PENGARUH BILANGAN KONDISI MATRIKS X^tX TERHADAP KOLINIERITAS REGERSI MODEL LINIER

AMRUDDIN
94 03 167

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2000

PENGARUH BILANGAN KONDISI MATRIKS X^TX TERHADAP KOLINIERITAS REGRESI MODEL LINEAR

Skripsi untuk Melengkapi Tugas-tugas
dan Memenuhi Syarat-syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika

Oleh

AMRUDDIN
94 03 167

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2000

PENGARUH BILANGAN KONDISI MATRIKS X^TX TERHADAP KOLINIERITAS REGRESI MODEL LINEAR

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. Nirwan Ilyas, M.Si	**Drs. Khaeruddin, M,Sc**
NIP. 131 658 823	**NIP. 131 959 060**

KATA PENGANTAR

Bismillahir Rahmanir Rahim

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini, yang merupakan salah satu syarat dalam meraih gelar sarjana.

Penulisan tugas akhir ini tidak mungkin dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan dari semua pihak yang selama ini terlibat dalam proses yang panjang hingga pada akhirnya tulisan ini dapat dirampungkan. Oleh karena itu melalui skripsi ini, penulis menghaturkan sembah sujud yang sedalam-dalamnya kepada **Ayahanda Sadar Dg. Maddanreng** dan **Ibunda Opu Esse Andi Walinono** serta **Saudara-saudaraku yang tercinta** atas segala bantuan dan doa yang selama ini diperuntukkan buat penulis. Dan tak lupa pula penulis ucapkan terima kasih kepada seluruh keluarga atas segala bantuannya selama ini.

Tak lupa pula penulis, mengucapkan terima kasih kepada :

- ✓ Bapak Drs. Nirwan Ilyas, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus Pembimbing Utama penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
- ✓ Bapak Drs. Khaeruddin, M.Sc, selaku Pembimbing Pertama yang telah banyak memberikan bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
- ✓ Bapak Drs. La Podje Talangko, selaku Penasehat Akademik yang telah banyak memberikan nasehat kepada penulis selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.

- ✓ Ibu Naima Aris, S.Si, yang banyak memberikan bantuan dalam penyelesaian tugas akhir ini.
- ✓ Seluruh staf Dosen Jurusan Matematika yang telah banyak membimbing dan mengarahkan penulis hingga dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika.
- ✓ Para pegawai dan staf akademik Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, khususnya Jurusan Matematika (Pak Amin, Nasir dan Pak Saimun) yang telah banyak membantu penulis selama ini.
- ✓ Kepada warga Pondok Gede dan warga Pondok Ikhsan (Nanni, Ka' Hapsa, Ka' Lina, Esse dkk) serta terkhusus kepada **adikku Mei**, atas bantuannya selama ini.
- ✓ Kepada rekan-rekan mahasiswa Matematika angkatan '94 (Rimo, Rani, Neti, Rais, Awi, Ari, Abang, Barli, Kadar, Wawan, Uttang, Azwardi), serta rekan-rekan yang lain yang tak dapat saya sebutkan satu persatu, semoga persahabatan kita abadi selamanya.
- ✓ Tak lupa juga kepada seluruh adik-adik Mahasiswa Matematika, penulis mengucapkan terima kasih untuk semua yang telah kalian berikan.

Mudah-mudahan tulisan ini ada manfaatnya khususnya bagi penulis sendiri. Oleh karena keterbatasan pengetahuan penulis, skripsi masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu saran dan kritikan dari semua pihak senantiasa penulis harapkan demi perbaikan tulisan ini.

Makassar, Desember 2000

Ambunck

ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian tentang bilangan kondisi, dimana dari bilangan kondisi tersebut akan digunakan untuk melihat kekolinieritasan suatu model regresi linier.

Dalam penelitian ini, digunakan persamaan regresi linier berganda : $Y = \beta x + \varepsilon$. Bilangan kondisi (K) diperoleh dengan cara membandingkan nilai eigen maksimal dengan nilai eigen minimal diantara nilai-nilai eigen matriks X^tX.

Kesimpulan yang diperoleh dalam penelitian ini yaitu bahwa bilangan kondisi kurang tepat digunakan untuk mendeteksi adanya kolinieritas suatu regresi linier.

ABSTRACT

A research to determine the condition number has been conducted, this number will be used to verify the linearity of a linear regression model.

In this research, it is used multiple linear regression of the form : $Y = \beta x + \varepsilon$. The condition number (K) is then found by comparing the maximum eigenvalue and the minimum eigenvalue of matrix $X'X$.

From this research, it found the condition number is not applicable to detect the colinearity of a linear regression.

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam suatu penelitian, terkadang muncul suatu faktor yang diukur lebih dari sekali. Pengukuran itu terjadi karena pemakaian satuan alat ukur yang digunakan, misalnya suhu diukur dalam derajat Celcius (x_1) dan dalam derajat Fahrenheit(x_2). Dari segi matematika x_1 dan x_2 disebut kolinier atau segaris.

Jika kolenieritas terjadi antara dua peubah atau lebih dalam suatu model regresi linier maka taksiran koefisien menjadi tidak tunggal. Hal ini terjadi karena X^tX berupa matriks singulir sehingga persamaan normalnya tidak mempunyai penyelesaian.

