

# MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA PEMANGSA



Tgl. Pengantar	17-7-06
Aspek	Gate-MIPA
Barang	1 (satu) ek
Marka	H
No. Pengantar	707/17-7-06

Oleh:

Yethi Bawan  
H 111 01 030

JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2006

# MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA PEMANGSA

## SKRIPSI

*Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar*

*Sarjana Sains*

*Pada Jurusan Matematika*

*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*

*Universitas Hasanuddin*

Oleh:

Yerni Bawan  
H 111 01 030

JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR

2006

# LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

***Model Perjalanan Gelombang Dalam Difusi Mangsa  
Pemangsa***

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 14 Maret 2006



**YEMI BAWAN**

**NIM. H 111 01 030**

# **MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA PEMANGSA**

**Disetujui oleh:**

**Pembimbing Utama**



**Drs. Budi Nurwahyu, MS**

**NIP: 131 424 010**

**Pembimbing Pertama**



**Firman, S.Si, M.Si**

**NIP: 132 301 141**

**Pada Tanggal: 14 Maret 2006**

Pada hari ini, Selasa tanggal 14 Maret 2006, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik Skripsi yang berjudul :

**Model Perjalanan Gelombang Dalam Difusi Mangsa Pemangsa**

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.


Makassar, 14 Maret 2006

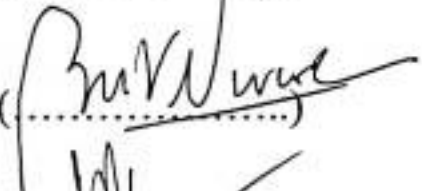
**Panitia Ujian Skripsi**

1. Prof. DR. Moh. Ivan Azis, M.Sc  
( Ketua )
2. Dra. Nasrah Sirajang  
( Sekretaris )
3. Drs. Budi Nurwahyu, M.Sc  
( Anggota )
4. Firman, S.Si, M.Si  
( Anggota )
5. Drs. M. Saleh AF  
( Anggota )

**Tanda Tangan**

(.....)

  
(.....)

  
(.....)

(.....)

  
(.....)

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kehadiran Tuhan YME atas rahmat dan lindungan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Penulis menyadari bahwa sejak penyusunan proposal sampai skripsi ini banyak hambatan, rintangan dan halangan namun berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak semua ini dapat teratasi dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan penghargaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada **Ayahanda Yunus Limbu Bawan** dan **Ibunda Ludia** yang telah memberikan limpahan kasih sayang dan doa dengan tulus tanpa kenal lelah, juga untuk saudaraku yang tercinta **Yandri Bawan, ST** dan **Yori Bawan** atas segala pengorbanan, kesabaran dan kasih sayangnya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi.

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi – tingginya kepada :

1. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, M.S** dan Bapak **Firman, S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang telah memberikan segala motivasi, bimbingan dan kepercayaan kepada penulis sampai skripsi ini selesai.
2. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan para dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu selama perkuliahan serta staf yang telah memberikan bantuannya.

3. Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahaun Alam sekaligus sebagai Penasehat Akademik yang telah memberikan perhatiannya, nasehat – nasehat dan saran berharga selama ini.
4. Bapak **Prof. DR. Moh. Ivan Azis, M.Sc**, ibu **Dra. Nasrah Sirajang** dan bapak **Drs. M. Saleh AF** selaku penguji yang selalu bersedia meluangkan waktunya.
5. **Bapak Prof. DR. Alfian Noor, M.Sc** selaku Dekan FMIPA UNHAS beserta seluruh staf akademiknya.
6. Sayangku, **Richard** atas cinta, kasih sayang, kesabaran, kepercayaan, dukungan dan doanya selama ini.
7. Sahabat-sahabatku **Dian, Nu-Nhu** dan **Neldy** atas kebersamaan kalian dalam suka dan duka. Semoga persahabatan kita tetap abadi.
8. My best friend's **Wati, Ellen, Eby, Ayu, Maya** dan **Insos** atas persahabatan bermakna yang tak terlupakan.
9. Teman-teman seperjuangan angkatan 01, **Muja, Maya S.Si, Fi-vhy, Idha S.Si, Arma, Dery S.Si, Hasnah, Fany, Rahma, Yati, Esra, Ci-chy, Ratna, Ria, Sina, Anty, Ahsan S.Si, Sudi, Fahd, Fajri, Awhi, Imran, Rifky, Wawan, Ilyas, Yuddin** dan **Anggun** atas kebersamaannya melalui fase kehidupan kampus yang tidak bisa penulis lupakan.
10. Kakak-kakak seniorku **K' Hamka, K' Adi, K' Lucky, K' Edy, K' Ichal, K' Amrullah, K', K'Ichamb, K' Atun, K' Dado**, makasih atas kesediaannya

selama ini mau memberikan sedikit ilmunya dan adik-adik **angkatan 02, 03, 04** dan **05** atas persaudaraan dan dukungan kalian.

11. Sahabat – sahabatku **Yulia, Krisna, Irdho, Ampy, Irvan, Thomson, Rey, Ronaldi, Eka, Nita, Bocel,** dan **K' Nick** atas perhatian, dukungan doa, canda tawa dan kebersamaannya selama penulis berada di Jogja.
12. Kakakku yang tercinta **K' Cony** dan **K' Ani** atas dukungan, saran – saran dan doanya.
13. Adik – adikku di kost **Mefri, Sandra, Yuni** dan **Desy** atas kasih sayangnya.
14. Semua pihak yang telah membantu yang tidak sempat disebutkan satu persatu.

Akhirnya, segala saran dan kritikan yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan tulisan ini. Semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca.

Makassar, Maret 2006

Penulis





## ABSTRAK

Model Perjalanan Gelombang dalam difusi mangsa pemangsa digunakan untuk mengetahui hasil difusi suatu populasi dalam meningkatkan produktivitas yang membentuk suatu perjalanan gelombang. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan model tersebut adalah dengan melakukan pelinieran model dengan menggunakan matriks Jacobi agar dapat menentukan kesetimbangan, kemudian dari kesetimbangan diperoleh nilai eigen yang digunakan untuk menganalisis kestabilan. Analisis dilakukan dengan mensimulasi model tersebut dan kestabilannya dengan memeriksa plot.

Kata kunci : Mangsa Pemangsa, Matriks Jacobi, Kesetimbangan, Nilai Eigen, Kestabilan, Plot.

## ABSTRACT

The traveling – wave model in diffusive predator – prey is used to know result of diffusion an population in improving productivity forming an traveling – wave. The methods that is used to complete the model which is by doing model linier using Jacobian Matrix to determine its equilibrium, from that equilibrium will be obtained eigenvalues used to analysis stability. The analysis is done with simulation model and its stability by checking plot.

Key words : Predator – prey, Jacobian Matrix, Equilibrium, Eigenvalues, Stability, plot.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

LEMBAR KEOTENTIKAN

LEMBAR PENGESAHAN

LEMBAR PERSETUJUAN PENGUJI

KATA PENGANTAR.....	i
ABSTRAK.....	iv
ABSTRACT.....	v
DAFTAR ISI.....	vi

### BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang.....	1
B. Tujuan Penulisan .....	2
C. Batasan Masalah.....	2
D. Rumusan Masalah .....	3

### BAB II TINJAUAN PUSTAKA

A. Model Mangsa Pemangsa Lotka - Volterra.....	7
B. Model Pertumbuhan Logistik.....	8
C. Fick's Law .....	9



### **BAB III TEORI PENDUKUNG**

A. Jenis – Jenis Titik Keseimbangan .....	11
B. Definisi Kestabilan .....	18
C. Kestabilan Sistem Linear .....	19
D. Kestabilan Sistem Non Linear .....	22
E. Persamaan Gelombang .....	26

### **BAB IV MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI**

#### **MANGSA – PEMANGSA**

A. Konstruksi Model Mangsa – Pemangsa .....	28
B. Solusi Perjalanan Gelombang Dalam Difusi Mangsa – Pemangsa .....	40

### **BAB V KESIMPULAN DAN SARAN**

A. Kesimpulan .....	48
B. Saran .....	49

### **DAFTAR PUSTAKA**

### **LAMPIRAN**

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### A. Latar Belakang

Anggaplah pada suatu habitat terdapat dua jenis spesies yang tumbuh dan berkembang secara bersama – sama. Spesies – spesies tersebut dalam melangsungkan hidupnya saling bersaing baik dengan spesies lain ataupun dengan spesiesnya sendiri. Penggunaan sumber daya yang terbatas oleh kedua jenis spesies merupakan persaingan secara umum. Selain itu jenis spesies tersebut juga saling bersaing untuk mempertahankan diri dari gangguan spesies – spesies lain yang hidup disekitar habitat dimana kedua jenis spesies tersebut tumbuh dan berkembang. Karena adanya tekanan maka populasi spesies cenderung melakukan difusi untuk meningkatkan produktivitas. Hasil difusi suatu populasi dapat membentuk suatu model perjalanan gelombang.

Bentuk interaksi di atas dapat ditransformasi kedalam model matematika. Dari model ini diharapkan dapat memberikan banyak informasi mengenai perubahan populasi dan bagaimana populasi dalam suatu sistem mempengaruhi populasi lain. Dari model juga diharapkan dapat digunakan sebagai alat untuk mengambil kesimpulan.

Pada tulisan ini akan membahas model mangsa pemangsa yang berdasarkan pada model Lotka – Volterra kemudian diupayakan untuk mendapatkan suatu model yang cukup baik pemahamannya tentang evolusi model

mangsa – pemangsa. Akhirnya model perjalanan gelombang dimasukkan kedalam model tersebut kemudian dilakukan perhitungan solusi dari model perjalanan gelombang.

