PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT PADA MATRIKS *P*-ORTOGONAL GRUP LIE

OLEH :

AHSAN

H 111 01 006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2006

PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT PADA MATRIKS *P*-ORTOGONAL GRUP LIE

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana
pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin

OLEH :

A H S A N

H 111 01 006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2006

LEMBAR KEOTENTIKAN

SAYA YANG BERTANDA TANGAN DIBAWAH INI MENYATAKAN DENGAN SESUNGGUH-SUNGGUHNYA BAHWA SKRIPSI YANG SAYA BUAT DENGAN JUDUL :

" PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT PADA MATRIKS P-ORTOGONAL GRUP LIE "

ADALAH BENAR HASIL KERJA SAYA SENDIRI BUKAN HASIL PLAGIAT DAN BELUM PERNAH DUIPUBLIKASIKAN DALAM BENTUK APAPUN

Makassar, Maret 2006

A H S A N
NIM. H 111 01 006

PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT PADA MATRIKS *P*-ORTOGONAL GRUP LIE

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si
NIP. 131 992 471	NIP. 132 133 694

Pada Tanggal : 6 Maret 2006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini, tanggal 6 Maret 2006, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

" PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT PADA MATRIKS *P*-ORTOGONAL GRUP LIE "

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 6 Maret 2006

PANITIA UJIAN SKRIPSI

			Tanda Tangan
1.	Ketua	: Drs. Raupong, M.Si	( )
2.	Sekertaris	: Dra. Nur Erawati, M.Si	( )
3.	Anggota	: Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	( )
4.	Anggota	: JusmawatiMassalesse, S.Si, M.Si	( )
5.	Anggota	: Amran, S.Si, M.Si	( )

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat **Allah Subhanahu Wa Ta'ala** atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga tugas akhir ini dapat selesai sesuai dengan yang diharapkan. Tak lupa shalawat dan salam atas Rasulullah **Muhammad Shallallahu Alaihi Wa Sallam** beserta keluarganya, sahabat, handai taulan dan umatnya yang senantiasa mengikuti tuntunan Qur'an dan sunnahnya.

Penulis sadar sepenuhnya bahwa skripsi ini masih sangat jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik yang sifatnya membangun sangat penulis harapkan dari pembaca demi kesempurnaan penulisan selanjutnya.

Tugas akhir ini penulis persembahkan untuk kedua **Orang Tua tercinta, Ayahanda H. Muh. Sabir** dan **Ibunda Hj. Nursidah** terima kasih atas do'a dan kasih sayangnya, bantuan moril dan materil serta kesabarannya mendidikku, buat **saudara-saudaraku Anwar, Nurhasanah, Ashar** dan **Ansar** yang tak pernah henti-hentinya mendukung dan memberikan semangat yang begitu besarnya hingga akhir studi ini. Kepada seluruh keluarga, terima kasih atas segala dukungan yang selama ini telah diberikan.

Penulis mengucapkan penghargaan dan terima kasih tulus dan sedalam-dalamnya kepada **Bapak Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku pembimbing utama *yang telah memberikan arahan dan bimbingan hingga rampungnya tugas akhir ini.*

Kepada **Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si** sebagai penasehat akademik dan sekaligus sebagai pembimbing pertama *yang penuh kesabaran dalam* *meluangkan waktunya dalam membimbing dan kesediaannya meneliti serta mengoreksi penyusunan skripsi ini hingga selesai.* Saya haturkan terima kasih.

Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Radi A. Gany** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. **Bapak Prof. Dr. H. Alfian Noor, M.Sc** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. **Bapak Drs. Hasyim Barium, M.Si, Apt** selaku Pembantu Dekan I Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
4. **Bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
5. **Bapak Drs. Raupong, M.Si, Ibu Dra. Nur Erawati, M.Si** dan **Bapak Amran, S.Si, M.Si** selaku penguji.
6. Seluruh **Dosen** dan **Staf Pengajar Jurusan Matematika** FMIPA Unhas yang telah mau membagi waktu dan ilmu yang dimiliki.
7. Seluruh **Staf Akademik** dan **Staf Jurusan Matematika** FMIPA Unhas yang telah banyak membantu dalam mengurus berbagai keperluan yang mendukung studi penulis.
8. All Crew 01, **" the boys " Afrain, Awhi, Fahd, Ilyas, Imran, Rifky, Sudi, Wa-one, Yoedin,** *keep fight, you are the best,* for **Anggun dan Fajri** *I never forget you friend,* and **" the sweet girls " Fany, Ale, S.Si, Amma. S.Si, Yuli, Anti, Nina, Yati, Aty, S.Si, Sina, Hana, Maya, S.Si, Fivhy, Fidhia, S.Si, Dian, S.Si, Santry, S.Si, Cichy, Dewi, S.Si, Nunhu, S.Si, Hasma, S.Si, Rahma, Neny, Ida, S.Si, Marwah, Muja, Uni,S.Si, Neldy, Arna, S.Si, Hasnah, Ugha, Dery, S.Si, Wati, S.Si, Ezra, Niar, Arma, Widia, S.Si, Yemi, Rani, Ratna, Lily, Anita, Irma, Ria** *all of you are still in my heart.*

9. Semua **senior-seniorku** dan **adik–adik angkatan 02, 03, 04** dan **05**
10. Seluruh **teman-teman SMU, SMP** dan **SDku** yang tak dapat penulis sebutkan satu-persatu karena jumlah kalian terlalu banyak sekali cess............................! *"I still remember you"*.
11. Seluruh mahasiswa yang telah mempercayakan penulis dalam memberikan bimbingan dan berbagi ilmu yang dimiliki.
12. *Radja* yang selalu " ***jujur*** ", buat *Club Eighties* penulis ucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya " ***dari hati*** " dan *Bondan* atas " ***bunga*** " nya, buat bang *Iwan* " ***Ijinkan aku menyayangimu*** ", " ***tak bisakah*** " *Peterpan* dan " ***demi waktu*** " *Ungu* adalah " ***kenangan terindah*** " *Samsons* dan terakhir buat *Cross Bottom* yang " ***setia*** " menemaniku hingga skripsi ini selesai.

Dan kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih atas partisipasinya, semoga **ALLAH Subhanahu Wa Ta'ala** membalas kebaikan dan memberikan balasan yang setimpal. Amin.

Akhir kata, semoga apa yang telah kita lakukan hari ini dapat membuat kita selangkah lebih maju dari hari–hari sebelumnya dan mudah–mudahan tugas akhir ini ada manfaatnya, baik bagi mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika pada khususnya dan bagi Perguruan Tinggi, maupun masyarakat luas pada umumnya.

Wassalam.

Makassar, Maret 2006

A h s a n

ABSTRAK

Pada penulisan ini, akan dikaji fungsi $\mathrm{tr}\left(\theta^{-1}Q\theta\, N - 2M\theta^{-1}\right)$ yang dinyatakan sebagai suatu fungsi dari θ, dimana θ adalah anggota dari Grup Lie matriks P-ortogonal. Fungsi inilah yang dinamakan sebagai fungsi Generalisasi Brockett. Persamaan gradien flow dari fungsi licin yang bersesuaian dengan metrik Riemannian adalah sistem persamaan differensial non linear yang normal.

$$\dot{\theta} = \nabla \eta(\theta)$$

Persamaan gradien flow dari fungsi Generalisasi Brockett dibagi ke dalam dua kasus yaitu ketika $N = 0$ atau $Q = 0$ diperoleh

$$\dot{\theta} = \theta M^{P}\theta - M$$

dan ketika $M = 0$ diperoleh

$$\dot{\theta} = \theta[N, \theta^{-1}Q\theta]^{P}$$

dengan $P = \pm I$ dimana N, Q diberikan sebagai matriks $n \times n$ dengan entri bilangan real dan M adalah matriks non singular.