Salah satu cara yang digunakan mengenali adanya koliniearitas adalah dengan menggunakan apa yang disebut bilangan kondisi. Oleh itu penulis mencoba mempelajari dan menuangkan dalam bentuk skripsi dengan judul :

"PENGARUH BILANGAN KONDISI MATRIKS X^tX TERHADAP KOLINIERITAS REGRESI MODEL LINEAR"

1.2. Tujuan Penulisan

Dengan penulisan ini diharapkan dapat diketahui berapa besar bilangan kondisi suatu matriks, sehingga terjadi koliniearitas suatu model regeresi linear yang didasarkan pada hasil simulasi yang dilakukan.

1.3. Kajian Pustaka

Yang menjadi dasar teori dalam penulisan ini adalah analisis regeresi linier berganda, matriks, sehingga dengan adanya hal tersebut menunjang untuk kemudian menghitung determinan, nilai eigen, nilai kondisi yang kemudian dipergunakan untuk melihat kekolinieritasan suatu model regresi linear.

1.4. Sistematika Pembahasan

Sesuai dengan judul tulisan "**Pengaruh Bilangan Kondisi Matriks X^tX Terhadap Kolinieritas Regresi Model Linear**" maka pembahasannya dikhususkan pada model regresi linear dengan dua peubah bebas dengan cakupan :

- Bab II akan dibahas persamaan model regresi linear dengan dua peubah bebas
- Bab III akan dibahas pengaruh bilangan kondisi matriks X^tX terhadap kolinieritas dengan menggunakan model regresi linear
- Bab IV Simulasi
- Bab V Kesimpulan

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Regresi Dalam Lambang Matriks

Pandanglah model regresi linear dengan k peubah bebas, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \qquad \ldots\ldots[2.1]$$

Dimana :

Y_i	=	peubah tak bebas
$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$	=	peubah bebas
$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$	=	koefisien regresi
ε_i	=	nilai sisa yang berdistribusi $N(0,\sigma^2)$

Bila diambil pengamatan sebanyak n maka persamaan ini dapat dituliskan secara lengkap sebagai :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots[2.2] \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Dalam lambang matriks [2.1] menjadi :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots[2.3]$$

Misalkan :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Maka persamaan [2.3] dapat disederhanakan penulisannya menjadi :

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \text{..................[2.4]}$$

Dari metode kuadrat terkecil diperoleh :

$$X^t X b = X^t Y \qquad \text{..................[2.5]}$$

dimana b adalah penaksir parameter β.

Jika X^tX nonsingulir maka persamaan [2.5] mempunyai jawab :

$$b = (X^tX)^{-1} X^tY \qquad \text{..................[2.6]}$$

dimana :

$$X^tX = \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} \qquad \text{..................[2.7]}$$

$$X^tY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{bmatrix} \qquad \text{..................[2.8]}$$

sehingga taksiran Y adalah :

$$\hat{Y} = Xb \qquad \text{..................[2.9]}$$

$$= X (X^tX)^{-1} X^tY = HY$$

dengan $H = X (X^tX)^{-1} X^t$ yang dinamakan matriks topi.

Vektor sisa dari model [2.4] didefenisikan sebagai :

$$\varepsilon = Y - \hat{Y}$$
$$= Y - HY = (I - H)Y \qquad \text{..............[2.10]}$$

2.2. Determinan

Defenisi 1 :

Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det dan kita defenisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A.

Determinan suatu matriks A_{nxn} dapat dihitung dengan menggunakan eselon baris :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_{ij} \text{ untuk sutu baris ke-i.}$$

atau

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} k_{ij} \text{ untuk sutu kolom ke-j.}$$

dimana :

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dan

M_{ij} = minor unsur a_{ij}, yaitu suatu determinan dari sub matriks A dengan menghapus baris ke-i kolom ke-j.

Contoh 1.

Tentukan determinan dari matriks A berikut dengan menggunakan ekspansi kolom pertama :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

penyelesaian :

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = (-4) \times (-2) - (4 \times 3) = 8 - 12 = -4$

$M_{12} = (-2) \times (-2) - (3 \times 5) = 4 - 15 = -11$

$M_{13} = (-2 \times 4) - (-4 \times 5) = -8 + 20 = 12$

Sehingga diperoleh :

$k_{11} = (-1)^{1+1}(-4) = -4$

$k_{12} = (-1)^{1+2}(-11) = 11$

$k_{13} = (-1)^{1+3}(12) = 12$

Maka :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} k_{ij}$$

$$= 3(-4) + 1(11) + 0(12)$$

$$= -12 + 11 + 0$$

$$= -1$$

Matriks bujursangkar kita namakan segitiga atas jika semua entri di bawah diagonal utama adalah nol, begitu juga matriks bujursangkar kita namakan segitiga bawah jika semua entri diagonal utama adalah nol.

Contoh 2 :

Sebuah matriks A_{3x3} segitiga atas umumnya mempunyai bentuk :

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka kita dapat menghitung determinan secara langsung yaitu :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Berdasarkan hal tersebut di atas kita dapat mengetahui bahwa jika matriks bujursangkar mempunyai dua baris yang sebanding , maka kita akan mendapatkan suatu baris yang terdiri dari bilangan nol dengan menambahkan kelipatan yang sesuai dari salah satu baris ini pada baris yang satu lagi. Sehingga determinan yang diperoleh adalah sama dengan nol.

