

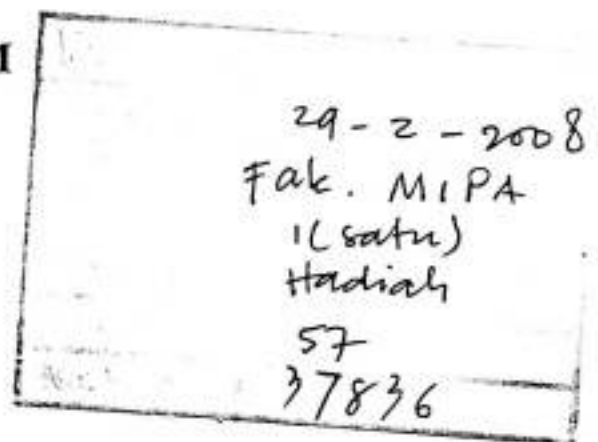
**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS
DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR**



OLEH :

ASRUL SYAM

H 111 03 021



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2008**

**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN *VIRUS*
DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin**

OLEH:

**ASRUL SYAM
H 111 03 021**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2008**

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

“MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR”

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Februari 2008



ASRUL SYAM
NIM : H 111 03 021

**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS
DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR**

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama



Drs. Budi Nurwahyu, MS
Nip : 131 414 010

Pembimbing pertama



Kasbawati, S.Si, M.Si
Nip : 132 303 724

Pada tanggal : Februari 2008

Pada hari ini, Jumat tanggal 22 Februari 2008, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

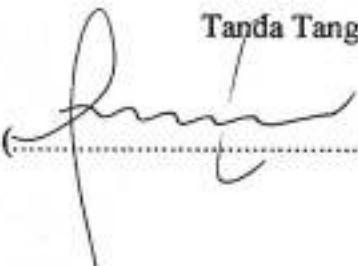
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Februari 2008

Panitia Ujian Skripsi


1. Ketua : Drs. Nirwan Ilyas, M.Si.

Tanda Tangan

(.....)

2. Sekretaris : Drs. M. Saleh AF

(.....)

3. Anggota : Drs. Budi Nurwahyu, MS.


(.....)

4. Anggota : Kasbawati, S.Si, M.Si


(.....)

5. Anggota : Dra. Nur Erawati, M.Si

(.....)

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah rabbil alamin. Puji syukur senantiasa kita panjatkan kehadiran *Allah SWT* atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, sebagai salah satu prasyarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin. Tak lupa pula salam dan salawat kita lantunkan kepada Nabi besar *Muhammad SAW* (sebaik-baik panutan dan idola bagi umat manusia), sebagai pembawa risalah dan kebenaran sejati yang senantiasa menjadi pedoman dan panutan dalam kehidupan kita.

Penulis sadar sepenuhnya, bahwa dalam penyusunan skripsi ini penulis banyak mendapatkan bantuan, baik moril maupun materil, untuk itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang tidak terhingga kepada *Ayahanda Sallu Kame dan Ibunda Muriyani Malik* sebagai orang tua yang telah memberikan segalanya, yang kuhormati serta iringan doa-doanya demi keberhasilan pendidikan penulis. Juga untuk saudara-saudaraku **M. Arhanuddin Salkam, Arniaty Salkam, Idawaty Salkam, Muh. Ilham Syah, Muh. Ali Imran Syah, Irmawaty Salkam, dan Ahdaniah Fitriani Salkam**, serta semua keluarga yang telah memberikan dukungan dan semangat kepada penulis.

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, M.S** dan Ibu **Kasbawati, S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang penuh kesabaran,



kesungguhan dan kebaikan hatinya telah banyak memberikan petunjuk serta bimbingan sehingga kesulitan penulis dapat teratasi dan akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

2. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA, dan Bapak **A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si** selaku Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA, serta para Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** dan Bapak **Dr. Loeky Haryanto, M.Sc** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya selama perkuliahan.
4. Bapak **Drs. Nirwan Ilyas, M.Si**, bapak **Drs. M. Saleh AF** dan ibu **Dra Nur Erawati, M.Si** selaku penguji yang selalu bersedia meluangkan waktunya.
5. Para pegawai administrasi baik di tingkat jurusan maupun di tingkat fakultas. Terutama **Pak Sutamin**, dan **Pak Nasir**, yang telah memudahkan penulis dalam menyelesaikan segala administrasi selama menempuh perkuliahan di Jurusan Matematika.
6. Teman-teman angkatan 2003 jurusan Matematika : **Jumran, Eba, Fian, Aswar, Uphy, Sandhy, Wagun, Islah, Haerul, Indra, Ngurah, Saleh, Adhin, Acong, Sule, Ewin, Anshar, Ilho, Hasbih, Farhan, Kardi**, serta semua teman-teman yang tidak sempat saya tuliskan namanya, baik yang telah lebih dahulu menyelesaikan studinya ataupun yang masih berjuang. *"Tetap semangat"*. Serta

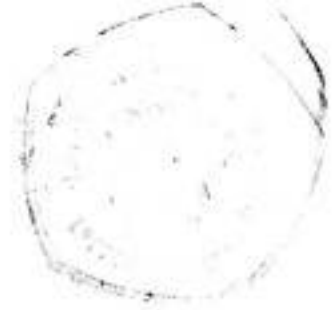
semua yang telah membantu penulis. Karena kalian, bagian dari perjalanan hidup ini jadi lebih bermakna.

7. Senior-senior angkatan "2001++" (K' Rifki, K' Sudi, K' Fahd, K'Marlin, S. Si, K'Lina), "2002"(K'Ayu, K'Udhu, K'Ao, K'Alim dkk) dan adik-adik angkatan "2004", "2005", "2006", "2007", serta semua pihak yang tak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas semua bantuannya.
8. Kanda-kanda senior di **Unit Pelayanan Terpadu Komputer / (UPT) Komputer Universitas Hasanuddin**. Terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan, serta keramahan yang tetap terjaga sampai saat ini.
9. Semua teman-teman tentor di **Multi Prima College**.

Semoga segenap bantuan dan partisipasinya bernilai ibadah dan mendapat pahala yang setimpal di sisi Allah SWT. Akhirnya semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Makassar, Februari 2008

Penulis



ABSTRAK

Penyakit DBD merupakan penyakit yang sampai saat ini masih menjadi endemik di dunia. Dalam tulisan ini, kita mencoba melakukan pendekatan deterministik untuk memodelkan penyebaran virus penyakit tersebut dan melakukan pengendalian terhadap vektornya. Analisis kualitatif dilakukan dengan mencari nilai R_0 dari model tersebut dan parameter-parameter yang dapat dikontrol agar endemik tidak terjadi. Simulasi numerik juga dilakukan dengan menggunakan data yang ada dan menginterpretasikan hasil simulasi yang diperoleh.

Kata kunci : R_0 , Endemik, Stabil Asimtotik, Titik Setimbang, Matriks Jacobi, Nilai Eigen, Aturan Tanda Descartes.

ABSTRACT

Dengue fever disease is one of syndrome which till now at rest becomes endemic in the world. In this paper, we trying to perform deterministic approach to make model dissemination virus infection and perform vector controller. Qualitative analyze doing to find R_0 value from that model and parameters what can controlled so that endemic have not happened. Numeric simulation performed with use data and to interpretation simulation result which we got it.

Keywords : R_0 , Endemic, equilibrium point, Jacobi Matrix, Eigen Value, Descartes Rule of Sign, Routh-Hurwitz

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	
LEMBAR KEOTENTIKAN	
LEMBAR PENGESAHAN PEMBIMBING	
LEMBAR PENGESAHAN PENGUJI	
KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR LAMBANG	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penulisan	2
C. Batasan Masalah	2
D. Rumusan Masalah	3
E. Sistematika Penulisan	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
BAB III TEORI PENDUKUNG	12
A. Sistem Persamaan Differensial	12
B. Jenis-jenis Titik Keseimbangan	14
C. Analisis Kestabilan	19

D. Kestabilan Sistem Linear	19
E. Kestabilan Sistem Non Linear	20
F. Basic Reproduction Number	23
G. Aturan Tanda Descartes	23
H. Metode Routh-Hurwitz	24
BAB IV MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR	26
A. Model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor	26
B. Penentuan Titik Keseimbangan	27
C. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Keseimbangan	29
D. Simulasi Numerik	35
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	43
A. Kesimpulan	43
B. Saran	44
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
α	Alfa
ξ	Xi
δ	Delta
λ	Lamda
ϵ	Epsilon
\rightarrow	Mendekati/menuju
∂	Do
∞	Tak hingga
\leq	Lebih kecil atau sama
\geq	Lebih besar atau sama
γ	Gamma
μ	Mu
θ	Theta
τ	Tau
β	Beta
δ	Delta
ω	Omega

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Demam berdarah merupakan suatu penyakit yang terdapat di daerah-daerah tropis di dunia dan terkadang di daerah-daerah yang bersuhu sedang atau subtropis. Penyakit ini telah diketahui secara klinis lebih dari 200 tahun yang lalu, akan tetapi asal-usul penyakit ini tidak ditemukan sampai pada tahun 1944. Vektor utama penyebarannya adalah *virus Dengue* dari keluarga *Flaviviridae*. Empat serotipe *virus Dengue* telah dibedakan yaitu tipe I, II, III, dan IV. Infeksi oleh sebarang serotipe Dengue akan menghasilkan imunitas yang permanen terhadap serotipe tersebut, tetapi bersifat sementara untuk serotipe yang lain. *Virus Dengue* disebarkan kepada manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes* yaitu *Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus* sebagai vektor penyebar utamanya, (Esteva,L, Vargas,C, 2002).

Penyebaran *virus Dengue* terjadi apabila satu nyamuk penyebar (vektor) menggigit manusia (host) yang belum dijangkiti virus tersebut. Virus tersebut dapat menyebabkan gejala-gejala yang terjadi dalam 14 hari pada manusia yang telah terjangkiti. Beberapa faktor yang menyebabkan timbulnya penyakit demam berdarah antara lain, kurangnya pengendalian vektor yang efektif dan berkesinambungan, urbanisasi yang tidak terkendali, dan perkembangan populasi, (F,S'anchez, M.engman, L. Harrington, and C. Castillo-Ch'avez, 2000).

Oleh karena itu, salah satu cara untuk mengurangi penyebaran *virus dengue* adalah dengan melakukan pengendalian pada vektor penyebarannya (nyamuk) baik itu secara kimia maupun biologis yang aman, hemat biaya dan ramah lingkungan.

Berangkat dari uraian tersebut diatas, maka penulis bermaksud menganalisis pengaruh pengendalian vektor terhadap penyebaran virus dengue dalam bentuk skripsi dengan judul

"Model Matematika Penyebaran Virus Dengue Dengan Pengendalian Pada Vektor"

B. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, yaitu dengan menentukan syarat cukup kestabilan dari solusi setimbangnya serta memvisualisasi solusi stabil dari model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor.