Untuk mengetahui hubungan antara perjalanan gelombang dengan difusi mangsa pemangsa, maka penulis merasa tertarik untuk menuangkannya dalam tulisan dengan judul :

## **MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA PEMANGSA**

### **B. Tujuan Penulisan**

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menganalisis kestabilan Titik Keseimbangan model perjalanan gelombang dalam difusi mangsa – pemangsa.

### **C. Batasan Masalah**

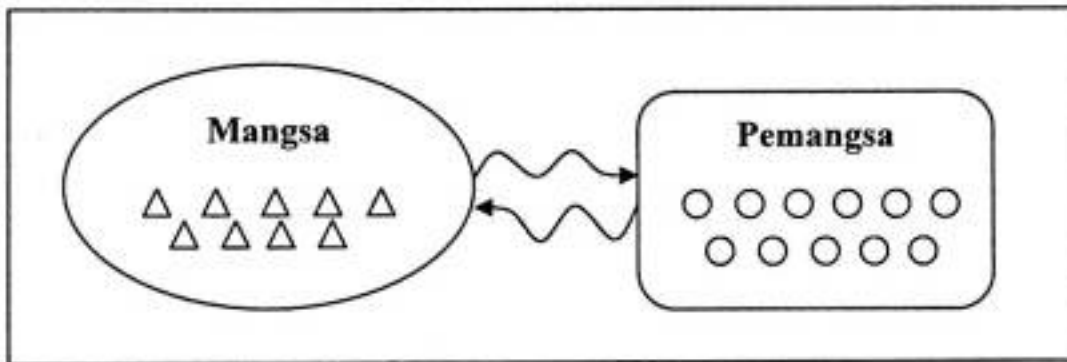
Dalam tulisan ini, penulis hanya akan membahas kestabilan model perjalanan gelombang dalam difusi mangsa – pemangsa berdasarkan pada asumsi – asumsi :

1. Populasi mangsa dan pemangsa pada model awal hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian.
2. Kepadatan populasi juga mempengaruhi laju perubahan mangsa.

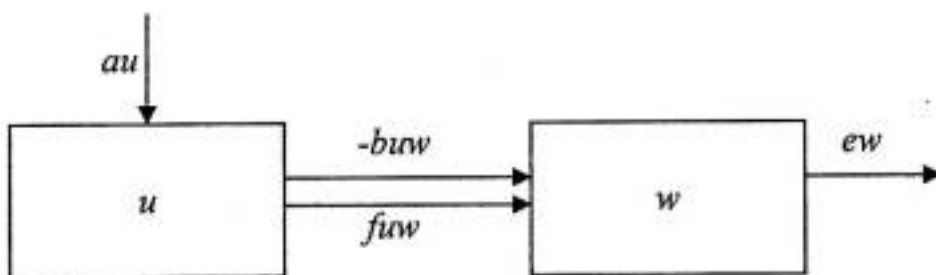
3. Model mangsa pemangsa ini tidak berdimensi.
4. Laju perubahan populasi mangsa dan pemangsa bergantung pada variabel gelombang.

#### D. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada skripsi ini adalah bagaimana menganalisis Titik Kesetimbangan model perjalanan gelombang dalam difusi mangsa – pemangsa yang diperoleh dari gambar di bawah ini :



Model awal yang digunakan adalah model mangsa pemangsa Lotka – Volterra yang digambarkan dalam diagram kompartemen di bawah ini :



Secara matematika, diagram tersebut dapat ditulis dalam bentuk persamaan diferensial linier :

$$\frac{du}{dt} = au - buw \quad (1.1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -ew + fuw \quad (1.2)$$

dimana :

- $\frac{du}{dt}$  adalah laju perubahan populasi mangsa.
- $\frac{dw}{dt}$  adalah laju perubahan populasi pemangsa
- $u$  adalah populasi mangsa
- $w$  adalah populasi pemangsa
- $a$  adalah tingkat pertumbuhan mangsa
- $b$  adalah jumlah mangsa yang dimakan oleh pemangsa
- $e$  adalah tingkat kematian pemangsa
- $f$  adalah tingkat penambahan pemangsa yang dimakan oleh pemangsa.

Populasi mangsa juga saling berinteraksi karena adanya keterbatasan makanan dan ruang sehingga persamaan (1.1) dan (1.2) menjadi :

$$\frac{du}{dt} = au \left( 1 - \frac{u}{K} \right) - buw \quad (1.3)$$

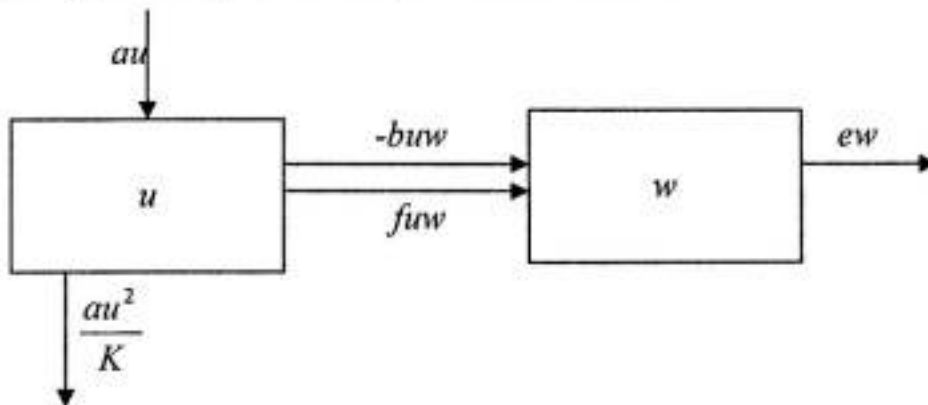
$$\frac{dw}{dt} = -ew + fuw \quad (1.4)$$

Dimana :

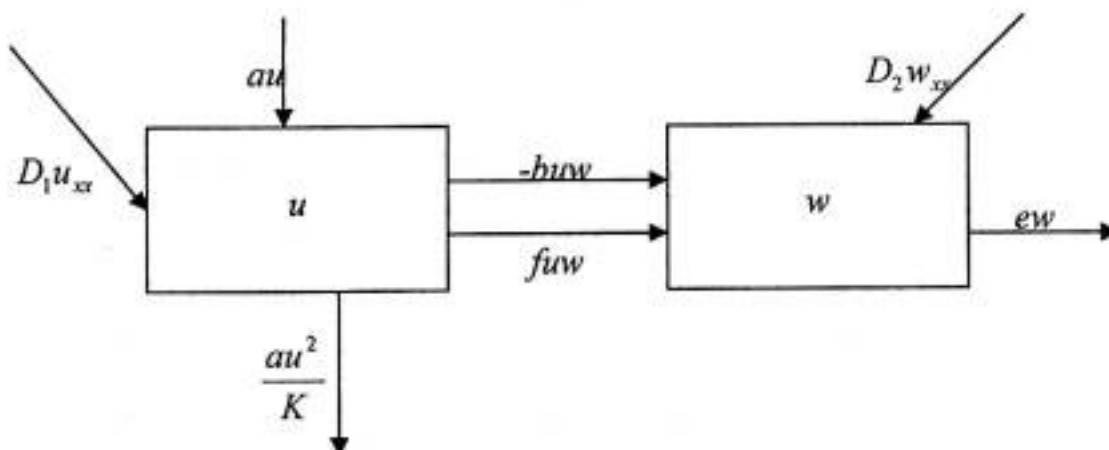


- $K$  adalah carrying capacity.

Dengan diagram kompartemen seperti di bawah ini :



Untuk kelangsungan hidup, pemangsa memakan mangsa dan masuk dalam populasi mangsa sedangkan mangsa dalam pertumbuhannya tidak hanya dalam satu tempat saja tetapi berkembang dan masuk dalam populasi pemangsa sehingga terjadi difusi yang digambarkan dalam diagram kompartemen dibawah ini :



Dari diagram di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$u_t = D_1 u_{xx} + au \left( 1 - \frac{u}{K} \right) - buw \quad (1.5)$$

$$w_t = D_2 w_{xx} - ew + fuw \quad (1.6)$$

Dimana :

- $D$  adalah koefisien difusi.

Persamaan (1.5) dan (1.6) dimodifikasi menjadi :

$$U_t = DU_{xx} + U(1 - U - W) \quad (1.7)$$

$$W_t = W_{xx} + \alpha W(U - \beta) \quad (1.8)$$

Model diatas akan diturunkan sehingga diperoleh model perjalanan gelombang dibawah ini :

$$cu' = Du'' + (1 - u - w) \quad (1.9)$$

$$cw' = w'' + \alpha w(u - \beta) \quad (1.10)$$

Dimana :

- $u$  adalah besarnya populasi mangsa
- $w$  adalah besarnya populasi pemangsa
- $c$  adalah laju gelombang
- $D$  adalah koefisien difusi
- $\alpha$  adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa
- $\beta$  adalah laju kematian populasi pemangsa.