2.3. Invers Matriks

Defenisi 2 :

Jika A adalah suatu matrik bujursangkar, dan jika kita dapat mencari matriks B sedemikian hingga, AB = I = BA, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dinamakan invers (inverse) dari A.

Berdasarkan hal tersebut di atas maka dalam mencari invers matriks kita hanya membicarakan pada matriks yang dapat dibalik. Jadi jika A dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan A^{-1}.

Misal matriks A_{nxn} dengan $\det(A) \neq 0$, maka :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{ Adj } (A),$$

Dimana :

$$\text{Adj } (A) = K^{t}$$

Contoh 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} K^t$$

Dimana :

$$\begin{array}{lll} K_{11} = -4 & K_{12} = 11 & K_{13} = 12 \\ K_{21} = -2 & K_{22} = -6 & K_{23} = 7 \\ K_{31} = 3 & K_{32} = 9 & K_{33} = -10 \end{array}$$

Maka diperoleh :

$$K = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ -2 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$K^t = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 11 & -6 & 9 \\ 12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

Maka dapatlah dihitung A^{-1}, sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} K^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 11 & -6 & 9 \\ 12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= -1\begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 11 & -6 & 9 \\ 12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -11 & 6 & -9 \\ -12 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

Defenisi 3 :

Suatu matriks A_{mxn} disebut simetris (setangkup) jika berlaku:

$a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i,j.

akibat dari defnisi ini bahwa jika A simetris maka $A^t = A$

Defenisi 4 :

Jika $A_{mxn} = (a_{ij})$, maka transpos dari matriks A ditulis A^t, yaitu suatu suatu matriks yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua daria A, demikian juga dengan kolom ketiganya adalah baris ketiga dari A dan seterusnya.

Sehingga dari defenisi tersebut :

$$(X^tX)^t = X^t(X^t)^t$$

$$= X^tX. \qquad \text{...................[2.11]}$$

Dari uraian diatas kita dapat menyatakan bahwa jika matriks A simetris dan A^{-1} ada, maka :

$$(A^t)^{-1} = A^{-1} \qquad \text{...................[2.12]}$$

2.4. Nilai Eigen

Defenisi 5 :

Jika A_{nxn} maka sebuah vektor tidak nol X di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika :

$$AX = \lambda X$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan X dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A_{nxn}, maka kita menuliskan kembali $AX = \lambda X$, sebagai :

$$AX = \lambda IX \quad \text{.....................[2.13]}$$

atau

$$(\lambda I\text{-}A)X = 0 \quad \text{.....................[2.14]}$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan tersebut mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I\text{-}A) = 0 \quad \text{.....................[2.15]}$$

ini dinamakan persamaan karakteristik A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A, bila diperluas maka determinan $\det(\lambda I\text{-}A)$ adalah polinom λ yang kita namakan polinom karakteristik dari A.

Jika A_{nxn}, maka polinom karakteristik A berbentuk :

$$\det(\lambda I\text{-}A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n \quad \text{.....................[2.16]}$$

Contoh 4 :

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks A yang berukuran 2 x 2 berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Pemecahan :

$$\lambda I\text{-}A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 5 & \lambda \end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah :

$$\det(\lambda I\text{-}A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 5 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah :

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

sehingga diperoleh nilai-nilai λ yang sesuai dengan persamaan tersebut, yakni :

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

2.5. Kolinieritas

Defenisi 5 :

Misalkan x_1 dan x_2 adalah dua buah variabel bebas, maka korelasi antara x_1 dengan x_2 didefenisikan sebagai :

$$R^2 = \frac{\left\{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\right\}^2}{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}$$

Variabel-variabel bebas tersebut (x_1 dan x_2) disebut kolinier sempurna jika salah satu dari variabel bebas tersebut merupakan kombinasi linier yang lain, sehingga R^2 dari variabel bebas yang merupakan kombinasi linier adalah $R^2 = 1$.

Dalam prakteknya, yang lebih sering terjadi adalah $R^2 \approx 1$ yang berarti hampir kolinier. Untuk selanjutnya dalam pembahasan ini digunakan kata kolinier untuk keadaaan hampir kolinier.

Kolinieritas tidak terjadi apabila $R^2 = 0$, yaitu x_1 ortogonal terhadap x_2. Makin erat hubungan antara x_1 dan x_2 maka makin tinggi kolinieritas antara keduanya. Besarnya R^2 juga dipengaruhi oleh ukuran data n, semakin besar n makin dekat ke nol R^2 untuk masalah yang sama.

Cara terbaik menangani kolinieritas adalah dengan mencari data tambahan sedemikian rupa sehingga kolinieritas menjadi hilang. Penambahan data diusahakan agar mencakup seluruh rentangan tiap peubah bebas dan agak merata.

Jika cara tersebut susah dikerjakan maka ada bebarapa cara lain yang dapat dikerjakan. Salah satu cara yang mudah ialah misalnya x_1 dan x_2 kolinier maka buang salah satu dari peubah bebas tersebut.

Cara lain yang bisa digunakan ialah dengan menggabungkan peubah bebas yang mengakibatkan terjadinya kolinieritas tersebut.

