KELENGKAPAN RUANG BERNORMA-2 PADA RUANG ℓ^p

SKRIPSI

SUMARNI

H011171001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2022

KELENGKAPAN RUANG BERNORMA-2 PADA RUANG ℓ^P

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SUMARNI

H011171001

PROGRAM STUDI MATEMATIKADEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2022

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PENGESAHAN

KELENGKAPAN RUANG BERNORMA-2 PADA RUANG ℓ^p

Disusun dan diajukan oleh

SUMARNI
H011171001

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddinpada tanggal 11 Agustus 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Dr. Muh. Nur, S.Si.,M.Si.	**Naimah Aris, S.Si., M.Math**
NIP. 19850529 200812 1 002	**NIP. 19711003 199702 2 001**

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si
NIP. 19700807 200003 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Sumarni
Nim	: H011171001
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Kelengkapan Ruang Bernorma-2 pada Ruang ℓ^p

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 11 Agustus 2022

Yang menyatakan

Sumarni

NIM H011171001

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam. Salawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah SAW dan kepada para keluarga serta sahabat beliau. Berkat kuasa Allah SWT serta banyak doa dan bantuan yang diberikan, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "**Kelengkapan Ruang Bernorma-2 Pada Ruang ℓ^p**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar Sarjana (S1) pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini dapat melewati segala hambatan dan masalah berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis haturkan rasa terimakasih serta penghargaan yang setinggi-tingginya untuk orang tua penulis, Ayahanda **Sakka (Almarhum)**, Ibunda **Hasbiah** yang telah menjadi inspirasi, mendidik dan membesarkan penulis dengan bertabur cinta, kasih, sayang serta dengan ikhlas telah mengiringi setiap langkah penulis dengan doa dan restunya. Penghargaan yang tulus dan ucapan terimakasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika yang telah memberikan saran-saran dan motivasi.
4. **Dr. Muh Nur, S.Si., M.Si.,** selaku dosen pembimbing utama sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terimakasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat dan dukungan serta membimbing dalam proses penyelesaian tugas akhir dengan memberikan penjelasan, saran serta solusi atas masalah yang penulis hadapi dalam penyelesaian skripsi ini.

5. **Naimah Aris S.Si., M.Math.,** selaku dosen pembimbing pertama, terimakasih atas kesediaannya untuk mengarahkan penulis, memberikan motivasi, saran, dan dukungan dalam penulisan skripsi ini.
6. **Prof. Dr. Eng Mawardi, S.Si., M.Si.,** dan **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.,** selaku dosen penguji, terimakasih banyak atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. **Segenap Dosen Pengajar dan Staf Departemen Matematika**, yang telah memberikan banyak ilmu selama berkuliah serta memberi kemudahan dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
8. Teman seperjuangan selama berkuliah **Hafsah, Uni, Ayu, Yuni, Fira, Eda, Mj,** serta teman-teman **Matematika 2017**, dan juga teman seperjuangan dari smaga **Hilda, Uti, Tami** terimakasih atas kebersamaan, dukungan, suka dan duka dalam berjuang menjalani pendidikan di Universitas Hasanuddin.
9. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, terimakasih untuk segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis, semoga bernilai ibadah di sisi Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf atas segala kekurangan. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan.

Makassar, 11 Agustus 2022

Sumarni

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Sumarni
NIM	: H011171001
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Kelengkapan Ruang Bernorma-2 pada Ruang ℓ^p"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,

Dibuat di Makassar pada tanggal 11 Agustus 2022

Yang menyatakan

(Sumarni)

ABSTRAK

Pada tulisan ini dibahas pembuktian teorema kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p. Teorema dibuktikan dengan mendefinisikan norma baru, yakni $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_1}\|_p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_2}\|_p$ yang telah ditunjukkan ekuivalen dengan norma biasa di ℓ^p. Selanjutnya, menggunakan norma baru yang didefinisikan dapat ditunjukkan bahwa sebarang barisan Cauchy di ℓ^p dalam norma-2 konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang ℓ^p. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa $\left(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p\right)$ merupakan ruang bernorma-2 yang lengkap.

Kata Kunci: *Ruang* ℓ^p, *Ruang bernorma-2, Kelengkapan*.

ABSTRACT

This paper discussed about the proof of the 2-normed space completeness theorem in the ℓ^p space. The theorem is proved by defining a new norm, namely $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_1}\|_p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_2}\|_p$ which has been shown to be equivalent to the usual norm in ℓ^p. Futhermore, using the new norm it can be shown that every Cauchy sequence in ℓ^p in norm-2 converges to an element in the ℓ^p space. Based on this proof, it is found that $\left(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p\right)$ is a complete 2-normed spaces.

Keywords: ℓ^p *space, 2-normed spaces, completeness*.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL……………………..……………………..………....…… i

HALAMAN PENGESAHAN.. ii

PERNYATAAN KEASLIAN.. iii

KATA PENGANTAR iii

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI vi

ABSTRAK vii

ABSTRACT.. viii

DAFTAR ISI ix

BAB 1 PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 3

1.3 Batasan Masalah.. 3

1.4 Tujuan Penelitian... 3

1.5 Sistematika Penulisan.. 3

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1 State of the Art 5

2.2 Determinan Matriks... 6

2.3 Ruang Vektor 8

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Bernorma 13

2.5 Ruang ℓ^P 27

2.6 Ruang Bernorma-2 32

BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.. 39

3.1 Prosedur Penelitian... 39

3.2 Metode Penelitian... 39

3.3 Waktu dan Tempat Penelitian 39

3.4 Alur Kerja 40

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN 41

4.1 Norma-2 pada Ruang ℓ^P 41

4.2 Ekuivalensi Norma di Ruang ℓ^P 48

4.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan Ruang Bernorma-2 pada Ruang ℓ^P 54

BAB 5 PENUTUP 59

5.1 Kesimpulan 59

5.2 Saran 59

DAFTAR PUSTAKA 60

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan tertua yang dibangun dari sederatan penelitian mengenai bilangan dan ruang. Kata matematika berasal dari bahasa Yunani, *mathema*, yang berarti "pengetahuan, pemikiran, pembelajaran" atau sebelumnya disebut ilmu hisab yaitu ilmu yang mempelajari besaran, struktur, ruang dan perubahan. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu lain seperti ilmu teknik, fisika, kimia, maupun disiplin ilmu lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Salah satu materi dalam ilmu matematika adalah analisis fungsional, khususnya ruang bernorma.