---

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### A. Model Mangsa Pemangsa Lotka – Volterra

Model Lotka – Volterra menggambarkan interaksi diantara 2 spesies dalam suatu ekosistem dimana laju pertumbuhan kedua spesies tersebut hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian. Satu spesies disebut mangsa dan yang lainnya disebut pemangsa. Jika  $x(t)$  menunjukkan jumlah dari mangsa dan  $y(t)$  adalah jumlah dari pemangsa yang berkembang seiring dengan berjalannya waktu maka Model Lotka – Volterra adalah :

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \quad (2.2)$$

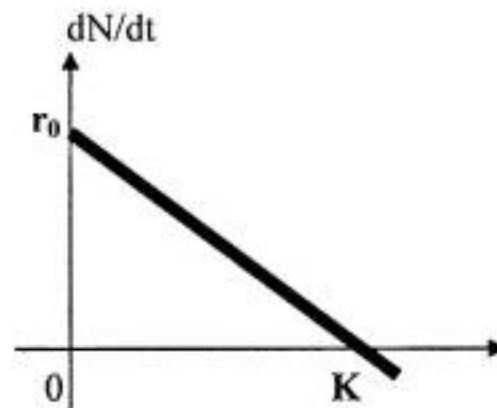
Dimana :

- $y$  adalah jumlah dari pemangsa
- $x$  adalah jumlah dari mangsa
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  adalah konstanta positif yang menunjukkan interaksi dari 2 spesies.

(Wikipedia, 2005)

## B. Model Pertumbuhan Logistik

Model logistik dikembangkan oleh matematikawan Belgia yaitu Pierre Verhulst (1838), yang menyatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada kepadatan populasi.



Saat kepadatan sangat rendah ( $N \ll K$ ), laju pertumbuhan populasi akan maksimal yaitu sama dengan  $r_0$ .  $r_0$  dapat diartikan sebagai laju pertumbuhan populasi saat tidak ada kompetisi. Laju pertumbuhan populasi akan menurun mencapai nol dimana  $N = K$ . Parameter  $K$  adalah batas atas dari pertumbuhan populasi dan disebut *carrying capacity*. Ini diartikan sebagai daya dukung maksimal lingkungan. Jika jumlah populasi ( $N$ ) melewati  $K$ , maka laju pertumbuhan populasi menjadi negatif dan jumlah populasi akan menurun. Interaksi populasi ini digambarkan oleh persamaan diferensial :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \\ &= r_0 N \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dimana :

- $\frac{dN}{dt}$  adalah laju pertumbuhan populasi seiring dengan waktu
- N adalah jumlah populasi
- K adalah carrying capacity
- $r_0$  adalah laju pertumbuhan intrinsik.

(Boyce, 1986)

### C. Fick's Law

Difusi adalah proses perpindahan dari satu bagian system ke system lainnya sebagai akibat gerakan acak molekul. *Fick's law* (I) digunakan pada *difusi steady state* yaitu dimana konsentrasi dalam volume difusi tidak mengalami perubahan terhadap waktu ( $J_{in} = J_{out}$ ).

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.4)$$

Dimana :

- J adalah flux difusi dalam dimensi [ $\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ]
- D adalah koefisien difusi dalam dimensi [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]
- $\phi$  adalah konsentrasi partikel dalam dimensi [ $\text{mol dm}^{-3}$ ]

Untuk *Fick's law* (II) digunakan dalam difusi *non – steady state* yaitu konsentrasi dalam volume difusi mengalami perubahan terhadap waktu.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Dimana :  $t$  adalah waktu dalam dimensi [s].

(J. Mazumdar, 1989)

### BAB III

### TEORI PENDUKUNG

#### A. Jenis-Jenis Titik Keseimbangan

##### *Definisi 1 :*

Titik  $\bar{x} \in R^n$  disebut titik keseimbangan (equilibrium point) dari  $\dot{x} = f(x)$

dimana

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

jika  $f(\bar{x}) = 0$ .

Dengan kata lain  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  titik setimbang

dari  $\dot{x} = f(x)$  jika  $f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

Misalkan diberikan suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana  $a, b, c, d$  adalah koefisien konstan dan  $ad - bc \neq 0$  dan  $t \in (-\infty, \infty)$ .

Titik  $\bar{x} = (0,0)$  adalah titik keseimbangan persamaan (3.1) karena pada titik  $\bar{x} = (0,0)$ ,  $\dot{x}(0,0) = \dot{x}(\bar{x}) = 0$ . Misalkan  $(x_1(t), x_2(t))$  merupakan solusi

persamaan (3.1) dalam bidang  $(x_1, x_2)$ . Bidang ini disebut bidang fase. Karena  $t$  berubah-ubah,  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  menggambarkan suatu kurva dalam bidang  $(x_1, x_2)$ . Kurva inilah yang dinamakan trajektori.

**Definisi 3.2 :**

Jika  $A$  suatu matriks  $n \times n$  maka sebuah vektor tidak nol  $x$  di dalam  $\mathbb{R}^n$  dinamakan *vektor eigen* dari  $A$  jika  $Ax = \lambda x$ .

Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ .

Tinjau sistem persamaan diferensial linear :

$$\dot{x} = Ax \quad (3.2)$$

dimana  $A$  adalah matriks konstan  $2 \times 2$  dan  $x$  adalah vektor kolom  $2 \times 1$ .

Untuk menganalisis sistem (3.2) di titik keseimbangannya  $(0,0)$ , ada beberapa jenis keseimbangan yang perlu dipertimbangkan. Jenis keseimbangan ini berbeda satu dengan yang lain, tergantung pada nilai eigen  $A$ . Titik Kesetimbangan tersebut adalah:

**1). Node**

Jenis kesetimbangan ini merupakan kasus dengan akar-akar karakteristik polinomial (nilai eigen) yang real positif atau real negatif.

Solusi umum dari persamaan (3.2) yaitu

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.3)$$

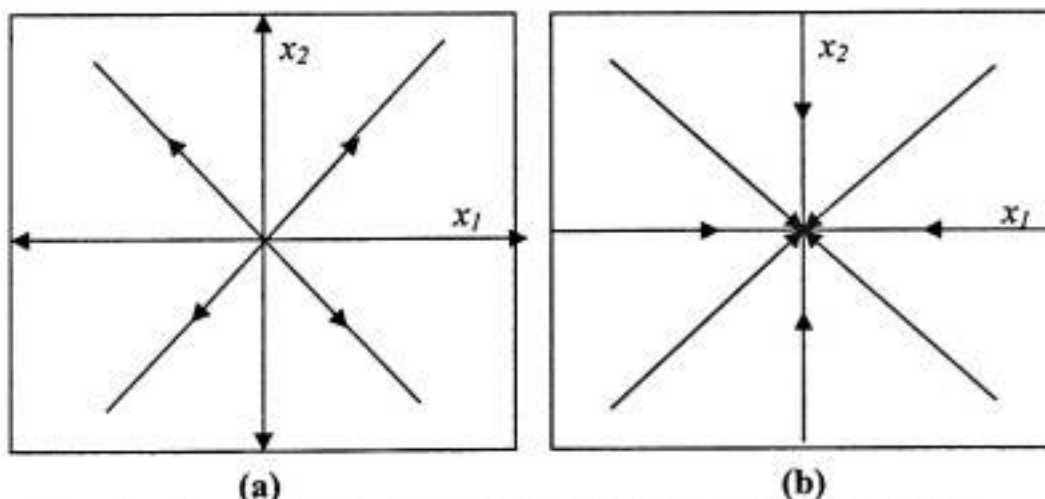


dimana  $\lambda_i$  adalah nilai eigen dan  $\xi_i$  adalah vektor eigen dari matriks A dengan  $i = 1, 2$ .

Kasus pertama jika  $\lambda_i < 0$ . Solusi (3.3) akan menunjukkan bahwa  $x \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Dengan kata lain semua solusi akan mendekati titik kesetimbangan pada saat  $t \rightarrow \infty$ .

Kasus kedua jika  $\lambda_i > 0$ . Solusi (3.3) menunjukkan bahwa  $x \rightarrow \infty$  dengan  $x(0) > 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ , dengan kata lain arah gerakan solusinya menjauh dari titik kesetimbangan.

Berikut diperlihatkan trajektori disekitar titik kesetimbangan (0,0) yang merupakan node pada bidang  $R^2$  yang stabil ditandai dengan arah anak panah yang menuju ke titik kesetimbangan dan tidak stabil jika arah anak panah menjauh dari titik kesetimbangan.



**Gambar 1 : Trajektori di sekitar TK (0,0) yang merupakan node**

(a) Tidak stabil ( $\lambda_i > 0$ )    (b) Stabil ( $\lambda_i < 0$ )

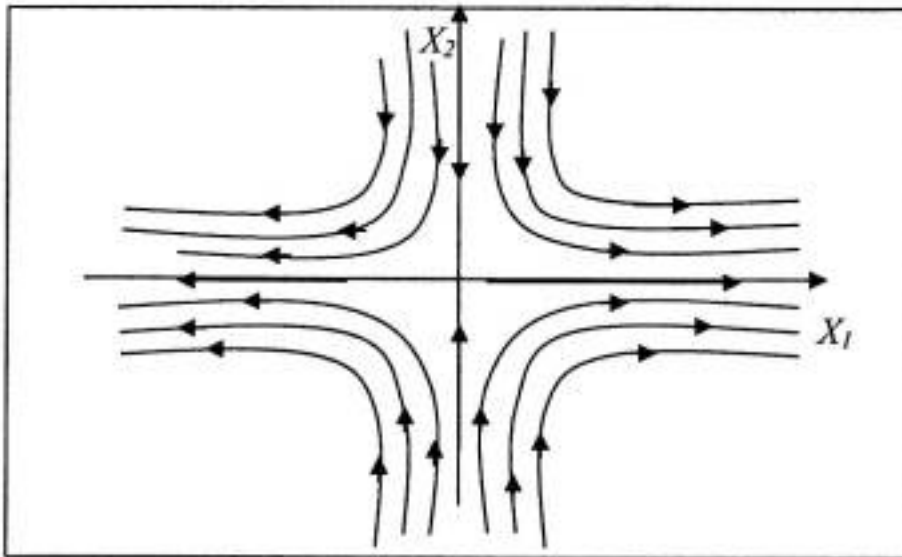
## 2). Pelana (Saddle)

Jenis kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya real dan berbeda tanda ( $\lambda_1$  positif dan  $\lambda_2$  negatif atau sebaliknya). Solusi umum dari persamaan (3.2) :

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.4)$$

Jika  $\lambda_1 > 0$  maka  $x \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Artinya solusi bergerak menjauhi titik kesetimbangan. Jika solusi bergerak untuk setiap  $t$  dengan  $\lambda_2 < 0$  maka  $x \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Karena arah gerakan solusinya ada yang menjauh dan ada yang mendekati titik kesetimbangan, maka jenis kesetimbangan ini tidak stabil.