2.6. Bilangan Kondisi

Misal $|A|$ atau det (A) menyatakan nilai determinan dari suatu matriks $A_{nxn} = (a_{ij})$. Maka nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ yang merupakan penyelesaian dari persamaan :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dengan adanya nilai-nilai eigen dari matriks tersebut kita dapat memperoleh nilai kondisi, yaitu nilai bagi antara nilai eigen maksimal dibandingkan dengan nilai eigen minimum dari suatu matriks, yaitu :

$$K = \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{min}}$$

Menurut Sembiring (1995), jika :

- $5 < K < 10$, maka kolinieritas dianggap lemah
- $30 < K < 100$, maka kolinieritas dianggap sedang sampai kuat
- $K > 100$ maka kolinieritas dianggap parah

Kolinearitas sempurna terjadi bila terdapat nilai eigen yang nol. Makin kecil nilai eigen yang diperoleh maka makin tinggi kolinearitas antara peubah bebas.

BAB III

PENGARUH BILANGAN KONDISI MATRIKS X^tX TERHADAP KOLINIERITAS REGRESI MODEL LINEAR

3.1. Matriks X^tX

Pandang model regresi linier dengan dua peubah bebas (x_1 dan x_2), sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$$

Sehingga dari persamaan tersebut, dua peubah bebas matriks rancangannya dapat dibuat seperti :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}$$

Matriks X adalah suatu matriks yang berukuran n x 3

Dari matriks X tersebut kita membuat transpose (putaran) matriks, yaitu dengan jalan menuliskan semua baris sebagai kolom dalam urutan yang tidak diubah, sehingga semua kolom berubah menjadi baris dari matriks tersebut. Sehingga dari matriks awal, kita peroleh matriks yang baru (transpose), sebagai berikut :

$$X^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{n2} \end{bmatrix}$$

Matriks X^t adalah suatu matriks yang berukuran 3 x n

Kemudian matriks X^t yang diperoleh dikalikan dengan matriks X, yang menghasilkan matriks baru yang berukuran 3 x 3, yaitu :

$$X^tX = \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix}$$

3.2. Matriks X^tY

Dari persamaan model regresi linier, dapat dituliskan bentuk matriks dari peubah tak bebas (Y), yaitu :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

matriks yang berukuran n x 1

Selanjutnya matriks X^t yang diperoleh sebelumnya dikalikan dengan matriks Y, sehingga menghasiikan matriks baru, sebagai berikut :

$$X^tY = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks yang berukuran 3 x 1

3.4. Taksiran Parameter β

Setelah matriks X^tX dan matriks X^tY, maka selanjutnya dapat dihitung taksiran parameter dari β, yaitu :

$$b = (X^tX)^{-1}X^tY$$

taksiran β yang diperoleh merupakan matriks yang berukuran 3 x 1, karena merupakan perkalian dari matriks 3 x 3 dikalikan dengan matriks 3 x 1.

Dalam bentuk matriks taksiran dari parameter β yang dihasilkan adalah :

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

3.4. Nilai Eigen Matriks X^tX

Matriks X^tX yang dihasilkan adalah matriks kuadrat yang berukuran 3 x 3 dan merupakan matriks setangkup, sehingga dapat dituliskan :

$$X^tX = \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan polinom karaktersistik yang berbentuk :

$$\det(\lambda I - X^tX) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - a & -b & -c \\ -b & \lambda - e & -f \\ -c & -f & \lambda - i \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0$$

dimana :

$$p = -\operatorname{trac}(X^tX) = -(a + e + i)$$

$$q = (ae - b^2) + (ai - c^2) + (ei - f^2)$$

$$r = -\det(X^tX)$$

maka polinom :

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

akar-akar dari persamaan tersebut dapat dihitung dengan berbagai cara, salah satu cara yang dapat digunakan adalah *Metode Bagi Dua*.

Metode Bagi Dua didasarkan pada teorema berikut :

Teorema 1. :

Bila $f(\lambda)$ kontinu, pada selang [a,b] sedemikian hingga $f(a)$ berlawanan tanda dengan $f(b)$ atau $f(a).f(b) < 0$, maka terdapat suatu nilai $\lambda = z$ sedemikian hingga $f(z) = 0$.

Metode Bagi Dua ini, memerlukan dua nilai sebagai tebakan awal, masing-masing a dan b dengan nilai $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda. Kemudian membagi selang tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang, sebut titik tengahnya T, jadi :

$$T = \frac{a+b}{2}$$

Penentuan setengah selang yang mengandung akar dilakukan dengan memeriksa tanda hasil kali $f(a).f(T)$.

$$f(a\lambda).f(T) \begin{cases} < 0 & \text{berarti akar berada pada } (a,T) \\ 0 & \text{berarti akar} = T \\ > 0 & \text{berarti akar berada pada } (T,b) \end{cases}$$

kemudian dalam algoritma digunakan peubah-peubah :

a sebagai ujung kiri selang

b sebagai ujung kanan selang dan

T sebagai titik tengah

Perhatikan algoritma berikut ini :

Masukkan : $f(\lambda)$, a, b dan ε (Epsilon)

Keluaran : akar (λ_1)

Langkah-langkah :

1. $T = \frac{a+b}{2}$

. Jika $f(\lambda) f(T) < 0$, maka b = T, jika tidak a = T

. $|f(T)| < \varepsilon$ maka akar = T. selesai

. Ulangi kembali langkah 1.