ABSTRACK

In this paper we study the function $\operatorname{tr}\left(\theta^{-1}Q\theta\, N - 2M\theta^{-1}\right)$ viewed as a function of θ, with θ belonging to the Lie group of P-orthogonal matrices. This function refer to the generalized Brockett function. The gradien flow equation of the smooth function belonging to metrik Riemannian is the system of ordinary nonlinear differential equation

$$\dot{\theta} = \nabla\eta(\theta)$$

The gradien flow equation of the generalized Brockett function divided into two cases when $N = 0$ or $Q = 0$, obtained

$$\dot{\theta} = \theta M^{P}\theta - M$$

and $M = 0$

$$\dot{\theta} = \theta[N, \theta^{-1}Q\theta]^{P}$$

with $P = \pm I$ where N, Q are given n by n matrices with real entries and M is nonsingular matrice.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teori kelengkapan dari sistem integral Hamiltonian sudah mengalami perkembangan pesat beberapa tahun belakangan ini. Bloch menunjukkan bahwa beberapa dari sistem tersebut tertutup bila dihubungkan dengan gradien flow dari fungsi licin *(Bloch, A. M, 1990)*. Pada penulisan ini akan dikaji fungsi

$$\operatorname{tr}\left(\theta^{-1} Q \theta N - 2M\theta^{-1}\right)$$

yang dinyatakan sebagai suatu fungsi dari θ, dimana θ adalah anggota dari matriks P-ortogonal Grup Lie. Fungsi inilah yang dinamakan sebagai fungsi Generalisasi Brockett.*(Brockett, W. Roger, 1991)*.

Persamaan gradien flow dari fungsi licin $\eta : G \to R$ yang bersesuaian dengan metrik Riemannian adalah sistem persamaan differensial non linear yang normal *(Helmke, U. and Moore, J, 1994)*

$$\dot{\theta} = \nabla \eta(\theta) \tag{1}$$

Persamaan gradien flow dapat ditunjukkan bukan hanya sebagai sebuah alat matematik geometris, tetapi juga sebagai sebuah alat simulasi yang dapat digunakan dalam industri untuk mengatasi masalah standar dalam mengaplikasikan matematika.

Untuk kasus khusus ketika $P=I$, Brockett telah membuktikan bahwa gradien flow dapat digunakan untuk memecahkan masalah hitungan dengan pasti seperti mendiagonalisasi matriks simetri, mengelompokkan bilangan real dan memecahkan beberapa masalah program linear *(Brockett, W. Roger, 1989 and 1991)*. Bloch juga memperlihatkan bahwa masalah kisi-kisi Toda dan masalah jumlah kuadrat terkecil dapat disusun kembali sebagai gradien flow. *(Bloch, A. M, 1990)*

Dilatar belakangi dari uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji masalah gradien flow dengan menuangkan dalam bentuk skripsi dengan judul:

" Persamaan Gradien Flow dari Fungsi Generalisasi Brockett

pada Matriks *P*-Ortogonal Grup Lie "

B. Rumusan Masalah

Tulisan ini membahas masalah persamaan gradien flow $\dot{\theta} = \nabla \eta(\theta)$ dari fungsi Generalisasi Brockett.

C. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penulisan ini yaitu pada

1. Fungsi Generalisasi Brockett dinyatakan sebagai suatu fungsi dari θ, dimana θ adalah anggota dari matriks P-ortogonal Grup Lie.
2. Kasus ketika $P = \pm I$, $N = 0$ (atau $Q = 0$) dengan N dan Q adalah matriks $n \times n$ dengan entri bilangan dan M adalah matriks nonsingular .
3. Kasus ketika $P = \pm I$, $M = 0$ dengan N dan Q adalah matriks $n \times n$ dengan entri bilangan real, $n = 1,2,3$

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah mencari persamaan gradien flow dari fungsi Generalisasi Brockett pada matriks P-ortogonal.

BAB II
TEORI PENDUKUNG

A. Grup Lie (Karin Melnick, 2002)

Definisi 1. Grup Lie

Grup Lie adalah grup yang juga merupakan ruang Euclide dari beberapa dimensi tetap dengan operasi pemetaan perkalian

$$\mu : G \times G \to G$$
$$\mu : (g,h) \mapsto gh$$

dan pemetaan invers

$$i : G \to G$$
$$i : g \mapsto g^{-1}$$

terturunkan.

Grup Lie dari matriks $n \, x \, n$ non singular dinotasikan sebagai $GL(n,R)$

Definisi 2. Automorfisma

Misalkan $GL(n,R)$ adalah Grup Lie dan P adalah matriks ortogonal $n \times n$ dengan $P = \pm I$. Automorfisma σ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \sigma :\ & GL(n,R) \to GL(n,R) \\ & \theta \mapsto \sigma(\theta) = P^T (\theta^{-1})^T P = (\theta^{-1})^P \end{aligned}$$

Definisi 3. Metrik Riemannian

Metrik Riemannian $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ adalah kumpulan semua hasil kali dalam pada ruang gradien G.

Definisi 4. Lapangan Vektor Gradien (Helmke, U and Moore, J, 1994)

Misalkan pada grup Lie G diberikan sebuah fungsi licin $f : G \to R$. Lapangan vektor gradien f , $\nabla f : G \to TG$ didefinisikan sebagai :

$$T_\theta f(\theta\Omega) = \langle\langle \nabla f(\theta), \theta\Omega \rangle\rangle, \qquad \forall \Omega \in G$$

dimana $T_\theta f$ adalah pemetaan garis singgung f pada θ dan $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ adalah metrik Riemannian.

B. Aljabar Lie (Karin Melnick, 2002)

Definisi 5. Aljabar Lie

Aljabar lie adalah ruang vektor dengan sebuah operasi perkalian

$$[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

yang memenuhi :

1. $[x,y] = -[y,x]$ (antikomutatif)
2. $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [x,[y,z]]$

untuk semua $x, y, z \in \mathcal{G}$.

Aljabar Lie dari semua matriks $n \; x \; n$ dengan entri-entri bilangan real dinotasikan sebagai $\mathcal{G}l(n,R)$.

Kurung Lie [,] didefinisikan sebagai berikut :

$$[A,B] = AB - BA, \; A, B \in \mathcal{G}l(n,R)$$

Defenisi 6. Pemetaan Garis Singgung

Misalkan $\mathcal{G}l(n,R)$ adalah aljabar Lie dari Grup Lie $GL(n,R)$, pemetaan garis singgung σ didefinisikan sebagai :

$$T_X\sigma : \ \mathcal{G}l(n,R) \rightarrow \mathcal{G}l(n,R)$$
$$X \ \rightarrow \ T\sigma(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma(\exp(tX)) = -P^T X^T P = -X^P$$

Definisi 7. Killing Form

Misalkan $\mathcal{G}l(n,R)$ adalah aljabar Lie. Killing form K dikatakan sub aljabar semi sederhana jika K tidak terturunkan. Killing form K didefinisikan sebagai perkalian dalam sebagai berikut :

$$K : \mathcal{G}l(n,R) \times \mathcal{G}l(n,R) \ \rightarrow \ R$$
$$(X,Y) \ \mapsto \ K(X,Y) = tr(ad_X(X)ad_Y(Y))$$

dimana ad_X menjelaskan adjoin action pada $\mathcal{G}l(n,R)$ dengan $ad_X(Y) = [X,Y]$. Perkalian dalam Killing form K selanjutnya disebut sebagai perkalian dalam Cartan.