Berikut diperlihatkan model trajektori yang berbentuk pelana (saddle) dengan titik kesetimbangan (0,0) pada bidang  $R^2$  ditandai dengan arah panah trajektori yang masuk dan keluar.



**Gambar 2 : Trajektori di sekitar TK (0,0) yang merupakan Pelana (saddle)**

### 3). Spiral

Jenis titik kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya kompleks. Misalkan nilai eigen tersebut adalah  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\mu$  dimana  $\alpha$  dan  $\mu$  adalah real,  $\alpha \neq 0$  dan  $\mu > 0$ . Sistem ini dapat ditulis dalam bentuk :

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ -\mu & \alpha \end{pmatrix} x \quad (3.5)$$

atau dalam bentuk skalar :

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \alpha x_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dari koordinat polar  $r$  dan  $\theta$  diberikan :

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\tan \theta = \frac{x_2}{x_1}$$

Jika kedua persamaan terakhir diturunkan, diperoleh :

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2' \quad (3.7.a)$$

$$(\sec^2 \theta)\theta' = \frac{(x_1x_2' - x_2x_1')}{x_1^2} \quad (3.7.b)$$

Substitusi persamaan (3.6) ke (3.7.a) diperoleh :

$$r = ce^{\lambda t} \quad (3.8)$$

dimana  $c$  adalah konstan.

Selanjutnya substitusi persamaan (3.6) ke persamaan (3.7.b) sehingga diperoleh :

$$\theta = -\mu t + \theta_0 \quad (3.9)$$

dimana  $\theta_0$  adalah nilai dari  $\theta$  pada saat  $t = 0$ .

Jika  $\mu > 0$  maka persamaan (3.9) menunjukkan bahwa  $\theta \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  dengan arah gerakan yang searah jarum jam dan jika  $\mu < 0$  maka  $\theta \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  dengan arah gerakan yang berlawanan dengan jarum jam. Dari persamaan (3.8), jika  $\lambda < 0$  maka  $r \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  dan jika  $\lambda > 0$  maka  $r \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Sehingga trajektorinya akan berbentuk spiral dengan arah gerakan yang mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan

(stabil atau tidak stabil) tergantung dari nilai eigen  $\lambda_{12}$  dengan bagian real yang negatif atau positif.

#### 4). Pusat (Center)

Jenis ini terjadi jika nilai eigennya adalah imajiner murni. Untuk kasus ini tidak jauh berbeda dengan kasus kesetimbangan bertipe spiral, dengan bagian real dari nilai eigennya yang kompleks bernilai nol. Sistem ini dapat digambarkan sebagai berikut :

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.10)$$

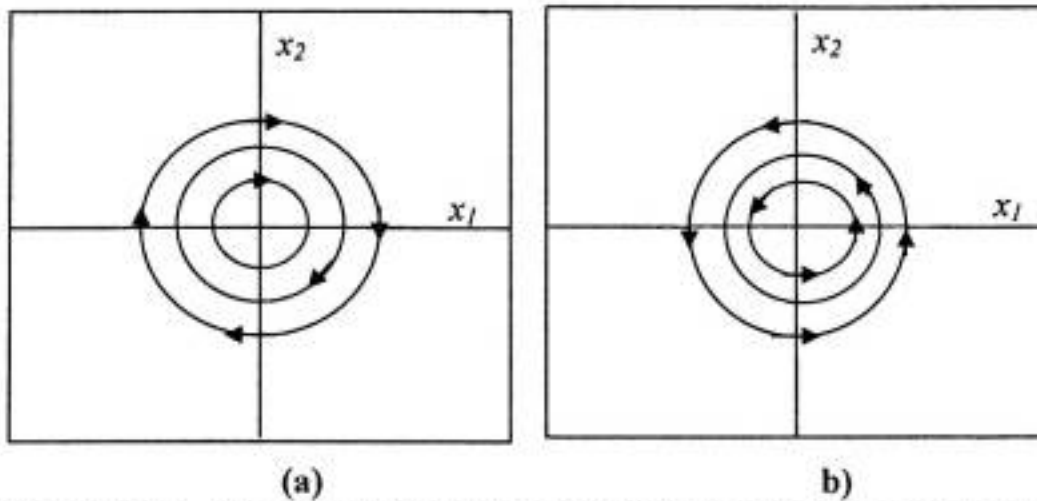
dengan nilai eigen  $\pm i\mu$ . Seperti halnya spiral maka akan diperoleh :

$$r' = 0, \theta' = -\mu$$

mengakibatkan,  $r = c, \theta = -\mu t + \theta_0$  dimana  $c$  dan  $\theta_0$  adalah konstan.

Trajektorinya akan bergerak membentuk *Cycle* yang melintang searah jarum jam jika  $\mu > 0$  dan berlawanan jarum jam jika  $\mu < 0$ .

Berikut diberikan model trajektori yang berbentuk center dengan titik kesetimbangan  $(0,0)$  pada bidang  $R^2$  dengan arah gerakan yang berbeda.



**Gambar 3 :** Trajektori di sekitar TK  $(0,0)$  yang merupakan center,  
 (a) Searah jarum jam jika  $\mu > 0$ ,  
 (b) Berlawanan jarum jam jika  $\mu < 0$

## B. Definisi Kestabilan

Pandang suatu sistem persamaan differensial berikut :

$$\dot{x} = f(t, x), t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.11)$$

dimana  $x$  dan  $f$  adalah vektor.

$I = [t_0, \infty)$  untuk  $\rho > 0$ ,  $S_\rho = \{x \in R^n : |x| < \rho\}$

Misalkan fungsi  $f$  pada (3.11) terdefinisi dan kontinu pada  $I \times S_\rho$ . Misalkan

(3.11) mempunyai solusi  $x(t)$  dalam  $S_\rho$  melalui titik  $(t_0, x_0)$  pada  $I$ .

### Definisi 3 :

Solusi  $x(t)$  dikatakan stabil jika  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < \rho) \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall y(t)$  dari

(3.11) pada  $I$  memenuhi

$$|y(t) - x(t)| < \varepsilon, t \geq t_0 \text{ untuk } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

**Definisi 4 :**

Solusi  $x(t)$  dikatakan stabil asimtotik jika solusi tersebut stabil dan jika

$\exists \delta_0 > 0 \ni y(t)$  pada I memenuhi

$$|y(t) - x(t)| \rightarrow 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty \text{ dengan } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta_0.$$

Suatu populasi yang berada dalam keadaan setimbang stabil jika mengalami gangguan maka cenderung akan kembali ke keadaan setimbang yang semula. Sedangkan pada keadaan setimbang yang tidak stabil, sistem yang sedikit bergeser dari keadaan itu cenderung akan menjauhi titik setimbang tidak stabil tersebut.

**C. Kestabilan Sistem Linear**

Misalkan diberikan suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

dimana a, b, c dan d konstan.

Dalam notasi vektor persamaan (3.12) dapat dituliskan sebagai :

$$\dot{x} = Ax \quad (3.13)$$

dimana A adalah matriks konstan dengan ordo 2 x 2.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diasumsikan  $A$  adalah matriks yang non singular dan nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  berbeda. Karena itu titik kesetimbangan persamaan (3.12) hanya pada titik asal  $(0,0)$ . Solusi persamaan (3.12) adalah :

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} c_2 \quad (3.14)$$

dimana  $c_1$  dan  $c_2$  adalah vektor eigen bebas linear yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dari matriks  $A$ .

**Kasus I :** Misalkan  $\lambda_i$  real

Dari persamaan (3.14)

- Jika  $\lambda_1$  negatif maka  $x(t) \rightarrow 0$  pada  $t \rightarrow \infty$  tanpa bergantung pada keadaan awal  $x(0)$ . Jadi titik  $(0,0)$  dikatakan stabil asimptotik.
- Jika  $\lambda_1$  positif maka  $x(t) \rightarrow \infty$  pada  $t \rightarrow \infty$ . Dalam hal ini titik  $(0,0)$  dikatakan tidak stabil.
- Untuk kasus dimana hanya terdapat satu nilai eigen yang bernilai real negatif, misalkan  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Dari persamaan (3.14) dapat dilihat bahwa bila  $x(0)$  kelipatan  $c_1$  maka  $x(t) \rightarrow 0$  pada  $t \rightarrow \infty$  dan sebaliknya  $x(t) \rightarrow \infty$  bila  $x(0)$  kelipatan  $c_2$ . Jadi titik kesetimbangan  $(0,0)$  disebut tidak stabil. Suatu kombinasi linear dari dua gerak yang demikian akan menghasilkan suatu orbit berbentuk sadel. Keadaan kesetimbangan ini disebut titik sadel.