ka diperoleh persamaan kwadrat sebagai berikut :

$$\lambda_1) \lambda - \frac{r}{\lambda_1} = 0$$

dihitung λ_2 dan λ_3, yaitu :

$$\frac{-S + \sqrt{S^2 - 4T}}{2}$$

$$\frac{-S - \sqrt{S^2 - 4T}}{2}$$

$$+ \lambda_1$$

$$\frac{r}{\lambda_1}$$

an Kondisi Matriks X'X

lah nilai-nilai eigen diperoleh dari matriks X'X (λ_1, λ_2, λ_3), maka dihitung bilangan kondisi yang merupakan perbandingan antara nilai mal dengan nilai eigen minimal, yang dituliskan :

$$K = \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{min}}$$

Metode Bagi Dua didasarkan pada teorema berikut :

Teorema 1. :

Bila $f(\lambda)$ kontinu, pada selang [a,b] sedemikian hingga $f(a)$ berlawanan tanda dengan $f(b)$ atau $f(a).f(b) < 0$, maka terdapat suatu nilai $\lambda = z$ sedemikian hingga $f(z) = 0$.

Metode Bagi Dua ini, memerlukan dua nilai sebagai tebakan awal, masing-masing a dan b dengan nilai $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda. Kemudian membagi selang tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang, sebut titik tengahnya T, jadi :

$$T = \frac{a+b}{2}$$

Penentuan setengah selang yang mengandung akar dilakukan dengan memeriksa tanda hasil kali $f(a).f(T)$.

$$f(a\lambda).f(T) \begin{cases} < 0 & \text{berarti akar berada pada } (a,T) \\ = 0 & \text{berarti akar} = T \\ > 0 & \text{berarti akar berada pada } (T,b) \end{cases}$$

kemudian dalam algoritma digunakan peubah-peubah :

a sebagai ujung kiri selang

b sebagai ujung kanan selang dan

T sebagai titik tengah

Perhatikan algoritma berikut ini :

Masukkan : $f(\lambda)$, a, b dan ε (Epsilon)

Keluaran : akar (λ_1)

Langkah-langkah :

1. $T = \dfrac{a+b}{2}$

Contoh :

Hitunglah bilangan kondisi dari matriks X^tX berikut :

$$X^tX = \begin{bmatrix} 20 & 46 & 132{,}4 \\ 46 & 132{,}4 & 426{,}88 \\ 132{,}4 & 426{,}88 & 1467{,}4336 \end{bmatrix}$$

Terlebih dahulu kita mencari nilai eigennya, maka :

$$\det(\lambda I - X^tX) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 20 & -46 & -132{,}4 \\ -46 & \lambda - 132{,}4 & -426{,}88 \\ -132{,}4 & -426{,}88 & \lambda - 1467{,}4336 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 1619{,}834\lambda^2 + 24412{,}586\lambda - 14943{,}667$$

maka nilai-nilai eigen dari XtX harus harus memenuhi persamaan pangkat tiga berikut ini :

$$\lambda^3 - 1619{,}834\lambda^2 + 24412{,}586\lambda - 14943{,}667 = 0$$

yang dari perhitungan dengan menggunakan komputer dihasilkan :

$\lambda_1 = 1604{,}62552$

$\lambda_2 = 14{,}56885$

$\lambda_3 = 0{,}63923$

sehingga diperoleh bilangan kondisi :

$$K = \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{min}}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

$$= \frac{1604{,}62552}{0{,}63923}$$

$$= 2510{,}241$$

jadi bilangan kondisi dari matriks X^tX tersebut adalah $= 2510{,}241$

3.6. Kolinieritas antara Peubah Bebas x_1 dan x_2

Kolinieritas antara peubah bebas x_1 dengan x_2 diperoleh dengan menggunakan rumus berikut :

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT}$$

Dimana :

$$JKR = \sum(\hat{x}_2 - \bar{x}_2)^2$$

$$JKT = \sum(x_2 - \bar{x}_2)^2$$

Namun sebelumnya perlu dicari :

$$\bar{x}_i = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\hat{x}_2 = a + bx_1$$

$$b = \frac{\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2}$$

$$a = \bar{x}_2 - b\bar{x}_1$$

berdasarkan rumus di atas, maka jika pengaruh x_1 terhadap x_2 besar maka kita mengharapkan JKR cukup besar dibandingkan dengan JKS, oleh karena JKS diperoleh dari rumus :

$$JKT = JKR + JKS$$

Perhatikan bahwa untuk suatu kelompok data yang telah tertentu, besar JKT telah tertentu, jadi suatu tetapan dan tidak terpengaruh oleh model yang digunakan.

Karena itu bila JKR membesar maka JKS mengecil, dan sebaliknya, sedangkan jumlahnya (JKT) tetap. Jadi JKT wajar dijadikan pembanding untuk menentukan besar kecilnya JKR dan JKS.

R^2 kita sebut koefisien korelasi atau koefisien penentu (determinasi). Karena $0 \leq JKR \leq JKT$, maka tentunya $0 \leq R^2 \leq 1$.