C. Batasan Masalah

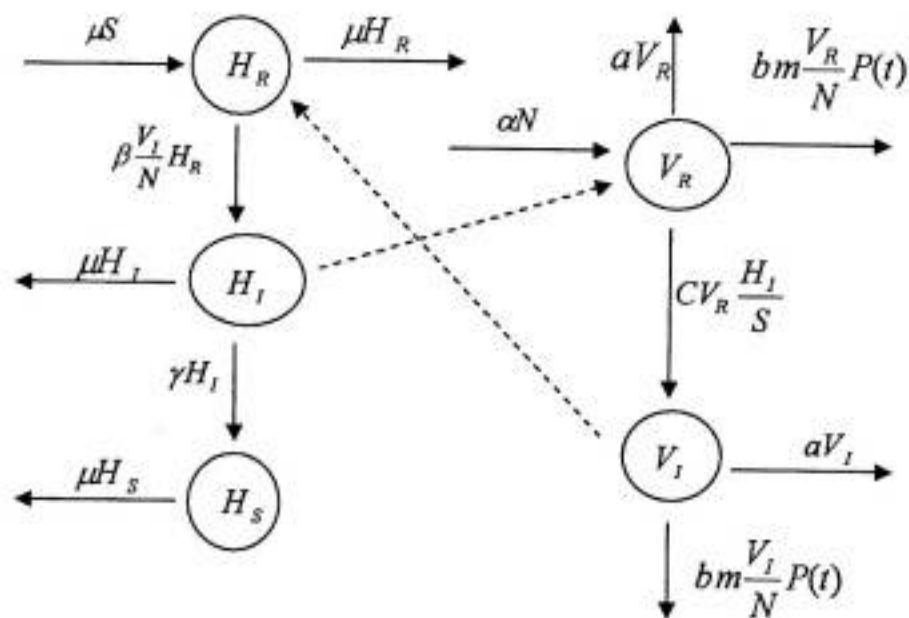
Dalam skripsi ini, penulis hanya akan membahas model penyebaran virus dengue dengan pengendalian pada vektor dengan asumsi-asumsi:

1. Jumlah populasi manusia (host) adalah konstan (tingkat kelahiran alami, sama dengan tingkat kematian alami).
2. Nyamuk (Vektor) hanya membawa satu jenis virus saja dan jika terinfeksi, tidak dapat sembuh.

3. Jumlah populasi nyamuk tergantung pada jumlah telur yang menetas dan larva nyamuk.
4. Manusia yang rentan akan menjadi manusia yang terinfeksi jika tergigit oleh nyamuk yang terinfeksi. Demikian pula dengan nyamuk yang rentan, akan menjadi nyamuk yang terinfeksi jika menggigit manusia yang terinfeksi.

D. Rumusan Masalah

Model penyebaran virus Dengue dengan pengendalian vector dapat digambarkan dalam diagram kompartemen di bawah ini:



Ket: \longrightarrow
 \dashrightarrow Perpindahan virus dari V_I ke H_R dan dari H_I ke V_R

Gambar 1. Model penyebaran demam berdarah dengan pengendalian pada vektor

Secara matematika, diagram tersebut dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan differensial:

$$\frac{dH_R}{dt} = \mu S - \beta \frac{V_I}{N} H_R - \mu H_R$$

$$\frac{dH_I}{dt} = \beta \frac{V_I}{N} H_R - (\mu + \gamma) H_I$$

$$\frac{dH_S}{dt} = \gamma H_I - \mu H_S \quad (1.1)$$

$$\frac{dV_R}{dt} = \alpha N - b m \frac{V_R}{N} P(t) - C V_R \frac{H_I}{S} - a V_R$$

$$\frac{dV_I}{dt} = C V_R \frac{H_I}{S} - a V_I - b m \frac{V_I}{N} P(t)$$

dimana:

- $H_R(t)$: Jumlah host yang rentan pada saat t.
- $H_I(t)$: Jumlah host yang terinfeksi pada saat t.
- $H_S(t)$: Jumlah host yang sembuh pada saat t.
- $V_R(t)$: Jumlah vektor yang rentan pada saat t.
- $V_I(t)$: Jumlah vektor yang terinfeksi pada saat t.
- α : Rata-rata kelahiran alami vektor persatuan waktu
- β : Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk terinfeksi pada host yang rentan .
- μ : Laju kematian alami host persatuan waktu.
- γ : Peluang seorang host yang terinfeksi diobati sembuh.
- a : Rata-rata kematian alami vektor persatuan waktu.
- b : Peluang seekor nyamuk disemprot $P(t)$ kali mati.
- C : Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk yang rentan pada host yang terinfeksi

$$H_R(t) \geq 0, H_I(t) \geq 0, H_S(t) \geq 0, V_R(t) \geq 0, V_I(t) \geq 0, K > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0, \\ a > 0, b > 0, c > 0$$

Dengan

$$V(t) = N = V_I + V_R,$$

$$\mu_R + \mu_I + \mu_S = \mu,$$

$$H(t) = S = H_R + H_I + H_S,$$

serta pengendalian yang hanya pada V_I saja, maka persamaan (1.1) diatas dapat dimodifikasi menjadi

$$\frac{dH_R}{dt} = \mu S - \beta \frac{V_I}{N} H_R - \mu H_R$$

$$\frac{dH_I}{dt} = \beta \frac{V_I}{N} H_R - (\mu + \gamma) H_I$$

$$\frac{dH_S}{dt} = \gamma H_I - \mu H_S$$

$$\frac{dV_I}{dt} = C(N - V_I) \frac{H_I}{S} - aV_I - dV_I$$

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana menentukan dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, yaitu dengan menentukan syarat cukup kestabilan dari solusi setimbangnya serta memvisualisasi solusi stabil dari model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor.

E. Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan skripsi ini, sistematika penulisan dijabarkan sebagai berikut:

- BAB I PENDAHULUAN**
 - A. Latar Belakang Masalah
 - B. Tujuan Penulisan
 - C. Batasan Masalah
 - D. Rumusan Masalah
 - E. Sistematika Penulisan

- BAB II TINJAUAN PUSTAKA**
 - A. Model SIR tanpa Kelahiran dan Kematian
 - B. Model SIR dengan Kelahiran dan Kematian

- BAB III TEORI PENDUKUNG**
 - A. Sistem Persamaan Differensial
 - B. Jenis-jenis Titik Kesetimbangan
 - C. Analisis Kestabilan
 - D. Basic Reproduction Rasio (R_0)
 - E. Aturan tanda Descartes
 - F. Metode Routh-Hurwitz

- BAB IV MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR**
 - A. Model Matematika Penyebaran Virus Dengue dengan Pengendalian pada Vektor
 - B. Menentukan Syarat Cukup Titik Kesetimbangan
 - C. Analisis Kestabilan
 - D. Simulasi Numerik

- BAB V KESIMPULAN DAN SARAN**
 - A. Kesimpulan
 - B. Saran

BAB II

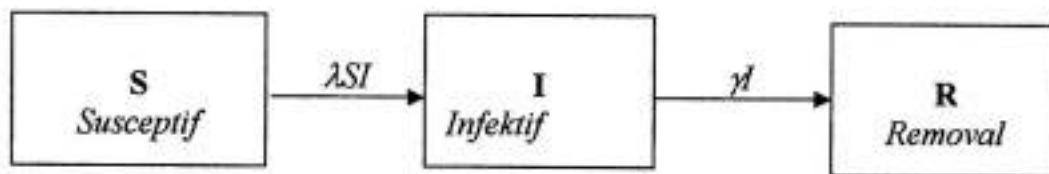
TINJAUAN PUSTAKA



A. Model SIR (*Susceptif, Infektif, Removal*) tanpa Kelahiran dan Kematian

Model SIR (*Susceptif, Infektif, Removal*) tanpa kelahiran dan kematian adalah model untuk penyakit yang berada pada populasi dengan waktu infeksi yang relatif singkat. Pada model ini individu relatif lebih cepat terinfeksi dan sembuh sehingga factor kematian dan kelahiran tidak dilibatkan tidak melibatkan kelahiran dan kematian. Penyakit menular yang tergolong model ini yaitu penyakit yang menggunakan media virus seperti Campak dan demam berdarah.

Diagram skematik untuk model ini dapat dilihat dalam gambar berikut



Gambar 2.1 Diagram skematik model SIR tanpa kelahiran dan kematian

Dari diagram diatas, kita dapat menentukan model SIR dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\lambda SI \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, dan nilai awal total populasi adalah

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0, \text{ dan}$$

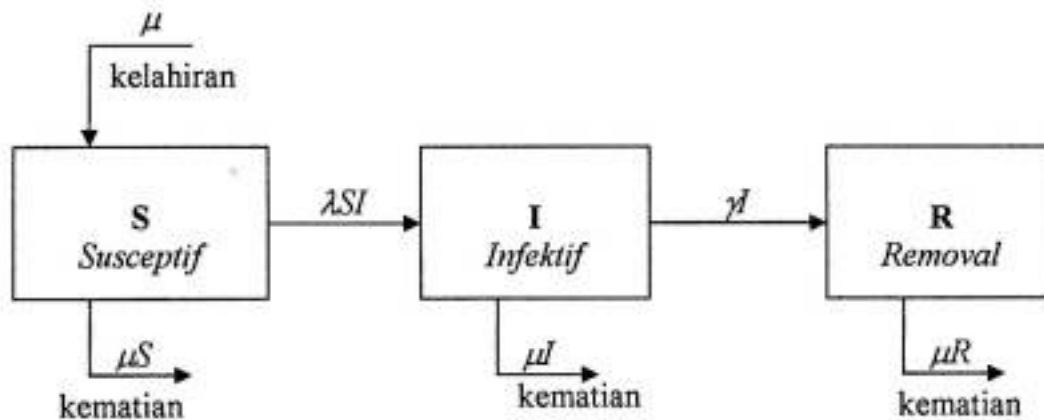
$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$$

dengan daerah asal yaitu :

$$T = \{(S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

B. Model SIR (*Susceptif, Infektif, Removal*) dengan Kelahiran dan Kematian

Model SIR dengan kelahiran dan kematian ini pada umumnya sama dengan model SIR tanpa kelahiran dan kematian, hanya saja pada model ini infeksi penyakit pada individu relatif lama, akibatnya factor kelahiran dan kematian juga berpengaruh di dalam model ini.