**Kasus II :** Bila nilai eigennya ( $\lambda_i$ ) kompleks.

Misal  $\lambda_i = u + iv$ , maka persamaan (3.14) menjadi :

$$x(t) = e^{ut} (\beta_1 \cos vt + \beta_2 \sin vt) \quad (3.15)$$



dengan  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  adalah vektor yang sesuai.

- Jika  $u = \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ , maka  $x(t)$  akan menuju nol dalam lintasan yang berbentuk spiral. Jadi titik kesetimbangan  $(0,0)$  dikatakan stabil asimptotik.
- Jika  $u = \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ , maka titik kesetimbangan  $(0,0)$  tidak stabil.
- Jika  $u = \operatorname{Re}(i) = 0$ , maka solusinya menjadi terbatas. Hal ini disebut stabil netral.

#### *Lemma 3.12*

- i. Titik kesetimbangan  $(0,0)$  dari persamaan (3.13) stabil jika dan hanya jika nilai eigen dari matriks  $A$  adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
- ii. Titik kesetimbangan  $(0,0)$  dari persamaan (3.13) tak stabil jika salah satu (atau kedua) nilai eigen dari matriks  $A$  real dan positif atau jika paling sedikit satu nilai eigen mempunyai bagian real yang negatif.

#### *Contoh 1*

Perhatikan sistem persamaan differensial berikut:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = 2$

Sehingga menurut *Lemma 3.12* titik setimbang  $(0,0)$  tak stabil.

#### *Lemma 3.13*

Nilai eigen  $\lambda_i$  dari matriks  $A$  yang berordo  $2 \times 2$  memenuhi  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  jika dan hanya jika  $\lambda_1 \lambda_2 = \text{Det}(A) > 0$  dan  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Trace}(A) < 0$ . Nilai eigen  $\lambda_i$  bilangan imajiner murni jika dan hanya jika  $\text{Trace}(A) = 0$ , sedangkan  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  atau  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  jika dan hanya jika  $\text{Det}(A) < 0$ .

#### D. Kestabilan Sistem Non Linear

Perhatikan sistem persamaan diferensial berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{3.16}$$

dimana  $f_1$  dan  $f_2$  merupakan fungsi yang terdiferensial.

Misalkan  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$  merupakan keadaan kesetimbangan dari persamaan (3.16) dan

misalkan  $u_i = x_i - \bar{x}_i$ , maka menurut Teorema Taylor untuk fungsi dua peubah :

$$f_i(x_1, x_2) = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_i(u_1, u_2) \text{ untuk } i = 1, 2$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_1(u_1, u_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_2(u_1, u_2)$$

dengan asumsi bahwa  $g_1(u_1, u_2)$  mempunyai turunan parsial pertama dan memenuhi  $\frac{g_1(u_1, u_2)}{\|u\|} \rightarrow 0$  bila  $\|u\| \rightarrow 0$ , dimana  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

Karena  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  adalah keadaan kesetimbangan, maka :

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

dan untuk

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}(x_1 - \bar{x}_1), \quad \dot{x}_2 = \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}(x_2 - \bar{x}_2)$$

maka persamaan (3.16) dapat ditulis :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix}$$

yang dalam notasi vektor dituliskan sebagai :

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{3.17}$$

dimana :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

adalah matriks Jacobian dari  $f$  pada  $\bar{x}$ .

Untuk  $x(t)$  yang sangat dekat  $\bar{x}$ , maka  $g(u)$  menjadi kecil dan dapat diabaikan. Sehingga persamaan (3.17) dapat didekati oleh persamaan sistem linear

$$\dot{u} = Au \quad (3.18)$$

Situasi yang mungkin dapat terjadi adalah bergesernya keadaan kesetimbangan. Bila keadaan kesetimbangan  $\bar{x}$  bergeser ke  $x(0)$  maka kestabilannya akan berubah. Dengan kata lain jika  $x(t) \rightarrow \bar{x}$  untuk  $t \rightarrow \infty$  atau  $u(t) = x(t) - \bar{x}$  maka  $u(t) \rightarrow 0$ . Hal ini telah menjadi persoalan linear. Yang perlu diperhatikan adalah pendekatan yang dilakukan,  $x$  harus dekat ke  $\bar{x}$ . Jadi yang sebenarnya adalah kestabilan lokal saja.

### Contoh 3

Tinjau persamaan bandul

$$\ddot{\theta} + r\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (3.19)$$

*Solusi :*

Misalkan

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$

Maka persamaan (3.19) menjadi :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - rx_2$$

jadi diperoleh :

$$f_1(x_1, x_2) = x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = -\frac{g}{l} \sin x_1 - rx_2$$

titik-titik kesetimbangan yang diperoleh adalah  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

➤ Untuk  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maka Matriks A adalah :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -r \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh  $\det(A) = \frac{g}{l} > 0$  dan  $\text{Tr}(A) = -r < 0$ .

Menurut lemma 3.13 maka  $\text{Re}(\lambda_i)$  negatif.

Sehingga dari lemma 3.12,  $\bar{x} = (0,0)$  stabil asimptotik secara lokal.

➤ Untuk  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Maka } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\pi, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\pi, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\pi, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\pi, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -r \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh  $\det(A) = \frac{g}{l} > 0$  dan  $\text{Tr}(A) = -r < 0$ .

Menurut Lemma 3.13 salah satu nilai eigen dari matriks  $A$  bernilai positif. Sehingga dari lemma 3.12 disimpulkan bahwa sistem yang dilinearkan disini mempunyai kesetimbangan yang tidak stabil.

### E. Persamaan Gelombang

Solusi umum dari persamaan gelombang 1-dimensi adalah :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

Untuk memecahkan persamaan di atas dapat digunakan metode solusi D'Alembert's yaitu :

Langkah 1: untuk memecahkan persamaan (3.20) ubah 2 variabel bebas  $(x,t)$  dengan koordinat kanonik yang baru  $(r,s)$

$$r = x + ct$$

$$s = x - ct$$

Persamaan Diferensial Parsial  $U_{tt} = c^2 U_{xx}$  ditransformasi kedalam

$U_{rs} = 0$ . Karena diberikan aplikasi sederhana dari aturan rantai yaitu:

$$\begin{aligned} U_x &= U_r + U_s \\ U_t &= c(U_r - U_s) \\ U_{xx} &= U_{rr} + 2U_{rs} + U_{ss} \\ U_{tt} &= c^2(U_{rr} - 2U_{rs} + U_{ss}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substitusi Persamaan (3.21) kedalam persamaan gelombang diperoleh:

$$U_{rr} = 0.$$

Langkah 2: Persamaan yang baru di atas dengan mudah dipecahkan dengan mengintegrasikan secara langsung. Yang pertama diintegrasikan terhadap  $r$  kemudian terhadap  $s$  diperoleh :

$$U(r, s) = \phi(r) + \varphi(s)$$

Dimana  $\phi(r), \varphi(s)$  fungsi yang berubah – ubah dari  $r$  dan  $s$ .

Langkah 3: untuk menemukan solusi umum  $U_{tt} = c^2 U_{xx}$ , substitusi  $r=x+ct$  dan  $s=x-ct$  kedalam  $U(r, s) = \phi(r) + \varphi(s)$  sehingga diperoleh :

$$U(x, t) = \phi(x - ct) + \varphi(x + ct)$$

Ini adalah solusi umum dari persamaan gelombang.

---

**BAB IV****MODEL PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA –  
PEMANGSA****A. KONSTRUKSI MODEL MANGSA – PEMANGSA**

Bagian awal ini berfungsi untuk melihat evolusi dari model mangsa – pemangsa. Hal ini dimaksudkan agar diperoleh pemahaman yang baik dari setiap bagian model dan diupayakan mendapatkan model akhir yang pasti. Akhirnya perjalanan gelombang dimasukkan kedalam model dan akan menjadi titik awal untuk menghitung solusi perjalanan gelombang.

**1. Model Mangsa Pemangsa menurut Lotka – Volterra**

Perhatikan persamaan dibawah ini :

$$\dot{u} = au - buw \quad (4.1)$$

$$\dot{w} = -ew + fuw \quad (4.2)$$

dimana :

- $\dot{u}$  adalah laju pertumbuhan populasi mangsa seiring dengan waktu
- $\dot{w}$  adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa seiring dengan waktu
- $au$  adalah banyaknya mangsa
- $buw$  adalah banyaknya mangsa yang dimakan oleh pemangsa



- $ew$  adalah banyaknya pemangsa yang mati
- $fuw$  adalah laju pertambahan pemangsa

Persamaan (4.1) dan (4.2) mempunyai dua Titik Keseimbangan. Titik Keseimbangan adalah keadaan dimana tidak adanya perubahan jika,

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = 0$$

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = 0$$

sehingga :

$$u(a - bw) = 0$$

$$w(-e + fu) = 0$$

dengan demikian diperoleh dua Titik Keseimbangan yaitu :

$$E_1 = (0,0)$$

$$E_2 = \left(\frac{e}{f}, \frac{a}{b}\right)$$

selanjutnya akan diselidiki kelakuan dari mangsa pemangsa disekitar Titik Keseimbangan tersebut.

a) Titik Keseimbangan (0,0)

Misalkan  $u$  mewakili jumlah populasi mangsa dan  $w$  mewakili jumlah populasi pemangsa maka pada saat  $w = 0$  (tidak ada pemangsa) populasi mangsa akan tumbuh secara eksponensial yang diwakili oleh

$$\frac{du}{dt} = au, \quad a > 0.$$

Pada saat  $u = 0$  (tidak ada mangsa) maka pertumbuhan pemangsa akan negative secara eksponensial yang diwakili oleh  $\frac{dw}{dt} = -ew$ ,  $e > 0$  karena pemangsa akan mati karena tidak memakan pemangsa. Model dapat ditulis:

$$\frac{du}{dt} = au \quad (4.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = -ew \quad (4.4)$$

mempunyai solusi :

$$u(t) = C_1 e^{at} \quad \text{dan} \quad w(t) = C_2 e^{-et}; \quad C_1, C_2 \geq 0$$

yang berarti bila  $t \rightarrow \infty$  maka  $u \rightarrow \infty$  dan  $w \rightarrow 0$ . Titik  $(0,0)$  merupakan (saddle Point) yang tidak stabil karena setiap  $(u, w)$  senantiasa akan bergerak meninggalkan titik tersebut. Di sini jumlah dari mangsa senantiasa bertambah dan jumlah dari pemangsa senantiasa berkurang seiring dengan waktu  $(t)$ .

b) Titik Kesetimbangan  $(\frac{e}{f}, \frac{a}{b})$ .