Konsep dasar dalam ruang bernorma adalah ruang vektor. Ruang vektor adalah struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor yaitu objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan yang dinamakan skalar. Ruang vektor atas lapangan F adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu fungsi yang memetakan $V \times V \to V$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ (penjumlahan vektor) dan fungsi yang memetakan $F \times V \to V$ dinotasikan dengan $\alpha\boldsymbol{x}$ (perkalian vektor dengan skalar), untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dan $\alpha \in F$ memenuhi sifat ruang vektor (Rynne & Youngson, 2008).

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang di dalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat tertentu. Istilah norma pada vektor didefinisikan sebagai panjang (*length*) vektor. Suatu ruang bernorma dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang tersebut. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach. Salah satu contoh ruang Banach yaitu ruang ℓ^p. Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan riil (x_n) sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergen.

Ruang bernorma tidak terbatas pada ruang bernorma, terdapat pula ruang bernorma-2 hingga ruang bernorma-n untuk $n \geq 2$. Konsep tentang ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gähler pada pertengahan tahun 1960-an. Sejak saat itu banyak peneliti yang mencoba mengkaji lebih jauh tentang ruang bernorma-2, seiring dikemukakannya berbagai hasil tentang sifat-sifat norma itu sendiri (Handayani, 2013).

Pada tahun 2001, H. Gunawan dan M. Mashadi [5] mengkaji hubungan antara norma-2 dengan norma, dimana dalam tulisannya menyatakan bahwa kekonvergenan dan kelengkapan dalam norma-2 ekuivalen dengan norma yang diturunkan dari norma-2. Kajian lain oleh H. Gunawan [4] membahas tentang kelengkapan ruang bernorma-n pada ruang ℓ^p. Kelengkapan tersebut ditunjukkan dengan mendefinisikan sebuah norma baru pada ruang ℓ^p dan membuktikan ekuivalensi norma tersebut dengan norma pada ruang ℓ^p. Selanjutnya, pada tahun 2012, dalam penelitian yang berjudul "Ruang ℓ^{p} sebagai ruang Banach-2 pada ruang norm-2" oleh Ria Astriana [2], kelengkapan ruang ℓ^{p} telah dibuktikan dengan cara mengambil sebarang barisan Cauchy di ℓ^{p} yang konvergen di ℓ^{p} dalam ruang bernorma-2.

Dari paper H. Gunawan tersebut, pada penelitian kali ini penulis tertarik untuk mengkaji kembali kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p dengan cara mendefinisikan sebuah norma baru pada ruang ℓ^p dan menunjukkan ekuivalensi norma tersebut dengan norma pada ruang ℓ^p, yang selanjutnya dari sini akan ditunjukkan kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p dengan membuktikan teorema kelengkapan ruang ℓ^p. Oleh karena itu, berdasarkan latar belakang masalah tersebut penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "Kelengkapan Ruang Bernorma-2 pada Ruang ℓ^p".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan ekuivalensi antara norma baru yang didefinisikan dengan norma biasa pada ruang ℓ^{p} dengan $1 \leq p < \infty$?
2. Bagaimana membuktikan teorema kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^{p}?

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan masalah akan dibatasi oleh pengkajian tentang kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^{p} dengan $1 \leq p < \infty$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan ekuivalensi antara norma baru yang didefinisikan dengan norma biasa pada ruang ℓ^{p} dengan $1 \leq p < \infty$.
2. Membuktikan teorema kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^{p}.

1.5 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dan memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggambarkan sistematika pembahasannya yang terdiri dari lima bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut.

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi definisi dan teorema yang telah ditemukan pada penelitian-penelitian sebelumnya untuk digunakan dalam penelitian.

BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan prosedur penulisan, metode yang akan digunakan, serta waktu dan tempat penelitian.

BAB 4 PEMBAHASAN

Pada bab ini memuat pembahasan mengenai ekuivalensi antara norma baru dengan norma biasa serta kelengkapan ruang ℓ^p pada ruang bernorma-2.

BAB 5 PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 State of the Art

Penelitian yang dilakukan oleh H. Gunawan dan M. Mashadi (2001) dengan judul "*On n-Normed Space*". Dalam penelitian ini, menunjukkan bahwa untuk kasus standar atau untuk ruang yang berdimensi hingga, norma-(n – 1) dapat diturunkan dari suatu norma-n sedemikian sehingga kekonvergenan dan kelengkapan dalam norma-n ekuivalen dengan norma-(n – 1). Dalam penelitian ini juga menyatakan bahwa kekonvergenan dan kelengkapan dalam norma-2 ekuivalen dengan norma yang diturunkan dari norma-2. Terkait hal tersebut, muncullah ide mengenai ekuivalensi di ruang benorma.

Penelitian lain yang dilakukan oleh H. Gunawan (2001) berjudul "*The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm*" membahas mengenai kelengkapan ruang bernorma-n pada ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$. Kelengkapan tersebut ditunjukkan dengan cara mendefinisikan sebuah norma baru pada ruang ℓ^p dan membuktikan ekuivalensi norma tersebut dengan norma pada ruang ℓ^p. Selanjutnya, menggunakan norma baru yang telah didefinisikan, ditunjukkan kelengkapan ruang bernoma-n pada ruang ℓ^p.