Gambar 2.1 Diagram skematik model SIR dengan kelahiran dan kematian

Diagram di atas jika dibawa ke dalam bentuk persamaan differensial seperti berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \mu S - \lambda SI \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - \mu I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ dan nilai awal total populasi adalah

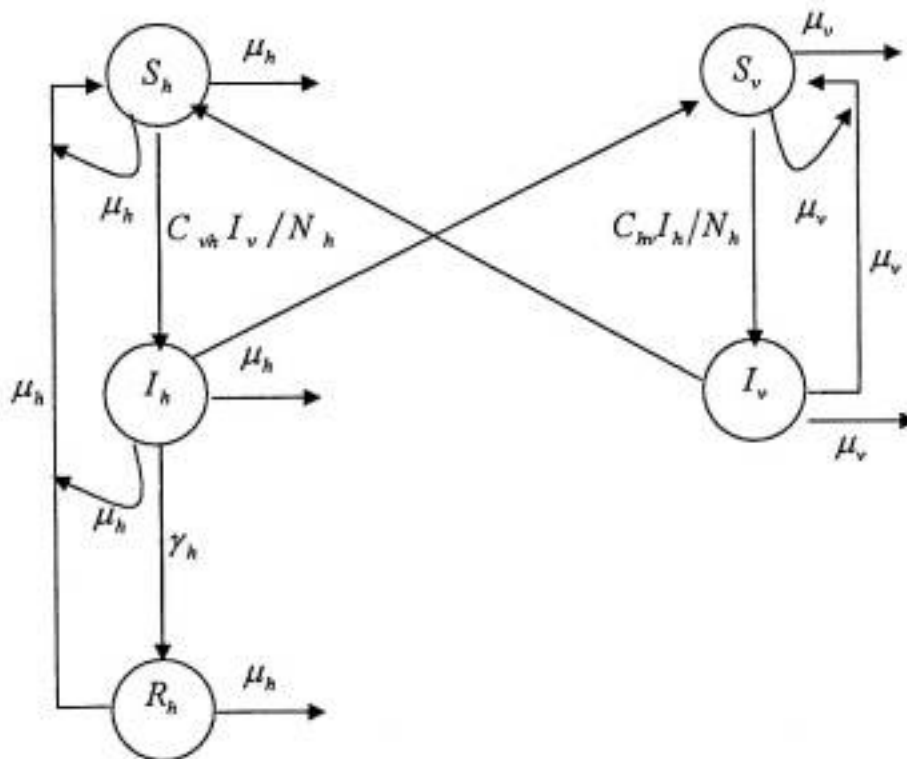
$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0 \text{ dan}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$$

dengan daerah asal yaitu :

$$T = \{(S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

Dari kedua model SIR diatas, maka dapat dibentuk model penyebaran demam berdarah yang merupakan pengembangan dari model SIR tersebut. Diagram kompartemen dari model penyakit demam berdarah adalah sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram kompartemen model penyakit demam berdarah

Model Penyakit demam berdarah di bawah ini dibentuk dari diagram kompartemen di atas. Model tersebut dibangun dengan menggunakan dasar model SIR.



Populasi Manusia (Host)

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - (\mu_h + p + C_{vh} I_v / N_h) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = (C_{vh} I_h / N_h) S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = p S_h + \gamma_h I_h - \mu_h R_h$$

(2.3)

Populasi Nyamuk (Vektor)

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - (\mu_h + C_{mv} I_h / N_h) S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = (C_{mv} I_h / N_h) S_v - \mu_v I_v$$

Dengan memperhatikan asumsi yang ada yaitu :

$$N_h = S_h + I_h + R_h \quad (\text{Total populasi manusia})$$

$$N_v = S_v + I_v \quad (\text{Total populasi nyamuk})$$

Maka $R_h = N_h - S_h - I_h$ dan $S_v = N_v - I_v$

$$S_h, I_h, R_h, S_v, I_v \geq 0$$

Dengan asumsi diatas, maka model diatas dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut :

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - (\mu_h + p + C_{vh} I_v / N_h) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = (C_{vh} I_h / N_h) S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

(2.4)

$$\frac{dI_v}{dt} = C_{hv} I_h / N_h (N_v - I_v) - \mu_v I_v$$

Analisis model diatas dilakukan dengan cara menentukan titik kesetimbangan model yang terdefenisi pada daerah asal:

$$\Omega = \{ (S_h, I_h, I_v \mid 0 \leq I_v \leq N_v, 0 \leq I_h, 0 \leq S_h, (1 + \frac{P}{\mu_h}) S_h + I_h \leq N_h \}$$

dimana

S_h : Populasi manusia yang rentan terhadap virus demam berdarah.

I_h : Populasi manusia yang terinfeksi terhadap virus demam berdarah.

R_h : Populasi manusia yang yang sembuh (virus telah hilang).

μ_h : Laju perubahan populasi manusia yang masuk atau yang keluar ke populasi lain.

S_v : Populasi nyamuk yang rentan terhadap virus demam berdarah.

I_v : Populasi nyamuk yang terinfeksi terhadap virus demam berdarah.

μ_v : Laju perubahan populasi nyamuk yang masuk atau keluar ke populasi lain.

γ_h Laju perubahan populasi manusia yang terinfeksi virus demam berdarah untuk sembuh.

(M Derouich, A Boutayeb, EH Twizell, 2003)

BAB III

TEORI PENDUKUNG

3.1 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui yaitu $y(x)$ yang akan ditentukan dari persamaan tersebut. Persamaan differensial orde pertama dapat dinyatakan sebagai $F(x,y,y')=0$ atau dalam bentuk eksplisit $y'=f(x,y)$.

Sistem persamaan differensial adalah himpunan lebih dari satu persamaan differensial. Sistem persamaan differensial orde pertama mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\&\dots \\y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Solusi dari sistem (3.1) adalah himpunan n fungsi yang terturunkan $y_1 = \phi(t), \dots, y_n = \phi(t)$ yang memenuhi sistem tersebut. Syarat awal yang diberikan dari sistem (3.1) yaitu:

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2 \quad \dots \quad y_n(t_0) = K_n\tag{3.2}$$

Teorema 2.1

Misalkan f_1, f_2, \dots, f_n dalam (3.1) fungsi yang kontinu dan mempunyai turunan parsial yang kontinu $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ dalam domain R dan ruang (y_1, y_2, \dots, y_n) yang memuat titik (t_0, K_1, \dots, K_n) . Maka sistem (3.1) mempunyai solusi pada interval $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ yang memenuhi syarat awal (3.2) dan solusi ini adalah tunggal.

Sistem (3.1) disebut sistem persamaan differensial linier atau sistem linier jika linier dalam y_1, \dots, y_n yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_1' = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t)$$

⋮
⋮

$$y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t)$$

Dalam bentuk vektor ditulis $y' = Ay + g$, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Teorema 2.2

Misalkan a_{jk} dan g_j dalam (3.3) fungsi yang kontinu dari t pada sebuah interval buka $\alpha < t < \beta$ yang memuat titik $t = t_0$ maka (3.3) mempunyai solusi $y(t)$ pada interval ini yang memenuhi (3.2), dan solusi ini adalah tunggal.

Sistem (3.2) disebut sistem linier nonhomogen jika $g \neq 0$ sehingga $y' = Ay$.

3.2 Jenis-Jenis Titik Keseimbangan.

Titik keseimbangan adalah sebuah keadaan dari sebuah sistem yang tidak berubah. Jika sistem dinamik diuraikan dalam persamaan differensial atau sistem persamaan differensial, maka titik keseimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan sama dengan nol.

Pandang sistem linier yang berbentuk $y'=Ay$. Asumsikan bahwa $A_{n \times n} = [a_{jk}]$ dengan a_{jk} adalah konstan dan solusinya adalah $y = xe^{\lambda t}$.

Dengan melakukan substitusi $y = xe^{\lambda t}$ pada $y'=Ay$ diperoleh $y' = \lambda xe^{\lambda t} = Ay = Axe^{\lambda t}$

Dengan membagi kedua ruas oleh $e^{\lambda t}$ diperoleh $Ax = \lambda x$

Definisi 2.1

Jika A suatu matriks $n \times n$ maka sebuah vektor tidak nol x di dalam R^n dinamakan *vektor eigen* dari A jika $Ax = \lambda x$.

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Untuk menentukan jenis titik-titik keseimbangan dari sistem linier, ada beberapa jenis keseimbangan yang bergantung pada nilai eigen dari sistem persamaan differensial tersebut yaitu:

3.2.1 Titik Node

Titik keseimbangan ini terjadi ketika akar-akar karakteristik (nilai eigen) yang diperoleh keduanya merupakan riil positif atau riil negatif.

Tinjau sistem linier homogen yang terdiri dari dua persamaan dan dua variabel tak diketahui

$$y' = Ay \quad (3.4)$$

dimana A adalah matriks konstan yang berukuran 2×2 dan mempunyai solusi umum

$$y = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (3.5)$$

Jika $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ maka solusi menunjukkan bahwa $y \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$ atau dengan kata lain semua solusi akan mendekati titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$, kasus ini disebut improper node. Sebaliknya Jika $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ maka solusi menunjukkan bahwa $y \rightarrow \infty$ pada saat $t \rightarrow \infty$ yaitu solusi akan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$, kasus ini disebut proper node.

contoh 1:

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = y$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, sehingga solusinya adalah

$$x = x_0 e^{2t} \text{ dan } y = y_0 e^t.$$

contoh 2:

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

$$\frac{dy}{dt} = -3y$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = -3$ dan $\lambda = -2$, sehingga solusinya adalah

$$x = x_0 e^{-2t} \text{ dan } y = y_0 e^{-3t}.$$

3.2.2 Titik Sadel

Titik sadel terjadi apabila nilai eigen A dari (3.4) keduanya riil dan berbeda tanda (λ_1 positif dan λ_2 negatif). Berdasarkan solusi (3.5) jika solusi bergerak untuk setiap t dengan nilai $\lambda_1 > 0$ maka $y_1 \rightarrow \infty$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Jika $\lambda_2 < 0$ maka $y_2 \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$.

contoh 3:

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = -1$ dan $\lambda = 2$, sehingga solusinya adalah

$$x = x_0 e^{-t} \text{ dan } y = y_0 e^{2t}.$$

3.2.3 Titik spiral

Titik spiral terjadi ketika nilai eigen yang diperoleh merupakan bilangan kompleks, misalkan $\lambda \pm \beta i$, dimana λ dan β merupakan bilangan riil $\lambda \neq 0$ dan $\beta > 0$, nilai eigen ini diberikan oleh sistem persamaan differensial berikut:

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ -\beta & \lambda \end{pmatrix} y$$

atau dalam bentuk lain

$$y_1' = \lambda y_1 + \beta y_2 \tag{3.6}$$

$$y_2' = -\beta y_1 + \lambda y_2 \tag{3.7}$$

Dengan mendifferensialkan persamaan koordinat polar r, θ diperoleh:

$$rr' = y_1 y_1' + y_2 y_2' \quad (3.8)$$

$$(\sec^2 \theta) \theta' = (y_1 y_2' - y_1' y_2) / x_1^2 \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusi (3.6) dan (3.7) pada (3.8) diperoleh

$$rr' = y_1(\lambda y_1 + \beta y_2) + y_2(-\beta y_1 + \lambda y_2)$$

$$rr' = \lambda(y_1^2 + y_2^2)$$

$$r' = \lambda r \quad (3.10)$$

$$r = ce^{\lambda t}; c \text{ adalah konstanta.} \quad (3.11)$$

Dengan mensubstitusi (3.6), (3.7) dan $\sec^2 \theta = r^2 / y_1^2$ pada (3.9) diperoleh

$$\left(\frac{r^2}{y_1^2}\right) \theta' = [y_1(-\beta y_1 + \lambda y_2) - y_2(\lambda y_1 + \beta y_2)]$$

$$\theta' = \frac{-\beta y_1^2 + \lambda y_1 y_2 - \lambda y_1 y_2 - \beta y_1^2}{r^2}$$

$$\theta' = -\beta \quad (3.12)$$

$$\theta = -\beta t + \theta_0 \quad (3.13)$$

Berdasarkan (3.13), θ akan meningkat jika t menurun sehingga arah pergerakan pada sebuah trajektori searah jarum jam. Pada saat $t \rightarrow \infty$ menurut (3.11) $r \rightarrow 0$ jika $\lambda < 0$ dan $r \rightarrow \infty$ jika $\lambda > 0$ sehingga trajektori berbentuk spiral yang menjauhi atau menuju titik asal tergantung pada λ positif atau negatif.