Titik  $(\frac{e}{f}, \frac{a}{b})$  merupakan Titik Kesetimbangan stabil center dengan

arah berlawanan jarum jam mendekati Titik Kesetimbangan  $(\frac{e}{f}, \frac{a}{b})$  yang

menggambarkan solusi dari (4.1) dan (4.2) adalah solusi periodik dan populasi maksimal bergerak menuju ke Titik Kesetimbangan ini.

## 2. Model Pertumbuhan Logistik

Salah satu kekurangan dari model Lotka – Volterra pada persamaan (4.1) yaitu jika tidak ada pemangsa maka mangsa akan berkembang tanpa batas tetapi dalam kehidupan nyata tidak ada populasi yang bertambah secara eksponensial seterusnya, faktor ini disebabkan oleh keterbatasan ruang atau makanan dan lain sebagainya. Jika mangsa berkembang terus tanpa ada pemangsa maka populasi mangsa makin padat sehingga semakin kecil laju pertumbuhan sampai suatu waktu tidak ada lagi pertumbuhan.

Untuk menagani masalah ini, sistem mangsa pemangsa Lotka – Volterra dapat dimodifikasi menjadi :

$$\dot{u} = au\left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \quad (4.5)$$

$$\dot{w} = -ew + fuw \quad (4.6)$$

dimana :

- $K$  = Carrying Capacity (daya dukung maksimal lingkungan)

Model diatas mempunyai 3 Titik Kesetimbangan. Titik Kesetimbangan yang pertama adalah (0,0) yang menggambarkan tidak adanya kedua spesies. Titik Kesetimbangan yang kedua adalah  $(K,0)$  yang

menggambarkan keadaan dimana mangsa telah mencapai Carrying Capacity pada saat tidak ada pemangsa. Titik Kesetimbangan yang terakhir adalah

$\left(\frac{e}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{e}{fK}\right)\right)$  merupakan keadaan dimana kedua spesies bukan nol dan

juga merupakan batas pertumbuhan dari kedua spesies. Titik Kesetimbangan  $(0,0)$  dan  $(K,0)$  adalah saddle point yang tidak stabil dan Titik

Kesetimbangan  $\left(\frac{e}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{e}{fK}\right)\right)$  adalah Titik Kesetimbangan yang stabil

seiring dengan waktu yang terus membesar ( $t \rightarrow \infty$ ).

### 3. Reaksi Difusi

Sebuah aspek yang dilalaikan oleh model – model sebelumnya adalah fakta dimana penyebaran/pertumbuhan suatu populasi mengambil beberapa ruang. Konsep ruang ini akan ditambahkan pada model mangsa pemangsa dimana populasi kedua spesies tersebut akan bergerak dalam ruang. Misalnya, sejumlah besar populasi dimasukkan dengan paksa dalam suatu daerah tertentu, populasi tersebut akan cenderung menyebar untuk meningkatkan produktivitas. Proses ini disebut *difusi*.

Untuk model mangsa pemangsa, akan digunakan pendekatan tertentu yang dikenal sebagai difusi Fickian. Besar flux yang melewati suatu ruang adalah tergantung pada jarak gradien dikali dengan koefisien difusi. Dalam satu dimensi,

$$J = -D \frac{dC}{dx} \quad (4.7)$$

dimana :

- $J$  = Flux ( $ML^{-2}T^{-1}$ )
- $C(x,t)$  = Konsentrasi Spesies ( $ML^{-3}$ )
- $D$  = Koefisien difusi ( $L^2T^{-1}$ )
- $x$  = panjang (L)

Untuk umumnya, konsentrasi spesies  $C$  adalah fungsi dari posisi  $(x,y,z)$  dan waktu  $t$  sehingga :

$$C = C(x,y,z,t)$$

Maka :

$$\begin{aligned} \underline{J} &= (J_x, J_y, J_z) \\ &= \left( -D \frac{\partial C}{\partial x}, -D \frac{\partial C}{\partial y}, -D \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &= -D \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &= -D \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) C \\ &= -D \underline{\nabla} C \end{aligned}$$

Populasi mangsa dan pemangsa dalam suatu ruang saling berkompetisi sehingga perubahan populasi dari kedua spesies diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} dA \cdot dx &= (J_{in} - J_{out}) \cdot luas \\ &= \{J_x - (J_x + \nabla J_x)\} dA \\ \frac{\partial C}{\partial t} dx &= -\nabla J_x \end{aligned}$$

Dimana :

$$\nabla J_x = \frac{\partial J_x}{\partial x} dx + \frac{\partial J_y}{\partial y} dx + \frac{\partial J_z}{\partial z} dx$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} dx &= -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} dx + \frac{\partial J_y}{\partial y} dx + \frac{\partial J_z}{\partial z} dx\right) \\ \frac{\partial C}{\partial t} dx &= -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) dx \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-D \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-D \frac{\partial C}{\partial z}\right) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-D \frac{\partial C}{\partial x}, -D \frac{\partial C}{\partial y}, -D \frac{\partial C}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla J &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(-D \nabla C) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} - D \nabla \nabla C &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} - D \nabla^2 C &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= D \nabla^2 C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Bentuk difusi diatas kemudian dimasukkan kedalam persamaan mangsa pemangsa sebelumnya sehingga sekarang diperoleh model dari mangsa dan pemangsa pada bentuk ruang dan waktu yaitu :

$$u_t = D_1 u_{xx} + au \left( 1 - \frac{u}{K} \right) - buw \quad (4.8)$$

$$w_t = D_2 w_{xx} - ew + fuw \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.8) dan (4.9) di atas ada kelimpahan parameter. Oleh sebab itu, untuk mempermudah model dapat digunakan suatu teknik yang membuat semua parameter tak berdimensi. Hal ini berguna untuk memodifikasi persamaan sehingga lebih mudah dianalisis dan menunjukkan hubungan diantara kedua bentuk ini sangat penting.

Misalkan :

$$U = \frac{u}{K} \quad \text{maka} \quad U_{xx} = \frac{u_{xx}}{K}$$

$$U_t = \frac{u_t}{K}$$

$$W = \frac{b}{a} w \quad \text{maka} \quad w_{xx} = \frac{a}{b} W_{xx}$$

$$w_t = \frac{a}{b} W_t$$

Dari persamaan (4.8) diperoleh :

$$\begin{aligned} KU_t &= D_1 KU_{xx} + aKU(1-U) - bKU \frac{a}{b} W \\ &= D_1 KU_{xx} + aKU - aKU^2 - aKUW \\ &= D_1 KU_{xx} + aKU(1-U-W) \\ U_t &= D_1 U_{xx} + aU(1-U-W) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.9) diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} W_t &= D_2 \frac{a}{b} W_{xx} - e \frac{a}{b} W + fKU \frac{a}{b} W \\ &= \frac{a}{b} (D_2 W_{xx} - eW + fKUW) \\ W_t &= D_2 W_{xx} - eW + fKUW \\ &= D_2 W_{xx} + fKW \left( U - \frac{e}{fK} \right) \\ &= D_2 W_{xx} + a\alpha W (U - \beta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Misalkan :

$$t' = at \quad \text{dan} \quad x' = \frac{x}{\sqrt{D_2/a}}$$



Maka persamaan (4.10) dan (4.11) menjadi :

$$aU_t = D_1 U_{xx} \frac{a}{D_2} + aU(1-U-W)$$

$$U_t = \frac{D_1}{D_2} U_{xx} + aU(1-U-W)$$

$$aW_t = D_2 W_{xx} \frac{a}{D_2} + a\alpha W(U - \beta)$$

$$W_t = W_{xx} + \alpha W(U - \beta)$$

Akhirnya diperoleh model mangsa – pemangsa yang tak berdimensi sebagai berikut :

$$U_t = DU_{xx} + aU(1-U-W) \quad (4.12)$$

$$W_t = W_{xx} + \alpha W(U - \beta) \quad (4.13)$$

Dimana :

$$U = \frac{u}{K}, \quad W = \frac{b}{a} w, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{D_2/a}}, \quad t' = at$$

$$D = \frac{D_1}{D_2}, \quad \alpha = \frac{fK}{a}, \quad \beta = \frac{e}{fK}$$

#### 4. Model Perjalanan Gelombang

Pada model dimensionless, titik kritis persamaan (4.8) dan (4.9) adalah

$(K,0)$  dan  $\left(\frac{e}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{e}{fK}\right)\right)$  dalam  $(u, w)$  sedangkan pada persamaan (4.12)

dan (4.13) titik kritisnya adalah  $(1,0)$  dan  $(\beta, 1-\beta)$  dalam  $(U,W)$ . Langkah selanjutnya adalah mengasumsikan solusi dari model difusi pada (4.12) dan (4.13) yang mempunyai bentuk sebuah perjalanan gelombang sebagai penyebaran. Oleh karena itu, akan diasumsikan terdapat solusi yang mempunyai bentuk :

$$U(t, x) = u(x + ct) \quad (4.14)$$

$$W(t, x) = w(x + ct) \quad (4.15)$$

Dimana :

- $c$  adalah laju gelombang.

Untuk menyederhanakan persamaan diatas dimisalkan  $s = x + ct$  yang mana  $s$  disebut variabel gelombang. Dengan menggunakan aturan rantai, akan diperoleh sebuah system yang hubungan hanya dengan  $s$ .

$$\begin{aligned} \bullet U_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

Misalkan  $M = \frac{\partial u}{\partial s}$  maka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial M}{\partial x} \\
&= \frac{\partial M}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \\
&= \frac{\partial M}{\partial s} \cdot 1 \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\
&= u''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet U_t &= \frac{\partial U}{\partial t} \\
&= \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \\
&= c \frac{\partial u}{\partial s} \\
&= cu'
\end{aligned}$$

Dari bentuk persamaan (4.14) dan (4.15) dapat disimpulkan bahwa :

$$\begin{aligned}
W_{xx} &= w'' \\
W_t &= cw'
\end{aligned}$$

Sehingga model pada persamaan (4.12) dan (4.13) menjadi :

$$cu' = Du'' + u(1 - u - w) \quad (4.16)$$

$$cw' = w'' + \alpha w(u - \beta) \quad (4.17)$$

## B. SOLUSI PERJALANAN GELOMBANG DALAM DIFUSI MANGSA PEMANGSA

Model yang dikaji memiliki bentuk sebagai berikut :

$$cu' = Du'' + u(1 - u - w) \quad (4.16)$$

$$cw' = w'' + \alpha w(u - \beta) \quad (4.17)$$

Dimana :

$u$  = Besarnya populasi mangsa

$w$  = Besarnya populasi pemangsa

$c$  = Laju gelombang

$D$  = Koefisien Difusi

$\alpha$  = Laju pertumbuhan populasi pemangsa

$\beta$  = Laju kematian populasi pemangsa

Dengan asumsi :

$u > 0, w > 0, c > 0, 0 < D \leq 1, \alpha > 0$ , dan  $0 < \beta < 1$ .

Untuk mendapatkan sistem persamaan orde satu, persamaan di atas diturunkan menjadi :

$$u' = v \quad (4.18)$$

$$v' = \frac{c}{D}v - \frac{1}{D}u(1 - u - w) \quad (4.19)$$

$$w' = z \quad (4.20)$$

$$z' = cz - \alpha w(u - \beta) \quad (4.21)$$

Dari sistem persamaan orde satu di atas, solusi perjalanan gelombang dapat diperoleh dan memenuhi kondisi batas :

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= 1 & w(-\infty) &= 0 \\ u(\infty) &= 0 & w(\infty) &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Langkah pertama dalam mendapatkan solusi perjalanan gelombang dalam model mangsa – pemangsa adalah dengan menganalisis nilai eigen dan vector eigen dari system persamaan (4.18) – (4.21) pada dua Titik Kritis. Dari analisis nilai eigen dan vektor eigen dapat diketahui perilaku lokal disekitar Titik Kritis dan juga diketahui bagaimana perubahan parameter model mangsa – pemangsa terhadap solusi perjalanan gelombang.

### 1. Penentuan Titik Keseimbangan

Titik Kritis atau Titik Keseimbangan dari persamaan (4.18) – (4.21) diperoleh jika :

$$u' = v' = w' = z' = 0$$

Maka persamaan (4.18) – (4.21) menjadi :

$$v = 0$$

$$\frac{c}{D}v - \frac{1}{D}u(1 - u - w) = 0$$

$$z = 0$$

$$cz - \alpha w(u - \beta) = 0$$

Dengan demikian diperoleh dua Titik Keseimbangan yaitu :

$$E_1 = (1,0,0,0)$$

$$E_2 = (\beta,0,1-\beta,0)$$

Untuk menganalisis kestabilan dari kedua Titik Kesetimbangan di atas, digunakan matriks Jacobi.

Misalkan persamaan (4.18) – (4.21) sebagai berikut :

$$u' = v \quad = A$$

$$v' = \frac{c}{D}v - \frac{1}{D}u(1-u-w) \quad = B$$

$$w' = z \quad = P$$

$$z' = cz - \alpha w(u - \beta) \quad = Q$$

Maka matriks Jacobi dari persamaan di atas adalah :

$$J(u, v, w, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial A}{\partial w} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial w} & \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial w} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{D}u + \frac{1}{D}w - \frac{1}{D} & \frac{c}{D} & \frac{1}{D}u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha w & 0 & \alpha\beta - \alpha u & c \end{bmatrix}$$

## 2. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan

### a. Titik Kesetimbangan (1,0,0,0)

Substitusi Titik Kesetimbangan (1,0,0,0) pada matriks jacobi diperoleh :

$$J_1(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D} & \frac{c}{D} & \frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha(\beta-1) & c \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks di atas adalah :

$$\det(J_1 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D} & \frac{c}{D} & \frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha(\beta-1) & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D} & \frac{c}{D} - \lambda & \frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \alpha(\beta-1) & c - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk memperoleh determinan di atas digunakan metode ekspansi

kofaktor sepanjang baris 1 sehingga diperoleh persamaan :

$$\lambda^4 - \lambda^3 \left( \frac{c}{D} + c \right) + \lambda^2 \left( \frac{c^2}{D} - \alpha(\beta-1) - \frac{1}{D} \right) + \lambda \left( \frac{c}{D} \alpha(\beta-1) + \frac{c}{D} \right) + \frac{1}{D} \alpha(\beta-1) = 0$$

Kedua ruas dikali dengan  $D$  sehingga diperoleh :

$$D\lambda^4 - \lambda^3(c + cD) + \lambda^2(c^2 - D\alpha(\beta - 1) - 1) + \lambda(c\alpha(\beta - 1) + c) + \alpha(\beta - 1) = 0$$

$$(D\lambda^2 - c\lambda - 1)(\lambda^2 - c\lambda + \alpha(1 - \beta)) = 0$$

Jadi nilai eigen yang diperoleh adalah :

$$\lambda_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4D}}{2D}, \quad \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\alpha(1 - \beta)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4D}}{2D}, \quad \lambda_4 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\alpha(1 - \beta)}}{2}$$

Selanjutnya dari nilai – nilai eigen tersebut untuk menganalisis kestabilan maka ada dua kasus yaitu :

**Kasus I :** Jika  $c^2 + 4D > 0$  maka nilai  $\lambda_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4D}}{2D} < 0$  sedangkan

$$\text{nilai } \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4D}}{2D} > 0.$$

$$\text{Jika } c > \sqrt{4\alpha(1 - \beta)} \text{ maka nilai } \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\alpha(1 - \beta)}}{2} > 0$$

$$\text{dan nilai } \lambda_4 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\alpha(1 - \beta)}}{2} > 0, \text{ ini berarti Titik}$$

Kesetimbangan akan bernilai positif dan negatif sehingga Titik

Kesetimbangan tidak stabil.



**Kasus II :** Jika  $c^2 + 4D < 0$  dan  $c < \sqrt{4\alpha(1-\beta)}$  maka  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$  dan  $\lambda_4$  adalah nilai eigen yang kompleks konjugat dengan bagian realnya positif, ini berarti Titik Keseimbangan tidak stabil.

Dari kedua kasus di atas ditarik kesimpulan bahwa Titik Keseimbangan  $(1,0,0,0)$  tidak stabil.

**b. Titik Keseimbangan  $(\beta,0,1-\beta,0)$**

Substitusi Titik Keseimbangan  $(\beta,0,1-\beta,0)$  pada matriks Jacobi sehingga diperoleh :

$$J_2(\beta,0,1-\beta,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D}\beta & \frac{c}{D} & \frac{1}{D}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha(1-\beta) & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Persamaan Karakteristik dari matriks di atas adalah :

$$\det (J_2 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D}\beta & \frac{c}{D} & \frac{1}{D}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha(1-\beta) & 0 & 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D}\beta & \frac{c}{D} - \lambda & \frac{1}{D}\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -\alpha(1-\beta) & 0 & 0 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Untuk memperoleh determinan di atas digunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris 1 sehingga diperoleh bentuk polinomial :

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 \left( \frac{c}{D} + c \right) + \lambda^2 \left( \frac{c^2}{D} - \frac{\beta}{D} \right) + \frac{c\beta}{D} \lambda + \frac{\alpha\beta(1-\beta)}{D} = 0$$

Misalkan :

$$\begin{aligned} p(\lambda, D) &= Dp(\lambda) \\ &= D\lambda^4 - \lambda^3 \left( c + \frac{c}{D} \right) + \lambda^2 (c^2 - \beta) + c\beta\lambda + \alpha\beta(1-\beta) = 0 \end{aligned}$$

dengan  $D = 1$ , maka :

$$p(\lambda, 1) = \lambda^4 - 2c\lambda^3 + \lambda^2 (c^2 - \beta) + c\beta\lambda + \alpha\beta(1-\beta) = 0$$

Jadi nilai eigen yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\beta}}{2}, & \lambda_3 &= \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\alpha(1-\beta)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\beta}}{2}, & \lambda_4 &= \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\alpha(1-\beta)}}{2} \end{aligned}$$

$p(\lambda, 1)$  akan minimum lokal jika  $\lambda_0 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 2\beta}}{2}$  sehingga :

$$p(\lambda_0, 1) = \alpha\beta(1-\beta) - \frac{\beta^2}{4}.$$

Oleh sebab itu, jika  $\alpha < \frac{\beta}{4(1-\beta)}$  maka  $p(\lambda, 1)$  akan mempunyai 2 akar

real yang negatif ( $\lambda_2$  dan  $\lambda_4$ ) dan juga mempunyai 2 akar real yang positif

( $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ ). Ini menunjukkan bahwa Titik Kesetimbangan  $(\beta, 0, 1 - \beta, 0)$  stabil di 2-dimensi sedangkan 2-dimensi lainnya tidak stabil.

## BAB V

### PENUTUP

#### A. Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa suatu model perjalanan Gelombang dalam difusi mangsa pemangsa yang berbentuk :

$$cu' = Du'' + u(1 - u - w)$$

$$cw' = w'' + \alpha w(u - \beta)$$

Mempunyai dua Titik Keseimbangan yaitu :

$$E_1 = (1,0,0,0) \text{ dan } E_2 = (\beta,0,1-\beta,0)$$

Analisis kestabilan untuk kedua Titik Setimbang tersebut dilakukan dengan menganalisis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik yaitu :

$$\text{Det } (J_{(u,v,w,z)} - \lambda I) = 0.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa :

- Titik setimbang  $(1,0,0,0)$  tidak stabil dengan  $0 < D \leq 1$ ,  $c^2 + 4D > 0$  dan  $c > \sqrt{4\alpha(1-\beta)}$ .
- Titik setimbang  $(\beta,0,1-\beta,0)$  stabil di 2-dimensi dengan  $\alpha < \frac{\beta}{4(1-\beta)}$ .

## **B. Saran**

Dalam penulisan skripsi ini penulis hanya pada tahap menganalisis kestabilan untuk satu mangsa dan satu pemangsa, jika ada mahasiswa yang berminat mengambil tugas akhir tentang pemodelan, bisa melanjutkan penulisan skripsi ini untuk sistem banyak pemangsa dan satu pemangsa bergantung pada keseimbangan teredam disebabkan pembatasan spesies dan tertunda disebabkan oleh berlalunya waktu.

## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, William E. 1986. **Elementary Differential Equation and Boundary value Problems**. John Wiley and Son Inc. Canada.
- Farlow, Stanley J. 1937. **Partial Differential Equation for Scientists and Engineers**. John Wiley and Sons. Singapore.
- J. Mazumdar. 1989. **An Introduction to Mathematical Physiology and Biology**. Cambridge University Press. Cambridge.
- Kim, Brian. 23 Juni 2004. **Computing Traveling – Wave Solutions in a Diffusive Predator – Prey Model**. Departement of Mathematics University of Michigan. U.S.
- Meerschaert, Mark M. 1993. **Mathematical Modeling**. Academic Press, Inc. U.S.
- Wikipedia, The Free Eyclopedia. **Lotka – Volterra Equation**.  
<http://www.webmaster@stolaf.edu>.

↓ Contoh Gambar yang mewakili kestabilan dengan  $c = 1.4$ ,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.06$  dan  $\beta = 0.5$ .

```

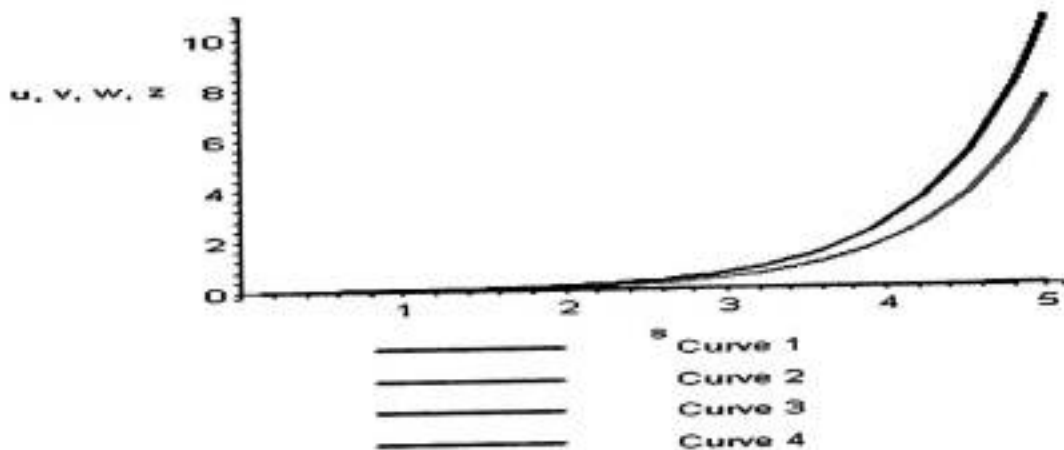
> with (plots);
> sys := diff(u(s),s)=v(s),diff(v(s),s)=(1.4*v(s)-u(s)*(1-u(s)-
w(s)))/1,diff(w(s),s)=z(s),diff(z(s),s)=1.4*z(s)-0.06*w(s)*(u(s)-0.5));
sys :=  $\frac{d}{ds} u(s) = v(s)$ ,  $\frac{d}{ds} v(s) = 1.4 v(s) - u(s) (1 - u(s) - w(s))$ ,  $\frac{d}{ds} w(s) = z(s)$ ,
 $\frac{d}{ds} z(s) = 1.4 z(s) - 0.06 w(s) (u(s) - 0.5)$ 

> fcns := {u(s),v(s),w(s),z(s)};
fcns := {u(s), v(s), z(s), w(s)}

> p:=dsolve([sys,u(0)=0.001,v(0)=0.002,w(0)=0.009,z(0)=0.009],
fcn s,type=numeric,method=classical);
p := proc(x_classical) ... end proc;

> odeplot(p, [[s,u(s),color=blue,thickness=2],[s,v(s),color=red,
thickness=2],[s,w(s),color=green,thickness=2],[s,z(s),color=black,
thickness=2]],0.1..5);

```



—————  $u' = v$

—————  $v' = \frac{c}{D} v - \frac{1}{D} u(1 - u - w)$

—————  $w' = z$

—————  $z' = cz - \alpha w(u - \beta)$

dengan :

$$0 < D \leq 1$$

$$0 < \beta < 1$$

$$\alpha < \frac{\beta}{4(1 - \beta)}$$

$$c < \sqrt{4\alpha(1 - \beta)}$$

↓ Contoh Gambar yang tidak stabil dengan  $c = 0.2$ ,  $D = 1$ ,  
 $\alpha = 0.01$  dan  $\beta = 0.05$ .

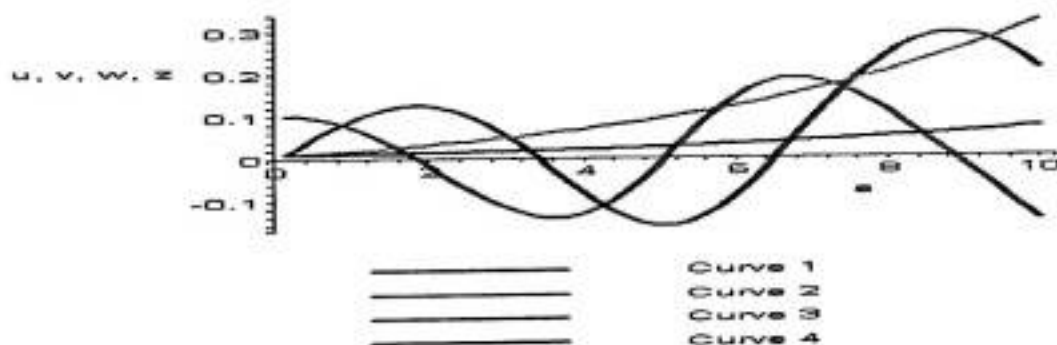
```
> with (plots);
> sys := diff(u(s),s)=v(s),diff(v(s),s)=(0.2*v(s)-u(s)*(1-u(s)-
w(s)))/1,diff(w(s),s)=z(s),diff(z(s),s)=0.2*z(s)-0.01*w(s)*(u(s)-0.05));
sys :=  $\frac{d}{ds} u(s) = v(s)$ ,  $\frac{d}{ds} v(s) = 0.2 v(s) - u(s) (1 - u(s) - w(s))$ ,  $\frac{d}{ds} w(s) = z(s)$ ,
 $\frac{d}{ds} z(s) = 0.2 z(s) - 0.01 w(s) (u(s) - 0.05)$ 
```

```
> fcns := {u(s),v(s),w(s),z(s)};
fcns := {u(s), v(s), w(s), z(s)}
```

```
> p:=
dsolve({sys,u(0)=0,v(0)=0.1,w(0)=0.01,z(0)=0.01},fcns,type=numeric,
method=classical);
```

```
p := proc(x_classical) ... end proc;
```

```
> odeplot(p, [[s,u(s),color=blue,thickness=2],[s,v(s),color=red,
thickness=2],[s,w(s),color=green,thickness=2],[s,z(s),color=black,
thickness=2]],0.1..10);
```



—  $u' = v$

—  $v' = \frac{c}{D}v - \frac{1}{D}u(1-u-w)$

—  $w' = z$

—  $z' = cz - \alpha w(u - \beta)$

dengan :

$$0 < D \leq 1$$

$$0 < \beta < 1$$

$$\alpha > \frac{\beta}{4(1-\beta)}$$

$$c > \sqrt{4\alpha(1-\beta)}$$