$R^2 = 0$ bila JKR = 0, atau JKS = JKT, dan $R^2 = 1$ bila JKR = JKT, atau JKS = 0. JKR = 0 bila $\hat{x}_2 = \bar{x}_2$ untuk setiap pengambilan sampel. Ini berarti bahwa tidak peduli berapa nilai x_1, taksiran x_2, yaitu $\hat{x}_2$, selalu $\bar{x}_2$. Jadi x_2 tidak tergantung atau dipengaruhi oleh x_1. Dengan kata lain, pengetahuan mengenai x_1 sama sekali tidak menolong dalam meramalkan nilai x_2.

Sebaliknya, jika JKR = JKT maka $x_2 = \hat{x}_2$ untuk setiap titik data. Jadi setiap prediksi x_2 tepat sekali, sama sekali tidak ada yang meleset.

Jadi R^2 dapat mengukur kecocokan data dalam model. Makin dekat R^2 dengan 1 makin baik kecocokan data dengan model, sebaliknya, makin dekat R^2 dengan 0 makin jelek kecocokan data tersebut.

BAB IV
KAJIAN CONTOH

Dalam bab ini akan diambil dataset dengan dua peubah bebas (x_1 dan x_2) sebagai contoh penunjang untuk teori pada bab-bab sebelumnya. Melalui data ini akan digunakan untuk menghitung *bilangan kondisi* (K) dan menentukan *kolinieritas* antara peubah bebas (R^2).

Setelah diperoleh nilai-nilai tersebut, maka dapat dilihat bagaimana hubungan antara bilangan kondisi terhadap kolinieritas.

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh, yaitu :

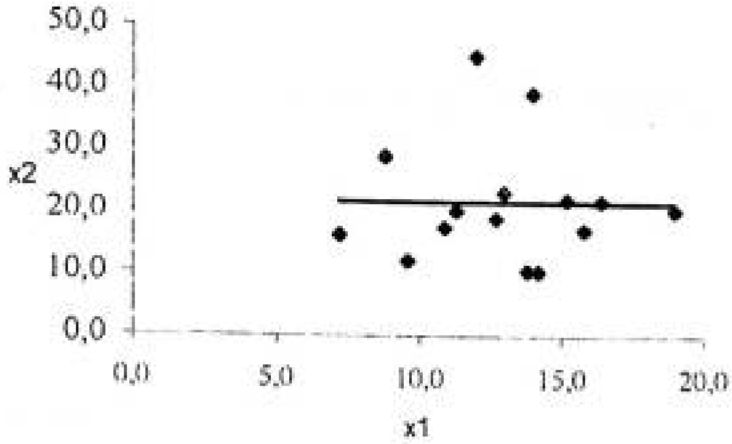
4.1. Contoh 1

Data dibawah diambil dari buku Analisis Regresi, R.K. Sembiring (1995 *dalam* Erickson dan Nosanchuk, 1983). Data terdiri dari respon Y serta dua peubah bebas x_1 dan x_2. Data tersebut adalah :

Tabel 1.

No. Pengamatan	x_1	x_2	Y
1	19,0	20,6	15,0
2	16,4	22,1	13,6
3	15,8	17,6	17,6
4	15,2	22,3	14,7
5	14,2	10,6	19,4
6	14,0	39,7	18,6
7	13,8	10,7	35,1
8	13,0	23,5	15,8
9	12,7	19,2	21,6
10	12,0	45,8	12,7
11	11,3	20,4	22,1
12	10,9	17,8	31,2
13	9,6	12,3	38,9
14	8,8	29,2	32,1
15	7,2	16,4	35,8

Untuk lebih jelasnya penyebaran data tersebut dapat dilihat plot data x_1 dan x_2 pada Gambar 1 berikut :



Gambar 1.

Dengan menggunakan rumus seperti yang ada pada bab-bab terdahulu, maka diperoleh :

$$X^tX = \begin{bmatrix} 15 & 193,9 & 328 \\ 193,9 & 2640,95 & 4238,3 \\ 328 & 4238,3 & 8540,18 \end{bmatrix}$$

sehingga :

$$\det(\lambda I - X^tX) = \begin{bmatrix} \lambda - 15 & -193,9 & -328 \\ -193,9 & \lambda - 2640,95 & -4238,3 \\ -328 & -4238,3 & \lambda - 8540,18 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 11196,13\,\lambda^2 + 4613537,221\,\lambda - 2759095,24$$

agar kita memperoleh nilai-nilai eigen dari X^tX maka :

$$\lambda^3 - 11196,13\,\lambda^2 + 4613537,221\,\lambda - 2759095,24 = 0$$

setelah dilakukan perhitungan, maka diperoleh :

$\lambda_1 = 10767,69$

$\lambda_2 = 427,8384$

$\lambda_3 = 0,598914$

dari nilai eigen tersebut diperoleh bilangan Kondisi (K), sebagai berikut :

$$K = \frac{\hat{\lambda}_{max}}{\hat{\lambda}_{min}}$$

$$= \frac{10767,69}{0,598914}$$

$$= 17978,70$$

Selanjutnya dari data di atas pula dihitung korelasi antara peubah bebas x_1 dan x_2 (R^2), yaitu :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(\hat{x}_{i2} - \bar{x}_{i2})^2}{\sum_{i=1}^{15}(x_{i2} - \bar{x}_{i2})^2}$$

dimana :

$$\sum_{i=1}^{15}(\hat{x}_{i2} - \bar{x}_{i2})^2 = 0,020165$$

$$\sum_{i=1}^{15}(x_{i2} - \bar{x}_{i2})^2 = 1367,91333$$

sehingga didapat :

$$R^2 = \frac{0,020165}{1367,91333}$$

$$= 0,000015 \approx 0$$

Jadi-dari data tersebut diperoleh nilai bilangan Kondisi (K) = 17978,70 dan korelasi (R^2) = 0. Berdasarkan nilai R^2, berarti hubungan antara peubah bebas x_1 dengan x_2 tidak mempunyai hubungan yang erat atau dengan kata lain besarnya nilai x2 tidak dipengaruhi oleh x_1.