Contoh 4:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

Dengan mendifferensialkan persamaan koordinat polar r, θ diperoleh:

$$rr' = y_1 y_1' + y_2 y_2' \quad (3.8)$$

$$(\sec^2 \theta) \theta' = (y_1 y_2' - y_1' y_2) / x_1^2 \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusi (3.6) dan (3.7) pada (3.8) diperoleh

$$rr' = y_1(\lambda y_1 + \beta y_2) + y_2(-\beta y_1 + \lambda y_2)$$

$$rr' = \lambda(y_1^2 + y_2^2)$$

$$r' = \lambda r \quad (3.10)$$

$$r = ce^{\lambda t}; c \text{ adalah konstanta.} \quad (3.11)$$

Dengan mensubstitusi (3.6), (3.7) dan $\sec^2 \theta = r^2 / y_1^2$ pada (3.9) diperoleh

$$\left(\frac{r^2}{y_1^2}\right) \theta' = [y_1(-\beta y_1 + \lambda y_2) - y_2(\lambda y_1 + \beta y_2)]$$

$$\theta' = \frac{-\beta y_1^2 + \lambda y_1 y_2 - \lambda y_1 y_2 - \beta y_1^2}{r^2}$$

$$\theta' = -\beta \quad (3.12)$$

$$\theta = -\beta t + \theta_0 \quad (3.13)$$

Berdasarkan (3.13), θ akan meningkat jika t menurun sehingga arah pergerakan pada sebuah trajektori searah jarum jam. Pada saat $t \rightarrow \infty$ menurut (3.11) $r \rightarrow 0$ jika $\lambda < 0$ dan $r \rightarrow \infty$ jika $\lambda > 0$ sehingga trajektori berbentuk spiral yang menjauhi atau menuju titik asal tergantung pada λ positif atau negatif.

Contoh 4:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + y$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_1 = 1 + 2i$ dan $\lambda_2 = 1 - 2i$

3.2.4 Titik center

Titik kesetimbangan ini terjadi apabila nilai eigen yang diperoleh merupakan bilangan kompleks dengan bagian riil bernilai 0 ($\pm i\beta$), sehingga (3.10) dan (3.12) menjadi

$$r' = 0 \quad \text{dan} \quad \theta' = -\beta \quad (3.14)$$

dan (3.11), (3.13) menjadi

$$r = c \quad \theta = -\beta t + \theta_0 \quad (3.15)$$

dimana c dan θ_0 adalah konstan, sehingga trajektorinya melingkar dengan pusat titik asal (0,0) yang diputari searah jarum jam jika $\beta > 0$ dan berlawanan arah jarum jam jika $\beta < 0$. Apabila dibuat interval waktu t sepanjang $2\pi/\beta$ maka semua solusi bergeser periodik dengan periode $2\pi/\beta$, dan titik kritis ini disebut center.

contoh 4:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_1 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$

3.3 Analisis Kestabilan

3.3.1 Kestabilan Sistem Linier

Pandang persamaan differensial sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.16)$$

Akan ditentukan apakah solusi $x = \phi(t)$ dari (3.16) stabil atau tidak stabil.

Definisi 2.2

Misalkan $x = \phi(t)$ solusi dari (3.16) dan $\psi(t)$ solusi sembarang dari (3.16) maka solusi $x = \phi(t)$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \varepsilon$ jika $|\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$ untuk setiap solusi $\psi(t)$ dari (3.16).

Definisi 2.3

Solusi $x = \phi(t)$ dari (3.16) disebut stabil asimtotik jika:

1. Stabil
2. Setiap solusi sembarang $\psi(t)$ yang mulai cukup dekat dengan $\phi(t)$ maka $\psi(t) \rightarrow \phi(t)$ pada saat $t \rightarrow \infty$.

Dengan kata lain sebuah solusi setimbang $x(t) = x^0$ dari (3.16) disebut stabil asimtotik jika setiap solusi $x = \psi(t)$ dari (3.16) yang mulai cukup dekat dengan x^0 pada saat $t = 0$ tidak hanya tetap di sekitar x^0 untuk t berikutnya tetapi $\psi(t) \rightarrow x^0$ pada saat $t \rightarrow \infty$.

Pandang sistem persamaan differensial



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Teorema 2.4

- a. Setiap solusi $\mathbf{x} = \varphi(t)$ dari (3.17) stabil jika semua nilai eigen dari \mathbf{A} mempunyai bagian riil yang negatif.
- b. Setiap solusi $\mathbf{x} = \varphi(t)$ dari (3.17) tidak stabil jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen yang mempunyai bagian riil yang positif.
- c. Misalkan karakteristik polinomial dari \mathbf{A} dapat difaktorkan dalam bentuk $p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_r)^{k_r} q(\lambda)$ dimana semua akar-akar dari $q(\lambda)$ mempunyai bagian riil negatif maka setiap solusi $\mathbf{x} = \varphi(t)$ dari (3.17) adalah stabil. Jika \mathbf{A} mempunyai vektor eigen k_j yang bebas linier untuk setiap $\lambda_j = i\sigma_j$ maka setiap solusi $\varphi(t)$ tidak stabil.

3.3.2 Kestabilan Sistem Non linier

Pandang persamaan differensial berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

(3.18)

dimana f_1, f_2 dan f_3 merupakan fungsi yang terdifferensialkan

Jika $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ merupakan titik kesetimbangan dan misalkan $u_i = x_i - \bar{x}_i$

merupakan deviasi x_i dari sistem.

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar titik $u_i = x_i - \bar{x}_i$, diperoleh

$$f_i(x) = f_i(\bar{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(\bar{x})u_3 + g_i(u), \text{ untuk } i=1,2,3 \quad (3.19)$$

atau

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(\bar{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\bar{x})u_3 + g_1(u) \\ f_2(x) &= f_2(\bar{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\bar{x})u_3 + g_2(u) \\ f_3(x) &= f_3(\bar{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\bar{x})u_3 + g_3(u) \end{aligned} \quad (3.20)$$

dimana

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$, karena merupakan titik kesetimbangan

$g_i(u_1, u_2, u_3)$ merupakan orde tertinggi.

Sehingga sistem (3.19) menjadi:

$$\dot{u} = \mathbf{J}u + \mathbf{g}(u) \quad (3.21)$$

dimana

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} g_1(u_1, u_2, u_3) \\ g_2(u_1, u_2, u_3) \\ g_3(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{dan } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\text{atau } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{ untuk } x = \bar{x} \quad (3.22)$$

Untuk selanjutnya \mathbf{J} akan disebut Matriks jacobii.

Ketika $x(t)$ sangat dekat dengan \bar{x} maka $g(u)$ sangat kecil dan dapat diabaikan sehingga (3.21) menjadi:

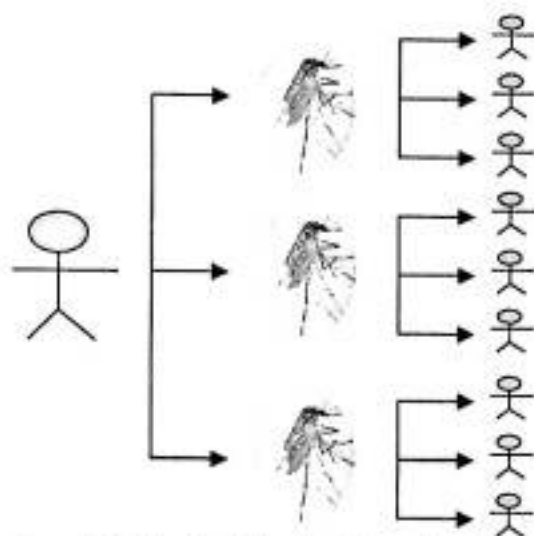
$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\mathbf{u}$$

yang disebut sistem linier yang bersesuaian dengan (3.4). Bila titik kesetimbangan bergeser ke nilai awal $x(0)$ maka kestabilan akan berubah, yaitu jika $x(t) \rightarrow \bar{x}$ untuk $t \rightarrow \infty$ dan $u(t) = x(t) - \bar{x}$ maka $u(t) \rightarrow 0$ dan yang terjadi adalah kestabilan lokal.

3.4 Basic Reproduction Rasio (R_0)

Definisi dari R_0 adalah ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat dari kasus primer dalam populasi yang *virgin*.

Untuk memperjelas definisi dari R_0 di atas, dapat dilihat ilustrasi di bawah ini :



Gambar 3.1. Ilustari Angka Reproduction Rasio (R_0)

Jika terdapat satu kasus primer dari penyakit Demam Berdarah, yang berarti terdapat satu orang yang terjangkit virus Dengue, dan ia digigit oleh nyamuk *Aedes aegypti*, maka nyamuk tersebut menjadi terinfeksi. Dan jika nyamuk tersebut menggigit manusia lainnya yang tidak terinfeksi, maka akan timbul kasus-kasus sekunder dari penyakit tersebut sebanyak gigitan nyamuk tadi. Dan jika ada lebih dari satu nyamuk yang menggigit manusia dalam kasus primer, maka kasus-kasus sekunder yang terjadi akan berlipat jumlahnya.

3.5 Aturan tanda Descartes

Pandang suatu polinomial berderajat n yaitu

$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$ dengan $A_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ maka

$f(-x) = -A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} - A_{n-2} x^{n-2} + \dots - A_1 x + A_0$. Apabila tidak terjadi pergantian tanda pada $f(x)$ maka akan terjadi pergantian tanda pada $f(-x)$ sebanyak n kali yang berarti bahwa terdapat paling banyak n akar-akar riil negatif yang berbeda dari polinomial $f(x)$. Atau dengan kata lain apabila suatu polinomial $f(x)$ dengan koefisien-koefisien positif maka semua akar-akarnya mempunyai bagian riil yang negatif.