Dengan cara yang sama yang dilakukan oleh H. Gunawan tersebut, penulis tertarik untuk membahas secara khusus kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$. Dimana kelengkapan ditunjukkan dengan mendefinisikan sebuah norma baru yang diturunkan dari norma-2 pada ruang ℓ^p dan membuktikan ekuivalensi norma tersebut dengan norma pada ruang ℓ^p, yang selanjutnya menggunakan norma baru yang telah didefinisikan, ditunjukkan kelengkapan ruang bernorma-2 ruang ℓ^p.

2.2 Determinan Matriks

Matriks merupakan susunan angka dalam baris dan kolom. Matriks 2x2 atau disebut matriks persegi adalah matriks yang paling sederhana, karena hanya tersusun dari dua kolom dan dua baris. Pada matriks dikenal istilah determinan. Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan definisi determinan pada matriks.

Definisi 2.1 (*Determinan*)

Diketahui matriks bujur sangkar A_{2x2}*, dimana* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*. Nilai* $ad - bc$ *disebut determinan dari matriks A atau*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Contoh 2.1

Hitunglah determinan dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10.$$

Adapun sifat-sifat dasar determinan matriks sebagai berikut.

a. Jika semua elemen dalam satu baris/satu kolom sama dengan nol, maka nilai $det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

b. Jika dua baris/kolom sama, maka $det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0.$$

c. Nilai $det(A) = det(A^T)$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

d. Jika suatu baris/kolom dikalikan dengan suatu skalar *k*, maka nilai determinan menjadi *k* kali.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix}.$$

e. Jika suatu baris/kolom adalah kelipatan dari baris/kolom lainnya, maka $det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0.$$

f. Tanda determinan berubah apabila dua baris/kolom dipertukarkan.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

g. Determinan selalu dapat dituliskan sebagai penjumlahan dua determinan (atau lebih).

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

(Astriana, 2012).

2.3 Ruang Vektor

Ruang vektor telah dipelajari pada aljabar linier. Ruang vektor terdiri dari vektor-vektor dengan dua operasi serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi ruang vektor.

Definisi 2.2 (*Ruang Vektor*)

Misalkan V adalah sebarang himpunan dengan elemen di dalamnya diberikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Jika sepuluh aksioma berikut ini dipenuhi oleh $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *di V dan skalar* k, l *yang sembarang, maka V disebut sebagai ruang vektor dan elemen-elemen di dalam V disebut vektor. Aksioma tersebut adalah:*

1. *Jika* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *maka* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
4. *Terdapat elemen* $\mathbf{0} \in V$ *sehingga* $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ *untuk semua* $\boldsymbol{u} \in V$
5. *Untuk setiap* $\boldsymbol{u} \in V$*, ada* $-\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ *sehingga* $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
6. *Jika* $\boldsymbol{u} \in V$ *adalah sembarang vektor dan k adalah sembarang skalar, maka* $k\boldsymbol{u} \in V$
7. $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
8. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$
9. $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

(Gunawan, 2009).

Contoh 2.2

Periksa apakah $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar adalah suatu ruang vektor atau bukan.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor, berikut dibuktikan 10 aksioma ruang vektor.

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ dan $k, l \in \mathbb{R}$.

Misalkan : $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dimana $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

   Karena $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, maka $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.
   Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

   Karena $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan, maka $u_1 + v_1 = v_1 + u_1$ dan $u_2 + v_2 = v_2 + u_2$. Akibatnya,

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$$

   Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan diunjukkan $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.

$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + (v_1 + w_1) \\ u_2 + (v_2 + w_2) \end{pmatrix}.$$

   Karena $u_1, v_1, u_2, v_2, w_1, \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan, maka $u_1 + (v_1 + w_1) = (u_1 + v_1) + w_1$ dan $u_2 + (v_2 + w_2) = (u_2 + v_2) + w_2$. Akibatnya,

$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + w_1 \\ (u_2 + v_2) + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}.$$

   Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Terdapat $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, yaitu $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$ sehingga, $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \binom{0}{0} + \binom{u_1}{u_2} = \binom{0 + u_1}{0 + u_2} = \binom{u_1}{u_2} = \boldsymbol{u}.$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

5. Terdapat $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, yaitu $-\boldsymbol{u} = \binom{-u_1}{-u_2}$ sehingga, $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \binom{-u_1}{-u_2} + \binom{u_1}{u_2} = \binom{-u_1 + u_1}{-u_2 + u_2} = \binom{0}{0} = \mathbf{0}.$$

Jadi, aksioma 5 terpenuhi.

6. Akan ditunjukkan $k\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

$$k\boldsymbol{u} = k\binom{u_1}{u_2} = \binom{ku_1}{ku_2}.$$

Karena $k, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian, maka $ku_1, ku_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya $k\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

Jadi, aksioma 6 terpenuhi.

7. Akan ditunjukkan $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$.

$$k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\binom{u_1 + v_1}{u_2 + v_2} = \binom{k(u_1 + v_1)}{k(u_2 + v_2)} = \binom{ku_1 + kv_1}{ku_2 + kv_2}$$

$$= \binom{ku_1}{ku_2} + \binom{kv_1}{kv_2} = k\binom{u_1}{u_2} + k\binom{v_1}{v_2} = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}.$$

Jadi, aksioma 7 terpenuhi.

8. Akan ditunjukkan $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$.

$$(k + l)\boldsymbol{u} = (k + l)\binom{u_1}{u_2} = \binom{(k + l)u_1}{(k + l)u_2} = \binom{ku_1 + lu_1}{ku_2 + lu_2}$$

$$= k\binom{u_1}{u_2} + l\binom{u_1}{u_2} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}.$$

Jadi, aksioma 8 terpenuhi.

9. Akan ditunjukkan $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$.

$$k(l\boldsymbol{u}) = k\binom{lu_1}{lu_2} = \binom{klu_1}{klu_2} = kl\binom{u_1}{u_2} = (kl)\boldsymbol{u}.$$

Jadi, aksioma 9 terpenuhi.

10. Akan ditunjukkan $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$$1\boldsymbol{u} = 1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1u_1 \\ 1u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}.$$

Jadi, aksioma 10 terpenuhi.

Karena semua aksioma ruang vektor terpenuhi, maka dapat disimpulkan $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor.

Definisi 2.3 (*Kombinasi Linier*)

Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut kombinasi linear dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$$

dengan $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah skalar.

Definisi 2.4 (*Bebas Linier*)

Himpunan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ dikatakan bebas linier jika dan hanya jika persamaan vektor $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ hanya mempunyai satu penyelesaian, yakni $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ atau $det \neq 0$ (pada matriks persegi).

Definisi 2.5 (*Bergantung Linier*)

Himpunan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ dikatakan bergantung linier jika dan hanya jika persamaan vektor $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ mempunyai penyelesaian lain, selain penyelesaian $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ atau $det = 0$ (pada matriks persegi).

(Gunawan, 2009).

Contoh 2.3

1. Diberikan $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, apakah $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{w}$?

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Diperoleh sistem persamaan,

$$2k_1 + k_2 = 4$$

$$4k_1 - k_2 = 2$$

$$3k_2 = 6 \rightarrow k_2 = 2.$$

Subtitusikan $k_2 = 2$ ke persamaan pertama maka diperoleh,

$$2k_1 + 2 = 4$$

$$2k_1 = 2 \rightarrow k_1 = 1.$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2+2\\4-2\\0+6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}.$$

Dapat disimpulkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{w}$.

2. Diberikan himpunan $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, dengan $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. Apakah himpunan *S* bebas linier ?

   Penyelesaian:

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k_1\\3k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Didapatkan $k_1 = k_2 = 0$, dengan demikian maka himpunan S bebas linier. Untuk menenentukan apakah himpunan S bebas linier atau tidak, dapat juga dilakukan dengan melihat nilai determinan matriks koefisiennya, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dapat dilihat nilai $det(A) = 6 \neq 0$, sehingga himpunan S bebas linier.

3. Diberikan $M = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, dengan $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Apakah himpunan M bergantung linier?

   Penyelesaian:

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$
$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Ambil sembarang $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$ maka,

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Sehingga himpunan M bergantung linier, karena terdapat $k \in \mathbb{R}$ selain 0 yang menyebabkan $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$. Untuk menenentukan apakah himpunan M bergantung linier atau tidak, dapat juga dilakukan dengan melihat nilai determinan matriks koefisiennya, yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Dapat dilihat nilai $det(B) = 0$, sehingga himpunan M bergantung linier.

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Bernorma

2.4.1 Ruang Hasil Kali Dalam

Ruang vektor yang dilengkapi dengan operasi hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam. Berikut diberikan definisi ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.6 (*Ruang Hasil Kali Dalam*)

Misalkan V adalah ruang vektor dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *maka notasi* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ *dinamakan hasil kali dalam jika memenuhi keempat aksioma sebagai berikut:*

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ *(Simetris)*
2. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ *(Aditivitas)*
3. $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ *(Homogenitas)*
4. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ *dan* $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *(Positifitas)*

ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

(Anton & Rorres, 2005).

Contoh 2.4

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di ruang vektor V yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$. Tunjukkan bahwa V adalah ruang hasil kali dalam.

<u>Penyelesaian:</u>

Akan ditunjukkan V adalah ruang hasil kali dalam dengan membuktikan ke-4 aksioma.

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in$ V dan $k \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$.

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle &= \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\ &= 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 \\ &= 2v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3 \\ &= \langle (v_1, v_2, v_3), (u_1, u_2, u_3) \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Jika $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Akan ditunjukkan $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle \\
&= 2(u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + 3(u_3 + v_3)w_3 \\
&= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3 \\
&= (2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3) + (2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3) \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle.
\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3.Akan ditunjukkan $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle &= \langle (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\
&= 2ku_1v_1 + ku_2v_2 + 3ku_3v_3 \\
&= k(2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3) \\
&= k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4.Akan ditunjukkan $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= \langle (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\
&= 2v_1v_1 + v_2v_2 + 3v_3v_3 \\
&= 2{v_1}^2 + {v_2}^2 + 3{v_3}^2 .
\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat bilangan kuadrat, maka ${v_1}^2, {v_2}^2, {v_3}^2 \geq 0$, dengan demikian,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 2{v_1}^2 + {v_2}^2 + 3{v_3}^2 \geq 0$$

dan

$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

($\Rightarrow$) Jika $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ maka $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Diketahui $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$, artinya $2{v_1}^2 + {v_2}^2 + 3{v_3}^2 = 0$. Sehingga $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Diperoleh $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

($\Leftarrow$) Jika $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ maka $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ artinya $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Sehingga dapat dituliskan,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= 2{v_1}^2 + {v_2}^2 + 3{v_3}^2 \\
&= 2.0^2 + 0^2 + 3.0^2 \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Karena ke-4 aksioma terpenuhi, maka dapat disimpulkan V adalah ruang hasil kali dalam.

2.4.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang di dalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat tertentu, lebih jelasnya tercantum pada definisi berikut.

Definisi 2.7 (*Ruang Bernorma*)

Misalkan X merupakan ruang vektor. Norma pada X merupakan suatu fungsi $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *berlaku,*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

ruang vektor X yang terdapat fungsi norma didalamnya disebut ruang vektor bernorma atau hanya ruang bernorma.

(Rynne & Youngson, 2008).

Contoh 2.5

Untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Buktikan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$.

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq 0.$$

Jadi, aksioma 1 terpenuhi

2. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

($\Rightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ maka $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Diketahui $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ artinya,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

($\Leftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ maka $\|\boldsymbol{x}\| = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, artinya $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0, \ldots ,0)$.

Sehingga dapat dituliskan,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = |0| + |0| + \cdots + |0| = 0.$$

Dengan demikian, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| = |\alpha|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\ ) = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|.$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Karena memenuhi ke-4 aksioma, maka dapat disimpulkan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Contoh 2.6

Diberikan $q(\boldsymbol{x}) = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$ di suatu ruang C. Ruang C adalah ruang semua barisan $\boldsymbol{x} = (x_n)$ yang konvergen. Tunjukkan bahwa $q(\boldsymbol{x})$ tidak mendefinisikan suatu norma pada C.

<u>Penyelesaian:</u>

Akan ditunjukkan $q(\boldsymbol{x})$ tidak memenuhi aksioma ruang bernorma.

1. Akan ditunjukkan $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$.

$$q(\boldsymbol{x}) = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| \geq 0.$$

   Aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $q(\boldsymbol{x}) = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

   ($\Leftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ maka $q(\boldsymbol{x}) = 0$

   Diketahui $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ artinya $\boldsymbol{x} = (x_n) = (0,0,0,\ldots)$,

   sehingga,

$$q(\boldsymbol{x}) = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} 0\right| = 0$$

   ($\Rightarrow$) Jika $q(\boldsymbol{x}) = 0$ maka $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

   Misalkan $\boldsymbol{x} = (x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.

   Jika $q(\boldsymbol{x}) = 0$ maka dapat ditulis,

$$q(\boldsymbol{x}) = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right| = 0.$$

   Perhatikan bahwa $q(\boldsymbol{x}) = 0$, namun $\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) \neq \boldsymbol{0}$.

   Dengan demikian, aksioma 2 tidak terpenuhi.

   Karena, salah satu aksioma ruang bernorma tidak terpenuhi maka dapat disimpulkan $q(\boldsymbol{x})$ tidak mendefinisikan suatu norma pada C.

2.4.3 Ekuivalensi, Kekonvergenan dan Kelengkapan

Ekuivalensi, kekonvergenan serta kelengkapan yang akan dibahas yakni pada ruang bernorma. Untuk lebih jelasnya, penjelasannya diuraikan sebagai berikut.

Definisi 2.8 (*Ekuivalensi*)

Suatu norma $\|\cdot\|$ *pada sebuah ruang vektor* X *dikatakan ekuivalen dengan* $\|\cdot\|_0$ *di* X *jika terdapat bilangan* $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *berlaku,*

$$a\|\boldsymbol{x}\|_0 \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq b\|\boldsymbol{x}\|_0.$$

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.7 (Kreyszig, 1978)

Tunjukkan bahwa dua norma $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ di $\mathbb{R}^2$ adalah ekuivalen, dengan $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_2 = max\{|x_1|, |x_2|\}$.

<u>Penyelesaian:</u>

Perhatikan bahwa, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $|x_1|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$ dan $|x_2|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$ atau $|x_1| \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$ dan $|x_2| \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$.

Sehingga,

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = max\{|x_1|, |x_2|\} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\boldsymbol{x}\|_1.$$

Diperoleh, $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\|\boldsymbol{x}\|_1{}^2 = x_1^2 + x_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 2(max\{|x_1|, |x_2|\})^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|_2{}^2.$$

Diperoleh $\|\boldsymbol{x}\|_1{}^2 \leq 2\|\boldsymbol{x}\|_2{}^2$ atau $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$.

Jadi, terdapat dua bilangan $a = 1$ dan $b = \sqrt{2}$ sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$. Berdasarkan Definisi 2.8, norma $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ ekuivalen.

Contoh 2.8 (Jyoti, 2017)

Misalkan $X = \{\, p = p(t) : p$ adalah polinomial berderajat apapun $\}$. X adalah ruang polinomial semua derajat berdimensi tak hingga. Didefinisikan dua norma $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ pada X sebagai berikut.

$$\|p\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

$$\|p\|_2 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

dimana $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$. Tunjukkan bahwa $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ tidak ekuivalen.

<u>Penyelesaian:</u>

$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. Pertama, akan ditunjukkan $\|p\|_1 \leq \|p\|_2$.

$$\begin{aligned}
\|p\|_1 &= \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} |a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |a_0| + |a_1||t| + \cdots + |a_n||t|^n \\
&\leq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |a_i| \\
&= \|p\|_2 .
\end{aligned}$$

Jadi, $\|p\|_1 \leq \|p\|_2$. Selanjutnya, andaikan terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga,

$$\|p\|_2 \leq \alpha\|p\|_1 \ \forall \ p(t) \in X.$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} p_n(t) &= 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + t^{2n-2} - t^{2n-1} \ \forall \ n = 1,2,3, \ldots \\ &= (1-t)(1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore p_1 &= 1 - t \\ p_2 &= 1 - t + t^2 - t^3 \\ p_3 &= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4. \end{aligned}$$

Dengan demikian maka diperoleh,

$$\|p_n\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |p_n(t)| = 1$$

$$\|p_n\|_2 = \sum_{i=0}^{2n-1} |a_i| = 2n \ .$$

Ketika $\|p_n\|_2 \leq \alpha\|p_n\|_1 \ \forall \ n$, maka $2n \leq \alpha$ atau $n \leq \frac{\alpha}{2} \ \forall \ n$. Hal ini kontradiksi. Oleh karena itu, $\|p\|_2 \leq \alpha\|p\|_1$ tidak mungkin terjadi. Jadi, dapat disimpulkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ tidak ekuivalen.

Definisi 2.9 (*Barisan Konvergen*)

Barisan (x_n) dalam ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$ atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.9 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$ dan $X = [0,1]$. Tunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ dengan $n = 1,2, \ldots$ konvergen ke 0 pada X.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, hal ini berarti $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{\mathrm{n}_0} < \varepsilon$. Jadi, untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku,

$$\|x_n - x\| = \left\|\frac{1}{n} - 0\right\| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Dengan demikian diperoleh $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.9 barisan (x_n) konvergen ke $0 \in X$.