Kemudian dilakukan simulasi dengan pergeseran secara acak pada data x_2 dan diperoleh nilai bilangan Kondisi (K) dan R^2 yang disajikan pada tabel berikut ini :

Tabel 2.

No.	K	R^2
1.	18581,478	0,002
2.	18960,766	0,123
3.	19168,755	0,4753
4.	22975,773	0,098
5.	46379,884	0,873
6.	91806,357	0,254
7.	106481,564	0,902
8.	112830,853	0,296
9.	114763,648	0,138
10.	156646,193	0,286
11.	173530,583	0,590
12.	208121,661	0,664
13.	209387,108	0,409
14.	335582,698	0,320
15.	388930,454	0, 897
16.	392021,208	0,689
17.	421253,249	0,965
18.	433157,323	0,167
19.	485274,167	0,250
20.	492581,019	0,721
21	501234,987	0,876
22.	511476,026	0,925
23.	543205,185	0,988
24.	552767,811	0,415
25.	556471,903	0,750

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa setelah nilai bilangan kondisi (K) diurutkan dari yang terendah ke yang tertinggi, diperoleh nilai R^2 yang tidak beraturan (kadang besar kadang kecil).

Dari data pada Tabel 3 tersebut di atas, diperoleh :

$$X'X = \begin{bmatrix} 15 & 14{,}71 & 37{,}92 \\ 14{,}71 & 50{,}9733 & 72{,}7816 \\ 37{,}92 & 72{,}7816 & 131{,}4832 \end{bmatrix}$$

sehingga :

$$\det(\lambda I - X'X) = \begin{bmatrix} \lambda - 15 & -14{,}71 & -37{,}92 \\ -14{,}71 & \lambda - 50{,}9733 & -72{,}7816 \\ -37{,}92 & -72{,}7816 & \lambda - 131{,}4832 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 197{,}4565\ \lambda^2 + 2487{,}5083\ \lambda - 523{,}4606$$

agar kita memperoleh nilai-nilai eigen dari $X'X$ maka :

$$\lambda^3 - 197{,}4565\ \lambda^2 + 2487{,}5083\ \lambda - 523{,}4606 = 0$$

setelah dilakukan perhitungan, maka diperoleh :

$\lambda_1 = 183{,}9492$

$\lambda_2 = 13{,}29326$

$\lambda_3 = 0{,}214069$

dari nilai eigen tersebut diperoleh bilangan Kondisi (K), sebagai berikut :

$$K = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

$$= \frac{183{,}9492}{0{,}214069}$$

$$= 859{,}297$$

Selanjutnya dari data di atas pula dihitung korelasi antara peubah bebas x_1 dan x_2 (R^2), yaitu :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(\hat{x}_{i2} - \bar{x}_{i2})^2}{\sum_{i=1}^{15}(x_{i2} - \bar{x}_{i2})^2}$$

dimana :

$$\sum_{i=1}^{15}(\hat{x}_{i2} - \bar{x}_{i2})^2 = 34{,}6666$$

$$\sum_{i=1}^{15}(x_{i2} - \bar{x}_{i2})^2 = 35{,}62144$$

sehingga didapat :

$$R^2 = \frac{34{,}6666}{35{,}62144}$$

$$= 0{,}973 \approx 1$$

Jadi dari data tersebut diperoleh nilai bilangan Kondisi (K) = 1441,32 dan korelasi (R^2) = 1. Berdasarkan nilai R^2, berarti hubungan antara peubah bebas x_1 dengan x_2 mempunyai hubungan yang erat atau dengan kata lain besarnya nilai x_2 dipengaruhi oleh nilai x_1.

Setelah dilakukan simulasi dengan mengeser data pada data x_2, maka diperoleh nilai K dan R^2, sebagai berikut :

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan contoh yang ada pada Bab IV dan pada lampiran-lampiran, maka dapatlah ditarik kesimpulan bahwa tidak ada interval nilai tertentu untuk Bilangan Kondisi (K), dimana data tersebut memiliki hubungan yang erat (R^2 mendekati 1) ataupun data tersebut tidak memiliki hubungan yang erat (R^2 mendekati 0).

5.2. Saran

1. Jangan mendeteksi kolinieritas dengan hanya mengunakan bilangan Kondisi, jika hendak menggunakan bilangan Kondisi, bandingkan dengan metode yang lain.
2. Hendaknya diadakan penelitian lanjutan, dengan menggunakan tiga atau lebih peubah bebas, sehingga dihasilkan nilai eigen yang lebih banyak dan pada R^2 bisa dilihat peubah bebas mana yang memiliki hubungan yang erat diantara peubah bebas yang ada.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., (1981). *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons Inc.

Draper, N., and Smith, H., (1966). *Analisis Regresi Terapan*, Wiley. New York.

Frank Ayres, Jr., (1983). *Theory and Problems of Matrices*. Mc. Graw-Hill, New York.

Gere, J. M., and Weaver, W. Jr., (1987). *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. (Alih Bahasa : Drs. G. Tejosutiko). Penerbit Erlangga. Jakarta

Ilyas, N., (1997). *Metode Numerik*. STMIK Dipanegara Makassar. Makassar.

Sembiring, R. K., (1981). *Analisis Regresi*, Jurusan Matematika ITB.

Lampiran 1. Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 5).

No.	Bilangan Kondisi (K)	R^2
1	28621,899	0,027
2	28733,764	0,003
3	29307,097	0,021
4	29498,147	0,001
5	30496,662	0,170
6	30751,137	0,005
7	31549,989	0,209
8	31637,393	0,000
9	33704,181	0,068
10	34061,858	0,287
11	35933,952	0,060
12	36208,071	0,033
13	36376,511	0,320
14	37078,459	0,355
15	39027,267	0,168
16	39029,976	0,161
17	41642,049	0,190
18	45716,184	0,106
19	46091,210	0,215
20	52374,888	0,282
21	64666,614	0,411
22	68471,912	0,639
23	68837,089	0,457
24	157733,144	0,849
25	360278,434	0,928

Lampiran 2. Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 10).

No.	Bilangan Kondis (K)	R^2
1	26201,111	0,109
2	29922,217	0,023
3	30643,093	0,125
4	32248,219	0,057
5	33951,681	0,000
6	39516,248	0,058
7	40901,827	0,002
8	43264,443	0,078
9	46117,351	0,007
10	46232,401	0,029
11	47193,586	0,287
12	47925,444	0,151
13	50137,671	0,137
14	57116,285	0,211
15	58876,084	0,090
16	62822,401	0,168
17	63155,093	0,362
18	64772,448	0,164
19	68212,536	0,275
20	73914,933	0,153
21	77599,919	0,457
22	104574,571	0,001
23	104819,061	0,385
24	110708,377	0,262
25	148913,129	0,361

Lampiran 3. Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 15).

No.	Bilangan Kondisi (K)	R^2
1	4046,772	0,027
2	4089,373	0,060
3	4139,415	0,008
4	4151,089	0,011
5	4205,749	0,002
6	4327,400	0,002
7	4408,613	0,072
8	4417,201	0,000
9	4427,036	0,059
10	4496,392	0,075
11	4633,177	0,034
12	4709,911	0,204
13	4960,710	0,007
14	5321,589	0,284
15	5358,232	0,000
16	5413,709	0,008
17	5462,659	0,081
18	5493,295	0,001
19	5976,361	0,028
20	6270,522	0,046
21	6349,463	0,167
22	6698,057	0,000
23	7145,082	0,004
24	7729,292	0,255
25	8445,056	0,297

Lampiran 4. Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 20).

No.	Bilangan Kondisi (K)	R^2
1	4391,396	0,011
2	5225,448	0,129
3	5340,036	0,055
4	5699,473	0,001
5	5821,000	0,007
6	5913,517	0,001
7	6218,106	0,012
8	6374,709	0,029
9	6406,152	0,078
10	6436,546	0,042
11	7112,740	0,015
12	7285,969	0,351
13	7824,769	0,064
14	7981,900	0,029
15	8461,431	0,246
16	8547,742	0,377
17	8729,533	0,177
18	8987,312	0,017
19	9296,529	0,061
20	9416,301	0,042
21	9791,807	0,187
22	11235,024	0,020
23	11551,195	0,001
24	12165,442	0,002
25	12192,929	0,177

Lampiran 5.- Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 25).

No.	Bilangan Kondisi (K)	R^2
1	5643,392	0,332
2	5867,405	0,009
3	6335,260	0,044
4	6405,090	0,025
5	6425,126	0,286
6	6919,775	0,018
7	6978,048	0,087
8	6979,524	0,012
9	7048,431	0,120
10	7324,847	0,117
11	7338,313	0,058
12	7367,371	0,025
13	7389,170	0,145
14	7510,637	0,004
15	7550,741	0,006
16	7707,305	0,006
17	8153,205	0,003
18	8165,115	0,035
19	8200,729	0,034
20	8503,979	0,058
21	8858,777	0,387
22	8880,018	0,060
23	9393,308	0,000
24	9600,184	0,078
25	9873,415	0,011

Lampiran 6. Nilai Bilangan Kondisi (K) dan R^2 (Banyaknya data x_1 dan x_2 masing-masing 30).

No.	Bilangan Kondisi (K)	R^2
1	5193,242	0,019
2	5970,321	0,068
3	7807,453	0,004
4	5394,442	0,545
5	6252,552	0,009
6	5926,467	0,014
7	5289,913	0,009
8	5740,807	0,236
9	7137,629	0,006
10	6696,762	0,421
11	8312,995	0,003
12	6182,169	0,000
13	5943,162	0,009
14	5200,655	0,062
15	7232,757	0,445
16	8073,225	0,007
17	6185,370	0,023
18	7352,773	0,472
19	5219,813	0,309
20	6198,847	0,001
21	5512,754	0,005
22	6530,476	0,095
23	5321,834	0,000
24	5713,036	0,072
25	5636,488	0,039