3.6 Metode Routh-Hurwitz

Pandang suatu polinomial berderajat n yaitu $f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$ dengan $A_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Persamaan karakteristik dari persamaan diatas diperoleh dari

$|A - \lambda I| = 0$ dengan I adalah matriks identitas dan λ adalah skalar yang berupa nilai karakteristik yang akan menentukan kestabilan sistem. Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk polinom karakteristik yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Dengan $a_k \in \mathfrak{R}, k = 1, \dots, n$. Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, $P(\lambda)$ akan menghasilkan akar-akar atau nilai karakteristik atau nilai eigen yang real dan negative atau kompleks dengan bagian real yang negative jika dan hanya jika setiap koefisien dari $P(\lambda)$ memenuhi syarat, $a_1, a_n > 0$ dan setiap nilai dari

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2n-n} \end{vmatrix} > 0$$

Dimana $a_k = 0, \forall k > n, k, n \in \mathbb{N}$



BAB IV
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN VIRUS DENGUE
DENGAN PENGENDALIAN PADA VEKTOR

A. Model Penyebaran *virus Dengue*

Model penyebaran virus dengue yang akan dikaji dalam bab ini, mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dH_R}{dt} &= \mu S - \beta \frac{V_I}{N} H_R - \mu H_R, \\ \frac{dH_I}{dt} &= \beta \frac{V_I}{N} H_R - (\mu + \gamma) H_I, \\ \frac{dH_S}{dt} &= \gamma H_I - \mu H_S, \\ \frac{dV_I}{dt} &= C(N - V_I) \frac{H_I}{S} - \alpha V_I - dV_I,\end{aligned}\tag{4.1}$$

dimana:

- $H_R(t)$: Jumlah host yang rentan pada saat t.
- $H_I(t)$: Jumlah host yang terinfeksi pada saat t.
- $H_S(t)$: Jumlah host yang sembuh pada saat t.
- $V_I(t)$: Jumlah vektor yang terinfeksi pada saat t.
- N : Jumlah populasi vektor
- S : Jumlah populasi host
- C : Rata-rata gigitan yang dilakukan V_R pada H_I
- d : Rata-rata besarnya pengendalian yang dilakukan terhadap V_I

- β : Rata-rata gigitan yang dilakukan V_1 pada H_R .
- μ : Rata-rata kematian alami host persatuan waktu.
- γ : Rata-rata banyaknya H_I yang diobati dan sembuh.
- α : Rata-rata kematian alami vektor persatuan waktu.

$$H_R(t) \geq 0, H_I(t) \geq 0, H_S(t) \geq 0, V_1(t) \geq 0, d > 0, C > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0$$

Asumsi-asumsi yang mendasari terbentuknya model tersebut adalah sebagai berikut :

- Jumlah populasi manusia yang berperan sebagai host adalah konstan (tingkat kelahiran alami, sama dengan tingkat kematian alami).
- Jumlah populasi nyamuk tergantung pada jumlah telur yang menetas dan larva nyamuk.
- Aliran dari individu yang rentan menuju individu yang terinfeksi tergantung pada jumlah gigitan nyamuk pada host yang rentan.

B. Penentuan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari model, terjadi ketika tidak ada perubahan laju pada setiap populasi host, dan vektor, baik yang rentan, terinfeksi, maupun yang sembuh. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dH_R}{dt} = \frac{dH_I}{dt} = \frac{dH_S}{dt} = \frac{dV_1}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

Dengan menggunakan software Maple, diperoleh dua titik keseimbangan

model (4.1) , yaitu $E_1(H^*_R, H^*_I, H^*_S, V^*_I)$ dan $E_2(H^{**}_R, H^{**}_I, H^{**}_S, V^{**}_I)$,

dimana

$$H^*_R = S, H^*_I = 0, H^*_S = 0, V^*_I = 0$$

dan

$$\begin{aligned} H^{**}_R &= \frac{S(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}{C(\beta + \mu)}, \\ H^{**}_I &= \frac{\mu\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)}, \\ H^{**}_S &= \frac{\gamma\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)}, \\ V^{**}_I &= \frac{N\mu\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}}{(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\beta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa titik kesetimbangan E_1 telah bernilai positif, sedangkan untuk titik kesetimbangan E_2 juga akan bernilai positif jika memenuhi

$$C\beta > \mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma \quad (4.4)$$

atau

$$\frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma} > 1 \quad (4.5)$$

yang selanjutnya didefinisikan

$$R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma} \quad (4.6)$$

maka diperoleh syarat $E_2 > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

Besaran R_0 disebut sebagai *basic reproduction number*, dimana dalam masalah demam berdarah, R_0 adalah rata-rata banyaknya kasus sekunder yang dihasilkan dari 1 orang penderita demam berdarah pada populasi yang rentan.

C. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan.

Kestabilan titik kesetimbangan dianalisis dengan menggunakan metode linearisasi yaitu analisis kestabilan linear dengan menggunakan matriks jacobii dari sistem persamaan differensial tersebut, yaitu :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_R}{\partial H_R} & \frac{\partial H_R}{\partial H_I} & \frac{\partial H_R}{\partial H_S} & \frac{\partial H_R}{\partial V_I} \\ \frac{\partial H_I}{\partial H_R} & \frac{\partial H_I}{\partial H_I} & \frac{\partial H_I}{\partial H_S} & \frac{\partial H_I}{\partial V_I} \\ \frac{\partial H_S}{\partial H_R} & \frac{\partial H_S}{\partial H_I} & \frac{\partial H_S}{\partial H_S} & \frac{\partial H_S}{\partial V_I} \\ \frac{\partial V_I}{\partial H_R} & \frac{\partial V_I}{\partial H_I} & \frac{\partial V_I}{\partial H_S} & \frac{\partial V_I}{\partial V_I} \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta V_I}{N} - \mu & 0 & 0 & -\frac{\beta H_R}{N} \\ \frac{\beta V_I}{N} & -\mu - \gamma & 0 & \frac{\beta H_R}{N} \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & \frac{C(N - V_I)}{S} & 0 & -\frac{CH_I}{S} - \alpha - d \end{pmatrix}$$

Yang selanjutnya dituangkan dalam bentuk teorema berikut:

Teorema I

Misalkan $E_1(H^*_R, H^*_I, H^*_S, V^*_I)$ adalah titik kesetimbangan tak endemik sistem, di mana $H^*_R = S, H^*_I = 0, H^*_S = 0, V^*_I = 0$

Titik kesetimbangan tersebut akan stabil asimptotik secara lokal jika $R_0 < 1$

dengan $R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$

Bukti:

Pelinieran sistem (4.1) disekitar titik kesetimbangan E_1 menghasilkan matriks Jacobi, yaitu dengan mensubstitusi nilai $H^*_R = S, H^*_I = 0, H^*_S = 0, V^*_I = 0$ ke persamaan jacobian, sehingga diperoleh

$$J_1(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ 0 & -\mu - \gamma & 0 & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & \frac{CN}{S} & 0 & -\alpha - d \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Nilai eigen matriks $J_1(E_1)$ diperoleh dari solusi persamaan karakteristik

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ 0 & -\mu - \gamma - \lambda & 0 & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{CN}{S} & 0 & -\alpha - d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$f(\lambda) = (\lambda + \mu)^2 (\lambda\mu + \mu\alpha + d\mu + \lambda\alpha + \gamma\lambda + \lambda d + d\gamma + \lambda^2 - C\beta + \alpha\gamma) = 0 \quad (4.8)$$

dari persamaan (4.8) diperoleh

$\lambda_{1,2} = -\mu$ dan $\lambda\mu + \mu\alpha + d\mu + \lambda\alpha + \gamma\lambda + \lambda d + d\gamma + \lambda^2 - C\beta + \alpha\gamma = 0$ atau dapat ditulis

$$\lambda^2 + (\alpha + d + \gamma + \mu)\lambda - C\beta + \alpha\gamma + \alpha\mu + d\mu + d\gamma = 0 \quad (4.9)$$

Dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, diperoleh syarat bahwa persamaan (4.9) akan menghasilkan akar-akar yang real negatif atau kompleks dengan bagian real yang negatif jika dan hanya jika

$$-C\beta + \alpha\gamma + \alpha\mu + d\mu + d\gamma = 0$$

atau

$$C\beta < \alpha\gamma + \alpha\mu + d\mu + d\gamma$$

atau

$$\frac{C\beta}{\alpha\gamma + \alpha\mu + d\mu + d\gamma} < 1$$

yang selanjutnya didefinisikan

$$R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$$

Jadi terbukti bahwa titik kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika $R_0 < 1$

$$\text{dengan } R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$$

Teorema II

Misalkan $E_2(H_R^{**}, H_I^{**}, H_S^{**}, V_I^{**})$ adalah titik kesetimbangan endemik dari system (4.1), dengan

$$H_R^{**} = \frac{S(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}{C(\beta + \mu)},$$

$$H_I^{**} = \frac{\mu\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)},$$

$$H_S^{**} = \frac{\gamma\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)},$$

$$V_I^{**} = \frac{N\mu\{C\beta - (\alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\}}{(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\beta}$$

Titik kesetimbangan tersebut akan stabil endemik jika $R_0 > 1$ dengan

$$R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$$

Bukti:

Pelinieran sistem (4.1) disekitar titik kesetimbangan E_2 menghasilkan matriks Jacobi, yaitu dengan mensubstitusikan nilai $E_2(H_R^{**}, H_I^{**}, H_S^{**}, V_I^{**})$ ke persamaan jacobian, sehingga diperoleh

$$J_2(E_2) = \begin{pmatrix} \mu A - \mu & 0 & 0 & -\beta S B \\ -\mu A & -\mu - \gamma & 0 & \beta S B \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & \frac{C\left(N + \frac{\mu N A}{\beta}\right)}{S} & 0 & \mu D - \alpha - d \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

dengan

$$A = \frac{-C\beta + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma}{C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma}$$

$$B = \frac{C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma}{NC(\beta + \mu)}$$

$$D = \frac{-C\beta + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma}{(\beta + \mu)(\mu + \gamma)}$$



Nilai eigen matriks $J_2(E_2)$ diperoleh dari solusi persamaan karakteristiknya

Dengan mensubstitusikan $R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$ pada persamaan karakteristik

yang diperoleh, dan memisalkan $T = -1 + R_0$, dimana dengan pemisalan tersebut terlihat bahwa R_0 haruslah lebih besar dari 1 sehingga T bernilai positif, maka diperoleh persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan E_2 adalah

$$f(\lambda) = P_1\lambda^4 + P_2\lambda^3 + P_3\lambda^2 + P_4\lambda + P_5 \quad (4.11)$$

dengan

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = - \frac{ \left(\begin{aligned} &4\alpha\mu^2d + 2d^2\mu\gamma + 4d\mu^3T + 4\alpha\mu^3T + 3\mu^3C + 8d\mu^2\gamma + 2\mu\alpha\gamma^2 + \\ &2\alpha^2\mu^2T + 2d^2\mu^2T + 2\alpha^2\mu\gamma + d^2\beta\gamma + \alpha^2\beta\gamma + 3\alpha\beta\mu^2 + 3d\beta\mu^2 + \\ &\alpha\beta\gamma^2 + d\beta\gamma^2 + 2\mu d\lambda^2 + 8\alpha\mu^2\gamma + \alpha\mu^3 + 4\mu\alpha\beta\lambda + 4\mu d\beta\gamma + 6d\mu^3 + \\ -(\mu + \gamma) &\mu^2C\gamma + 2d^2\mu^2 + 2\alpha d\beta\gamma + \mu^2Cd + 4\mu d\gamma\alpha T + \mu^2C\alpha + \mu\alpha^2\beta + \\ &\mu d^2\beta + 5\alpha\mu^2\lambda T + 5d\mu^2\gamma T + 2\alpha^2\mu^2 + \mu\alpha\gamma^2T + \mu d\gamma^2T + 4\alpha\mu d\gamma + \\ &\mu^2Td\beta + \mu^2T\alpha\beta + \mu^2TCd + \mu^2TC\alpha + 2\mu\alpha d\beta + \mu T\alpha\beta\gamma + \mu\beta\gamma Td + \\ &4\alpha\mu^2d T + 2T\alpha^2\mu\gamma + 2\mu d^2\gamma T \end{aligned} \right) }{(\beta + \mu)(\mu + \gamma)(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}$$

$$P_3 = - \frac{ \left(\begin{aligned} &8\alpha\mu^2d + 4d^2\mu\gamma + 5d\mu^3T + 5\alpha\mu^3T + 3\mu^3C + 10d\mu^2\gamma + 4\mu\alpha\gamma^2 + \\ &6T\alpha^2\mu^2 + 6Td^2\mu^2 + 4\alpha^2\mu\gamma + 2d^2\beta\gamma + 2\alpha^2\beta\gamma + 3\alpha\beta\mu^2 + 3d\beta\mu^2 + \\ &2\alpha\beta\gamma^2 + 2d\beta\gamma^2 + 4\mu d\gamma^2 + 10\alpha\mu^2\gamma + 6\alpha\mu^3 + 5\mu\alpha\beta\gamma + 5\mu d\beta\gamma + \\ &6d\mu^3 + \alpha^2\gamma^2T + d^2\gamma^2T + 2\alpha\gamma^2d T + 2\mu^2C\gamma + 4d^2\mu^2 + 4\alpha d\beta\gamma + \\ -\mu(\mu + \gamma) &2\mu T\alpha d\beta + \mu TC\alpha\gamma + \mu TCd\gamma + 2\mu d\gamma\alpha T^2 + 2\mu^2Cd + 14\mu d T\gamma\alpha + \\ &2\mu^2C\alpha + 2\mu\beta\alpha^2 + 2\mu\beta d^2 + 8T\alpha\gamma\mu^2 + 8Td\gamma\mu^2 + 4\alpha^2\mu^2 + \mu T\beta\alpha^2 + \\ &\mu Td^2\beta + \mu^2d^2T^2 + \mu^2\alpha^2T^2 + 3\mu\alpha\gamma^2T + 3\mu d\gamma^2T + 2Td\alpha\beta\gamma + \\ &8d\alpha\mu\lambda + 2dT^2\alpha\mu^2 + \mu\alpha^2T^2\gamma + \mu d^2\gamma T^2 + T\alpha^2\beta\gamma + Td^2\beta\gamma + T\alpha\beta\gamma^2 + \\ &Td\beta\gamma^2 + 2\mu^2Td\beta + 2\mu^2T\alpha\beta + 3\mu^2TC\alpha + 4\mu\alpha\beta d + 3\mu\alpha\beta\gamma T + \\ &3\mu\beta\gamma Td + 12\alpha\mu^2d T + 7\alpha^2\mu\gamma T + 7\mu d^2\gamma T \end{aligned} \right) }{(\beta + \mu)(\mu + \gamma)(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}$$

$$P_4 = - \frac{\left(\begin{aligned} &4\alpha\mu^3d + 2\alpha^2\mu^2\gamma + 2d^2\mu^2\gamma + \alpha^2\mu^2\beta + C\alpha\mu^3 + 6d^2\mu^3T + 6\alpha^2\mu^3T + \\ &2\mu^4dT + 2\mu^4\alpha T + 2d^2\mu^3 + 2\alpha^2\mu^3 + Cd\mu^3 + 2\alpha^2\mu^3T^2 + 2d^2\mu^3T^2 + \\ &d^2\mu^2\beta + 2\beta\alpha\gamma^2dT + 4\mu^2d\gamma\alpha + 2d\alpha\mu\beta\gamma + \alpha^2\mu\beta\gamma + 2\alpha\mu^2d\beta + \\ &d^2\mu\beta\gamma + 2\mu^4d + 2\mu^4d + 2\mu^4\alpha + 6\mu d\gamma^2\alpha T + 18\mu^2dT\gamma\alpha + 3\mu\alpha^2\gamma^2T + \\ &12\alpha\mu^3dT + 9\alpha^2\mu^2\gamma T + \mu^3\gamma C + 4\mu^3d\gamma + 4\mu^3\alpha\gamma + \mu^4C + \alpha\mu^3\beta + \\ &- \mu(\mu + \gamma) \left(\begin{aligned} &2\alpha\mu^2\gamma^2 + \alpha\mu\beta\gamma^2 + 2\alpha\mu^2\beta\gamma + d\mu^3\beta + 2d\mu^2\gamma^2 + d\mu\beta\gamma^2 + 2d\mu^2\beta\gamma + \\ &2\mu^2\beta\alpha^2T + 2\mu^2\beta d^2T + 4\mu^3dT\gamma + 9\mu^2d^2T\gamma + 2\mu^2dT\beta\gamma + 2\mu^2T\beta\alpha\gamma + \\ &2\mu^2CT\alpha\gamma + 2\mu^2CTd\gamma + 4\mu^2\beta\alpha dT + 6\mu Td\alpha\gamma + 3\mu T\alpha^2\beta\gamma + 3\mu Td^2\beta\gamma + \\ &\mu T\alpha\beta\gamma^2 + \mu Td\beta\gamma^2 + 4\mu^3\alpha\gamma T + 2\mu d\gamma^2\alpha T^2 + 6\mu^2d\gamma\alpha T^2 + 4\alpha\mu^3dT + \\ &2d\mu^2\gamma^2T + \mu\alpha^2\gamma^2T^2 + 3\alpha^2\mu^2\gamma T^2 + 3\mu d^2\gamma^2T + 3\mu^3Cd + 3\mu^3CT\alpha + \\ &\mu^3\beta\alpha T + \mu^3\beta dT + 2\alpha\mu^2\gamma^2T + \beta d^2\gamma^2T + \beta^2\alpha\gamma^2T \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)}{(\beta + \mu)(\mu + \gamma)(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}$$

$$P_5 = - \frac{-(\alpha\mu + d\mu + \alpha\gamma + d\gamma)T\mu(\beta + \mu)(\mu + \gamma)(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}{(\beta + \mu)(\mu + \gamma)(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}$$

Dapat dilihat bahwa, nilai koefisien dari polinomial λ akan selalu bernilai positif.

Dengan menggunakan aturan tanda Descartes, maka dari persamaan (4.11), diperoleh

$$f(-\lambda) = P_1\lambda^4 - P_2\lambda^3 + P_3\lambda^2 - P_4\lambda + P_5 \quad (4.12)$$

Berdasarkan $f(-\lambda)$, terjadi pergantian tanda sebanyak empat kali, sehingga menurut aturan tanda Descartes, terdapat empat akar karakteristik (nilai eigen) dengan bagian riil yang negatif. Artinya titik kesetimbangan $E_2(H_R^*, H_I^*, H_S^*, V_I^*)$ akan stabil endemik untuk setiap parameter.

Jadi terbukti bahwa titik kesetimbangan E_2 akan stabil endemik jika $R_0 > 1$

$$\text{dengan } R_0 = \frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$$

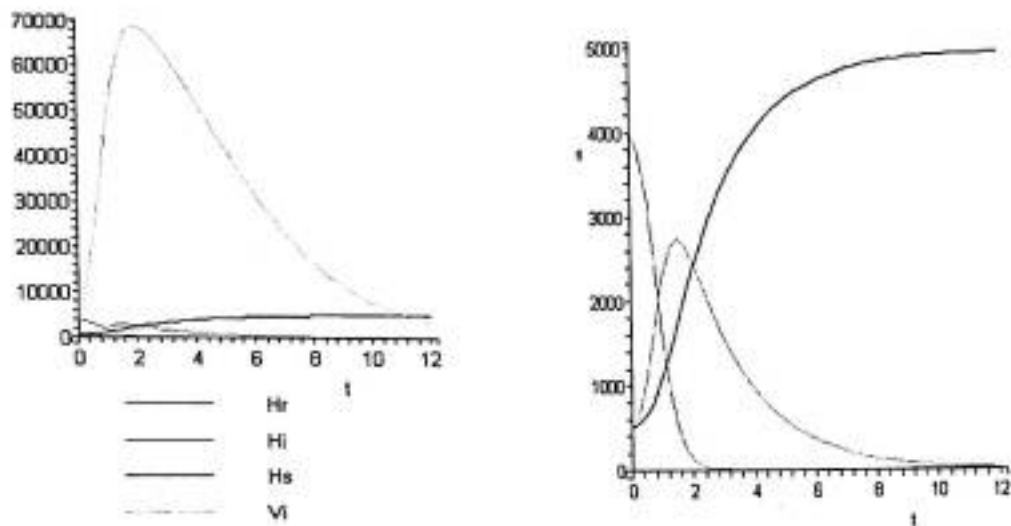
D. Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik pada beberapa kondisi yang berbeda dan melihat bagaimana kelakuan dari solusi model (4.1) pada tiap kondisi tersebut.

Simulasi pertama dilakukan untuk kondisi umum.

Diasumsikan pada kondisi ini, total populasi manusia (S) sebesar 5000 orang dan total populasi nyamuk (N) sebesar 100000 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia dalam sebulan lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk dalam sebulan yaitu $\mu = 0,001$ dari total populasi manusia dan $\alpha = 0,2$ dari total populasi nyamuk. Rata-rata kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu $\beta = 4$; $C = 4$. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu $\gamma = 0,5$ dan persentase kematian nyamuk setelah dilakukan pengendalian $d = 0,7$. dari parameter tersebut diperoleh nilai $R_0 = 35,48 > 1$ yang berarti bahwa dalam populasi tersebut akan terjadi wabah penyakit demam berdarah untuk $t \rightarrow \infty$.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah $H_R(0) = 4000$; $H_I(0) = 500$; $H_S(0) = 500$; $V_I(0) = 2000$. Maka dengan menggunakan parameter-parameter tersebut diatas diperoleh grafik solusi



Gambar 4.1. Grafik hubungan $H_I(t)$, $H_R(t)$, $H_S(t)$, dan $V_I(t)$ terhadap t dengan nilai $R_0 = 35,48$

Dari grafik diatas, terlihat bahwa jumlah H_I mengalami kenaikan pada awal bulan, kemudian akan turun pada tahun selanjutnya untuk menuju ke titik kesetimbangannya. Jumlah maksimum H_I tercapai pada saat $t = 2$ dengan jumlah populasi sebesar 2800 . Hal ini disebabkan karena jumlah populasi V_I pada awal bulan juga mengalami kenaikan jumlah populasi. Hal ini mempengaruhi jumlah populasi H_R , dimana jumlah populasi H_R pada interval yang sama mengalami penurunan yang sangat besar. Akibat kenaikan jumlah V_I , maka rata-rata gigitan V_I terhadap H_R juga akan meningkat yang berimbas pada kenaikan populasi H_I . Untuk populasi jumlah H_S pada kondisi ini mengalami kenaikan yang disebabkan karena nilai γ yang cukup besar yaitu 50%, yang berarti bahwa peluang untuk sembuh dari penyakit demam berdarah adalah cukup besar.

Pada interval waktu yang lebih besar, jumlah populasi V_I mengalami penurunan yang sangat drastis, hal ini disebabkan karena adanya sejumlah

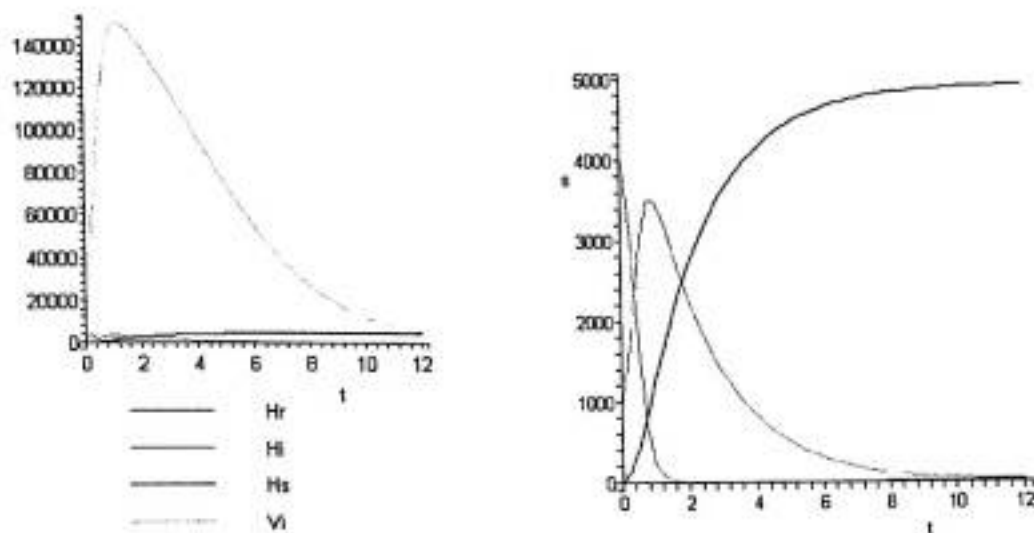
vector yang mati akibat pengendalian, yaitu 20% nyamuk dari V_I yang mati akibat pengendalian. Sehingga pada interval yang sama juga populasi H_R dan H_S mengalami kenaikan, dan secara otomatis jumlah populasi H_I akan turuna guna mengimbangi kenaikan jumlah H_R dan H_S .

Keseimbangan sistem tercapai pada saat jumlah $H_R = 142.1207198$, $H_I = 9.696365829$, $H_S = 4848.182914$, dan $V_I = 854.5339635$

Simulasi kedua dilakukan untuk kondisi musim pancaroba (Peralihan)

Diasumsikan pada kondisi ini, total populasi manusia (S) sebesar 5000 orang dan total populasi nyamuk (N) sebesar 200000 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu $\mu = 0,001$ dari total populasi manusia dan $\alpha = 0,5$ dari total populasi nyamuk. Rata-rata kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu $\beta = 6$; $C = 6$. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu $\gamma = 0,5$ dan persentase kematian V_I karena pengendalian $d = 0,8$. Dari parameter tersebut diperoleh nilai $R_0 = 55.27 > 1$ yang berarti bahwa dalam populasi tersebut akan terjadi wabah penyakit untuk $t \rightarrow \infty$.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah $H_R(0) = 4000$; $H_I(0) = 1000$; $H_S(0) = 0$; $V_I(0) = 10000$, maka dengan menggunakan parameter-parameter diatas diperoleh grafik solusi



Gambar 4.2. Grafik hubungan $H_I(t)$, $H_R(t)$, $H_S(t)$, dan $V_I(t)$ terhadap t dengan nilai $R_0 = 55.27$

Grafik diatas menggambarkan perkembangan populasi pada musim pancaroba, dimana laju pertumbuhan vektor akan meningkat secara drastis. terlihat bahwa jumlah H_R mengalami penurunan yang cukup besar, sedangkan pada H_S mengalami peningkatan yang cukup besar pada interval awal bulan yang sama. Diketahui juga bahwa jumlah V_I pada interval awal bulan, juga mengalami kenaikan, dan selanjutnya akan turun secara drastis pada interval tahun yang lebih besar. Hal ini dipengaruhi persentase kematian V_I karena pengendalian yang cukup besar yaitu 0,8. Untuk jumlah populasi H_I pada interval awal bulan mengalami kenaikan yang cukup kecil, kemudian menurun untuk menuju titik kesetimbangannya

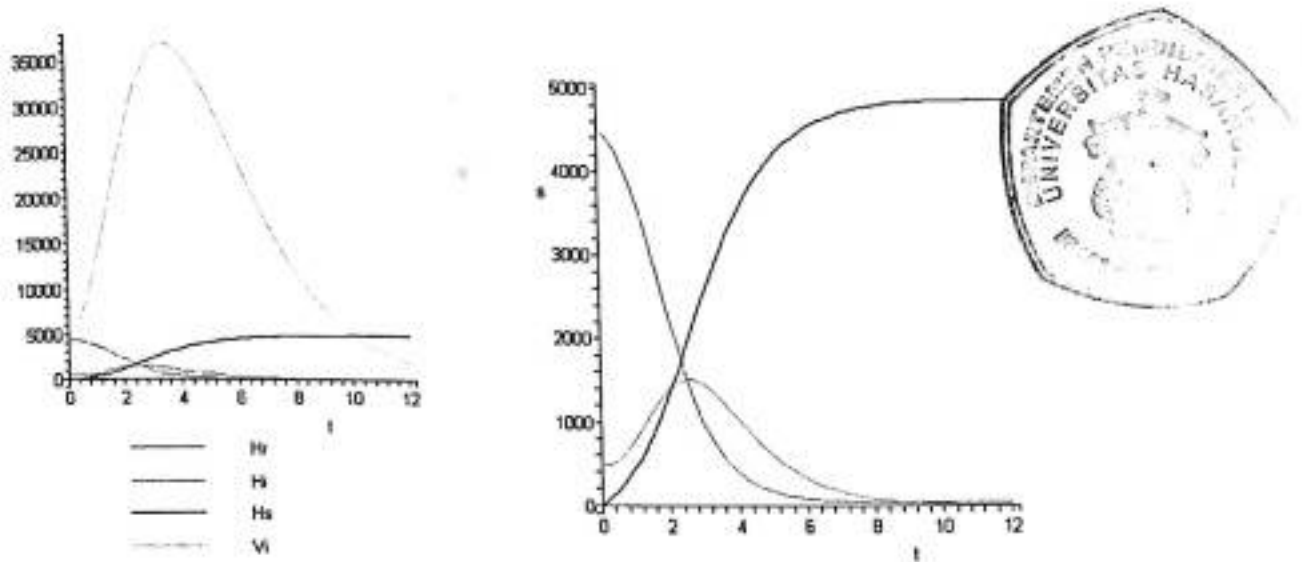
Kesetimbangan sistem terjadi pada saat jumlah $H_R = 91.27645392$, $H_I = 9.797851389$, $H_S = 4898.925695$, dan $V_I = 1792.621330$.

Kondisi seperti ini biasanya terjadi pada saat musim penghujan telah berakhir, dimana jumlah telur nyamuk yang menetas pada saat itu akan mengalami peningkatan yang sangat besar.

Simulasi ketiga dilakukan untuk kondisi musim kemarau panjang

Diasumsikan pada kondisi ini, total populasi manusia (S) sebesar 5000 orang dan total populasi nyamuk (N) sebesar 80000 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu $\mu = 0,001$ dari total populasi manusia dan $\alpha = 0,1$ dari total populasi nyamuk. Rata-rata kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu $\beta = 2$; $C = 2$. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu $\gamma = 0,8$ dan persentase kematian V_i setelah dilakukan pengendalian adalah $d = 0,5$. Dari parameter tersebut diperoleh nilai $R_0 = 8,32 > 1$ yang berarti bahwa dalam populasi tersebut akan terjadi wabah penyakit untuk $t \rightarrow \infty$.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah $H_R(0) = 4500$; $H_A(0) = 500$; $H_S(0) = 0$; $V_A(0) = 1500$, maka dengan menggunakan parameter-parameter diatas, maka diperoleh grafik solusi



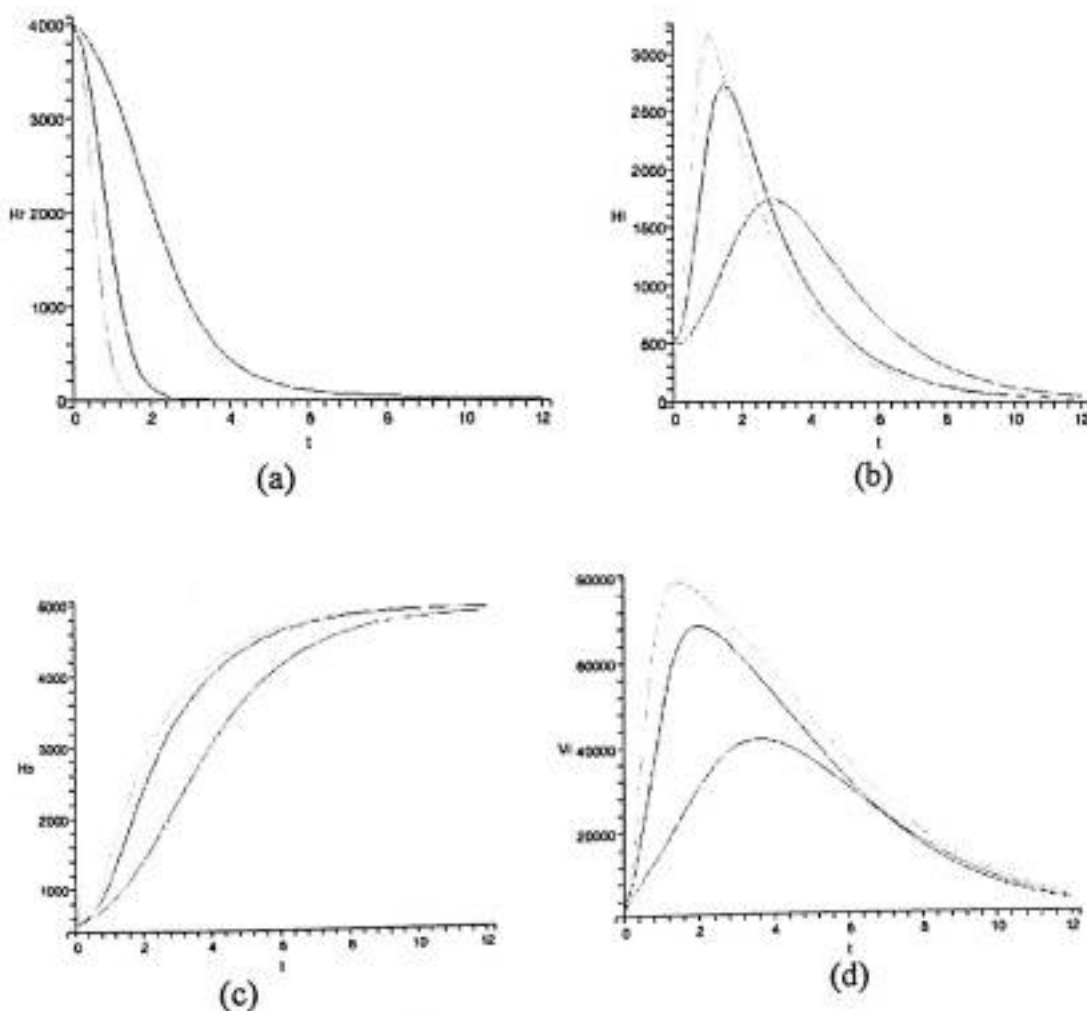
Gambar 4.3. Grafik hubungan $H_I(t)$, $H_R(t)$, $H_S(t)$, dan $V_I(t)$ terhadap t dengan nilai $R_0 = 1,012$

Dari grafik diatas, terlihat bahwa jumlah H_R mengalami penurunan yang pada interval bulan-bulan pertama. Hal ini disebabkan karena jumlah V_I pada interval yang sama juga mengalami peningkatan jumlah populasi. Hal ini mempengaruhi jumlah populasi H_I , dimana jumlah populasi H_I pada interval yang sama mengalami peningkatan. Hal ini disebabkan karena rata-rata jumlah gigitan V_I terhadap H_R dan menjadi H_I adalah cukup kecil yaitu 2. Untuk populasi jumlah H_S mengalami kenaikan pada interval yang sama, hal ini disebabkan karena nilai peluang seorang H_I untuk sembuh adalah cukup besar yaitu 50%.

