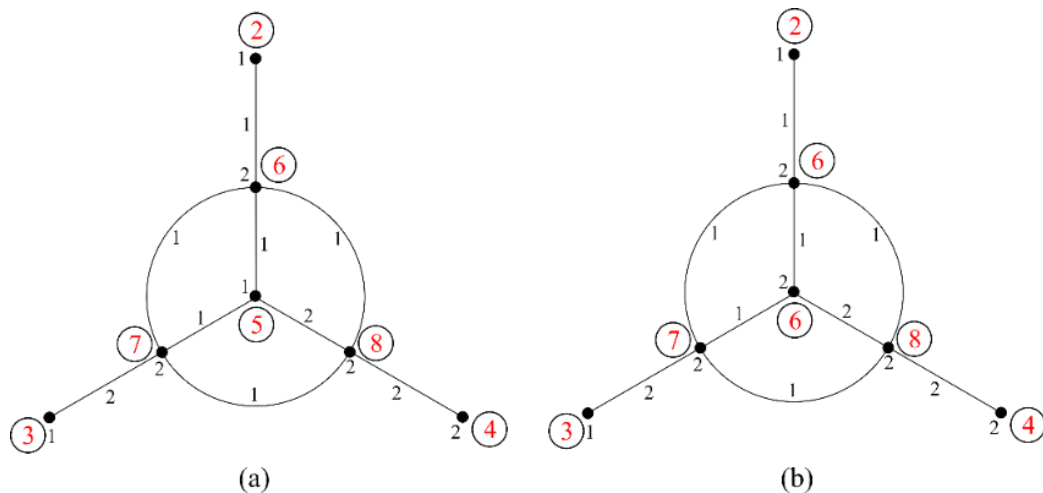
2.6. Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Definisi pada subbab ini dikutip dari (Bača, 2007) [6].

Definisi 2.6.1. Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut suatu pelabelan- k total tidak teratur titik (total vertex irregular k -labelling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V berlaku $wt(x) \neq wt(y)$, dimana

$$wt(x) = f(x) + \sum_{xu \in E} f(xu).$$

Definisi 2.6.2. Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari graf G , dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tidak teratur titik.



Gambar 2.14 Beberapa pelabelan total pada graf helm H_3

Berdasarkan Gambar 2.14, dapat dilihat beberapa pelabelan total pada graf helm H_3 . Graf (a) merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik pada H_3 . Adapun graf (b) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik karena terdapat dua titik yang memiliki bobot 6 pada H_3 .

Berdasarkan Definisi 2.6.2. diperoleh nilai total ketidakteraturan titik pada graf helm H_3 adalah 2 atau dapat ditulis $tvs(H_3) = 2$.

Nurdin dkk. dalam penelitiannya pada tahun 2010 telah membuktikan teorema terkait batas bawah nilai total ketidakteraturan titik dari sebarang graf G sebagai berikut [8].

Teorema 2.6.3. Misalkan G sebuah graf terhubung G yang memiliki n_i titik berderajat i ($i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta$), dimana δ dan Δ berturut-turut merupakan derajat minimum dan maksimum dari G , maka

$$tvs(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1} \right\rceil \right\}.$$

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan oleh penulis berupa studi literatur. Studi literatur merupakan pengumpulan bahan penelitian baik melalui jurnal ataupun literatur sejenisnya yang berkaitan dengan topik pembahasan (nilai total ketidakteraturan titik pada graf yang akan digunakan untuk mendapatkan hasil penelitian).

3.2. Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di kampus Universitas Hasanuddin secara umum dan secara khusus di Laboratorium Analisis Jurusan Matematika FMIPA Unhas. Adapun waktu penelitian ini dimulai sejak November 2021.

3.3. Tahapan Penelitian

Beberapa langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut.