UJI BELL-DOKSUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN DAN SAMPEL TIDAK INDEPENDEN

TUGAS AKHIR

Untuk Melengkapi Tugas-Tugas Sebagai Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika

Oleh :

M. ADDIN
87 03 040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
UJUNG PANDANG
1996

UJI BELL-DOSKUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN

DAN SAMPEL TIDAK INDEPENDEN

DISETUJUI OLEH

Pembimbing Utama

(Drs. Daeng Idris. MSi)

NIP. 130 937 322

Pembimbing Pertama

(Dra. Ong Mei Fang, MSi)

NIP. 131 802 884

Pembimbing Kedua

(Drs. J.M. Paranoan, MS)

NIP. [illegible]

Pada tanggal :

KATA PENGANTAR

ASSALAMU ALAIKUM WARAHMATULLAHI WABARAKATUH

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala limpahan Rahmat dan hidayat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini, walaupun dalam bentuk yang sederhana.

Dari tahap awal perencanaan penulisan hingga pada penyelesaiannya, penulis telah banyak mendapat bimbingan serta bantuan dari berbagai pihak, baik secara materil maupun secara moril. Untuk itu penulis tidak lupa mengucapkan terima kasih. Secara khusus penulis ingin menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Drs. Daeng Idris, MSi sebagai Pembimbing Utama.
4. Ibu Dra. Ong Mei Fang, MSi sebagai Pembimbing Pertama.
5. Bapak Drs. J.M Paranoan, MS sebagai pembimbing kedua.
6. Bapak-bapak/Ibu-ibu/Asisten Dosen pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang telah memberikan bekal Ilmu Pengetahuan selama perkuliahan.

7. Seluruh staf Administrasi FMIPA Universitas Hasanuddin serta rekan-rekan yang telah banyak memberikan motivasi dan input yang berguna dalam penyelesaian tugas akhir ini.
8. Kedua orang tua Ayahanda Yusuf Jafar dan Ibunda Siti Hadijah, istri Siti Asmah serta Adik Argadan atas segala dorongan moril dan bantuan material serta do'a yang diberikan selama penulis menempuh pendidikan.
9. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dalam penyusunan tugas akhir ini yang tidak sempat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga segala bantuan dan amal kebaikan yang telah diberikan kepada penulis mendapat balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Akhirnya penulis menyadari bahwa tulisan ini masih banyak yang perlu disempurnakan, sehingga penulis senantiasa mengharapkan kritikan dan saran membangun dari para pembaca demi perbaikan tulisan ini.

Ujung Pandang, 1996

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
$<$	Lebih kecil dari
$>$	Lebih besar dari
$\leq$	Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	Lebih besar atau sama dengan
$=$	Sama dengan
$\neq$	Tidak sama dengan
$\in$	Elemen
$\notin$	Bukan elemen
$\subset$	Himpunan bagian
$\forall$	Untuk setiap
$\exists$	Ada/terdapat
$\ni$	Sedemikian hingga
$+$	Tambah
$\cdot$	Kali
$-$	Kurang
$\emptyset$	Himpunan kosong
Δ	Delta
ϵ	Epsilon
∂	Dho
λ	Lamda
π	Phi
α	Alfa
$\mid \ \mid$	Harga mutlak
$\Longrightarrow$	Jika
$\Longleftrightarrow$	Jika dan hanya jika
Σ	sigma/jumlah

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 LATAR BELAKANG

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang sangat penting dalam dekade ini, karena matematika merupakan dasar bagi ilmu-ilmu yang lain. Matematika secara garis besarnya dibagi atas dua cabang, yakni Matematika Murni dan Matematika Tarapan. Matematika Murni mempelajari bidang Aljabar dan bidang Analisa, sedangkan Matematika Tarapan mempelajari bidang Statistika dan bidang Komputasi.

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin canggih, maka perkembangan di bidang matematika semakin memegang peranan penting dari berbagai bidang keahlian. Namun demikian antara cabang-cabang matematika itu sendiri tidak dapat dipisahkan satu dengan yang lainnya.

I.2 RUANG LINGKUP PEMBAHASAN

Berdasarkan penjelasan diatas, maka dalam tulisan ini dibahas tiga topik utama dari cabang matematika, yaitu pada cabang matematika bidang statistika membahas mengenai, UJI BELL - DOKSUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN DAN SAMPEL TIDAK INDEPENDEN, yang ditempatkan pada BAB II. Pada cabang matematika bidang aljabar membahas mengenai SIFAT-SIFAT RING DAN HOMOMORFISMA RING, yang ditempatkan pada BAB III, sedangkan pada cabang matematika tarapan membahas mengenai PENERAPAN DIFERENSIAL PARSIAL DALAM ILMU EKONOMI, yang ditempatkan pada BAB IV.

Dari latar belakang di atas, penulis merasa perlu menuangkan dalam bentuk karya ilmiah dengan Judul "UJI BELL - DOKSUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN DAN SAMPEL TIDAK INDEPENDEN", sekaligus merupakan tugas akhir sebagai pensyaratan dalam mencapai galar sarjana pada jurusan matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Ujung Pandang.

BAB II

UJI BELL-DOKSUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN DAN SAMPEL TIDAK INDEPENDEN

II.1. PENGANTAR

Metode statistik secara umum digunakan untuk menguji suatu populasi berdasarkan sampel yang diamati. Sampel tersebut merupakan bahan untuk menguji parameter dari populasi. Pengujiannya didasarkan pada beberapa asumsi, misalnya observasi sampel yang diketahui berdistribusi normal. Uji kenormalan tentunya perlu dilakukan untuk memastikan bahwa asumsi tersebut dipenuhi. Akan tetapi tidak selalu kita dapat memperoleh kepastian kenormalan, sehingga asumsi kenormalan tidak selalu dapat dijamin penuh. Dengan demikian tidak setiap populasi dapat diasumsikan dari mana sampelnya dipilih. Untuk menguji populasi tersebut perlu dikembangkan teknik lain yaitu digunakan metode statistika nonparametrik kadang-kadang disebut metode statistika bebas distribusi.

Dalam statistik nonparametrik, peubah acak sampel tidak kita ketahui bentuk distribusinya, sehingga dalam analisis tidak melibatkan parameter populasi tertentu atau tidak membutuhkan asumsi mengenai bentuk distribusi populasinya. Statistik nonparametrik berguna sekali jika sifat observasinya dapat dinyatakan dalam rank. Sehingga data yang non numerik pun bisa dilakukan pengujian, asal pada data tersebut dapat dirank berdasarkan kriteria-kriteria tertentu.

II.2. UJI BELL - DOKSUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL INDEPENDEN

Seandainya ada k populasi, dimana k > 2, akan diuji bahwa k populasi itu mempunyai distribusi yang sama. Dari setiap populasi diambil sampel independen. Dalam uji tersebut Bell-Doksum menyelesaikan dengan menggunakan harga simpangan normal acak yang membentuk sampel acak berdistribusi normal, setelah pengamatan dalam sampel-sampel itu digabungkan dan dirank atau diurutkan menurut besarnya. Uji ini digunakan untuk menguji hipotesis nol Ho bahwa k sampel, k > 2, berasal dari populasi yang berdistribusi sama.

Bentuk Data Pada Uji - Bell Doksum

Data terdiri dari k sampel acak dimana k>2, masing-masing sampel terdiri dari n_i pengamatan i = 1, 2, .., k mungkin besarnya sampel satu dengan sampel yang lain tidak sama. Seandainya sampel acak ke-i besarnya n_i terdiri dari X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, ..., X_{ik}. Sehingga data dapat disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.1. Bentuk Data Uji Bell - Doksum Untuk k Sampel Independen.

Sampel 1	Sampel 2	.....	Sampel k
X_{11}	X_{21}	.....	X_{k1}
X_{12}	X_{22}	.....	X_{k2}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$X_{1}n_{1}$	$X_{2}n_{2}$	.....	$X_{k}n_{k}$
n_1	n_2	.....	n_k

Dalam data akan digunakan notasi-notasi sebagai berikut :

X_{ij} = Hasil pengamatan ke-j pada sampel ke-i

n_i = Banyaknya pengamatan pada sampel ke-i

$R(x_{ij})$ = Merupakan rank untuk pengamatan X_{ij}.

k = Banyaknya unit pengamatan/banyaknya sampel

N = Banyaknya pengamatan diseluruh sampel

z = Lambang bilangan yang diambil dari tabel simpangan normal acak (tabel 1)

Karena N = banyaknya pengamatan diseluruh sampel berarti

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Jika k sampel itu digabungkan menjadi satu, kemudian diurutkan menurut besarnya atau dirank. Seandainya $R(X_{ij})$ rank X_{ij} sesuai urutannya diantara N pengamatan pada seluruh sampel. $R(X_{ij}) = 1$ berarti X_{ij} adalah pengamatan terkecil diantara N pengamatan pada seluruh sampel, $R(X_{ij}) = 2$ berarti X_{ij} adalah pengamatan terkecil kedua diantara N pengamatan pada seluruh sampel, begitu juga untuk $R(X_{ij}) = 3$ berarti X_{ij} adalah data terkecil ketiga diantara N pengamatan, dan seterusnya, sehingga $R(X_{ij}) = N$ berarti X_{ij} adalah pengamatan yang terbesar didalam N pengamatan pada seluruh sampel. Jadi dalam pemberian rank ini tidak diperhatikan dari sampel mana pengamatan tersebut berasal. Jika dalam pengamatan tersebut ada beberapa pengamatan sama maka ranknya diambil rata-rata-nya, artinya rank pengamatan yang sama = rata-rata rank yang seharusnya diberikan kepada pengamatan yang sama itu.

Apabila pada pengamatan diseluruh sampel dirank, kemudian diambil N buah harga simpangan (deviate) normal acak dari tabel 1 dan diurutkan menurut besarnya atau dirank. Kalau N buah harga simpangan normal acak yang diambil dari tabel 1 sudah dirank, kemudian kawankan harga-harga simpangan normal acak yang diambil dari tabel 1 sesuai dengan rank X_{ij}, artinya bilangan terkecil ke-r dikawankan dengan pengamatan X_{ij} yang $R(X_{ij}) = r$, atau jika Z (r) sama dengan bilangan ke-r dari harga simpangan normal acak yang diambil dari tabel 1, maka $Z\ \{R(X_{ij})\}$ diberikan kepada X_{ij} yang mempunyai rank ke-r.
Selanjutnya, sebelum N buah harga simpangan normal acak dipasangkan dengan hasil pengamatan X_{ij}, diselidiki dahulu pengamatan-pengamatan yang sama, kemudian rata-rata rank pengamatan yang sama dipasangkan dengan rata-rata harga simpangan normal acak yang ranknya bersesuaian.

Harga simpangan normal acak dilambangkan dengan Z, maka rata-rata Z untuk setiap sampel adalah :

$$Z_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Z\{R(X_{ij})\} \quad , \text{ untuk } i = 1,2, \ldots, k$$

$$j = 1,2, \ldots, n_i$$

dimana n_i = banyaknya pengamatan pada sampel ke-i

Dan rata-rata Z untuk seluruh sampel adalah :

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} Z(r) \quad , \text{ untuk } r = 1,2,\ldots, N$$

dimana $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i \quad , \text{ untuk } i = 1,2,\ldots, k$$

Anggapan pada uji Bell-Doksum

1. Semua sampel adalah sampel acak dari populasinya
2. Masing-masing pengamatan independen di dalam sampel dan sampel satu dengan yang lain juga independen.
3. Semua variabel acak X_{ij} adalah kontinu.
4. Skala pengukuran paling tidak ordinal.
5. k populasi yang diselidiki mempunyai distribusi sama atau beberapa populasi mempunyai distribusi lebih besar dibanding dengan yang lain.
6. N harga simpangan normal acak membentuk sampel acak berdistribusi normal standar (N buah bilangan yang diambil dari tabel 1 merupakan sampel acak dari populasi normal standar).

Hipotesis

Hipotesis yang diperlukan

H_o : Semua k populasi berdistribusi sama

H_1 : k populasi tidak semuanya mempunyai distribusi sama

Statistik Uji

Statistik uji yang digunakan adalah :

$$T = \sum_{i=1}^{k} n_i \, (Z_i - \overline{Z})^2 \qquad \text{, untuk } i = 1,2,\ldots, k$$

dimana : n_i = Banyaknya pengamatan pada sampel ke-i

Z_i = Rata-rata Z untuk setiap sampel

$\overline{Z}$ = Rata-rata Z untuk seluruh sampel

Keputusan

Ho ditolak dengan tingkat signifikans bila :

$$T > X^2_{1-\alpha\ (k-1)}$$

Dalam hal lain hipotesis Ho diterima.

Harga $X^2_{1-\alpha\ (k-1)}$ didapat dari tabel distribusi chi kuadrat dengan kuantile (1-α) dengan derajat kebebasan (k-1), tabel 2. (Lampiran)

Contoh

Empat macam cara menanam jagung dicoba di beberapa tempat. Akan dicari apakah keempat cara itu menghasilkan panen sama atau ada cara yang menghasilkan panen lebih baik dari yang lain. Ternyata dari pengamatan beberapa tempat percobaan hasilnya disajikan dalam tabel 2.2

Tabel 2.2. Hasil panen menanam jagung di beberapa tempat percobaan

Sampel			
Cara 1	Cara 2	Cara 3	Cara 4
83	91	101	78
91	90	100	82
94	81	91	81
89	83	93	77
89	84	96	79
96	83	95	81
91	88	94	80
92	91		81
90	89		
	84		

Sumber : Practical Nonparametric Statistics, W.J.Conover

Dari data didapat k = 4 (empat sampel) dan $n_1 = 9$, $n_2 = 10$ $n_3 = 7$, $n_4 = 8$ sehingga $N = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 34$

Hipotesis :

H_o : Empat cara menanam jagung mempunyai distribusi yang identik sehingga menghasilkan panen sama

H_1 : Ada cara menanam jagung yang distribusinya tidak identik sehingga menghasilkan panen lebih diantara empat cara

Keempat sampel ini digabungkan dalam satu kelompok dan diberi rank untuk masing-masing harga sesuai dengan urutan besarnya dalam kelompok gabungan. Jika terdapat pengamatan-pengamatan sama maka ranknya diambil rata-ratanya.

Kelompok gabungan	77	78	79	80	81	81	81	81	82	83	83	83	84	84	88	89
R a n k	1	2	3	4	6,5	6,5	6,5	6,5	9	11	11	11	13,5	13,5	15	17

Kelompok gabungan	89	89	90	90	91	91	91	91	91	92	93	94	94	95	96	96	100	101
R a n k	17	17	19,5	19,5	23	23	23	23	23	26	27	28,5	28,5	30	31,5	31,5	33	34

Kemudian diambil 34 buah harga simpangan normal acak (34 buah bilangan dari tabel 1) dimulai dari bilangan pertama kolom ke 3 diteruskan ke kolom 4 sampai mendapat 34 buah bilangan, terdapatlah :

-0,08	-0,71	-0,62	-0,09	1,49	-1,10	0,52
0,52	0,77	-0,05	-1,42	-0,67	-1,25	-0,77
-0,44	1,33	0,93	0,43	-0,28	1,61	0,74
1,14	1,14	-0,87	1,00	0,67	-1,37	1,08
-0,37	-0,18	1,49	1,16	2,76	-1,31	

Bilangan	-1,42	-1,37	-1,31	-1,25	-1,10	-0,87	-0,77	-0,71	-0,67	-0,62	-0,44	-0,37
R a n k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Bilangan	-0,28	-0,18	-0,09	-0,08	-0,05	0,43	0,52	0,52	0,67	0,74	0,77	0,93
R a n k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Bilangan	1,00	1,08	1,14	1,14	1,16	1,33	1,49	1,49	1,61	2,76
R a n k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34

Sebelum bilangan-bilangan ini dipasangkan dengan hasil pengamatan X_{ij}, diperiksa dahulu pengamatan-pengamatan yang sama kemudian rata-rata rank pengamatan yang sama dipasangkan dengan rata-rata bilangan yang ranknya bersesuaian. Dari pengamatan terdapat :

81, 81, 81, 81 (empat buah 81) masing-masing seharusnya mempunyai rank 5, 6, 7, 8 sehingga rata-rata rank untuk 81 adalah :

$$\frac{5 + 6 + 7 + 8}{4} = 6,5$$

bilangan yang ber-rank 5, 6, 7, 8 adalah - 1,10, - 0,87, - 0,77, - 0,71 sehingga terdapat rata-rata bilangan-bilangan ini adalah :

$$\frac{-1,10 + (-0,87) + (-0,77) + (-0,71)}{4} = -0,86$$

83, 83, 83 (tiga buah 83) masing-masing seharusnya mempunyai rank 10, 11, 12 sehingga rata-rata rank untuk 83 adalah :

$$\frac{10 + 11 + 12}{3} = 11$$

bilangan yang ber-rank 10, 11, 12 adalah - 0,62, - 0,44, - 0,37 sehingga rata-rata bilangan-bilangan ini adalah :

$$\frac{-0,62 + (-0,44) + (-0,37)}{3} = -0,48$$

Dengan cara serupa, maka rata-rata rank pengamatan sama dan rata-rata bilangan yang bersesuaian dengannya, disajikan dalam tabel 2,3.

yang sama kemudian rata-rata rank pengamatan yang sama dipasangkan dengan rata-rata bilangan yang ranknya bersesuaian. Dari pengamatan terdapat :

81, 81, 81, 81 (empat buah 81) masing-masing seharusnya mempunyai rank 5, 6, 7, 8 sehingga rata-rata rank untuk 81 adalah :

$$\frac{5 + 6 + 7 + 8}{4} = 6,5$$

bilangan yang ber-rank 5, 6, 7, 8 adalah - 1,10, - 0,87, - 0,77, - 0,71 sehingga terdapat rata-rata bilangan-bilangan ini adalah :

$$\frac{-1,10 + (-0,87) + (-0,77) + (-0,71)}{4} = -0,86$$

83, 83, 83 (tiga buah 83) masing-masing seharusnya mempunyai rank 10, 11, 12 sehingga rata-rata rank untuk 83 adalah :

$$\frac{10 + 11 + 12}{3} = 11$$

bilangan yang ber-rank 10, 11, 12 adalah - 0,62, - 0,44, - 0,37 sehingga rata-rata bilangan-bilangan ini adalah :

$$\frac{-0,62 + (-0,44) + (-0,37)}{3} = -0,48$$

Dengan cara serupa, maka rata-rata rank pengamatan sama dan rata-rata bilangan yang bersesuaian dengannya, disajikan dalam tabel 2,3.

Tabel 2.3. Rata-rata rank pengamatan sama dengan rata-rata bilangan yang bersesuaian.

Rank pengamatan yang sama	Rata-rata Rank	Rata-rata bilangan yang bersesuaian
5, 6, 7, 8	6,5	- 0,86
10, 11, 12	11	- 0,48
13, 14	13,5	- 0,23
16, 17, 18	17	0,10
19, 20	19,5	0,52
21,22,23,24,25	23	0,82
28, 29	28,5	1,15
31, 32	31,5	1,49

Semua hasil diatas dihimpun menjadi satu, terdapatlah :

Tabel 2.4. Harga simpangan normal acak yang dikawankan dengan rank pengamatan.

Sampel											
1			2			3			4		
X_{1j}	Rank	Z	X_{2j}	Rank	Z	X_{3j}	Rank	Z	X_{4j}	Rank	Z
83	11	-0,48	91	23	0,82	101	34	2,76	78	2	-1,37
91	23	0,82	90	19,5	0,52	100	33	1,61	82	9	-0,67
94	28,5	1,15	81	6,5	-0,86	91	23	0,82	81	6,5	-0,86
89	17	0,10	83	11	-0,48	93	27	1,14	77	1	-1,42
89	17	0,10	84	13,5	-0,23	96	31,5	1,49	79	3	-1,31
96	31,5	1,49	83	11	-0,48	95	30	1,33	81	6,5	-0,86
91	23	0,82	88	15	-0,09	94	28,5	1,15	80	4	-1,25
92	26	1,08	91	23	0,82				81	6,5	-0,86
92	19,5	0,52	89	17	0,10						
			84	13,5	-0,23						
Jumlah $n_1 = 9$		5,60	$n_2 = 10$		-0,11	$n_3 = 7$		10,30	$n_4 = 8$		-8,60

Jadi rata-rata Z untuk setiap sampel:

$$Z_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Z\{R(X_{ij})\}$$

$$Z_1 = \frac{1}{9} (-0,48+0,82+\ldots+0,52) = \frac{1}{9} (5,60) = 0,622$$

$$Z_2 = \frac{1}{10} (0,82+0,52+\ldots+(-0,23) = \frac{1}{10} (-0,11) = -0,011$$

$$Z_3 = \frac{1}{7} (2,76+1,61+\ldots+1,15) = \frac{1}{7} (10,30) = 1,471$$

$$Z_4 = \frac{1}{8}(-1,37+ -0,67+\ldots+ -0,86) = \frac{1}{8} (-8,6) = -1,075$$

Rata-rata Z untuk seluruh sampel adalah :

$$\overline{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{n_i} Z\ \{R(X_{ij})\}$$

$$= \frac{1}{34} \ (-0,48+0,82+ \ \ldots+0,52+0,82+0,52+\ldots+(-0,23)+$$

$$2,76+1,61+\ldots+1,15+(-1,37)+(-0,67)+ \ldots+(-0,86)\}$$

$$= 0,211$$

Statistik uji digunakan adalah :

$$T = \sum_{i=1}^{4} n_i \ (Z_i-\overline{Z})^2$$

$$= 9(0,622-0,211)^2 + 10(-0,011-0,211)^2 + 7(1,471 - 0,211)^2 + 8(-1,075-0,211)^2$$

$$= 9(0,169) + 10(0,049) + 7(1,586) + 8(1,655)$$

$$= 26,353$$

Dengan α = 0,05 maka dari tabel X^2 terdapat $X^2_{1-0,05\ (4-1)}$

$$= X^2_{0,95\ (3)} = 7,815$$

Keputusan

$T = 26{,}353 > = X^2_{0,95\ (3)} = 7{,}815$ maka dapat disimpulkan bahwa

Ho ditolak, ini berarti ada cara yang distribusinya tidak identik dengan yang lain sehingga menghasilkan panen lebih diantara empat cara itu.

II.3. UJI BELL - DOSKUM UNTUK BEBERAPA SAMPEL TIDAK INDEPENDEN

Pada bagian ini akan digunakan uji Bell-Doksum untuk beberapa sampel yang berkaitan atau tidak independen.

Suatu eksperimen dilakukan untuk mengetahui apakah ada perbedaan dalam k macam perlakuan, k > 2, dalam hal seperti berikut, suatu blok terdiri dari k unit eksperimen, k unit eksperimen di dalam suatu blok di pasang secara acak dengan k perlakuan yang diselidiki, sehingga setiap perlakuan mendapat satu unit eksperimen dan hanya satu unit dalam setiap blok. Lebih dari satu blok digunakan, banyak blok yang digunakan = b. Di dalam setiap blok tidak harus pengukurannya secara numerik, yang penting adalah hasil pengukurannya dapat dirank dari 1 sampai k. Dan tidak dilakukan perbandingan antar blok. Eksperimen dengan cara seperti ini biasanya disebut "rancangan blok lengkap acak".

Persoalan uji untuk beberapa sampel tidak independen Bell-Doksum menyelesaikan dengan menggunakan harga simpangan normal acak (Random Normal Diviates). Uji Bell-

Doksum ini dilakukan untuk menguji hipotesis bahwa tidak ada bedanya antara perlakuan dalam rancangan blok lengkap acak.

Bentuk Data Pada Uji Bell - Doksum

Data terdiri dari b blok (X_{i1}, X_{i2},..., X_{ik}) dimana i = 1, 2,..., b dengan k pengamatan pada tiap blok. Rank 1 sampai dengan k diberikan pada pengamatan pada tiap blok.

Variabel acak X_{ij} di dalam blok i dan dikaitkan dengan perlakuan j sehingga data dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut :

Tabel 2.5. Bentuk data uji Bell-Doksum untuk beberapa sampel tidak independen.

	Perlakuan			
	1	2	...	k
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1k}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2k}
.	.	.		.
.	.	.		.
b	X_{b1}	X_{b2}	...	X_{bk}

Dalam data akan digunakan notasi-notasi sebagai berikut :

X_{ij} = hasil pada perlakuan ke-J pada blok ke-i

b = banyaknya blok

k = banyaknya unit perlakuan

Z = lambang bilangan/harga simpangan normal acak

$R(X_{ij})$= Rank pengamatan pada blok ke-i dan perlakuan ke-j

Seandainya $R(X_{ij})$ rank untuk pengamatan hasil X_{ij} pada blok i, dengan harga $R(X_{ij})$ dari 1 sampai dengan k. Pada uji Bell-Doksum cara pemberian rank X_{i1}, X_{i2}, ... X_{ik} dibandingkan satu dengan yang lainnya hanya dalam blok ke-i. Dengan demikian rank 1 untuk pengamatan terkecil dalam blok itu. Rank 2 untuk pengamatan terkecil kedua dalam blok itu dan seterusnya, sehingga rank yang terbesar adalah rank k, karena banyaknya perlakuan dalam tiap blok adalah k. Apabila pada tiap blok sudah dirank maka diambil bilangan-bilangan simpangan normal acak (tabel 1) terdiri dari b kelompok, masing-masing kelompok terdiri dari k buah bilangan.

Seandainya Z_i (r) bilangan terkecil ke-r dalam kelompok ke-i, untuk r = 1, 2,..., k dan i = 1, 2, ..., b. Pasangkan $Z_i(r)$ pada X_{ij} yang berank r dalam blok i, untuk setiap i dan r. Harga Z ini ditulis sebagai $Z_i\{R(X_{ij})\}$.

Jika terjadi pengamatan sama dalam kelompok (blok), maka rank pengamatan sama diambil rata-ratanya, kemudian harga-harga Z yang bersesuaian dengan rank-rank itu diambil rata-ratanya.

Harga simpangan normal acak (random normal diviates) dilambangkan dengan Z, maka rata-rata harga Z di dalam tiap blok adalah :

$$Z_j = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b} Z_i\{R(X_{ij})\} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, b$$

$$J = 1, 2, \ldots, k$$

Dimana : b = banyaknya blok

Dan dihitung pula rata-rata semua Z :

$$\bar{Z} = \frac{1}{b.k} \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} Z_i\{R(X_{ij})\} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, b$$
$$j = 1, 2, \ldots, k$$

dimana : b = banyaknya blok

k = banyaknya unit perlakuan

Karena yang digunakan rancangan blok lengkap acak maka harga $\bar{Z}$ rata-rata bisa dihitung dengan :

$$\bar{Z} = \frac{1}{k} \sum_{J=1}^{k} Z_j$$

dimana Z_j = rata-rata harga Z untuk setiap perlakuan pada setiap blok.

Anggapan pada Uji Bell-Doksum

1. b buah variabel acak k variat adalah independen
2. Di dalam setiap blok pengamatan dapat diatur menurut besarnya sesuai dengan kriteria tertentu.
3. Simpangan normal acak yang digunakan di seluruh pengamatan mempunyai distribusi normal standar.

Hipotesis

Hipotesis yang diperlukan pada Uji Bell-Doksum untuk sampel tidak independen adalah :

H_o : variabel acak dalam tiap blok berdistribusi identik (tidak ada efek perlakuan)

H_1 : ada variabel acak dalam blok yang berdistribusi tidak identik dengan variabel acak dalam blok yang lain (ada efek perlakuan).

Statistik Uji

Statistik uji yang digunakan adalah :

$$T = b \sum_{J=1}^{k} (Z_j - \bar{Z})^2 \quad \text{untuk } J = 1, 2, \ldots, k$$

dimana : b = banyaknya blok

Z_j = rata-rata harga Z di dalam tiap blok

$\bar{Z}$ = rata-rata semua Z

Keputusan

Tolak Ho pada tingkat signifikans jika :

$$T > X^2_{1-\alpha\ (k-1)}$$

Dalam hal lainnya Ho diterima

Contoh

Untuk mengetahui warna bungkus sabun mandi diadakan survei. Ada empat macam warna dan 10 orang diambil secara acak. Mereka disuruh menilai (rank). Rank 1 untuk warna yang paling tidak disukai, makin besar rank makin disukai warnanya. Sehingga rank 4 paling disukai warnanya. Ternyata hasilnya sebagai berikut yang disajikan dalam tabel 2.6.

Tabel 2.6. Rank bungkus sabun mandi menurut warna yang disukai.

orang (Blok)	warna			
	A	B	C	D
1	2	1	4	3
2	1	4	3	2
3	4	2	1	3
4	2	4	1	3
5	3	1	4	2
6	3	2	1	4
7	1	3	2	4
8	1	2	4	3
9	4	3	2	1
10	2	4	3	1

Dalam data b= 10, k= 4 sehingga banyaknya pengamatan = 40

Hipotesis

Ho : Tiap rank variabel acak di dalam blok mempunyai kesempatan penilaian sama (tidak ada pengaruh perlakuan).

H_1 : Ada variabel acak dalam blok yang mempunyai distribusi tidak identik dengan variabel acak dalam blok yang lain sehingga mempunyai penilaian berbeda.

Kemudian diambil 40 buah harga simpangan normal acak (tabel 1) yang dikelompokkan menjadi 4 kelompok, masing-masing 10 bilangan. Bilangan tersebut dimulai dari baris 1 sampai dengan baris 10 dan dari kolom 2 sampai dengan kolom 5. Sehingga harga simpangan normal acak (Z) diperoleh :

Tabel 2.7. Bilangan yang diambil dari Tabel 1.

-0,59	-0,08	0,74	0,45
1,13	-0,71	1,14	-0,84
-0,52	-0,62	1,14	1,50
-1,81	-0,09	-0,87	-0,97
1,81	1,49	1,00	-1,00
0,95	-1,10	0,67	0,76
-0,73	0,52	-1,37	1,64
0,43	0,52	1,08	-0,59
-1,78	0,77	-0,37	-0,94
-0,16	-0,05	-0,18	-1,06

Bilangan pada baris 1 tabel 2.7 untuk blok 1, baris ke 2 untuk blok 2 pada baris ke 3 untuk blok 3 dan seterusnya sehingga bilangan pada baris ke 10 untuk blok 10.

Kemudian bilangan-bilangan itu dicari ranknya menurut blok ke i :

Tabel 2.8. Rank Harga Simpangan Normal Acak

Harga Z	-0,59	-0,08	0,74	0,45
Rank	1	2	4	3
Harga Z	1,13	-0,71	1,14	-0,84
Rank	3	2	4	1
Harga Z	-0,52	-0,62	1,14	1,50
Rank	2	1	3	4
Harga Z	-1,81	-0,09	-0,87	-0,97
Rank	1	4	3	2
Harga Z	1,81	1,49	1,00	-1,00
Rank	4	3	2	1
Harga Z	0,95	-1,10	0,67	0,76
Rank	4	1	2	3
Harga Z	-0,73	0,52	-1,37	1,64
Rank	2	3	1	4
Harga Z	0,43	0,52	1,08	-0,59
Rank	2	3	4	1
Harga Z	-1,78	0,77	-0,37	-0,94
Rank	1	4	3	2
Harga Z	-0,16	-0,05	-0,18	-1,06
Rank	3	4	2	1

Bilangan pada tabel 2.8 yang ranknya sesuai dengan rank pengamatan pada blok dikawankan. Sehingga diperoleh harga $Z\{R(X_{ij})\}$ untuk data di atas sebagai berikut :

Tabel 2.9. Harga Z Yang Sesuai Dengan Rank Pengamatan.

orang (Blok)	warna				
	A	B	C	D	
1	-0,08	-0,59	0,74	0,45	
2	-0,84	1,14	1,13	-0,71	
3	1,50	-0,52	-0,62	1,14	
4	-0,97	-0,09	-1,81	-0,87	
5	1,49	-1,00	1,81	1,00	
6	0,76	0,67	-1,10	0,95	
7	-1,37	0,52	-0,73	1,64	
8	-0,59	0,43	1,08	0,52	
9	0,77	-0,37	-0,94	-1,78	
10	-0,18	-0,05	-0,16	-1,06	
Jumlah	0,49	0,14	-0,60	1,28	1,31

$$Z_j = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b} Z\{R(X_{ij})\}$$

b = banyaknya blok = 10

k = banyaknya unit perlakuan = 4

$$Z_1 = \frac{1}{10} \{-0,08 + (-0,84) + \ldots + (-0,18)\} = 0,049$$

$$Z_2 = \frac{1}{10} \{-0,59 + 1,14 + \ldots + (-0,05)\} = 0,014$$

$$Z_3 = \frac{1}{10} \{0,74 + 1,13 + \ldots + (-0,16)\} = -0,06$$

$$Z_4 = \frac{1}{10} \{0,45 + (-0,71) + \ldots + (-1,06)\} = 0,128$$

Rata-rata semua Z :

$$\bar{Z} = \frac{1}{bk} \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} Z\,\{R(X_{ij})\}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{J=1}^{k} Z_j$$

$$= \frac{1}{4} \{0,049 + 0,014 + (-0,060) + 0,128\}$$

$$= 0,033$$

Statistik Uji Bell-Doksum :

$$T = b \sum_{J=1}^{k} (Z_j - \bar{Z})^2$$

$$= 10\ \{(0,049 - 0,033)^2 + (0,014 - 0,033)^2 + (-0,060 - 0,033)^2 + (0,128 - 0,033)^2$$

$$= 0,183$$

$$X^2_{0,95(3)} = 7,815$$

$$X^2_{0,99(3)} = 11,34$$

karena $T < X^2_{1-\alpha(k-1)} = 7,815$ maka Ho diterima atau dengan kata lain tidak ada efek perlakuan. Dapat disimpulkan bahwa tak ada perbedaan penilaian pada warna bungkus sabun mandi.

BAB III

SIFAT-SIFAT RING DAN HOMOMORFISMA RING

III.1. RING DAN DAN SIFAT-SIFATNYA

III.1.1. Ring

Grup adalah suatu struktur aljabar dengan satu operasi biner. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner dinyatakan dengan " + " dan " $*$ " disebut Ring.

Defenisi 3.1.

R suatu himpunan yang tidak kosong terhadap dua operasi yang disajikan dengan tanda-tanda " + " dan " $*$ " merupakan suatu ring jika memenuhi sifat berikut :

A. R. terhadap operasi " + " memenuhi :

1. Sifat tertutup terhadap operasi " + "

   $\forall$ a,b $\in$ R berlaku a + b $\in$ R

2. Sifat assosiatif terhadap operasi " + "

   $\forall$ a,b,c $\in$ R berlaku (a + b) + c = a + (b + c)

3. Ada elemen identitas terhadap operasi " + "

   $\exists$ 0 $\in$ R $\ni$ $\forall$ a $\in$ R berlaku a + 0 = 0 + a = a

4. Setiap elemen R mempunyai invers terhadap operasi " + "

   $\forall$ a $\in$ R $\exists$ (-a) $\in$ R $\ni$ berlaku

   a + (-a) = (-a) + a = 0

5. Sifat komutatif terhadap operasi " + "

   $\forall$ a,b $\in$ R berlaku a + b = b + a

Dengan kata lain R terhadap operasi " + " merupakan grup Abel.

B. R terhadap " $\circ$ " memenuhi :

1. Sifat tertutup terhadap operasi " $\circ$ "

   $\forall$ a,b $\in$ R berlaku $a \circ b \in R$

2. Sifat assosiatif terhadap operasi " $\circ$ "

   $\forall$ a,b,c $\in$ R berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

C. R terhadap operasi-operasi " + " dan " $\circ$ " memenuhi :

1. Sifat distributif kiri operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " yaitu :

   $\forall$ a,b,c $\in$ R berlaku $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$

2. Sifat distributif kanan operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " yaitu :

   $\forall$ a,b,c $\in$ R berlaku $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$.

R Ring dengan operasi-operasi " + " dan " $\circ$ " dinotasikan dengan (R ; + , $\circ$).Untuk selanjutnya " $a \circ b$ " juga dapat ditulis dengan notasi "ab".

Contoh 3.1.

C = {(a,b)| a dan b bilangan-bilangan real}

operasi-operasi " + " dan " $\circ$ " pada C berturut-turut didefinisikan sebagai berikut :

$$(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d) \text{ dan}$$

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac - bd\ ,\ ad + bc)$$

Apakah C merupakan Ring ?

A. C terhadap operasi " + " memenuhi :

1. Misalnya $(a,b),(c,d) \in C$ maka

   $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in C$ dan $a,b,c,d \in R$

   maka $a + c \in R$ dan $b + d \in R$.

   Jadi C terhadap operasi " + " bersifat tertutup.

2. Sifat assosiatif terhadap operasi " + "

   $\forall$ $(a,b),(c,d),(e,f) \in C$, maka

   $$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))+(e,f) &= (a + c,\ b + d) + (e + f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a,b) + (c + e,\ d + f) \\ &= (a,b) + ((c,d) + (e,f)).\end{aligned}$$

   Sifat assosiatif terhadap operasi " + " berlaku pada C.

3. C terhadap operasi " + " mempunyai elemen identitas yaitu (0,0), karena $\forall (a,b) \in C$ berlaku

   $(a,b) + (0,0) = (a + 0,\ b + 0) = (a,b)$. dan

   $(0,0) + (a,b) = (0+a),\ 0+b) = (a,b)$

4. $(a,b) \in C$ mempunyai invers terhadap operasi " + " yaitu $(-a,-b)$, karena $\forall$ $(a,b) \in C$ berlaku

   $(a,b) + (-a,-b) = (a+(-a),\ b+(-b)) = (0,0)$ dan

   $(-a,-b) + (a,b) = (-a + a,\ -b + b) = (0,0)$.

   Jadi $\forall(a,b) \in C$ $\exists$ $(-a,-b) = \in C \ni (a,b) + (-a,-b) = (0,0)$ dan $(-a,-b) + (a,b) = (0,0)$.

5. Sifat komutatif terhadap operasi " + " yaitu :

$\forall (a,b)$, $(c,d) \in C$, berlaku

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &= (a + c , b + d) \\ &= (c + a , d + b) \\ &= (c,d) + (a,b)\end{aligned}$$

Sifat komutatif terhadap operasi " + " berlaku pada C.

Jadi (C; +) merupakan grup Abel.

B. C Terhadap operasi " $\circ$ " memenuhi :

1. $\forall (a,b),(c,d) \in C$ berlaku

   $(a,b) \circ (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \in C$

   karena $a,b,c,d \in R$ maka $ac - bd \in R$ dan

   $ad + bc \in R$

   Jadi C terhadap operasi " $\circ$ " bersifat tertutup

2. Sifat assosiatif terhadap operasi " $\circ$ " yaitu

   $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in C$, maka

$$\begin{aligned}((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f) &= (ac - bd, ad + bc)\circ(e,f) \\ &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f + (ad+bc)e) \\ &= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce) \\ &= ((ace-adf) - (bcf+bde),(acf+ade)+(bce-bdf)) \\ &= (a(ce-df) - b(cf+de), a(cf+de) + b(ce-df)) \\ &= (a,b) \circ (ce-df, cf + de) \\ &= (a,b) \circ ((c,d) \circ (e,f))\end{aligned}$$

   Jadi sifat assosiatif terhadap operasi " $\circ$ " berlaku pada C.

C. C terhadap operasi " + " dan " $\circ$ " memenuhi :

1. Sifat distributif kiri operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " pada C.

   $\forall(a,b),(c,d),(e,f) \in C$, maka :

   $(a,b)\circ((c,d)+(e,f)) = (a,b) \circ (c+e, d+f)$

   $= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e))$

   $= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)$

   $= ((ac-bd)+(ae-bf), (ad+bc)+(af+be))$

   $= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be)$

   $= ((a,b) \circ (c,d)) + ((a,b) \circ (e,f))$

2. Sifat distributif kanan operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " pada C.

   $\forall(a,b),(c,d),(e,f) \in C$, maka :

   $((c,d) + (e,f) \circ (a,b) = (c+e,d+f) \circ (a,b)$

   $= ((c+e)a-(d+f) b, (c+e)b+(d+f)a)$

   $= (ca+ea-db-fb, cb+eb+da+fa)$

   $= ((ca-db)+(ea-fb), (cb+da)+(eb+fa))$

   $= (ca-db, cb+da) + (ea-fb, eb+fa)$

   $= ((c,d) \circ (a,b)) + ((e,f) \circ (a,b))$

   Sifat distributif berlaku pada C.

Jadi $(C; +, \circ)$ adalah Ring

Contoh 3.2.

$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabel 3.1. $(Z_6, +)$

$\circ$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Tabel 3.2 $(Z_6, \circ)$

A. Z_6 terhadap operasi " + " memenuhi :

1. Tertutup terhadap operasi " + " terpenuhi (pandang tabel 3.1.) artinya setiap penjumlahan dua anggota dari Z_6 adalah anggota Z_6
2. Assosiatif terhadap operasi " + " berlaku, yaitu $\forall\, a,b,c \in Z_6$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Ada identitas terhadap operasi " + ", nampak pada kolom dan baris pertama, elemen identitas yaitu 0 karena setiap unsur ditambah dengan 0 hasilnya adalah unsur itu sendiri.
4. Setiap elemen mempunyai invers terhadap operasi " + " nampak pada setiap kolom dan baris memuat elemen identitas.
5. Sifat komutatif terhadap operasi " + " terpenuhi nampak pada diagonal utama sebagai sumbu simetri.

B. Z_6 terhadap operasi " $\circ$ " memenuhi :

1. Tertutup terhadap operasi " $\circ$ " terpenuhi (pandang tabel 3.2.) yaitu $\forall$ a,b $\in$ Z_6 berlaku $a \circ b \in Z_6$.
2. Sifat assosiatif terhadap operasi " $\circ$ " terpenuhi yaitu :

   $\forall$ a,b,c $\in$ Z_6 berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

C. Z_6 terhadap operasi " + " dan " $\circ$ " memenuhi : Pandang tabel 3.1. dan tabel 3.2.

1. Distributif kiri operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " terpenuhi yaitu $\forall$ a,b,c $\in$ Z_6 berlaku $a \circ (b+c) = ab+ac$.
2. Distributif kanan operasi " $\circ$ " terhadap operasi " + " terpenuhi yaitu $\forall$ a,b,c $\in$ Z_6 berlaku $(b+c) \circ a = ba+ca$.

Jadi (Z_6 ; +, $\circ$) adalah suatu Ring.

III.1.2. SIFAT-SIFAT RING

Misalkan R adalah suatu ring dengan operasi-operasi " + " dan " $\circ$ ". Elemen identitas terhadap operasi " + " dalam R dinyatakan dengan 0. Elemen identitas terhadap operasi " $\circ$ " dalam R dinyatakan dengan u. Dan invers a $\in$ R terhadap operasi " + " dinyatakan dengan (−a). Maka $\forall$ a $\in$ R berlaku :

$a + 0 = 0 + a = a$, $a \circ u = u \circ a = a$ dan $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Sifat 3.1.

Jika R suatu Ring dengan elemen identitas u maka

$(-u)a = -a$, $\forall a \in R$

Bukti

u adalah elemen identitas dalam Ring R, maka

$au = ua = a$, $\forall a \in R$

$a = ua$, $\forall a \in R$

$$\begin{aligned} a + (-u)a &= ua + (-u)a \\ &= (u + (-u))a \\ &= 0a \text{ , 0 elemen nol dalam R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$a + (-u)a = 0$, ini berarti bahwa $(-u)a$ adalah invers terhadap operasi " + " dari a jadi $(-u)a = -a$.

Definisi 3.2.

$(R : +, \circ)$ Ring terhadap operasi " $\circ$ " bersifat komutatif yaitu $\forall a,b \in R$ berlaku $a \circ b = b \circ a$ maka R disebut *Ring komutatif*.

Definisi 3.3

$(R ; + , \circ)$ Ring yang mempunyai elemen identitas terhadap operasi " $\circ$ " yaitu $\exists u \in R$ sehingga $\forall a \in R$ berlaku $a \circ u = u \circ a = a$ maka R

disebut *Ring dengan elemen identitas*.

Contoh 3.3

$Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$

Dari contoh 3.2 diperoleh bahwa $(Z_6;+,\circ)$ adalah ring.

- Pada tabel 3.2 nampak bahwa Z_6 terhadap operasi perkalian (modulo 6) bersifat komutatif karena $a,b \in Z_6 \Longrightarrow a\circ b = b\circ a$

  Jadi $(Z_6;+,\circ)$ adalah suatu ring komutatif.

- Pada tabel 3.2 nampak pula bahwa elemen identitasnya adalah 1 karena setiap unsur dikalikan dengan 1 hasilnya adalah unsur itu sendiri.

  Jadi $(Z_6;+,\circ)$ adalah Ring dengan elemen identitas.

Dapat disimpulkan bahwa $(Z_6;+,\circ)$ merupakan ring komutatif dengan elemen identitas.

Contoh 3.4

$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Tunjukkan bahwa Z_5 merupakan Ring komutatif dengan identitas.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabel 3.3. $(Z_5,+)$

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabel 3.4. $(Z_5,\circ)$

Pandang tabel 3.3 (Penjumlahan modulo 5)

A. 1. Setiap penjumlahan dua anggota dari Z_5 adalah anggota Z_5,Sifat tertutup terhadap operasi " + ", terpenuhi.

2. Assosiatif terhadap operasi " + " berlaku, yaitu $\forall$ a,b,c$\in Z_5$ =====> (a + b)+c = a+(b+c)

3. Identitas terhadap operasi " + " adalah 0, karena nampak pada kolom pertama dan baris pertama setiap unsur Z_5 ditambah dengan 0 hasilnya unsur itu sendiri.

4. Setiap elemen mempunyai invers terhadap operasi " + " yaitu ; nampak pada setiap baris dan kolom memuat elemen identitas 0.

5. Sifat komutatif dipenuhi,nampak pada diagonal utama sebagai sumbu simetri.

Jadi Z_5 grup Abel

Pandang tabel 3.4 (perkalian modulo 5)

B. 1. Tertutup terhadap operasi " $\circ$ " terpenuhi, yaitu $\forall$ a,b $\in Z_5$ ====> a$\circ$b $\in Z_5$

2. Sifat assosiatif terhadap operasi " $\circ$ " terpenuhi yaitu :

$\forall$ a,b,c$\in Z_5$ ======> (a$\circ$b$\circ$)$\circ$c = a$\circ$(b$\circ$c)

C. 1. Distribusi kiri terpenuhi, yaitu

$\forall$ a,b,c $\in Z_5$ =====> a$\circ$(b+c) = a$\circ$b + a$\circ$c

2. Distribusi kanan terpenuhi, yaitu

$\forall$ a,b,c $\in Z_5$ =====> (b+c)$\circ$a = b$\circ$a + c$\circ$a

Jadi (Z_5 ; $+,\circ$) adalah suatu Ring

- Sifat komutatif perkalian (modulo 5) dipenuhi yaitu $\forall$ a,b $\in Z_5$ =====> $a \circ b = b \circ a$

  Jadi (Z_5;$+,\circ$) adalah ring komutatif.

- Ada elemen identitas perkalian (modulo 5) yaitu 1 sehingga $\forall a \in Z_5$ -----> $a \circ 1 = 1 \circ a = a$

  Jadi (Z_5 ; $+, \circ$) adalah Ring dengan elemen identitas.

Jadi (Z_5 ; $+ , \circ$) adalah Ring komutatif dengan identitas.

Contoh 3.5

Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat operasi-operasi $\oplus$ dan $\odot$ berturut-turut didefinisikan sebagai berikut :

$$\forall\ a,b \in B \text{ berlaku } a \oplus b = a + b + 1$$
$$a \odot b = a + b + ab$$

Buktikan bahwa *B* merupakan Ring komutatif dengan identitas.

Bukti :

A. Diperhatikan B terhadap operasi $\oplus$

1. Menurut definisi operasi $\oplus$ pada B, B bersifat tertutup karena $\forall$ a,b $\in$ B =====> $a \oplus b = a + b + 1 \in B$.

2. Sifat assosiatif operasi $\oplus$ pada B ditunjukkan sebagai berikut :

$$\forall\ a,b,c \in B \Longrightarrow (a\oplus b) \oplus c = (a+b+1) \oplus c$$
$$= (a+b+1) + c + 1$$
$$= a + b + c + 1 + 1$$
$$= a + (b+c+1) + 1$$
$$= a \oplus (b+c+1)$$
$$= a \oplus (b\oplus c).$$

Sifat asosiatif operasi $\oplus$ pada B dipenuhi.

3. Elemen identitas dalam B terhadap $\oplus$ adalah -1 karena

$$a \in B \Longrightarrow a \oplus (-1) = a + (-1) + 1 = a, \text{ dan}$$
$$(-1) \oplus a = (-1) + a + 1 = a$$

Karena a elemen sembarang dalam B maka

$$\forall\ a \in B \text{ berlaku } a \oplus (-1) = (-1) \oplus a = a$$

4. Jika $a \in B$ maka invers a terhadap operasi $\oplus$ adalah $(-a -2)$ karena

$$a \oplus (-a -2) = a + (-a -2) + 1$$
$$= a + (-a) + (-2) + 1 = -1, \text{ dan}$$
$$(-a -2)\oplus a = (-a -2) + a + 1$$
$$= -a + a -2 + 1 = -1$$

Karena a elemen sembarang dalam B maka $\forall a \in B$ mempunyai invers terhadap operasi $\oplus$

5. $\forall\ a,b \in B \Longrightarrow a \oplus b = a + b + 1$
$$= b + a + 1$$
$$= b \oplus a.$$

Jadi sifat komutatif operasi $\oplus$ pada B dipenuhi.

Jadi (B ; $\oplus$) merupakan Grup Abel.

B. Diperhatikan B terhadap operasi $\odot$

1. Menurut definisi terhadap operasi $\odot$ pada B, B bersifat tertutup karena :

   $\forall$ a,b $\in$ B =====> $a \odot b = a + b + ab \in B$.

2. Sifat assosiatif operasi $\odot$ pada B ditunjukkan sebagai berikut :

   $\forall$ a,b,c $\in$ B =====> $(a \odot b) \odot c = (a+b+ab) \odot c$

   $= (a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$

   $= a+b+ab+c+ac+bc+abc$ (i)

   dan $a \odot (b \odot c) = a \odot (b+c+bc)$

   $= a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$

   $= a+b+c+bc+ab+ac+abc$.(ii)

   Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa terhadap operasi $\odot$ berlaku $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$, $\forall$a,b,c $\in$ B.

C. 1.Sifat distributif kiri operasi $\odot$ terhadap $\oplus$ ditunjukkan sebagai berikut :

   $\forall$ a,b,c $\in$ B =====> $a \odot (b \oplus c) = a \odot (b+c+1)$

   $= a+b+c+1+a\ (b+c+1)$

   $= a+b+c+1+ab+ac+a$

   $= (a+b+ab)+(a+c+ac) +1$

   $= (a+b+ab) \oplus (a+c+ac)$

   $= (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

2. Sifat distributif kanan operasi $\odot$ terhadap $\oplus$ pada B ditunjukkan sebagai berikut :

$$\forall\ a,b,c \in B \Longrightarrow (b\oplus c) \odot a = (b+c+1) \odot a$$
$$= b+c+1+a+(b+c+1)a$$
$$= b+c+1+a+ba+ca+a$$
$$= (b+a+ba) + (c+a+ca)+1$$
$$= (b+a+ba) \oplus (c+a+ca)$$
$$= (b\odot a) \oplus (c\odot a)$$

Jadi $\forall$ a,b $\in$ B berlaku sifat distributif kiri dan sifat distributif kanan pada B.

Jadi $(B;\oplus,\odot)$ merupakan suatu Ring.

Ambil unsur sembarang $a,b \in B \Longrightarrow a\odot b = a+b+ab$
$$= b+a+ba$$
$$= b \odot a.$$

Jadi $\forall$ a,b $\in$ B berlaku $a \odot b = b \odot a$

Jadi $(B;\oplus,\odot)$ merupakan Ring komutatif.

- B mempunyai elemen identitas terhadap operasi $\odot$ yaitu 0 karena $\forall$ a $\in$ B berlaku :

$$a \odot 0 = a + 0 + a0 = a, \text{ dan}$$
$$0 \odot a = 0 + a + 0a = a$$

Jadi $(B;\oplus,\odot)$ merupakan Ring komutatif dengan elemen identitas.

Teorema 3.1

Jika $(R; + , \circ)$ ring, maka :

1. $\forall\ a \in R,\ a\circ 0 = 0\circ a = 0$
2. $\forall\ a,b \in R, -(-a) = a$ dan $-(a + b) = (-a)+(-b)$

3. $\forall\ a,b \in R,\ a(-b) = -(ab)$

4. $\forall\ a,b \in R,\ (-a)(-b) = a\,b$

5. $\forall\ a,b,c \in R,\ a\circ(b - c) = a\circ b - a\circ c$ dan

$$(b - c)\circ a = b\circ a - c\circ a$$

Bukti

1. Jika $a \in R$ maka $a\circ 0 = a\circ(0 + 0)$, sifat elemen identitas 0 dalam R

$$a0 = a0 + a0, \text{ sifat distributif kiri}$$

$$a0 + (-a0) = a0 + a0 + (-a0)$$

$$0 = a0 + [a0 + (-a0)], \text{ sifat assosiatif}$$

$$0 = a0 + 0$$

$$0 = a0$$

Demikian juga dengan $0 = 0a$

$$0a = (0 + 0)a \text{ ; sifat elemen identitas 0 dalam R}$$

$$0a = 0a + 0a \text{ ; sifat distributif kanan}$$

$$0a + (-0a) = 0a + 0a + (-0a)$$

$$0 = 0a + [0a + (-0a)], \text{ Sifat assosiatif}$$

$$0 = 0a + 0$$

$$0 = 0a$$

Karena a elemen sembarang dalam R maka $\forall\ a \in R$ berlaku $a\circ 0 = 0\circ a = 0$.

2. $a \in R$ maka $(-a) + a = 0$

$(-a) \in R$ maka $(-a) + (-(-a)) = 0$

Jadi $(-a) + a = (-a) + (-(-a))$

$$-(-a)+(-a)+a = -(-a)+(-a)+(-(-a))$$

$$(-(-a)+(-a))+a = (-(-a)+(-a))+(-(-a))$$

$$0 + a = 0 + (-(-a))$$

$$a = -(-a)$$

$$((-a)+(-b))+(a+b) = ((-b)+(-a))+(a+b)$$

Sifat komutatif penjumlahan

$$= (-b) + ((-a) + (a+b))$$

Sifat assosiatif penjumlahan

$$= (-b)+ (((-a) + a) + b)$$

$$= (-b) + (0 + b)$$

Sifat elemen identitas nol dalam R

$$= (-b) + b = 0$$

Sifat invers penjumlahan.

Jadi $((-a) + (-b)) + (a + b) = 0$

Ini berarti bahwa $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

3. $\forall\ a,b \in R,\ a(-b) = (-a)b = -(ab)$

$$a(b+(-b)) = a0 = 0$$

$$ab + a(-b) = 0$$

$$-(ab)+ab + a(-b) = -(ab) + 0$$

$$(-(ab)+ab)+a(-b) = -(ab)$$

$$0 + a(-b) = -(ab)$$

$$a(-b) = -(ab)$$

Dibuktikan lagi $(-a)b = -(ab)$

$$(a + (-a))\ b = 0b$$

$$ab + (-a)\ \ b = 0$$

$$-(ab) + ab + (-a)b = -(ab) + 0$$

$$(-(ab) + ab) + (-a)b = -(ab)$$

$$0 + (-a)b = -(ab)$$

$$(-a)b = -(ab)$$

Jadi $\forall\ a,b \in R$, $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

4. $\forall\ a,b \in R$, $(-a)(-b) = ab$

$$(-ab) + ab = 0$$

$$-(-ab) + (-ab) + ab = -(-ab) + 0$$

$$[-(-ab) + (-ab)] + ab = -(-ab)$$

$$0 + ab = -(-ab)$$

$$ab = -(-ab)$$

Dari (3) diperoleh $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab))$

$$= ab$$

5. $a,b,c \in R$ maka akan dibuktikan $a\circ(b-c) = a\circ b - a\circ c$

dan $(b - c)\circ a = b\circ a - c\circ a$

$a \circ (b - c) = a\circ(b + (-c))$

$= a\circ b + a\circ(-c)$, Sifat distributif kiri.

$= ab + (-ac)$

$= ab - ac$

$(b - c) \circ a = (b + (-c)) \circ a$

$= ba + (-c)a$, Sifat distributif kanan

$= ba + (-ca)$

$= ba - ca$. ▨

Definisi 3.4

Ring sembarang

Jika $a,b \in R$ dan $a \neq 0$, $b \neq 0 \ni a \circ b = 0$

a dan b disebut unsur pembagi nol.

Definisi 3.5

Jika D Ring komutatif dengan identitas dan tak memuat pembagi nol maka D disebut *Daerah integral*

Contoh 3.6

Dari contoh 3.2 (Z_6;∘) Ring komutatif dengan identitas yang memuat unsur pembagi nol karena 2.3 = 0 (modulo 6).

Jadi Z_6;+,∘) bukan daerah integral.

Contoh 3.7

Dari contoh 3.4 (Z_5;+,∘) Ring komutatif dengan identitas dan tak memuat unsur pembagi nol.

Jadi (Z_5;+,∘) adalah daerah integral.

III.1.3. Karakteristik Suatu Ring

Misalkan R suatu Ring dengan operasi " + " dan " ∘ " Elemen sembarang $a \in R$ dan m suatu bilangan bulat positif,

maka $ma = a + a + \ldots\ldots + a$,(sebanyak m kali).

$(-m)a = (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$,(sebanyak m kali).

Jika m = 0, 0a = 0;0 adalah elemen nol dalam R.

Definisi 3.6

Jika R suatu Ring dan terdapat bilangan bulat positif terkecil n, $n > 0 \ni n \circ a = 0 \quad \forall a \in R$ maka dikatakan bahwa Ring R mempunyai karakter istik n. Jika tidak demikian maka Ring R mempunyai karakteristik 0.

Contoh 3.8

$Zn = \{0,1,2,3,\ldots,(n-1)\}$ adalah suatu Ring dengan unsur identitas terhadap operasi " + " adalah 0.

$\forall a \in Zn$ dengan $a \neq 0$, maka $n \circ a = 0$. Dan tidak ada bilangan bulat positif $m < n \ni m \circ a = 0$, kecuali $m = 0$.

Jadi Z_n mempunyai karakteristik n.

Contoh 3.9.

$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ adalah suatu Ring dengan penjumlahan (modulo 5) dan perkalian (modulo 5)

Elemen identitas terhadap penjumlahan (modulo 5) adalah 0.

$\forall a \in Z_5, 5 \circ a = 0$, misalnya $5 \circ 4 = 0$ (modulo 5), $5 \circ 3 = 0$ (modulo 5), $5 \circ 2 = 0$ (modulo 5), $5 \circ 1 = 0$ (modulo 5)

Dan tidak ada bilangan bulat positif $n < 5 \ni n \circ a = 0$

Jadi Ring Z_5 mempunyai karakteristik 5.

III.2. SUB RING

Definisi 3.7

Jika R Ring dan S Subset dari R yang tidak kosong maka S disebut Sub Ring dari R, jika operasi " + " dan " $\circ$ " dalam S sama dengan operasi " + " dan " $\circ$ " dalam R,dan S sendiri membentuk suatu Ring.

Contoh 3.10

$(Z_6;+,\circ)$ ring dari contoh 3.2

$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, ambil $S = \{0,2,4\}$

Jadi operasi " + " dan " $\circ$ " dalam S adalah sebagai berikut

+	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

$\circ$	0	2	4
0	0	0	0
2	0	4	2
4	0	2	4

Jadi $(S;+,\circ)$ merupakan Sub-Ring dalam Z_6 karena terhadap operasi-operasi dalam Z_6, S membentuk suatu Ring.

Teorema 3.2

Jika R Ring, S Himpunan bagian yang tidak kosong dari R ($S \subset R$ dengan $S \neq \phi$), S merupakan Sub Ring dari R jika dan hanya jika :

(1) $\forall\ a,b \in S$ berlaku $a - b \in S$

(2) $\forall\ a,b \in S$ berlaku $a \circ b \in S$

Bukti

=====> Diketahui S Sub Ring

dibuktikan (1) dan (2)

Bukti :

Dari definisi menyatakan bahwa S merupakan Ring maka $\forall a,b \in S$, $a + b \in S$ dan $a \circ b \in S$

karena $b \in S \; \exists -b \in S$

$a, -b \in S \Longrightarrow a+(-b) = a-b \in S$

Jadi (1) dan (2) terbukti

<== Diketahui (1) dan (2)

Dibuktikan S Sub Ring dari R berarti S adalah Ring

Bukti :

A. S terhadap operasi " + " memenuhi :

1. Sifat tertutup

   Diketahui R Ring, $S \subset R$ dan $S \neq 0$

   Dengan memperhatikan (1) diperoleh $\forall a,b \in S$

   berlaku $a - b \in S$

   karena $\forall a,b \in S \subset R \Longrightarrow \exists -a, -b \in S$

   $a,-b \in S$ dengan (1) didapat $a-(-b) = a+b \in S$

   Jadi sifat tertutup berlaku

2. Sifat Assosiatif

   R terhadap operasi " + " bersifat assosiatif

   karena $S \subset R$ dengan $S \neq \emptyset$, maka S terhadap

   operasi " + " juga bersifat assosiatif yaitu:

   $\forall a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$

3. Identitas

   $\forall a, a \in S \Longrightarrow a-a = 0 \in S$

   Jadi ada unsur identitas yaitu $0 \in S$

4. Invers

   $0, a \in S, 0-a = -a \in S \Longrightarrow \forall a \in S \; \exists -a \in S$

5. Sifat komutatif

R terhadap operasi " + " bersifat komutatif karena $S \subset R$ maka S juga bersifat komutatif yaitu $\forall a,b \in S$ berlaku $a+b = b + a$

Jadi S terhadap operasi " + " merupakan Grup Abel.

B. S terhadap operasi " $\circ$ " memenuhi :

1. Sifat tertutup

   Sifat tertutup terhadap operasi " $\circ$ " dari (2) yaitu $\forall\ a,b \in S$ berlaku $a \circ b \in S$

2. Sifat Assosiatif

   Karena pada R berlaku sifat assosiatif terhadap operasi "$\circ$" maka S yang merupakan himpunan bagian dari R juga berlaku sifat assosiatif yaitu :

   $\forall a,b,c \in S\ (a \circ b) \circ c = a(b \circ c)$

3. Sifat Distributif

   $S \subset R$ dan sifat distributif berlaku di R

   Jadi sifat distributif juga terpenuhi di S yaitu :

   $\forall a,b,c \in S \quad a \circ (b+c) = ab + ac$ dan

   $(b+c)a = ba + ca$

Kesimpulan $(S;+,\circ)$ adalah Ring atau S adalah Sub Ring dari R. ∎

III.3 HOMOMORFISMA PADA RING

Definisi 3,7

Suatu transformasi f dari R ke R' dikatakan

(1) Pemetaan

Jika $\forall$ a $\in$ R dikawankan secara tunggal $a' \in R' \ni f(a) = a'$

(2) Korespondensi satu-satu

$\forall$ a,b $\in$ R f(a) =f(b) ===> a = b

(3) Pada jika $\forall a' \in R'$, $\exists$ a $\in$ R $\ni$ f(a)=a'

Definisi 3.8

Misal (R;+, $\circ$) dan (R' ; $\oplus$, O) masing - masing adalah Ring dan $f : R \longrightarrow R'$ suatu Pemetaan f disebut homomorfisma dari R ke R' jika memenuhi :

(1) $\forall$ a,b $\in$ R , $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$

(2) $\forall$ a,b $\in$ R , $f(a . b) = f(a) \circ f(b)$

Jika pada definisi 3.8 $f:R \longrightarrow R'$ pemetaan satu-satu dan pada maka f suatu isomorfisma. Dan jika f : R ---->R' suatu isomorfisma maka dikatakan bawha R Isomorfik dengan R' dan ditulis $R \approx R'$

Contoh 3.11

Misalkan (R;+, $\circ$) adalah Ring bilangan bulat

Ring R' adalah himpunan semua bilangan genap,dengan operasi " + " dan operasi perkalian " * " yang didefinisikan oleh

$a * b = \frac{a\,b}{2}$ $\forall$ a,b $\in$ R'

Misalkan pemetaan $f : R \longrightarrow R'$ didefinisikan oleh

$$f(x) = 2x \ , \ \forall \ x \in R$$

Akan ditunjukkan $f : R \longrightarrow R'$ Homomorfisma

Ambil $a,b \in R$ $\Longrightarrow$ $f(a + b) = 2(a + b)$

$$= 2a + 2b$$

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

dan $f(ab) = 2(ab)$

$$= \frac{2a.2b}{2}$$

$$= 2a * 2b$$

$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

Jadi $f:R \dashrightarrow R'$ suatu Homomorfisma

$f : R \longrightarrow R'$ suatu pemetaan satu - satu, karena untuk sembarang $a,b \in R$ dengan $f(a) = f(b) \Longrightarrow 2a = 2b$ atau $a = b$

$f : R \longrightarrow R'$ suatu pemetaan pada karena

$$\forall \ a' \in R' \ \exists \ a = \frac{a'}{2} \in R \ni f(a) = 2a = a'$$

berarti f adalah pemetaan pada .

Karena $f : R \longrightarrow R'$ suatu pemetaan satu-satu, pada dan Homomorfisma maka f suatu Isomorfisma atau $R \approx R'$

Contoh 3.12

$R = (\{0,2\}; +,\circ)$, $R' = (Z_6; \oplus, \odot)$

$f : R \longrightarrow R'$ dengan $f(a) = a$, $\forall \ a \in R$

$\forall \ a,b \in R$, $f(0+ 2) = f(2) = 2$

$$f(0) \oplus f(2) = 0 \oplus 2 = 2$$

Jadi $f(0 + 2) = f(0) \oplus f(2)$

$\forall$ a,b $\in$ R $f(0.2) = f(0) = 0$

$f(0) \odot f(2) = 0 \odot 2 = 0$

Jadi $f(0.2) = f(0) \odot f(2)$

Jadi f suatu Homomorfisma Ring

Teorema 3.3

Jika f suatu homomorfisma dari Ring R pada Ring R' dinotasikan $f : R \longrightarrow R'$ maka

(i) Peta dari elemen nol dalam R adalah elemen nol dalam R' atau $f(0) = 0'$

(ii) Peta invers penjualan (negatif) dari setiap elemen R adalah invers penjumlahan dari peta elemen tersebut, yaitu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$

Bukti

(i) Ambil sembarang $a \in R \implies a + 0 = 0 + a = a$

Pandang $a + 0 = a$, $\forall a \in R$ maka

$f(a + 0) = f(a)$

$f(a) + f(0) = f(a)$, f suatu Homomorfisma

$f(a) + f(0) = f(a) + 0'$, $0'$ elemen nol dalam R'

$f(0) = 0'$

$0 + a = a$, $\forall a \in R$, maka

$f(0 + a) = f(a)$

$f(0) + f(a) = f(a)$

$f(0) + f(a) + (-f(a)) = f(a) + (-f(a))$

$f(0) = 0'$

(ii) Misalkan 0 elemen dalam R dan ambil sembarang $x \in R$

$\Longrightarrow x + (-x) = (-x) + x = 0$

Pandang $x + (-x) = 0$, $\forall x \in R$, maka

$f(x + (-x)) = f(0)$

$f(x) + f(-x)) = f(0)$, f suatu Homomorfisma

dan $(-x) + x = 0$, $\forall x \in R$, maka

$f((-x) + x) = f(0)$

$f(-x) + f(x) = f(0)$, f suatu Homomorfisma.

Jadi $\forall x \in R \Longrightarrow f(x) + f(-x) = f(-x) + f(x) = f(0) = 0'$

mengingat (i) diatas $f(0) = 0'$ maka $f(-x)$ adalah invers terhadap penjumlahan dari $f(x)$ dalam R'

Jadi $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$. ///

Contoh 3.13.

Misalkan R adalah suatu Ring bilangan kompleks dengan penjumlahan dan perkalian dan

Ring $R' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \text{ a,b bilangan - bilangan real} \right\}$

dengan penjumlahan dan perkalian matriks. Pemetaan

$f : R \longrightarrow R'$ didefinisikan oleh :

$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ untuk setiap a,b bilangan real.

Akan ditunjukkan bahwa $f : R \longrightarrow R'$ suatu homomorfisma.

Ambil $x, y \in R$ dengan $x = a + bi$ dan $y = c + di$

Maka $f(x + y) = f(a + bi + c + di)$

$= f((a + c) + (b + d) i)$

$= \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= f(a + bi) + f(c + di)$$

$$= f(x) + f(y).$$

dan $f(x.y) \quad = f((a + bi)\ (c + di))$

$$= f((ac - bd) + (ad + bc)\ i)$$

$$= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= f(a + bi)\ .\ f(c + di) = f(x)\ .\ f(y)$$

sehingga $f : R \longrightarrow R'$ adalah suatu homomorfisma Ring selanjutnya $f : R \longrightarrow R'$ tersebut suatu pemetaan satu-satu, karena jika $x = a + bi$ dan $y = c + di$ sembarang bilangan kompleks dalam R dengan $f(x) = f(y)$, yaitu :

$$f(a + bi) = f(c + di)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = c \text{ dan } b = d$$

sehingga $a + bi = c + di$

$$x = y$$

Demikian pula $f ; R \longrightarrow R'$, suatu pemetaan pada karena untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in R'$ maka ada $(a + bi) \in R$

sehingga $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Jadi $f : R \longrightarrow R'$ suatu isomorfisma, atau $R \approx R'$.

Perhatian contoh 3.13 ini, elemen nol dari R adalah $0 + 0i$, elemen nol dari R' adalah $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
dan $f(0 + 0i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elemen satuan dari R adalah $(1 + 0i)$, elemen satuan dari R' adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $f\ (1+0i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Selanjutnya misalkan $x = a + bi$ maka $-x = -a - bi$
sehingga
$$\begin{aligned} f(-x) &= f(-a-bi) \\ &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= -f(a + bi) \end{aligned}$$

Jadi $f(-x) = -f(x)$.

Ini berarti peta invers penjumlahan dari elemen dalam R adalah invers penjumlahan dari peta elemen tersebut.

Sifat 3.2.

$(R\ ;\ +,\ \circ)$ dam $(R'\ ;\ \oplus,\ \odot)$ adalah masing-masing Ring pemetaan $f : R \longrightarrow R'$ suatu isomorfisma

Apabila R Ring komutatif maka R' juga Ring komutatif

Bukti

Pemetaan $f : R \longrightarrow R'$ suatu isomorfisma maka f suatu pemetaan satu-satu dan pada.

Ambil sembarang $a', b' \in R'$

karena f pemetaan satu-satu dan pada $\Longrightarrow \exists\ a,b \in R \ni$ $f(a) = a'$ dan $f(b) = b'$

$$\begin{aligned} a' \odot b' &= f(a) \odot f(b) \\ &= f(a.b) && , f \text{ homomorfisma} \\ &= f(b.a) && , R \text{ Ring komutatif} \\ &= f(b) \odot f(a) && , f \text{ homomorfisma} \\ &= b' \odot a' \end{aligned}$$

Jadi $a' \odot b' = b' \odot a', \forall\ a', b' \in R'$, ini berarti bahwa R' bersifat komutatif terhadap operasi " $\circ$ ".

Jadi R suatu Ring komutatif. ▨

BAB IV
PENERAPAN DIFERENSIAL PARSIAL DALAM ILMU EKONOMI

IV.I. DIFERENSIASI PARSIAL

Sebuah fungsi yang hanya mengandung satu variabel bebas, hanya akan memiliki satu macam turunan. Apabila $Y = f(X)$ maka turunan hanyalah turunan Y terhadap X, dengan kata lain :

$$Y' = \frac{dY}{dX} \qquad \text{..................(4.1)}$$

Sedangkan jika sebuah fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas maka turunannya akan lebih dari satu macam pula, sesuai dengan jumlah macam variabel bebasnya. Jadi, jika sebuah fungsi mempunyai n macam variabel bebas maka fungsi tersebut akan memiliki n macam turunan. Jika $Z=f(X,Y)$ maka akan terdapat dua macam turunan, yaitu turunan Z terhadap X atau $\frac{\partial Z}{\partial X}$, dan turunan Z terhadap Y atau $\frac{\partial Z}{\partial Y}$.

Dengan demikian jika : $Z = f(x,y)$ maka

- Turunan parsial fungsi $Z = f(X,Y)$ terhadap X dilambangkan dengan : $f_X(X,Y) = \frac{\partial Z}{\partial X}$ ....(4.2)
- Turunan parsial fungsi $Z = f(X,Y)$ terhadap Y dilambangkan dengan : $f_Y(X,Y) = \frac{\partial Z}{\partial Y}$ ....(4.3)

sehingga $dZ = \frac{\partial Z}{\partial X}\, dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}\, dY$ ....(4.4)

$\frac{\partial Z}{\partial X}$ dan $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ dinamakan derivatif parsial, sedangkan $\frac{\partial Z}{\partial X} dX$ dan $\frac{\partial Z}{\partial Y} dY$ dinamakan diferensial parsial. Adapun dZ dinamakan diferensial total dari fungsi $Z = f(X,Y)$.

Dalam menurunkan Z terhadap X yang dilambangkan dengan $\frac{\partial Z}{\partial X}$, hanya suku-suku yang mengandung variabel X yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel X dianggap sebagai konstanta dan turunannya adalah nol. Di lain pihak, dalam menurunkan Z terhadap Y yang dilambangkan dengan $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, hanya suku-suku yang mengandung variabel Y yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel Y dianggap konstanta, dan turunannya adalah nol.

Contoh 4.1

Untuk fungsi $Z = 4X^3 - 6X^2Y + 3XY^2 + 3Y^3 + 5$

Tentukan derivatif parsialnya

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 12X^2 - 12XY + 3Y^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = -6X^2 + 6XY + 9Y^2$$

IV.2. DERIVATIF DARI DERIVATIF PARSIAL

Seperti halnya fungsi dengan satu variabel bebas, fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas pun dapat diturunkan lebih dari satu kali. Dengan kata lain masing-masing turunan parsialnya masih mungkin diturunkan lagi. Turunan berikut dari turunan parsial tadi sudah barang tentu bisa sangat bervariasi, tergantung dari bentuk turunan parsial tersebut.

Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang masih mengandung beberapa macam variabel bebas, maka turunan berikutnya masih dapat dipecah-pecah lagi menjadi beberapa turunan parsial pula. Akan tetapi bila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam.

Contoh 4.2 :

$$Z = x^3 + 5y^2 - 4x^2y - 6xy^2 + 8y - 7$$

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy - 6y^2$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 10y - 4x^2 - 12xy + 8$

Dalam contoh 4.2, baik $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ maupun $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap y.

(1a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x - 8y$$

(1b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -8x - 12y$$

(2a) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -8x - 12y$$

(2b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 10 - 12x$$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a), dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap y.

runan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal ngandung satu macam variabel bebas, maka turunan rikutnya hanya ada satu macam.

ntoh 4.2 :

$$Z = x^3 + 5y^2 - 4x^2y - 6xy^2 + 8y - 7$$

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy - 6y^2$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 10y - 4x^2 - 12xy + 8$

alam contoh 4.2, baik $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ maupun $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ masih dapat iturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun erhadap y.

(1a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x - 8y$$

(1b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -8x - 12y$$

(2a) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -8x - 12y$$

(2b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 10 - 12x$$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a), dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap y.

Jadi :

(1a.1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 6$$

(1a.2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = -8$$

(1b.1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^3 2}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = -8$$

(1b.2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = -12$$

(2a.1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = -8$$

(2a.2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = -12$$

(2b.1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ diturunkan secara parsial terhadap x

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -12$$

(2b.2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ diturunkan secara parsial terhadap y

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Jadi turunan-turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karena masing-masing hanya tinggal mengandung konstanta.

IV.3. EKSTRIM FUNGSI DUA PEUBAH : MAKSIMUM DAN MINIMUM

Nilai-nilai ekstrim dari sebuah fungsi yang mengandung dua variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif kedua, yakni dengan menggunakan turunan pertama dan turunan kedua.

Untuk fungsi $z = f(x,y)$, maka z akan mencapai nilai ekstrim di titik (x_o,y_o), jika :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{.....................(4.5)}$$

Persamaan (4.5) merupakan syarat yang diperlukan (necessary condition) agar fungsinya mencapai nilai ekstrim. Guna mengetahui apakah nilai ekstrim itu berupa nilai maksimum ataukah nilai minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan (sufficient condition), yakni akan diselidiki pada turunan parsial orde dua.

Misalkan $$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 \qquad \text{............(4.6)}$$

Δ disebut diskriminan fungsi $z = f(x,y)$ dititik (x_o,y_o)

Jadi :

1. Maksimum relatif jika $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$

2. Minimum relatif jika $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$

3. Titik sadel jika $\Delta < 0$

4. Jika $\Delta = 0$, maka titik kritisnya belum dapat. ditentukan

..............................(4.7)

Untuk nomor 3 dan 4 pada (4.7) tidak dibahas dalam penulisan ini karena bukan nilai ekstrim.

Contoh 4.3.

Selidiki apakah titik ekstrim dari fungsi berikut ini merupakan titik maksimum atau titik minimum

$z = -x^2 + 12x - y^2 + 10y - 45$

Penyelesaian :

Syarat z mencapai titik ekstrim jika $z' = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 12 = 0$, jadi $x = 6$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 10 = 0$, jadi $y = 5$

Untuk $x = 6$, $y = 5$ maka

$$z = -x^2 + 12x - y^2 + 10y - 45$$
$$= -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45 = 16$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Dengan (4.6) diperoleh $\Delta = (-2)(-2) - (0)^2 = 4$

karena $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$, maka

titik ekstrimnya adalah titik maksimum dengan $z_{maks} = 16$

IV.4 EKSTRIM BERSYARAT : PENGGANDA LAGRANGE

Dalam kenyataan seringkali kita mengekstrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi, yakni mencari niai maksimum atau nilai minimum, tetapi terkekang oleh suatu fungsi lain yang harus dipenuhi. Dengan kata lain fungsi yang hendak dioptimumkan tadi menghadapi suatu kendala (constraint). Kasus optimum bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya seseorang yang hendak memaksimumkan utilitas atau tingkat kepuasan, tetapi terikat kepada fungsi pendapatan, atau sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya namun terikat pada fungsi produksi.

Penghitungan nilai ekstrim sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain, dapat diselesaikan dengan metode Lagrange. Caranya ialah dengan membentuk sebuah fungsi baru, disebut fungsi Lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda Lagrange λ dengan fungsi kendalanya.

misal hendak dioptimumkan $z = f(x,y)$ .... (4.8)

dengan syarat harus terpenuhi $U = g(x,y)$

Maka fungsi baru Lagrangenya :

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \qquad \text{.............. (4.9)}$$

Nilai ekstrim $F(x,y)$ dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertama terhadap x dan y sama dengan Nol.

Jadi :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \qquad \text{............ (4.10)}$$

Pengganda Lagrange λ merupakan suatu variabel tak tentu yang hanya bersifat sebagai pembantu. Dengan memakai pengganda λ ini, kita hanya dapat menentukan titik-titik koordinat dari titik ekstrim dan bukan untuk menentukan jenis ekstrim (maksimum atau minimum). Jadi (4.10) merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim dari (4.9), dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan (neccessary condition). Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut maksimum atau minimum, masih harus diselidiki melalui derivatif parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan (sufficient contition) yakni :

misalkan $$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad \text{..........(4.11)}$$

Jadi :

maksimum jika $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$ ....(4.12)

minimum jika $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$ ....(4.13)

Contoh 4.4.

Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$

Penyelesaian:

Fungsi Lagrange :

$F = 2x + 2y + \lambda(x^2+y^2-8)$

$= 2x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$

Agar F ekstrim maka $F' = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0 \text{ atau } \lambda = -\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0 \text{ atau } \lambda = -\frac{1}{y} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Berdasarkan (1) dan (2) $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ atau x=y dan disubtitusikan pada fungsi syarat (fungsi kendala)

Fungsi kendala : $x^2 + y^2 = 8$

$$x^2 + x^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Karena $x = \pm 2$ maka $y = \pm 2$

- untuk $x = 2$, $y = 2$ maka diperoleh

  $z = 2x + 2y = 8$

- untuk $x = -2$, $y = -2$ maka diperoleh

  $z = 2x + 2y = -8$

jadi nilai ekstrim $z = \pm 8$

Penyidikan nilai ekstrimnya :

- Untuk $x = 2$, $y = 2$ maka $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

Menurut (4.11) diperoleh $\Delta = (-1)(-1) - 0^2 = 1$

Karena $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$ menurut (4.12) maka nilai ekstrimnya adalah nilai maksimum dengan $z_{maks} = 8$.

- Untuk $x=-2$, $y=-2$, maka $\lambda=\frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, maka menurut (4.11) diperoleh $\Delta = 1$, karena $\Delta > 0$ dan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$, maka menurut (4.13) nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = -8$

IV.5. HOMOGENITAS FUNGSI

Suatu fungsi dikatakan homogen berderajat n apabila hasil kali suatu variabel bebasnya dengan sebarang bilangan λ menyebabkan nilai fungsinya menjadi λ^n kali. Dengan demikian fungsi $z = f(x,y)$ dikatakan homogen apabila :

$$\lambda^n z = f(\lambda x, \lambda y) \qquad \text{................(4.14)}$$

Contoh 4.5

Jelaskan termasuk fungsi homogen berderajat berapakah fungsi :

$$z = f(x,y) = 2x^3 \text{-} 4x^2 y + y^3$$

Penyelesaian :

$$Z = f(x,y) = 2x^3 - 4x^2 y + y^3$$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 2(\lambda x)^3 - 4(\lambda x)^2(\lambda y) + (\lambda y)^3 \\ &= 2\lambda^3 x^3 - 4\lambda^3 x^2 y + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3(2x^3 - 4x^2 y + y^3) \\ &= \lambda^3 f(x,y) \\ &= \lambda^3 Z \end{aligned}$$

Jadi fungsi $f(x,y) = 2x^3 - 4x^2 y + y^2$ adalah fungsi homogen berderajat 3.

IV.6. PENERAPAN EKONOMI

Pendekatan diferensial parsial sangat bermanfaat untuk diterapkan pada model-model ekonomi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, dalam hal kita hendak menelaah secara parsial pengaruh dari salah satu variabel bebas tadi terhadap variabel terikatnya.

IV.6.1 PERMINTAAN MARJINAL DAN ELASTIS PERMINTAAN PARSIAL

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaanya, maka permintaan akan masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua macam barang tersebut. Dengan perkataan lain, jika barang A dan barang B mempunyai hubungan penggunaan, maka :

$$Q_{da} = f(Pa,Pb) \text{ dan } Q_{db} = f(Pa,Pb) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.15)$$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, yakni :

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial Pa}$ adalah permintaan marjinal barang A berkenaan dengan Pa

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial Pb}$ adalah permintaan marjinal barang A berkenaan dengan Pb

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial Pa}$ adalah permintaan marjinal barang B berkenaan dengan Pa

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial Pb}$ adalah permintaan marjinal barang B berkenaan dengan Pb

.... (4.16)

permintaan atas keduanya. Sedangakn jika $e_{ab}>0$ dan $e_{ba}>0$ (keduanya positif) untuk Pa dan Pb tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah konpetitif/subtitutif atau saling menggantikan; Sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya.

Permintaan akan suatu barang X, dikatakan bersifat elastis apabila $|e_{dx}|>1$, elastic unitary jika $|e_{dx}|=1$ dan inelastis jika $|e_{dx}|<1$.

Contoh 4.6.

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Qda.Pa^2.Pb^3-1=0$ dan $Qdb.Pa^3.Pb-1=0$.
Berapakah elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagiamana hubungan antara kedua barang tersebut ?

Penyelesaian :

Fungsi permintaan barang A , $Q_{da} = f(Pa,Pb)$

$$Q_{da}.Pa^2.Pb^3-1=0$$

$$Q_{da}.Pa^2.Pb^3=1$$

$$Q_{da}=\frac{1}{Pa^2\ Pb^3}=Pa^{-2}.Pb^{-3}$$

Jadi fungsi permintaan barang A adalah

$$Q_{da}=Pa^{-2}.Pb^{-3}$$

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial Pa} = -2Pa^{-3}.Pb^{-3}$$ (permintaan marjinal akan A berkenan dengan Pa)

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial Pb} = -3Pa^{-2}.Pb^{-4}$$ (permintaan marjinal akan A barkenaan dengan Pb)

Fungsi permintaan barang B, $Q_{db} = f(Pa, Pb)$

$$Q_{db}.\ Pa^{3}.\ Pb-1 = 0$$

$$Q_{db}.\ Pa^{3}.\ Pb = 1$$

$$Q_{db} = \frac{1}{Pa^{3}Pb} = Pa^{-3}\ .\ Pb^{-1}$$

Jadi fungsi permintaan barang B adalah

$$Q_{db} = Pa^{-3}\ Pb^{-1}$$

$$\frac{\partial Q_{db}}{\partial Pb} = -Pa^{-3}\ Pb^{-2}$$ (permintaan marjinal akan B berkenaan dengan Pb)

$$\frac{\partial Q_{db}}{\partial Pa} = -3Pa^{-4}\ Pb^{-1}$$ (permintaan marjinal akan B berkenaan dengan Pa)

Elastisitas permintaan parsial adalah :

$$e_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial Pa}.\ \frac{Pa}{Q_{da}} = -2Pa^{-3}\ Pb^{-3}\ .\frac{Pa}{Pa^{-2}\ Pb^{-3}} = -2$$

$$e_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial Pb}.\ \frac{Pb}{Q_{db}} = -Pa^{-3}\ Pb^{-2}\ .\frac{Pb}{Pa^{-3}\ Pb^{-1}} = -1$$

$$e_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial Pb}.\ \frac{Pb}{Q_{da}} = -3Pa^{-2}\ Pb^{-4}\ .\frac{Pb}{Pa^{-2}\ Pb^{-3}} = -3$$

$$e_{ba} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial Pa}.\ \frac{Pa}{Q_{db}} = -3Pa^{-4}\ Pb^{-1}\ .\frac{Pa}{Pa^{-3}\ Pb^{-1}} = -3$$

Karena $|e_{da}| > 1$ maka barang A adalah barang elastis. Sedangkan barang B adalah barang yang uniter elastis karena $|e_{db}| = 1$. Adapun hubungan antara barang A dan barang B adalah bersifat komplementer karena $e_{ab} = -3<0$ dan $e_{ba} = -3<0$.

IV.6.2. PERUSAHAAN DENGAN DUA MACAM PRODUK DAN BIAYA PRODUKSI GABUNGAN

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam produk, dan biaya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua macam produk itu merupakan biaya produksi gabungan (*Joint Production Cost*), maka penghitungan keuntungan maksimum yang diperolehnya dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensial parsial. Dengan metode serupa, pendekatan ini dapat pula digunakan untuk menganalisa kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari dua macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, A dan B, dimana fungsi permintaan akan masing-masing barang dicerminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_b)$ maka:

Penerimaan dari memproduksi barang A

$$R_a = Q_a \cdot P_a$$
$$= f(Q_a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.18)$$

Penerimaan dari memproduksi barang B

$$R_b = Q_b \cdot P_b$$
$$= f(Q_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.19)$$

Penerimaan totalnya : $R = R_a + R_b$

$$= f(Q_a) + f(Q_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.20)$$

Dengan biaya total : $C = f(Q_a\ ,\ Q_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4,21)$

Fungsi keuntungan : $\Pi = R - C$

$$= f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b)$$
$$= g(Q_a, Q_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.22)$$

Π (keuntungan) maksimum bila $\Pi' = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Qa} = 0 \qquad \text{..............(4.23)}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Qb} = 0 \qquad \text{..............(4.24)}$$

Dari persamaan (4.23) dan (4.24) nilai Qa dan Qb dapat diperoleh, sehingga Π maksimum pada (4.22) bisa dihitung.

Contoh 4.7.

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang A dan B , ditunjukkan oleh, $C = Qa^2 + 3Qb^2 + Qa\ Qb$. Harga jual masing-masing barang perunit adalah $Pa = 7$ sedangkan $Pb = 20$. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut.

Penyelesaian :

Biaya total $\quad C = Qa^2 + 3Qb^2 + Qa \cdot Qb$

Harga Jual A ; $Pa = 7$

Harga jual B ; $Pb = 20$

Penerimaan dari memproduksi A

$Ra = Qa \cdot Pa = 7\ Qa$

Penerimaan dari memproduksi B

$Rb = Qb \cdot Pb = 20\ Qb$

Penerimaan total

$R = Ra + Rb$

$\quad = 7\ Qa + 20\ Qb$

Keuntungan = penerimaan total - biaya total

$$\Pi = R - C$$

$$= 7\ Q_a + 20\ Q_b - (Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a \cdot Q_b)$$

$$= 7\ Q_a + 20\ Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a \cdot Q_b$$

Agar Π maksimum , $\Pi' = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_a} = 7 - 2\ Q_a - Q_b = 0$$

$$2Q_a + Q_b = 7 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_b} = 20 - 6\ Q_b - Q_a = 0$$

$$Q_a + 6\ Q_b = 20 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Daari persamaan (1) dan (2)

$$2Q_a + Q_b = 7 \quad |\times 6|$$

$$Q_a + 6Q_b = 20 \quad |\times 1|$$

$$\Longleftrightarrow 12Q_a + 6Q_a = 42$$

$$\begin{array}{r} Q_a + 6Q_b = 20 \\ \hline 11Q_a \quad = 22 \end{array} -$$

$$Q_a = 2$$

Untuk $Q_a = 2$, maka dengan (1) diperoleh $Q_b = 3$

Jadi Π maksimum $= 7\ Q_a + 20\ Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a . Q_b$

$$= 7.2 + 20.3 - 2^2 - 3.3^2 - 2.3 = 37$$

Agar keuntungan maksimum perusahaan harus memproduksi 2 unit A dan 3 unit B dengan keuntungan sebesar 37

IV.6.3. PRODUK MARJINAL PARSIAL DAN KESEIMBANGAN PRODUKSI

IV.6.3.1. Produk Marjinal Parsial

Untuk memproduksi suatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, mesin-mesin dan sebagainya . Jika jumlah output yang dihasilkan dilambangkan dengan P dan input yang digunakan dilambangkan dengan $X_i(i=1,2,\ldots..n)$, maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi :

$$P = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.25)$$

Sebagian dari input yang digunakan sudah barang tentu merupakan input tetap, sementara sebagian lainnya adalah input variabel. Jika untuk memproduksi suatu barang dianggap hanya ada dua macam input variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan :

$$P = f(K,L) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.26)$$

Derivatif pertama dari (4.26) merupakan produk marjinal parsialnya. Sehingga, produk marjinal berkenan dengan input K adalah :

$$MP_K = \frac{\partial P}{\partial K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.27)$$

Produk marjinal berkenan dengan input L adalah :

$$MP_L = \frac{\partial P}{\partial L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.28)$$

Untuk P = Konstanta tertentu, fungsi produksi pada (4.26) merupakan persamaan *isoquant*, yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan input K dan L yang menghasilkan output dalam jumlah sama.

IV.6.3.2. Keseimbangan Produksi

Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat pengunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah (*Least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *Isocost* dengan *Isoquant*.

Isocost adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam input berkenaan dengan harga masing-masing input dan jumlah dana yang dimilikinya.

Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli input K dan input L adalah sebesar M, serta harga input K dan input L masing-masing P_k dan P_l. Persamaan *Isocost*nya dapat ditulis denagn notasi:

$$M = K\ P_k + L\ P_l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.29)$$

Tingkat kombinasi penggunaan input yang optimum atau "*Least Cost Combination*" dapat dicari dengan metode Lagrange ; Dalam hal ini fungsi produksinya adalah Persamaan (4.26) dimaksimumkan terhadap fungsi *Isocost* (4.29).

Jadi

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(K,L)$

Fungsi kendala yang dihadapi : $M = K\ .\ Pk + L\ Pl$ atau

$$K\ Pk + L\ Pl - M = 0$$

Fungsi Lagrangenya :

$$F(K,L) = f(K,L) + \lambda(K.Pk + L.Pl - M) \quad \ldots\ldots\ldots (4.30)$$

Syarat yang diperlukan agar (4.30) maksimum $F'(K,L) = 0$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0 \longrightarrow f_K(K,L) + \lambda Pk = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4.31)$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0 \longrightarrow f_L(K,L) + \lambda Pl = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4.32)$$

Dari (4.31) dan (4.32) maka K dan L dapat diperoleh, sehingga P (Produksi) maksimum bisa dihitung

contoh 4.8

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk input K dan input L. Harga perunit input K adalah 4 rupiah dan input L 3 rupiah. Fungsi produksinya P=12 KL. Berapa unit masing-masing input seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan berapa unit output yang dihasilkannya dari kombinasi tersebut ?

Penyelesaian :

Fungsi produksi yang hendak dioptimumkan : $P=f(K,L)=12KL$

Fungsi isocost yang menjadi kendala : $96=4k+3L$ atau

$4K+3L-96=0$

Fungsi Lagrange : $F(K,L) = 12KL + \lambda(4K + 3L - 96)$

$= 12KL + 4\lambda K + 3\lambda L - 96\lambda$

Agar F maksimum, $F' = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 12L + 4\lambda = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -4\lambda = 12L \quad \Longrightarrow \quad -\lambda = 3L \quad \text{........(1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 12K + 3\lambda = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3\lambda = 12K \quad \Longrightarrow \quad -\lambda = 4K \quad \text{........(2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $3L = 4K$ dan menurut fungsi isocost

$$4K + 3L = 96$$

$$4K + 4K = 96 \quad \Longrightarrow \quad K = 12$$

Untuk $K = 12$ maka $L = \frac{4}{3}\ K = \frac{4}{3}\ (12) = 16$

Fungsi produksinya : $P = 12KL = 12(12)(16) = 2304$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit K dan 16 unit L dengan hasil produksi 2304 unit.

IV.6.4. UTILITAS MARJINAL PARSIAL DAN KESEIMBANGAN KONSUMSI

IV.6.4.1. Utilitas marjinal Parsial

Dalam kenyataan sehari-hari, seorang konsumen tidak hanya mengkomsumsi satu macam barang tetapi berbagai macam. Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan U dan barang-barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan $q_i(i=1,2,....n)$, maka fungsi utilitas dapat ditulis dengan notasi :

$$U = f(q_1, q_2, ..., q_n) \quad .... (4.33)$$

Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkomsumsi dua macam barang, katakanlah X dan Y, maka fungsi utilitasnya adalah :

$$U = f(X,Y) \quad ....(4.34)$$

Derivatif pertama dari (4.34) merupakan utilitas marjinal parsialnya, sehingga :

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial X} \quad ....(4.35)$$

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial Y} \quad ....(4.36)$$

(4.35) dan (4.36) masing-masing merupakan utilitas marjinal parsial berkenaan dengan barang X dan barang Y.

Untuk U=Konstanta tertentu, fungsi utilitas (4.34) merupakan suatu persamann kurva indiferensi (*indiffrence curve*), yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi komsumsi barang X dan Y yang memberikan tingkat kepuasan yang sama.

IV.6.4.2. Keseimbangan Konsumsi

Keseimbangan komsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indiferensi dengan garis anggaran konsumen (*budget line*). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen.

Jika pendapatan konsumen berjumlah M serta harga barang X dab barang Y masing-masing P_x dan P_y perunit, persamaan *budget linenya* dapat ditulis dengan notasi :

$$M = X.P_x + Y.P_y \qquad \text{.............................(4.37)}$$

Tingkat kombinasi konsumsi, yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan metode lagrange. Dalam hal ini fungsi utilitas (4.34) dimaksimuman terhadap fungsi anggaran (4.37) sehingga diperoleh fungsi baru lagrange :

$$F(X,Y) = f(x,y) + \lambda(XP_x + YP_y - M) \qquad \text{.............. (4.38)}$$

Syarat yang diperlukan agar persamaan (4.38) maksimum :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial X} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial X} + \lambda P_x = 0 \qquad \text{..............(4.39)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial Y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial Y} + \lambda P_y = 0 \qquad \text{..............(4.40)}$$

dari (4.39) dan (4.40) nilai X dan Y dapat diperoleh sehingga fungsi utilitas (4.34) bisa dihitung.

Contoh :

Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang X dan barang Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatan 1000 rupiah, harga barang X dan barang Y perunit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.

a.) Bentuklah fungsi utilitas marjinal masing-masing barang

b.) Hitunglah kombinasi konsumsi X dan Y yang memberikan kepuasan opttimum, serta berapa besarnya nilai kepuasan optimum tersebut.

Penyelesaian :

a.) fungsi utilitas $U = x^2y^3$

- fungsi utilitas marjinal berkenaan dengan barang X

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3$$

- fungsi utilitas marjinal berkenaan dengan barang Y

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2$$

b.) fungsi utilitas yang dioptimumkan : $U=x^2y^3$

Kendalanya adalah fungsi anggaran : $1000 = 25x+50y$

atau $1000-25x-50y=0$

fungsi lagrange : $F(x,y) = x^2y^3+\lambda(1000-25x-50y)$

agar F maksimum , $F' = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 25\lambda \longrightarrow \lambda = \frac{2xy^3}{25} \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 50\lambda \longrightarrow \lambda = \frac{3x^2y^2}{50} \ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $y = \frac{3}{4}x$

Menurut fungsi anggaran $1000 = 25x + 50y$

$1000 = 25x + 50\left(\frac{3}{4}x\right) \Longrightarrow x = 16$

untuk $x = 16$ diperoleh $y = 12$

$U = x^2y^3 = (16)^2(12)^3 = 442368$

Jadi kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum adalah 16 unit x dan 12 unit y dengan nilai kepuasan $U = 442368$

DAFTAR PUSTAKA

1. Bhattacharyya, K. Gouri and Richard, A Johnson, " Statistical Concepts and Methods", John Willey and Sons, New York, 1977.

2. Birkhoff, Gorrett and mac lane, " Saunders A. Survey of Modern Algebra", the Macmilla Company, New York, 1964

3. Conover, W J. " Practical Honparametric Statistics", John Willey and Sons, New York, 1980.

4. Dumairy, " Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi", edisi pertama BPFE, Yogyakarta, 1983

5. Dummil, David Steven and Foote, Richard M,"Abstract Algebra", Prentice Hall inc, New jersey, 1991

6. Handali, D dan Pammtjak, R.I,"Kalkulus perubah banyak cetakan ketiga, ITB Bandung,1987

7. Herstein I.N, " Topies in Algebra",John Willey and Sons, New York, 1975

8. H. Johannes dan Handoko, B. Sri, " Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta, 1980

9. Sprent, Peter, " Statistik Homperametrik terapan ", Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta, 1991.

10 Supranto, J." Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis ", Lembaga Penerbitan Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta, 1987.

Lampiran

TABEL 1

SIMPANGAN NORMAL ACAK

2.87	-.59	-.08	.74	.45	-.33	.70	-.76
-.51	1.13	-.71	1.14	-.84	-.31	-.72	-1.00
-.13	-.52	-.62	1.14	1.50	1.40	1.03	.57
-.35	-1.81	-.09	-.87	-.97	2.56	-1.18	1.09
-2.31	1.81	1.49	1.00	-1.00	.38	-.55	-1.65
-.18	.95	-1.10	.67	.76	.21	1.61	-1.02
-2.50	-.73	.52	-1.37	1.64	.53	-.60	-.22
-.32	.43	.52	1.08	-.59	-.53	-1.32	-.35
.45	-1.78	.77	-.37	-.94	.37	2.83	1.01
.82	-.16	.05	-.18	-1.06	1.30	.84	.51
-.12	-.05	-1.42	1.49	.79	1.05	-.11	-.25
1.11	-.82	-.67	1.16	.78	1.88	1.13	1.65
.94	-.15	-1.25	2.76	.05	-.75	-.68	.56
-1.09	-1.31	-.77	-1.31	.35	-.27	.88	1.88
.73	-.16	-.44	.65	-.38	-.68	.63	-.92
.09	.57	1.33	-.35	1.64	1.28	.42	-2.08
.64	-.65	.93	-.19	-1.25	.07	1.01	.63
-1.55	-1.40	.43	-.12	-.67	1.29	1.26	2.35
-.31	-.35	-.28	.20	-.83	.76	-.24	-2.01
-.30	-.55	1.61	-.24	1.37	.32	-.96	.63

Sumber : Dikutip dari Buku Practical Nonparametric Statistics, W.J. Conover

TABEL 2. DISTRIBUSI CHI-KUADRAT χ^2

p =	.750	.900	.950	.975	.990	.995	.999
k = 1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	7.841	10,64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.13
9	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	28.24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56	51.18
25	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
x_p	.675	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Untuk k > 100 digunakan pendekatan

$k_p = \frac{1}{2}(\chi_p + \sqrt{2k-1})^2$ atau lebih tepat

$k_p = k(1 - \frac{2}{9k} + \chi_p\sqrt{\frac{2}{9k}})^3$ dimana χ_p didapat dari tabel normal standar untuk kuantile (1-p).