Definisi 2.10 (*Barisan Cauchy*)

Barisan (x_n) *dalam ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$ *dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat bilangan asli* n_0 *sedemikian sehingga untuk setiap* $m, n \geq n_0$ *berlaku,*

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Jika setiap barisan Cauchy di $(X, \|\cdot\|)$ *konvergen ke suatu* $x \in X$, *maka* $(X, \|\cdot\|)$ *merupakan ruang Banach.*

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.10 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$. Tunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ dengan $n = 1,2, \ldots$ merupakan barisan Cauchy pada X.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, hal ini berarti $\frac{2}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{2}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Jadi, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku,

$$\|x_m - x_n\| = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan demikian, diperoleh $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Berdasarkan Definisi 2.10, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X.

Contoh 2.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach.

Penyelesaian:

Ambil sebarang barisan Cauchy (x_m) di $\mathbb{R}^n$. Karena (x_m) merupakan barisan Cauchy, maka berdasarkan Definisi 2.10 diperoleh, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $m, r \geq n_0$ sedemikian sehingga,

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left({\alpha_i}^{(m)} - {\alpha_i}^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Kuadratkan kedua ruas, diperoleh, untuk $m, r \geq n_0$ dan $i = 1,2, \dots, n$

$$\left({\alpha_i}^{(m)} - {\alpha_i}^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

$$\left|{\alpha_i}^{(m)} - {\alpha_i}^{(r)}\right| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap i yang tetap $(1 \leq i \leq n)$, barisan $\left({\alpha_i}^{(1)}, {\alpha_i}^{(2)}, \dots\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ merupakan ruang Banach, maka setiap barisan $\left({\alpha_i}^{(r)}\right)$ di $\mathbb{R}$ konvergen ke $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, didefinisikan $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Misalkan $r \to \infty$, maka $\left(\alpha_i{}^{(r)}\right) \to \alpha_i$ untuk $1 \leq i \leq n$, diperoleh

$$\left|\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right)^2 < \varepsilon^2$$

sehingga untuk $1 \leq i \leq n$,

$$\|x_m - \boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Berdasarkan Definisi 2.9, barisan Cauchy (x_m) di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan berdasarkan definisi kelengkapan, ruang bernorma $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah lengkap. Dengan demikian, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach.

Teorema 2.1 (*Ketaksamaan Young*)

Jika $p > 1$, *dan didefinisikan* q *dengan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *dimana* $\alpha, \beta > 0$ *maka berlaku,*

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q. \tag{2.1}$$

Bukti.

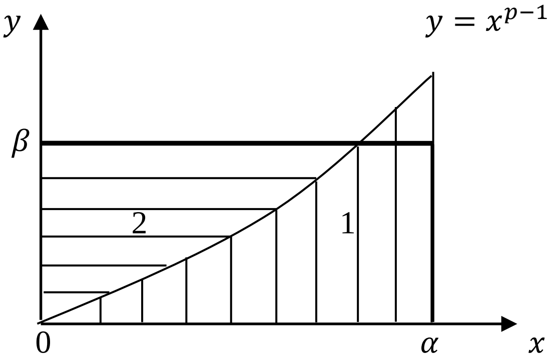
Diketahui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq} = 1$

$$\Leftrightarrow p + q = pq$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(q-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p-1)} = (q-1).$$

Kemudian dibentuk fungsi kontinu $y = x^{p-1}$ mengakibatkan $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$. Jika digambarkan seperti berikut.



Dari gambar terlihat bahwa,

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha x^{p-1}\ dx + \int_0^\beta y^{q-1}\ \ dy$$

$$= \frac{1}{p}x^p \Big|_0^\alpha + \frac{1}{q}y^q \Big|_0^\beta$$

$$= \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q.$$

Jadi diperoleh Ketaksamaan Young pada (2.1).

(Kreyszig, 1978).

Teorema 2.2 (*Ketaksamaan Minkowski*)

Jika p dan q adalah bilangan riil dimana $p \ge 1$ *dan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *maka untuk setiap* $(x_n), (y_n) \in \ell^p$ *berlaku,*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.2)$$

Bukti.

Untuk $p = 1$, maka ketaksamaannya mengikuti bentuk ketaksamaan segitiga pada bilangan riil yaitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

Untuk $p > 1$,

perhatikan bahwa untuk setiap n ∈ ℕ maka,

$$|x_n + y_n|^p = |x_n + y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq (|x_n| + |y_n|)|x_n + y_n|^{p-1}$$

$$= |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + |y_n||x_n + y_n|^{p-1}.$$

Jumlahkan untuk setiap n maka diperoleh,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n||x_n + y_n|^{p-1}. \qquad (2.3)$$

Selanjutnya, gunakan ketaksamaan Holder (lihat [10]) yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Maka pada (2.3) untuk suku di ruas kanan dapat ditulis,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n + y_n|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n + y_n|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Diketahui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sehingga $pq = p + q$ atau $(p-1)q = p$, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.4)$$

Substitusikan (2.4) ke (2.3) diperoleh,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right)}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Diketahui $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ sehingga diperoleh,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jadi diperoleh ketaksamaan Minkowski pada (2.2).

(Kreyszig, 1978).

2.5 Ruang ℓ^p

Ruang ℓ^p merupakan ruang vektor dan ruang bernorma karena memenuhi sifat-sifat ruang vektor dan ruang bernorma. Pada subbab ini akan dibahas definisi ruang ℓ^p dan selanjutnya akan dibuktikan ruang ℓ^p adalah ruang vektor dan ruang bernorma.

Definisi 2.11 (*Ruang ℓ^p*)

Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan riil $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ sedemikian sehingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ konvergen, dengan kata lain

$$\ell^p = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.12 (Meriam, 2013)

Diberikan barisan,

$$(y_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

Tunjukkan bahwa $(y_n) \in \ell^p$.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa (y_n) adalah elemen ℓ^p, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty, \qquad \text{untuk } 1 \leq p < \infty.$$

Perhatikan bahwa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = |y_1|^p + |y_2|^p + |y_3|^p + \cdots$$

$$= 1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

Berdasarkan uji deret-p, diketahui bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ , konvergen untuk } p > 1,$$

Sehingga, diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$. Dengan demikian $(y_n) \in \ell^p$.

Proposisi 2.1

Ruang ℓ^p adalah ruang vektor.

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \ell^p$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dimana $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$

$\boldsymbol{y} = (y_n) = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^p$

$\boldsymbol{z} = (z_n) = (z_1, z_2, \dots) \in \ell^p$

Akan ditunjukkan bahwa ℓ^p memenuhi aksioma-aksioma ruang vektor.

1. Akan ditunjukkan jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$, maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^p$.

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_n) + (y_n) = (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots).$$

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ adalah barisan bilangan riil di ℓ^p dan elemen dari $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ juga merupakan barisan bilangan riil di ℓ^p, maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^p$.

Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$$

Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) &= (x_1, x_2, \dots) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots)\\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots)\\ &= (x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2 \dots.\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) + (z_1, z_2, \dots)\\ &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Terdapat $\boldsymbol{0} \in \ell^{\mathrm{p}}$, yaitu $\boldsymbol{0} = (0,0, \dots)$ sehingga, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = (0 + x_1, 0 + x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = \boldsymbol{x}.$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

5. Terdapat $-\boldsymbol{x} \in \ell^p$ sehingga, $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2, \dots) = (0,0, \dots) = \boldsymbol{0}.$$

Jadi, aksioma 5 terpenuhi.

6. Akan ditunjukkan jika $\boldsymbol{x} \in \ell^p$, maka $\alpha\boldsymbol{x} \in \ell^p$.

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots).$$

Karena $\boldsymbol{x}$ adalah barisan bilangan riil di ℓ^p dan elemen dari $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$ juga merupakan barisan bilangan riil di ℓ^p, dengan demikian $\alpha\boldsymbol{x} \in \ell^{\mathrm{p}}$.

Jadi, aksioma 6 terpenuhi.

7. Akan ditunjukkan $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots) \\ &= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 7 terpenuhi.

8. Akan tunjukkan $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha+\beta)(x_1, x_2, \dots) \\ &= \big((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \dots\big) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \dots) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots) \\ &= \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 8 terpenuhi.

9. Akan ditunjukkan $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\boldsymbol{x}) &= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots) \\ &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \dots) \\ &= \big((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots\big) \\ &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots) \\ &= (\alpha\beta)\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 9 terpenuhi.

10. Akan ditunjukkan $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

$$1\boldsymbol{x} = 1(x_1, x_2, \dots) = (1x_1, 1x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = \boldsymbol{x}.$$

Jadi, aksioma 10 terpenuhi.

Karena semua aksioma ruang vektor terpenuhi, maka dapat disimpulkan ruang ℓ^{p} adalah ruang vektor.

Proposisi 2.2

Jika fungsi $\|\cdot\|_p\colon \ell^p \to \mathbb{R}$, *didefinisikan*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \ell^p$$

maka $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *adalah ruang bernorma.*

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa ruang ℓ^{p} memenuhi aksioma ruang bernorma.

1. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p \geq 0$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \geq 0$. Sehingga $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$.

Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ maka $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Masing-masing ruas dipangkatkan p, diperoleh

$$|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots = 0$$
$$x_1 = x_2 = \cdots = 0$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ maka $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ artinya, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) = (0,0,\dots)$.

Sehingga dapat dituliskan,

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = (|0|^p + |0|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Dengan demikian, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p$.

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p.$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan Ketaksamaan Minkowski pada Teorema 2.2 diperoleh,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p.$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Karena semua aksioma ruang bernorma terpenuhi maka $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ adalah ruang bernorma.

2.6 Ruang Bernorma-2

Definisi 2.12 (*Ruang Bernorma-2*)

Misalkan X adalah ruang vektor riil berdimensi d, dengan $d \geq 2$. *Suatu fungsi bernilai riil tak negatif yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan* $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$, *sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *memenuhi sifat-sifat dibawah ini:*

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x}$ *dan* $\boldsymbol{y}$ *bergantung linier*
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$

disebut sebagai norma-2 di X, dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *disebut suatu ruang bernorma-2.*

(Gähler, 1964).

Secara geometri, norma-2 diinterpretasikan sebagai luas jajar genjang yang direntang oleh $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$. Jika $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Norma-2 tersebut juga dikenal sebagai norma-2 standar pada $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(Iryanti, 2012)

Contoh 2.13 (Handayani, 2013)

Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dengan norma-2 berikut

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left| det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right|$$

dimana $\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}), i \in \{1,2\}$.

Tunjukkan bahwa $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   $(\Longrightarrow)$ Jika $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$ maka $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   Diketahui $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$ artinya,

$$\left| det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right| = 0.$$

   Diperoleh, $det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 0$.

   Berdasarkan Definisi 2.5, maka $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   $(\Longleftarrow)$ Jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$.

   Jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier artinya dapat ditulis,

$$\boldsymbol{x_1} = k\boldsymbol{x_2} \text{ atau } x_{11} = kx_{21} \text{ dan } x_{12} = kx_{22}.$$

Sehingga,

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|.$$

Berdasarkan sifat determinan pada Definisi 2.1(e) diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = 0.$$

Dengan demikian, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \|\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}\|$.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| &= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}| = |x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}| \\ &= |-1(x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11})| = |-1||x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11}| \\ &= |x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11}| = \left|det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix}\right| = \|\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}\|.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x_1}, \alpha\boldsymbol{x_2}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\|$.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x_1}, \alpha\boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{pmatrix}\right| &= |\alpha x_{11}x_{22} - \alpha x_{12}x_{21}| \\ &= |\alpha(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})| = |\alpha||x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}| \\ &= |\alpha|\left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = |\alpha|\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\|.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}\| \leq \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}\|$.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}\| &= \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} + x_{31} & x_{22} + x_{32} \end{pmatrix}\right| \\ &= |x_{11}(x_{22} + x_{32}) - x_{12}(x_{21} + x_{31})| \\ &= |x_{11}x_{22} + x_{11}x_{32} - x_{12}x_{21} - x_{12}x_{31}| \\ &= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}| \\ &\leq |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}| + |x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}| \\ &= \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| + \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right| \\ &= \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}\|.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Karena semua aksioma terpenuhi maka dapat disimpulkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2.

Contoh 2.14

Jika $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ dengan $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. Buktikan bahwa $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ tidak mendefinisikan suatu norma-2 pada $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$**.**

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}^2$.

1. Akan ditunjukkan $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   ($\Longrightarrow$) Jika $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = 0$ maka $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   Diketahui $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = 0$ artinya,

   $$det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

   Berdasarkan Definisi 2.5, maka $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   ($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier maka $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = 0$.

   Jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier maka dapat ditulis $\boldsymbol{x_1} = k\boldsymbol{x_2}$.

   Sehingga diperoleh,

   $$p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = det\begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

   Berdasarkan sifat determinan pada Definisi 2.1(e) diperoleh,

   $$p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = det\begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

   Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = p(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1})$.

   $$p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}$$

   $$= -1(x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11}) = -det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} = -p(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}).$$

   Diperoleh $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \neq p(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1})$. Dengan demikian, aksioma 2 tidak terpenuhi.

Karena, salah satu aksioma norma-2 tidak terpenuhi maka dapat disimpulkan $p(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ tidak mendefinisikan suatu norma-2 pada $\mathbb{R}^2$.

Proposisi 2.3

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang bernorma-2, maka untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *berlaku:*

a. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$
b. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$ menggunakan definisi norma-2.
   Berdasarkan Definisi 2.12(4) diperoleh,
   $$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\|.$$
   Perhatikan bahwa berdasarkan Definisi 2.12(3), diperoleh $\|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\| = |-1|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$. Selanjutnya, dengan menggunakan aksioma yang sama, diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}.\boldsymbol{y}\| = \boldsymbol{0}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$. Dengan demikian,
   $$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}\| &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\| \\ \boldsymbol{0}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \\ 0 &\leq 2\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \\ 0 &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \\ \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| &\geq 0 \end{aligned}$$

b. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$, yaitu dengan menunjukkan
   $$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \text{ dan } \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\|.$$
   Berdasarkan Definisi 2.12(4) diperoleh,
   $$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\|.$$
   Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.12(3), maka
   $$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\| \\ &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + |\alpha|.0 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$
   Sehingga diperoleh, $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$.

Perhatikan bahwa, dengan menggunakan Definisi 2.12(4) dapat ditulis,

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x},-\alpha\boldsymbol{x}\|.$$

Berdasarkan Definisi 2.12(3) maka $\|\boldsymbol{x},-\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\|$. Dengan Definisi 2.12(1) diperoleh $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\| = 0$, sehingga $\|\boldsymbol{x},-\alpha\boldsymbol{x}\| = 0$. Dengan demikian,

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\|.$$

Karena $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ dan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\|$, maka terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$.

(Nur, 2012).

Teorema 2.3 (*Ketaksamaan Minkowski untuk Deret Double*)

Jika p dan q adalah bilangan riil dimana $p \geq 1$ dan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, maka untuk setiap $(x_n),(x_k),(y_n),(y_k) \in \ell^p$ berlaku,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k + x_ky_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

Bukti.

Untuk $p = 1$, maka ketaksamaannya mengikuti bentuk ketaksamaan segitiga pada bilangan riil yaitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k + x_ky_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_n|.$$

Untuk $p > 1$,

Misalkan $x_ny_k + x_ky_n = z_nz_k$, maka dapat ditulis,

$$|z_nz_k|^p = |x_ny_k + x_ky_n||z_nz_k|^{p-1} \leq (|x_ny_k| + |x_ky_n|)|z_nz_k|^{p-1}$$

$$= |x_ny_k||z_nz_k|^{p-1} + |x_ky_n||z_nz_k|^{p-1}.$$

Jumlahkan untuk setiap n dan k maka diperoleh,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_nz_k|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k||z_nz_k|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_n||z_nz_k|^{p-1}. \quad (2.6)$$

Menggunakan Ketaksamaan Holder untuk Deret Double (lihat [2]), yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_kx_ky_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ny_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Maka pada (2.6) untuk suku di ruas kanan dapat ditulis,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k||z_n z_k|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(|z_n z_k|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n||z_n z_k|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(|z_n z_k|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Diketahui $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sehingga $pq=p+q$ atau $(p-1)q=p$, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k||z_n z_k|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n||z_n z_k|^{p-1} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Dari kedua persamaan ini, (2.6) menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Karena $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ sehingga diperoleh,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_n z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Subtitusi $x_n y_k + x_k y_n = z_n z_k$ maka dapat ditulis,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k + x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_n y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jadi diperoleh ketaksamaan Minkowski untuk Deret Double pada (2.5).

(Kreyszig, 1978).

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Prosedur Penelitian

Penulisan penelitian akan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan dan mengkaji berbagai referensi terkait topik yang akan dibahas dalam penelitian ini, referensi yang dimaksud berupa *paper*, jurnal, skripsi, buku cetak dan lain-lain.
2. Mengkaji rumusan masalah yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya.
3. Menjabarkan hasil kajian dalam bentuk tulisan skripsi.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode deskriptif dimana dalam penelitian ini akan dijelaskan kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p dengan mengumpulkan referensi terkait dengan topik yang diangkat pada penelitian ini.

3.3 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara daring maupun luring, dimana penulis mengakses referensi terkait melalui internet dan Perpustakaan MIPA Universitas Hasanuddin. Penelitian ini dilakukan sejak tanggal 20 November 2021.