C. Simetri dan Skew Simetri

Definisi 8. Simetri

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan riil. Matriks A dinamakan *simetri* jika $A = A^T$.

Definisi 9. Skew Simetri

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan riil. Matriks A dinamakan *skew simetri* jika $A = -A^T$

D. Matriks Transpose-P

Definisi 10. Matriks Transpose-P

Misalkan matriks $X \in \mathcal{G}l(n,R)$ dan P adalah matriks ortogonal $n \times n$. Matriks Transpose-P dari X didefinisikan sebagai

$$X^P = P^T X^T P$$

Definisi 11.

Misalkan matriks $X \in \mathcal{G}l(n,R)$ dan P adalah matriks ortogonal $n \times n$. X dikatakan matriks *ortogonal* jika

$$X^P X = I .$$

Definisi 12.

Misalkan matriks $X \in \mathcal{G}l(n,R)$ dan P adalah matriks ortogonal $n \times n$. Matriks X dinamakan *simetri* jika $X^P = X$. Dan matriks X dinamakan *skew simetri* jika $X^P = -X$

E. Hasil Kali Dalam

Definisi 13.

Misalkan V ruang vektor riil. Hasil kali dalam (inner product) pada V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $< u,v >$ sedemikian sehingga $\forall\ u,v,w$ di V dan skalar k sebarang, aksioma-aksioma berikut terpenuhi :

1) $< u,v >=< u,v >$ (aksioma simetri)

2) $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >$ (aksioma penambahan)

3) $< ku,v >= k < u,v >$ (aksioma kehomogenan)

4) $\langle u,v \rangle \geq 0$; dan $< v,v >= 0$ jika dan hanya jika $v = 0$ (aksioma kepositifan)

BAB III
SIFAT-SIFAT MATRIKS P

A. Sifat–Sifat Matriks P-Ortogonal

Definisi 14.

Misalkan P adalah matriks ortogonal $n \times n$ dan

$$G := \{\theta \in GL(n,R) : \theta^T P \theta = P\}. \tag{2}$$

G adalah sebuah subgrup tertutup dari Grup Lie $GL(n,R)$.

Lemma 1 $\theta \in G$ *jika dan hanya jika* $\theta^T \in G$

Bukti :

$$(\Rightarrow) \quad \theta \in G \Rightarrow \theta^T P \theta = P$$
$$\Rightarrow \theta^T P \theta \theta^T = P \theta^T \Rightarrow \theta^T P = P \theta^T$$
$$\Rightarrow \theta^T P P^T = P \theta^T P^T \Rightarrow \theta^T = P \theta^T P^T$$
$$\Rightarrow \theta^T = P \theta^{-1} P^T \Rightarrow \theta = P(\theta^{-1})^T P^T$$
$$\Rightarrow \theta P = P(\theta^{-1})^T P^T P$$
$$\Rightarrow \theta P \theta^T = P(\theta^{-1})^T \theta^T \Rightarrow \theta P \theta^T = P$$
$$\Rightarrow (\theta^T)^T P \theta^T = P$$
$$\Rightarrow \theta^T \in G$$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow)\quad \theta^T \in G &\Rightarrow (\theta^T)^T P \theta^T = P \\
&\Rightarrow \theta P \theta^T = P(\theta^{-1})^T \theta^T \Rightarrow \theta P \theta^T = P \\
&\Rightarrow \theta P = P(\theta^{-1})^T P^T P \\
&\Rightarrow \theta = P(\theta^{-1})^T P^T \Rightarrow \theta^T = P\theta^{-1} P^T \\
&\Rightarrow \theta^T = P\theta^T P^T \Rightarrow \theta^T P P^T = P\theta^T P^T \\
&\Rightarrow \theta^T P = P\theta^T \Rightarrow \theta^T P\theta = P\theta^T\theta \\
&\Rightarrow \theta^T P\theta = P \\
&\Rightarrow \theta \in G
\end{aligned}
$$

Definisi 15.

Misalkan P adalah matriks ortogonal $n \, x \, n$ dan Aljabar Lie dari G adalah himpunan

$$\mathcal{L} := \{\Omega \in Gl(n,R) : \Omega^T P = -P\Omega\} \tag{3}$$

Lemma 2 $\Omega \in \mathcal{L}$ *jika dan hanya jika* $\Omega^T \in \mathcal{L}$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow)\quad \Omega \in \mathcal{L} &\Rightarrow \Omega^T P = -P\Omega \\
&\Rightarrow \Omega^T P P^T = -P\Omega P^T \Rightarrow \Omega^T = -P\Omega P^T \\
&\Rightarrow (\Omega^T)^T = -P(\Omega^T)P^T \Rightarrow \Omega = -P\Omega^T P^T \\
&\Rightarrow \Omega P = -P\Omega^T \Rightarrow (\Omega^T)^T P = -P\Omega^T \\
&\Rightarrow \Omega^T \in \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow)\quad \Omega^T \in \mathcal{L} &\Rightarrow \Omega P = -P\Omega^T \Rightarrow (\Omega^T)^T P = -P\Omega^T \\
&\Rightarrow (\Omega^T)^T = -P(\Omega^T)P^T \Rightarrow \Omega = -P\Omega^T P^T \\
&\Rightarrow \Omega^T = -P\Omega P^T \Rightarrow \Omega^T P = -P\Omega P^T P \\
&\Rightarrow \Omega^T P = -P\Omega \\
&\Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

Definisi 16.:

Misalkan P adalah matriks ortogonal $n \times n$. $\mathcal{J}$ disebut aljabar Jordan jika

$$\mathcal{J} := \left\{ A \in Gl(n,R) : A^T P = PA \right\} \tag{4}$$

dengan struktur :

$$\left\{ A,B \right\} = AB + BA$$

Lemma 3 $A \in \mathcal{J}$ *jika dan hanya jika* $A^T \in \mathcal{J}$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ $\quad A \in \mathcal{J} \Rightarrow A^T P = PA \Rightarrow A^T P P^T = PAP^T$

$$\Rightarrow A^T = PAP^T \Rightarrow (A^T)^T = PA^T P^T$$

$$\Rightarrow A = PA^T P^T \Rightarrow AP = PA^T$$

[illegible] $)^T P = PA^T$

[illegible] $\mathcal{J}$

[illegible] $A^T \in \mathcal{J} \Rightarrow$ [illegible] $= PA^T$

$\Rightarrow$ [illegible] $\Rightarrow A = PA^T P^T$

$\Rightarrow$ [illegible] $PA^T P^T \Rightarrow A^T = PAP^T$

$\Rightarrow$ [illegible] $P^T P \Rightarrow A^T P = PA$

[illegible] G sebagai matriks ortogonal, matriks dari [illegible] dari $\mathcal{J}$ sebagai matriks simetri, maka

[illegible] $\left\{ \mathcal{L},\mathcal{L} \right\} \subset \mathcal{J}$ (5)

[illegible] $[\mathcal{J},\mathcal{J}] \subset \mathcal{L}$ (6)

Definisi 16.:

Misalkan P adalah matriks ortogonal $n \times n$. $\mathcal{J}$ disebut aljabar Jordan jika

$$\mathcal{J} := \{A \in \mathcal{G}l(n,R) : A^T P = PA\} \tag{4}$$

dengan struktur :

$$\{A,B\} = AB + BA$$

Lemma 3 $A \in \mathcal{J}$ *jika dan hanya jika* $A^T \in \mathcal{J}$

Bukti :

$$(\Rightarrow) \qquad A \in \mathcal{J} \Rightarrow A^T P = PA \Rightarrow A^T PP^T = PAP^T$$
$$\Rightarrow A^T = PAP^T \Rightarrow (A^T)^T = PA^T P^T$$
$$\Rightarrow A = PA^T P^T \Rightarrow AP = PA^T$$
$$\Rightarrow (A^T)^T P = PA^T$$
$$\Rightarrow A^T \in \mathcal{J}$$

$$(\Leftarrow) \qquad A^T \in \mathcal{J} \Rightarrow (A^T)^T P = PA^T$$
$$\Rightarrow AP = PA^T \Rightarrow A = PA^T P^T$$
$$\Rightarrow (A^T)^T = PA^T P^T \Rightarrow A^T = PAP^T$$
$$\Rightarrow A^T P = PAP^T P \Rightarrow A^T P = PA$$
$$\Rightarrow A \in \mathcal{J}$$

Dengan mengacu pada matriks dari G sebagai matriks ortogonal, matriks dari $\mathcal{L}$ sebagai matriks skew simetri dan matriks dari $\mathcal{J}$ sebagai matriks simetri, maka dapat dituliskan

$$\{\mathcal{J},\mathcal{J}\} \subset \mathcal{J}, \quad \{\mathcal{J},\mathcal{L}\} \subset \mathcal{L} \text{ dan } \{\mathcal{L},\mathcal{L}\} \subset \mathcal{J} \tag{5}$$

dan

$$[\mathcal{L},\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}, \quad [\mathcal{L},\mathcal{J}] \subset \mathcal{J} \text{ dan } [\mathcal{J},\mathcal{J}] \subset \mathcal{L} \tag{6}$$

B. Sifat–Sifat Matriks Transpose-P

Beberapa sifat sederhana mengenai matriks transpose-P dinyatakan dalam lemma-lemma berikut ini :

Lemma 4 *Jika* $X, Y \in Gl(n,R)$ *maka*

(*i*) $(X+Y)^P = X^P + Y^P$

(*ii*) $(XY)^P = Y^P X^P$

(*iii*) $[X,Y]^P = [Y^P, X^P]$

(*iv*) $\{X,Y\}^P = \{X^P, Y^P\}$

Bukti :

(*i*)
$$\begin{aligned}(X+Y)^P &= P^T(X+Y)^T P\\ &= P^T(X^T+Y^T)P\\ &= P^T X^T P + P^T Y^T P\\ &= X^P + Y^P\end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned}(XY)^P &= P^T(XY)^T P\\ &= P^T Y^T X^T P\\ &= P^T Y^T P P^T X^P P\\ &= Y^P X^P\end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned}[X,Y]^P &= (XY-YX)^P\\ &= P^T(XY-YX)^T P\\ &= P^T(XY)^T P - P^T(YX)^T P\\ &= P^T Y^T X^T P - P^T X^T Y^T P\\ &= P^T Y^T P P^T X^T P - P^T X^T P P^T Y^T P\\ &= Y^P X^P - X^P Y^P\\ &= [Y^P, X^P]\end{aligned}$$

(iv) $\{X,Y\}^P = (XY+YX)^P$

$= P^T(XY+YX)^T P$

$= P^T\left((XY)^T + (YX)^T\right)P$

$= P^T(XY)^T P + P^T(YX)^T P$

$= P^T Y^T X^T P + P^T X^T Y^T P$

$= Y^P X^P + X^P Y^P$

$= \{Y^P, X^P\}$

Lemma 5 $X \in \mathcal{J}(\mathcal{L}) \Leftrightarrow X^P \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow) \quad X \in \mathcal{J} &\Rightarrow X^T \in \mathcal{J} \quad (\textit{lemma } 3)\\
&\Rightarrow (X^T)^T P = PX^T\\
&\Rightarrow PP^T XP = PX^T\\
&\Rightarrow P^T XP = X^T\\
&\Rightarrow P^T XPP = X^T P\\
&\Rightarrow (P^T X^T P)^T P = P(P^T X^T P)\\
&\Rightarrow (X^P)^T P = PX^P\\
&\Rightarrow X^P \in \mathcal{J}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow) \quad X^P \in \mathcal{J} &\Rightarrow (X^P)^T P = PX^P\\
&\Rightarrow (P^T X^T P)^T P = P(P^T X^T P)\\
&\Rightarrow P^T XPP = X^T P\\
&\Rightarrow P^T XP = X^T\\
&\Rightarrow PP^T XP = PX^T\\
&\Rightarrow (X^T)^T P = PX^T\\
&\Rightarrow X^T \in \mathcal{J}\\
&\Rightarrow X \in \mathcal{J} \quad (\textit{lemma } 3)
\end{aligned}
$$

Lemma 6 *Jika* $\theta \in G$ *dan* $X \in \mathcal{G}l(n,R)$ *maka* $(\theta^{-1}X\theta)^P = \theta^{-1}X^P\theta$

Bukti :

Berdasarkan definisi 10 diperoleh :

$$\begin{aligned}
(\theta^{-1}X\theta)^P &= P^T(\theta^{-1}X\theta)^T P \\
&= P^T(\theta^T X^T(\theta^{-1})^T)P \\
&= P^T\theta^T PP^T X^T PP^T(\theta^{-1})^T P \\
&= (P^T\theta^T P)(P^T X^T P)(P^T(\theta^{-1})^T P) \\
&= \theta^{-1}X^P\theta
\end{aligned}$$

Lemma 7 *Jika* $\theta \in G$ *dan* $X \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$ *maka* $\theta^{-1}X\theta \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$

Bukti :

Misalkan $\theta \in G$ dan $X \in \mathcal{J}$ maka,

$$\begin{aligned}
(\theta^{-1}X\theta)^T P &= \theta^T X^T(\theta^{-1})^T P \\
&= (P\theta^{-1}P^T)X^T(P^T\theta^T P)^T P \\
&= (P\theta^{-1}P^T)X^T P(P^T\theta^T P) \\
&= (P\theta^{-1}P^T)X^T\theta^T P \\
&= (P\theta^{-1}P^T)X^T P\theta \\
&= (P\theta^{-1}P^T)PX\theta \\
&= P\theta^{-1}X\theta
\end{aligned}$$

BAB IV
PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT

Pada bab ini akan dibahas mengenai persamaan gradien flow yang bersesuaian dengan metrik Riemannian dan kemudian akan dianalisa persamaan gradien flow dalam beberapa kasus khusus dari $\eta(\theta)$.

A. Metrik Riemannian pada G

Lemma 8 Misalkan subset dari $GL(n,R)$ didefinisikan oleh :

$$G^{\sigma} = \{\, \theta \in GL(n,R) : \sigma(\theta) = \theta^{-1} \,\} \text{ dan}$$
$$G_{\sigma} = \{\, \theta \in GL(n,R) : \sigma(\theta) = \theta \,\}$$

maka $G^{\sigma} = \mathcal{J} \cap GL(n,R)$ dan $G_{\sigma} = G$.

Bukti :

Memperhatikan definisi dari σ,

$$\begin{aligned}
&\sigma(\theta) = \theta^{-1} \\
&P^T(\theta^{-1})^T P = \theta^{-1} \\
&(P^T(\theta^{-1})^T P)^T = (\theta^{-1})^T \\
&P^T\theta^T P = \theta \\
&PP^T\theta^T P = P\theta \\
&\theta^T P = P\theta \\
&\theta \in GL(n,IR) \cap \mathcal{J}.
\end{aligned}$$

dan

BAB IV
PERSAMAAN GRADIEN FLOW DARI FUNGSI GENERALISASI BROCKETT

Pada bab ini akan dibahas mengenai persamaan gradien flow yang bersesuaian dengan metrik Riemannian dan kemudian akan dianalisa persamaan gradien flow dalam beberapa kasus khusus dari $\eta(\theta)$.

A. Metrik Riemannian pada G

Lemma 8 Misalkan subset dari $GL(n,R)$ didefinisikan oleh :

$$G^{\sigma} = \{\, \theta \in GL(n,R) : \sigma(\theta) = \theta^{-1} \,\} \text{ dan}$$
$$G_{\sigma} = \{\, \theta \in GL(n,R) : \sigma(\theta) = \theta \,\}$$

maka $G^{\sigma} = \mathcal{J} \cap GL(n,R)$ dan $G_{\sigma} = G$.

Bukti :

Memperhatikan definisi dari σ,

$$\sigma(\theta) = \theta^{-1}$$
$$P^{T}(\theta^{-1})^{T} P = \theta^{-1}$$
$$(P^{T}(\theta^{-1})^{T} P)^{T} = (\theta^{-1})^{T}$$
$$P^{T}\theta^{T} P = \theta$$
$$PP^{T}\theta^{T} P = P\theta$$
$$\theta^{T} P = P\theta$$
$$\theta \in GL(n,IR) \cap \mathcal{J}.$$

dan

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\theta) = \theta \\
&P^T(\theta^{-1})^T P = \theta \\
&(P^T(\theta^{-1})^T P)^T = (\theta)^T \\
&P^T\theta^T P = \theta^{-1} \\
&PP^T\theta^T P = P\theta^{-1} \\
&\theta^T P = P\theta^{-1} \\
&\theta^T P\theta = P\theta^{-1}\theta \\
&\theta^T P\theta = P \\
&\theta \in G
\end{aligned}
$$

Jika λ adalah sebuah nilai eigen dari $T_X\sigma$ yang berkaitan dengan vektor eigen tak nol X, maka

$$X = T_X\sigma(T\sigma(X)) = T\sigma(\lambda X) = \lambda^2 X\,, \tag{7}$$

dengan demikian $\lambda = \pm 1$.

Karena $T\sigma(X) = \lambda X$ maka dapat dituliskan subruang vektor pada $\mathcal{G}l(n,R)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\sigma &= \{X \in \mathcal{G}l(n,R) : T\sigma(X) = X\}, \\
p_\sigma &= \{X \in \mathcal{G}l(n,R) : T\sigma(X) = -X\},
\end{aligned} \tag{8}
$$

sesuai dengan nilai eigen masing-masing 1 dan -1.

Lemma 9 $\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{L}$, dan $p_\sigma = \mathcal{J}$

Bukti : Berdasar pada definisi dari pemetaan garis singgung $T_X\sigma$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\sigma = T\sigma(X) = X \rightarrow T_X\sigma(T\sigma(X)) &= T\sigma(X) \\
&= -P^T X^T P \\
&= -X^P \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{p}_{\sigma} = T\sigma(X) = -X \rightarrow T_X\sigma(T\sigma(X)) = T\sigma(-X)$$
$$= -P^T(-X)^T P$$
$$= P^T(X)^T P$$
$$= X^P$$
$$= \mathcal{I}$$

Misalkan P adalah sebuah matriks ortogonal $n \times n$ sedemikian sehingga $P = \pm I$, maka berdasarkan definisi automorfisma σ diperoleh :

$$\sigma(\sigma(\theta)) = \sigma(P^T(\theta^{-1})^T P)$$
$$= P^T\left[(P^T(\theta^{-1})^T P)^{-1}\right]^T P$$
$$= P^T(P^T\theta^T P)^T P$$
$$= P^T P^T \theta P P$$
$$= P^T P^T (\theta^T)^T P P$$
$$= P^T(P^T\theta^T P)^T P$$
$$= P^T(\theta^P)^T P$$
$$= (\theta^P)^P = \theta$$

Sifat σ seperti tersebut diatas dinamakan *involutive automorfisma* pada $GL(n,R)$.

Lemma 10 Jika σ adalah sebuah involutive automorfisma maka $T_X\sigma$ juga merupakan involutive automorfisma.

Bukti :

Berdasarkan definisi pemetaan garis singgung $T\sigma(\theta) = -P^T\theta^T P = -\theta^P$ diperoleh :

$$T\sigma(T\sigma(\theta)) = T\sigma(-P^T\theta^T P)$$
$$= -P^T(-P^T\theta^T P)^T P$$
$$= -P^T(-\theta^P)^T P$$
$$= (-(-\theta^P)^P)$$
$$= \theta$$

Misalkan $\mathcal{G}$ adalah sub aljabar Lie semi sederhana $\mathcal{G}l(n,R)$ dengan involutive automorfisma. Hasil kali dalam pada $\mathcal{G}$ dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\langle X,Y\rangle_P = K(X,P^T YP) = K(X,Y^P), \quad X,Y \in \mathcal{G} \tag{9}$$

dan

$$\langle X,Y\rangle_P = tr(XP^T Y^T P) = tr(X^P Y), \quad X,Y \in \mathcal{G} \tag{10}$$

Dengan membatasi bentuk tersebut ke dalam aljabar Lie $\mathcal{L}$ dan kasus khusus ketika $P = \pm I$ maka dihasilkan sebuah grup Lie yang bersesuaian dengan metrik Riemannian. Dengan demikian dapat didefinisikan ruang kemiringan G pada θ ($T_\theta G$) sebagai hasil kali dalam *(Helgason, S, 1962)*

$$\langle\langle \theta\Omega_1, \theta\Omega_2\rangle\rangle = \langle \Omega_1, \Omega_2\rangle_P = tr(\Omega_1{}^P \Omega_2), , \qquad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L} \tag{11}$$

B. Fungsi Generalisasi Brockett

Misalkan fungsi η didefinisikan pada matriks P-ortogonal Grup Lie $(P^T = P^{-1})$,

$$\begin{aligned} \eta : G &\rightarrow R \\ \theta &\mapsto \eta(\theta) = tr(\theta^{-1} Q\theta N - 2M\theta^{-1}) \end{aligned} \tag{12}$$

dimana Q, M dan N adalah matriks $n \times n$ dan tr adalah notasi untuk trace.

Untuk menemukan titik stasioner dari η, maka akan ditentukan pemetaan garis singgung dari η pada θ.

Misalkan

$$\begin{aligned} \gamma : R &\rightarrow G \\ t &\mapsto \gamma(t) = \theta \exp(t\Omega) \end{aligned}$$

mendefinisikan sebuah kurva licin pada G yang melalui θ pada t = 0 dan memiliki vektor kecepatan pada saat yang sama diberikan oleh $\theta\Omega \in T_\theta G$, pemetaan garis singgung dari η pada θ dapat didefinisikan sebagai

$$T_\theta\eta : T_\theta G \to R$$
$$\theta\Omega \mapsto T_\theta\eta(\theta\Omega) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\eta \circ \gamma)(t)$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\eta \circ \gamma)(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} tr\left((\theta e^{t\Omega})^{-1} Q \theta e^{t\Omega} N - 2M(\theta e^{t\Omega})^{-1}\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} tr\left(e^{-t\Omega}\theta^{-1} Q \theta e^{t\Omega} N - 2Me^{-t\Omega}\theta^{-1}\right) \\
&= tr\left(-\Omega e^{-t\Omega}\theta^{-1} Q \theta e^{t\Omega} N + e^{-t\Omega}\theta^{-1} Q \theta e^{t\Omega} N\Omega + 2M\Omega e^{-t\Omega}\theta^{-1}\right)\Big|_{t=0} \\
&= tr\left(-\Omega\theta^{-1}Q\theta N + \theta^{-1}Q\theta N\Omega + 2M\Omega\theta^{-1}\right) \\
&= tr\left(-\Omega\theta^{-1}Q\theta N + \theta^{-1}Q\theta\Omega N + 2M\theta^{-1}\Omega\right) \\
&= tr\left(-\theta^{-1}Q\theta N\Omega + N\theta^{-1}Q\theta\Omega + 2\theta^{-1}M\Omega\right) \\
&= tr\left(\left(-\theta^{-1}Q\theta N + N\theta^{-1}Q\theta + 2\theta^{-1}M\right)\Omega\right) \\
&= tr\left(\left(N\theta^{-1}Q\theta - \theta^{-1}Q\theta N + 2\theta^{-1}M\right)\Omega\right) \\
&= tr\left(\left([N,\theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M\right)\Omega\right)
\end{aligned}$$

Teorema 1 *θ adalah titik stasioner (atau titik kritis) dari η jika dan hanya jika*

$$tr\left(\left([N,\theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M\right)\Omega\right) = 0, \qquad \forall \Omega \in \mathcal{L} \tag{13}$$

Corollary 1 *Jika $M=0$ dan $N, Q \in \mathcal{L}$ maka θ adalah titik stasioner dari η jika dan hanya jika $[N,\theta^{-1}Q\theta] = 0$*

Bukti :

Berdasarkan lemma (7), jika $Q \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$ maka $\theta^{-1}Q\theta \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$.

Tetapi menurut persamaan (6), $[\mathcal{L},\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ dan $[\mathcal{J},\mathcal{J}] \subset \mathcal{L}$, jika $Q, N \in \mathcal{J}$ atau Q, $N \in \mathcal{L}$ maka

$$[N, \theta^{-1}Q\theta] \in \mathcal{L},$$

sehingga

$$tr([N, \theta^{-1}Q\theta]\Omega) = 0, \quad \forall \Omega \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad [N, \theta^{-1}Q\theta] = 0$$

Teorema 2 *Misalkan* $P = \pm I$, $\theta \in G$ *adalah titik stasioner dari* η *jika dan hanya jika*

$$[N, \theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M \in \mathcal{J} \tag{14}$$

Bukti :

Dari lemma 4, 6 dan karena $\theta \in G$, persamaan (13) dapat dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
&tr\Big(([N, \theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M)\Omega\Big) = 0. \qquad \forall \Omega \in \mathcal{L} \\
&tr\Big(((([N, \theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M)^P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(([N, \theta^{-1}Q\theta]^P + (2\theta^{-1}M)^P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(([(\theta^{-1}Q\theta)^P, N^P] + (2\theta^{-1}M)^P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(([(\theta^{-1}Q\theta)^P, N^P] + P^T(2\theta^{-1}M)^T P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(([(\theta^{-1}Q\theta)^P, N^P] + P^T(2M^T(\theta^{-1})^T)P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(([(\theta^{-1}Q\theta)^P, N^P] + 2P^T M^T \theta P)^P \Omega\Big) = 0 \\
&tr\Big(\Big([(\theta^{-1}Q\theta)^P, N^P] + 2P^T M^T P P^T \theta P\Big)^P \Omega\Big) = 0
\end{aligned}
$$

karena $P^T M^T P = M^P$ dan $P^T \theta P = \theta$ maka diperoleh

$$tr\Big(([\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] + 2M^P\theta)^P \Omega\Big) = 0, \qquad \forall \Omega \in \mathcal{L} \tag{15}$$

Berdasarkan lemma 5, $X^P \in \mathcal{J}$ maka $X \in \mathcal{J}$ sehingga

$$[\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] + 2M^P\theta)^P \in \mathcal{J}$$

maka diperoleh

$$([\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] + 2M^P\theta)^P = (([N, \theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M)^P)^P$$

Jadi

$$[N, \theta^{-1}Q\theta] + 2\theta^{-1}M \in \mathcal{J}$$

Selanjutnya akan dianalisa beberapa kasus khusus dari $\eta(\theta)$.

Kasus 1 $P = \pm I$, $N = 0$ *(atau $Q = 0$) dan M nonsingular*

Pada kasus ini fungsi generalisasi Brockett memiliki bentuk sederhana

$$\eta(\theta) = -2\,tr(M\theta^{-1}) \tag{16}$$

Di awal sub bab ini diketahui bahwa

$$T_\theta\eta(\theta\Omega) = 2\,tr(\theta^{-1}M\Omega)$$

Menurut definisi 4, lapangan vektor gradien η ($\nabla\eta$) yang bersesuaian dengan metrik Riemannian (11) dipenuhi oleh :

$$\langle\langle \nabla\eta(\theta), \theta\Omega \rangle\rangle = 2\,tr(\theta^{-1}M\Omega), \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L} \tag{17}$$

Karena $\nabla\eta(\theta) \in T_\theta G$, maka

$$\nabla\eta(\theta) = \theta X$$

dengan $X \in \mathcal{L}$.

Sehingga dapat ditulis

$$\langle\langle \theta X, \theta\Omega \rangle\rangle = 2\,tr(\theta^{-1}M\Omega),$$

$$tr(X^P\Omega) = 2\,tr(\theta^{-1}M\Omega), \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L} \tag{18}$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned}
&2\,tr\,(\theta^{-1}M\Omega) - tr\,(X^P\Omega) = 0 \\
&tr\,(2\theta^{-1}M\Omega) - tr\,(X^P\Omega) = 0 \\
&tr\,(2\theta^{-1}M\Omega - X^P\Omega) = 0 \\
&tr\,(2M^P\theta)^P\Omega - X^P\Omega) = 0 \\
&tr\,((2M^P\theta) - X)^P\Omega) = 0
\end{aligned}$$

$$\left\langle 2M^P\theta - X, \Omega \right\rangle_P = 0,\ \ \forall\Omega \in \mathcal{L} \ \ \Leftrightarrow \ \ 2M^P\theta - X \in \mathcal{J} \tag{19}$$

dan

$$\begin{aligned}
2M^P\theta - X \in \mathcal{J} &\Rightarrow (2M^P\theta - X)^T P = P(2M^P\theta - X) \\
&\Rightarrow 2\theta^T (M^P)^T P - X^T P = 2PM^P\theta - PX \\
&\Rightarrow 2\theta^T (P^T M^T P)^T P + PX = 2PM^P\theta - PX \\
&\Rightarrow 2PX = 2PM^P\theta - 2\theta^T P^T MPP \\
&\Rightarrow P^T PX = P^T PM^P\theta - P^T\theta^T P^T MPP \\
&\Rightarrow X = M^P\theta - P^T\theta^T P^T MPP \\
&\Rightarrow X = M^P\theta - P^T (P^T ((\theta^{-1}M)^T)^T P)P \\
&\Rightarrow X = M^P\theta - P^T ((\theta^{-1}M)^P)^T)P \\
&\Rightarrow X = M^P\theta - \theta^{-1}M, \qquad\qquad (P = \pm I)
\end{aligned}$$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\nabla\eta(\theta) &= \theta X \\
&= \theta(M^P\theta - \theta^{-1}M)
\end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan gradien flow yang menghubungkan η terhadap metrik Riemannian (11) diberikan oleh :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \theta(M^P\theta - \theta^{-1}M) \\
&= \theta M^P\theta - M
\end{aligned} \tag{20}$$

Kasus 2 $P = \pm I$, $M = 0$ *dan* N, Q *matriks* $n \times n$ *dengan entri bilangan real*

Pada kasus ini, fungsi Generalisasi Brockett memiliki bentuk

$$\eta(\theta) = tr(\theta^{-1} Q \theta N) \tag{21}$$

Berdasarkan persamaan (15), $\theta \in G$ adalah titik stasioner dari (21) jika dan hanya jika

$$[\theta^{-1} Q^P \theta, N^P] = 0$$

yang equivalen dengan

$$[\theta^{-1} Q^P \theta, N^P]^P = 0$$
$$[N, \theta^{-1} Q \theta] = 0$$

Lemma 11 Jika $P = \pm I$ *dan* $N, Q \in \mathcal{J}$ (*atau* $N, Q \in \mathcal{L}$) maka

$$[N, \theta^{-1} Q \theta] = 0 \Leftrightarrow N\theta^{-1} Q \theta \in \mathcal{J}$$

Bukti : Misalkan bahwa $N, Q \in \mathcal{J}$. Maka berdasarkan lemma 3 diperoleh :

$$\begin{aligned}
[N, \theta^{-1} Q \theta] = 0 \quad & \Leftrightarrow N\theta^{-1} Q \theta = \theta^{-1} Q \theta N \\
& \Leftrightarrow PPN\theta^{-1} Q \theta = PP\theta^{-1} Q \theta N \\
& \Leftrightarrow PN^T P\theta^{-1} Q \theta = P(\theta^{-1})^T PQ\theta N \\
& \Leftrightarrow PN^T P\theta^{-1} Q \theta = \theta^{-1} PQ^T P\theta N \\
& \Leftrightarrow PN^T \theta^T PQ\theta = P\theta^T Q^T P\theta N \\
& \Leftrightarrow PN^T \theta^T Q^T P\theta = P\theta^T PQ\theta N \\
& \Leftrightarrow N^T \theta^T Q^T P\theta = \theta^T PQ\theta N \\
& \Leftrightarrow N^T \theta^T Q^T (\theta^{-1})^T P = P\theta^{-1} Q\theta N \\
& \Leftrightarrow (\theta^{-1} Q\theta N)^T P = P\theta^{-1} Q\theta N \\
& \Leftrightarrow \theta^{-1} Q\theta N \in \mathcal{J}
\end{aligned}$$

Teorema 3 *Persamaan gradien flow dari* $\eta(\theta) = tr\,(\theta^{-1}Q\theta\,N)$, *sesuai metrik Riemannian (11) diberikan oleh*

$$\dot{\theta} = \theta\,[\,N, \theta^{-1}Q\theta]^{P} \tag{22}$$

Bukti : Menurut teorema 1, pemetaan garis singgung dari $\eta(\theta) = tr\,(\theta^{-1}Q\theta\,N)$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} T_{\theta}\eta(\theta\Omega) &= tr\big([\,N, \theta^{-1}Q\theta]\Omega\big) \\ &= tr\big([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P}\,\Omega\big), \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Sedangkan lapangan vektor gradien dari η $(\nabla\eta)$ yang bersesuaian dengan metrik Riemannian (11) dipenuhi oleh :

$$\langle\langle \nabla\eta(\theta), \Omega\theta \rangle\rangle = tr\big([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P}\,\Omega\big), \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L}$$

Karena $\nabla\eta\,(\theta) \in T_{\theta}G$, maka

$$\nabla\eta\,(\theta) = \theta X$$

dengan $X \in \mathcal{L}$.

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} \langle\langle \theta X, \Omega\theta \rangle\rangle &= tr\big([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P}\,\Omega\big), \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L} \\ tr\,(X^{P}\Omega) &= tr\big([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P}\,\Omega\big) \qquad \forall\Omega \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned} tr\big([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P}\,\Omega\big) - tr\,(X^{P}\Omega) = 0 \\ tr\big(([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,]^{P} - X^{P})\Omega\big) = 0 \\ tr\big(([\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,] - X)^{P}\,\Omega\big) = 0 \end{aligned}$$

$$\langle [\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,] - X, \Omega \rangle_{P} = 0, \;\; \forall\Omega \in \mathcal{L} \;\Leftrightarrow [\,\theta^{-1}Q^{P}\theta, N^{P}\,] - X$$

dan

$$[\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] - X \in \mathcal{J} \Rightarrow ([\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] - X)^T P = P([\theta^{-1}Q^P\theta, N^P] - X)$$

$$\Rightarrow ([N, \theta^{-1}Q\theta]^P)^T P - X^T P = P[N, \theta^{-1}Q\theta]^P - PX$$

$$\Rightarrow (P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P)^T P - X^T P = PP^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P - PX$$

$$\Rightarrow P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]PP + PX = [N, \theta^{-1}Q\theta]^T P - PX$$

$$\Rightarrow 2PX = [N, \theta^{-1}Q\theta]^T P - P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]PP$$

$$\Rightarrow 2X = P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P - P^T P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]PP$$

$$\Rightarrow 2X = P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P + P^T P^T P[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P$$

$$\Rightarrow 2X = P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P + P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P$$

$$\Rightarrow 2X = 2P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P$$

$$\Rightarrow X = P^T[N, \theta^{-1}Q\theta]^T P$$

$$\Rightarrow X = [N, \theta^{-1}Q\theta]^P \qquad (P = \pm I)$$

berdasarkan lemma 5 $X^P \in \mathcal{L}$ maka $X \in \mathcal{L}$ diperoleh

$$[N, \theta^{-1}Q\theta] \in \mathcal{L},$$

sehingga

$$\nabla\eta(\theta) = \theta X$$
$$= \theta[N, \theta^{-1}Q\theta]^P$$

Dengan demikian persamaan gradien flow diberikan oleh :

$$\dot{\theta} = \nabla\eta(\theta)$$
$$= \theta[N, \theta^{-1}Q\theta]^P$$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dengan menganalisa tersendiri beberapa kasus khusus dari masalah

$$\eta(\theta) = \mathrm{tr}\left(\theta^{-1}Q\theta\, N - 2M\theta^{-1}\right)$$

maka persamaan gradien flow yang bersesuaian dengan metrik Riemannian memiliki bentuk yaitu :

1. Ketika $P = \pm I,\ N = 0$ *(atau $Q = 0$)* dengan N dan Q adalah matriks $n \times n$ dengan entri bilangan real dan M adalah matriks non singular maka fungsi Generalisasi Brockett adalah $\eta(\theta) = -2\,tr(M\theta^{-1})$ sehingga diperoleh persamaan gradien flow $\dot{\theta} = \nabla\eta(\theta) = \theta M^{P}\theta - M$.
2. Ketika $P = \pm I,\ M = 0$ dan N dan Q adalah matriks $n \times n$ dengan entri bilangan real dengan fungsi Generalisasi Brockett $\eta(\theta) = tr\,(\theta^{-1}Q\theta\, N)$ diperoleh persamaan gradien flow $\dot{\theta} = \nabla\eta(\theta) = \theta\,[\,N, \theta^{-1}Q\theta]^{P}$.

B. Saran

Bagi mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNHAS yang ingin mengambil tugas akhir, dapat melanjutkan tugas akhir ini dengan mencari solusi dari gradien flow tersebut ataupun melakukan optimasi masalah matriks dengan menggunakan fungsi Generalisasi Brockett.

DAFTAR PUSTAKA

Karin Melnick, 2002, *Lie Groups and Lie algebras*, Warm-up Program.

Bloch, A.M, 1990, Steepest Descent, *Linier Programming and Hamilton Flows*, *Contemporary Mathematics*, 114: 77-88.

Brockett, W.Roger, 1989, Least Squares Matching Problems, *Linier Algebra and its Applications*, 122/123/124: 761-777.

Brockett, W.Roger, 1991, Dinamical System that Sort Lists, Diagonalize Matrices and Solve Linier Programming Problem, *Linier Algebra and its Applications*, 146: 79-91.

Helgason, S, 1962, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

Helmke, U and Moore, J, 1994, *Optimization and Dynamical Systems*, CCES, Springer-Verlag, London.

LAMPIRAN

1. Contoh dengan ukuran matriks 2×2

$$\text{Diberikan } \theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ maka } \theta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Kasus I $P = \pm I$ ***dan N=0 atau Q=0***

Misalkan $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ maka $M^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Gradien flow dapat diberikan

$$\begin{aligned} \mathring{\theta} = \nabla \eta(\theta) &= \theta M^P \theta - M \\ &= \theta(P^T M^T P)\theta - M \end{aligned}$$

Untuk $P = \pm I$

$$\begin{aligned} \mathring{\theta} = \nabla \eta(\theta) &= \theta M^T \theta - M \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi Gradien Flownya $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Kasus II ***$P = \pm I$ dan $M=0$***

Misalkan $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ maka Gradien flow dapat diberikan

$$\dot{\theta} = \nabla \eta(\theta) = \theta [\, N, \theta^{-1} Q \theta]^{P}$$

Untuk $P = \pm I$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \theta [\, N, \theta^{-1} Q \theta]^{P} \\ &= \theta \left(P^{T} [\, N, \theta^{-1} Q \theta] P \right) \\ &= \theta \left(P^{T} (N\theta^{-1} Q \theta - \theta^{-1} Q \theta N)^{T} P \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\theta^{-1}Q\theta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\theta^{-1}Q\theta N=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & -\frac{7}{2}\\ 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$N\theta^{-1}Q\theta-\theta^{-1}Q\theta N=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7 & -\frac{7}{2}\\ 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{21}{2} & -2\\ -3 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$(N\theta^{-1}Q\theta-\theta^{-1}Q\theta N)^{T}=\begin{bmatrix}\frac{21}{2} & -3\\ -2 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$\left(P^T(N\theta^{-1}Q\theta - \theta^{-1}Q\theta N)^T P\right) = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} & -3 \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\theta} &= \theta\left(P^T(N\theta^{-1}Q\theta - \theta^{-1}Q\theta N)^T P\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{21}{2} & -3 \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{17}{\sqrt{2}} & -\frac{11}{2\sqrt{2}} \\ \frac{25}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi gradien flownya $\overset{\circ}{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{17}{\sqrt{2}} & -\frac{11}{2\sqrt{2}} \\ \frac{25}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

2. *Contoh dengan ukuran matriks* 3×3

Diberikan $\theta = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ maka $\theta^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Kasus I $P = \pm I$ ***dan N=0 atau Q=0***

Misalkan $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ maka $M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Gradien flow dapat diberikan

$$\overset{\circ}{\theta} = \nabla\eta(\theta) = \theta M^T\theta - M$$

Untuk $P = \pm I$

$$\dot{\theta} = \theta M^T \theta - M$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -7 & 5 \\ 5 & 16 & 13 \\ 16 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -14 & -7 & 14 \\ -4 & -2 & 4 \\ 16 & -10 & 11 \end{bmatrix}$$

Jadi gradien flownya $\dot{\theta} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -14 & -7 & 14 \\ -4 & -2 & 4 \\ 16 & -10 & 11 \end{bmatrix}$

Kasus II $P^2 = \pm I$ ***dan*** $M=0$

Misalkan $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ maka Gradien flow dapat diberikan

$$\dot{\theta} = \nabla \eta(\theta) = \theta [N, \theta^{-1} Q \theta]^P$$

Untuk $P = I$

$$\dot{\theta} = \theta\left(P^T (N\theta^{-1} Q\theta - \theta^{-1} Q\theta N)^T P\right)$$

$$N\theta^{-1}Q\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 37 & -1 & 12 \\ 20 & -17 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{-1}Q\theta N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 19 & -13 & -1 \\ 14 & 7 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -27 & 6 & 33 \\ 18 & 21 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(N\theta^{-1}Q\theta - \theta^{-1}Q\theta N) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 37 & -1 & 12 \\ 20 & -17 & -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -27 & 6 & 33 \\ 18 & 21 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42 & -3 & 30 \\ 19 & 22 & 9 \\ 29 & -14 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(N\theta^{-1}Q\theta-\theta^{-1}Q\theta N)^{T}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}42 & 19 & 29\\ -3 & 22 & -14\\ 30 & 9 & -8\end{bmatrix}$$

$$P^{T}(N\theta^{-1}Q\theta-\theta^{-1}Q\theta N)^{T}P=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}42 & 19 & 29\\ -3 & 22 & -14\\ 30 & 9 & -8\end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=\theta\left(P^{T}(N\theta^{-1}Q\theta-\theta^{-1}Q\theta N)^{T}P\right)\\ &=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}42 & 19 & 29\\ -3 & 22 & -14\\ 30 & 9 & -8\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}120 & 3 & 78\\ 96 & 71 & -15\\ 21 & 42 & 60\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi gradien flownya $\dot{\theta}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}120 & 3 & 78\\ 96 & 71 & -15\\ 21 & 42 & 60\end{bmatrix}$