Kesetimbangan sistem terjadi pada saat jumlah $H_R = 602.9485257$, $H_I = 5.489452527$, $H_S = 4391.562022$, dan $V_I = 291.7032739$

Kondisi seperti ini biasanya terjadi pada musim kemarau panjang, dimana jumlah telur nyamuk yang menetas pada musim itu akan mengalami penurunan yang sangat besar.

Berikut ini diberikan analisis masing-masing populasi dengan rata-rata kontak antara manusia dan vektor baik yang rentan maupun yang terinfeksi secara berubah-ubah.



Ket : - Merah : C dan $\beta = 2$
 - Biru : C dan $\beta = 4$
 - Hijau : C dan $\beta = 6$

Gambar 4.4. Grafik perbandingan H_R , H_I , H_S , dan V_1 berturut-turut pada gambar (a), (b), (c), (d) terhadap t dengan kontak yang berubah-ubah

Dari grafik diatas, terlihat bahwa besarnya kontak yang terjadi antara vektor dan manusia, baik yang rentan maupun yang terinfeksi, akan sangat mempengaruhi jumlah dari kesetimbangan masing-masing populasi. Semakin kecil kontak yang terjadi, maka jumlah populasi H_i , H_s , dan V_i juga akan mengalami penurunan, sedangkan berbanding terbalik dengan jumlah populasi H_r . Kontak yang berubah-ubah disini, dapat dipengaruhi oleh pengendalian terhadap nyamuk itu sendiri, pengaruh keadaan lingkungan dan pemakaian lotion anti nyamuk oleh manusia.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa salah satu model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor adalah sebagai berikut :

$$\frac{dH_R}{dt} = \mu S - \beta \frac{V_I}{N} H_R - \mu H_R$$

$$\frac{dH_I}{dt} = \beta \frac{V_I}{N} H_R - (\mu + \gamma) H_I$$

$$\frac{dH_S}{dt} = \gamma H_I - \mu H_S$$

$$\frac{dV_I}{dt} = C(N - V_I) \frac{H_I}{S} - \alpha V_I - dV_I$$

Mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu :

$$E_1 (S, 0, 0, 0) \text{ dan } E_2 (H_R^*, H_I^*, H_S^*, V_I^*)$$

di mana :

$$H_R^* = \frac{S(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)}{C(\beta + \mu)},$$

$$H_I^* = -\frac{\mu(-C\beta + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)},$$

$$H_S^* = -\frac{\gamma(-C\beta + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)S}{C(\beta + \mu)(\mu + \gamma)},$$

$$V_I^* = -\frac{N\mu(-C\beta + \mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma)}{(C\mu + \alpha\mu + \alpha\gamma + d\mu + d\gamma)\beta}$$

Dengan syarat E_1 dan E_2 ada jika :

$$\frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma} > 1$$

Yang mana $\frac{C\beta}{\mu\alpha + \alpha\gamma + \mu d + d\gamma}$ sebagai R_0 , yaitu tingkat kewabahan suatu penyakit dari suatu sistem, terkhusus dalam hal ini yaitu penyakit demam berdarah. Lihat halaman 28

Kestabilan di sekitar titik kesetimbangan E_1 dan E_2 akan dijamin ada ketika nilai $R_0 < 1$ untuk E_1 dan $R_0 > 1$ untuk E_2 . Lihat halaman 30-34

Dari analisis kestabilan dan grafik dapat disimpulkan, terjadi atau tidaknya penyebaran virus dengue, sangat dipengaruhi oleh besarnya kontak antara nyamuk dan manusia, baik yang rentan maupun yang terinfeksi (C dan β). Sehingga salah satu cara untuk menekan jumlah penyeberannya, yaitu dengan cara memutus siklus perkembangannya guna mengurangi jumlah nyamuk baik itu dengan pengendalian ataupun dengan penggunaan lotion anti nyamuk guna mengurangi kontak yang terjadi. Lihat halaman 41-42

B. Saran

Dalam penulisan skripsi ini hanya dibahas mengenai penyebaran virus dengue dengan pengendalin pada vektor. Diharapkan pada penulisan selanjutnya model ini dapat dikembangkan dengan melakukan penambahan pengendalian sehingga dapat lebih menekan jumlah populasi vektor yang pada akhirnya menekan jumlah penderita demam berdarah.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 1994, **Aljabar Linear Elementer**, Erlangga, Jakarta.
- Derouich, M. Boutayeb, A. Dan Twizel, EH, 2003, **A Model of Dengue Fever**.
- Diekman, O dan J.A.P. Heesterbeek, 2000, **Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases**, John Wiley & Sons Ltd. New York
- Esteve, L. dan Vargas, C, 2002, **Coexistence of different serotypes of dengue virus**, J. Math. Biol. 46, 31-47
- F. S'anchez, M. Engman, L. Harrington, and C. Castillo-Ch'avez, 2000, **Models for Dengue Transmission and Control**.
- Haberman, Richard, 1997, **Mathematical Models - An Introduction To Applied Mathematics**, Prentice-Hall, Inc., 1987.
- Soewono, **Epidemi Demam Berdarah**, Departemen Kesehatan, 2003
- <http://www.purplemath.com/modules/drofsign.htm>

LAMPIRAN



Lampiran I (Kondisi Umum)

```
> restart;
> alpha:=0.2;
mu:=0.001;
g:=0.5;
beta:=4;
C:=4;
d:=0.7;
S:=5000;
N:=100000;

> H1:=mu*S-beta*(Vi/N)*Hr-mu*Hr;
H2:=beta*(Vi/N)*Hr-(mu+g)*Hi;
H3:=g*Hi-mu*Hs;
V2:= (C*(N-Vi)*(Hi/S))-(alpha*Vi)-(d*Vi);
```

$$H1 := 5.000 - \frac{1}{25000} Vi Hr - 0.001 Hr$$

$$H2 := \frac{1}{25000} Vi Hr - 0.501 Hi$$

$$H3 := 0.5 Hi - 0.001 Hs$$

$$V2 := \frac{1}{1250} (100000 - Vi) Hi - 0.9 Vi$$

```
> sol[1];
{Vi = 0., Hr = 5000., Hi = 0., Hs = 0.}
```

```
> sol[2];
{Hr = 142.1207198, Vi = 854.5339635, Hi = 9.696365829, Hs = 4848.182914}
```

```
> sys :=
diff(Hr(t), t) = mu*S - beta*(Vi(t)/N)*Hr(t) - mu*Hr(t),
diff(Hi(t), t) = beta*(Vi(t)/N)*Hr(t) - (mu+g)*Hi(t),
diff(Hs(t), t) = g*Hi(t) - mu*Hs(t),
diff(Vi(t), t) = C*(N-Vi(t))*(Hi(t)/S) - alpha*Vi(t) - d*Vi(t):
fcns := {Hr(t), Hi(t), Hs(t), Vi(t)}:
L :=
dsolve({sys, Hr(0)=4000, Hi(0)=500, Hs(0)=500, Vi(0)=2000}, fcns, type=numeric, method=classical):
```

```

> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vi(t),color=green]],0..12,numpoints=1);

```

Lampiran II (Kondisi Pancaroba)

```

> restart;
> alpha:=0.5;
mu:=0.001;
g:=0.5;
beta:=6;
C:=6;
d:=0.8;
S:=5000;
N:=200000;

> H1:=mu*S-beta*(Vi/N)*Hr-mu*Hr;
H2:=beta*(Vi/N)*Hr-(mu+g)*Hi;
H3:=g*Hi-mu*Hs;
V2:= (C*(N-Vi)*(Hi/S))-(alpha*Vi)-(d*Vi);

```

$$H1 := 5.000 - \frac{3}{100000} Vi Hr - 0.001 Hr$$

$$H2 := \frac{3}{100000} Vi Hr - 0.501 Hi$$

$$H3 := 0.5 Hi - 0.001 Hs$$

$$V2 := \frac{3}{2500} (200000 - Vi) Hi - 1.3 Vi$$

```

> sol[1];
{Hs = 0., Hi = 0., Hr = 5000., Vi = 0.}

```

```

> sol[2];
{Hr = 91.27645392, Hs = 4898.925695, Hi = 9.797851389, Vi = 1792.621330}

```

```

> sys :=

```

```

diff(Hr(t),t)=mu*S-beta*(Vi(t)/N)*Hr(t)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*(Vi(t)/N)*Hr(t)-(mu+g)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=g*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vi(t),t)=C*(N-Vi(t))*(Hi(t)/S)-alpha*Vi(t)-d*Vi(t):
fcns:={Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=4000,Hi(0)=1000,Hs(0)=0,Vi(0)=10000},fc
ns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vi(t),color=green]],0..12,numpoints=1);

```

Lampiran III (Kondisi Musim Kemarau)

```

> restart;
> alpha:=0.1;
mu:=0.001;
g:=0.8;
beta:=2;
C:=2;
d:=0.5;
S:=5000;
N:=80000;
> H1:=mu*S-beta*(Vi/N)*Hr-mu*Hr;
H2:=beta*(Vi/N)*Hr-(mu+g)*Hi;
H3:=g*Hi-mu*Hs;
V2:= (C*(N-Vi)*(Hi/S))-(alpha*Vi)-(d*Vi);

```

$$H1 := 5.000 - \frac{1}{40000} Vi Hr - 0.001 Hr$$

$$H2 := \frac{1}{40000} Vi Hr - 0.801 Hi$$

$$H3 := 0.8 Hi - 0.001 Hs$$

$$V2 := \frac{1}{2500} (80000 - Vi) Hi - 0.6 Vi$$



```
> sol[1];
      {Vi = 0., Hs = 0., Hr = 5000., Hi = 0.}

> sol[2];
      {Hs = 4391.562022, Hr = 602.9485257, Hi = 5.489452527, Vi = 291.7032739}

> sys :=
diff(Hr(t), t) = mu*S - beta*(Vi(t)/N)*Hr(t) - mu*Hr(t),
diff(Hi(t), t) = beta*(Vi(t)/N)*Hr(t) - (mu+g)*Hi(t),
diff(Hs(t), t) = g*Hi(t) - mu*Hs(t),
diff(Vi(t), t) = C*(N-Vi(t))*(Hi(t)/S) - alpha*Vi(t) - d*Vi(t):
fcns := {Hr(t), Hi(t), Hs(t), Vi(t)}:
L :=
dsolve({sys, Hr(0)=4500, Hi(0)=500, Hs(0)=0, Vi(0)=1500}, fcns
, type=numeric, method=classical):
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> odeplot(L, [[t, Hr(t), color=blue],
[t, Hi(t), color=red],
[t, Hs(t), color=black],
[t, Vi(t), color=green]], 0..12, numpoints=1);
```