

**PERGERAKAN TANAH PADA LEMBAH TERTIMBUN YANG
DIPENGARUHI GELOMBANG PERMUKAAN DATAR**



UNIVERSITAS HASANUDDIN	
ol. Term	22-12-06
	Mi Ps
	1 Exp.
	Herdiyah
	2212093
OLEH	95913

MAULIDDIN

H11102024

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2006**

**PERGERAKAN TANAH PADA LEMBAH TERTIMBUN YANG
DIPENGARUHI GELOMBANG PERMUKAAN DATAR**

Skripsi ini diajukan :

Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana matematika

OLEH

MAULIDDIN


H11102024

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2006**

**PERGERAKAN TANAH PADA LEMBAH TERTIMBUN YANG
DIPENGARUHI GELOMBANG PERMUKAAN DATAR**

Disetujui Oleh:


Pembimbing Pertama


A. Kresna Java, S.Si, M.Si
NIP : 132 259 231

Pembimbing Kedua

Drs. Lantu, Meng, Sc, DESS
NIP : 130 700 056

Pembimbing Utama


Dr. Jeffry Kusuma
NIP : 131 675 122

Makassar, 1 Agustus 2006

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Salam serta salawat semoga tetap tercurahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad SAW sebagai pemberi syafaat yang mulia akhlaknya.

Penulis menyadari bahwa sejak penyusunan proposal sampai skripsi ini selesai banyak hambatan, rintangan, dan halangan namun berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak semua ini dapat teratasi dengan baik.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kebenaran dan kesempurnaan sehingga kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca sangat diharapkan guna memperbaiki skripsi ini.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan penghargaan dan terima kasih yang tak terhingga kepada **Ayahanda Damming** dan **Ibunda tercinta Waode Miaya** yang telah melahirkan saya dengan penuh ketabahan. Semoga keduanya mendapat tempat yang mulia disisi Allah SWT. Serta terima kasih kepada Bibi saya **Waode Zuhayah** yang telah membesarkan saya hingga saya bisa menempuh pendidikan sampai saat ini. Juga saudara-saudaraku **Mimiani, Titin Hartini, Diana, Erwin, Alim, Yudi** serta **Rini**. Utamanya bagi kakak saya tersayang **Kak Mardin** karena atas jasa beliaulah sehingga saya bisa kuliah di Perguruan Tinggi. Juga kepada istrinya dan keponakanku **Randi**. Kemudian untuk nenekku tercinta yang menyayangiku sejak kecil hingga sekarang. Terima kasih atas segala pengorbanan,

kesabaran, dan pengertiannya serta bantuan moril dan materi sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Demikian pula penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. **Bapak Dr. Jeffry Kusuma, A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si, dan Bapak Drs. Lantu, Meng, Sc, DESS** sebagai pembimbing utama, pembimbing pertama, dan pembimbing kedua yang penuh kesabaran, kesungguhan dan kebaikan hatinya yang telah banyak memberikan petunjuk serta bimbingan sehingga kesulitan penulis bisa teratasi sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. **Bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si dan Bapak Drs. Amir Kamal Amir, MSc** selaku ketua jurusan dan sekretaris jurusan matematika fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam, para dosen jurusan matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak pimpinan fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam beserta stafnya.
4. **Bapak Drs. Amir Kamal Amir, MSc** sebagai penasihat akademik yang telah memberikan perhatiannya kepada penulis selama perkuliahan.
5. Rekan angkatan 2002 **Lukman, Alim, Dillah, Didin, Tini, Jannah, Yani, Luqman, Delon, Rara, Fifi, Yiz, Juki, Ikrar, Aca, Kama, Mely, Sohra, Narti, Lela, Nugy, Tika, Hera, Indah, Idot, Sefty, Uni, Widia, Cuttang, Philip, Wardah.** Dan seluruh angkatan 2002 yang tidak dapat disebut satu

persatu, Adik-Adikku **Hasbih, Ansar, Ilo, Rusdin, Wawan**, dan seluruh angkatan 03, 04 dan 05.

6. Untuk teman-teman baikku **Nasrum, Amin, dan Hery** yang telah banyak memberikan bantuan dukungan dan saran terhadap penulisan skripsi ini serta adikku **Fandi, Alam Gemuk, Ashar, dan Alam Kurus**.
7. Sahabatku **Irfan, Syarif, Ahmad**, terutama **Kudus, Pipit dan Zen** yang telah memberikan dorongan spritual dan bantuan yang tak terhingga banyaknya selama menempuh kehidupan kampus dan kegiatan lainnya khususnya yang berhubungan dengan perkuliahan. Semua ini tidak akan bisa saya lupakan.
8. Teman-teman tarbiah **Rian, Ipul, Dani, Muslim** serta Murabbiku **Uztad Zainal dan Uztad Ahmad Hasan** atas perhatiannya selama ini.
9. Teman-teman Pondok HR **Salim, Herul, Akmal, Dayat, Idris**, dan crew HR lainnya serta teman-teman sekelasku dari SMUN 2 Bau-Bau.

Semoga segenap bantuan dan partisipasinya mendapat balasan yang setimpal disisi Allah SWT. Akhirnya semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya sekecil apapun serta insya Allah bernilai ibadah di sisi-Nya, Amien.

Makassar, 1 Agustus 2006

Penulis

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas mengenai pergerakan tanah pada lembah tertimbun yang dipengaruhi gelombang permukaan datar (SH). Solusinya diselesaikan secara numerik. Metode yang digunakan adalah metode elemen batas dengan menggunakan bahasa pascal.

ABSTRACT



In this thesis, we consider the ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves. The solution is solved numerically. The numerical method is solved using boundary element method and computer programming code using PASCAL software.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN TUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI.....	ix
BAB I. Pendahuluan.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan dan Manfaat Penulisan	2
1.3 Tinjauan Pustaka.....	2
1.4 Rumusan dan Batasan Masalah.....	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II . Teori Pendukung.....	5
2.1. Gelombang Harmonik.....	5
2.2. Refleksi, Refraksi dan Difraksi Gelombang.....	7
2.3. Gelombang dalam Ruang Dua dimensi.....	10
2.4. Fungsi Hankel	12
2.5. Fungsi Delta Dirac.....	13
2.6. Fungsi Green.....	14
2.7. Integral Fredholm.....	14

BAB III. Pergerakan Tanah Pada Lembah Tertimbun Yang Dipengaruhi	
Gelombang Permukaan Datar	16
3.1. Menyelesaikan Model Pergerakan Tanah oleh Gelombang	
Permukaan Datar.....	16
3.2. Solusi Numerik Model Pergerakan Tanah oleh Gelombang	
Permukaan Datar.....	24
3.3 Interpretasi Model Pergerakan Tanah Pada Beberapa Bentuk	
Lembah	28
BAB IV. Kesimpulan Dan Saran.....	33
4.1 Kesimpulan	33
4.2 Saran.....	34

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN



1.1 Latar Belakang

Gempa bumi merupakan peristiwa alam yang terjadi akibat pergeseran lempeng di dalam bumi yang menimbulkan berbagai kerusakan di atas permukaan. Tingkat kerusakan oleh gempa pada dasarnya sangat berkaitan dengan berbagai faktor seperti rendahnya mutu konstruksi suatu tempat/bangunan, pengaruh topografi maupun kondisi geologi dari suatu daerah. Dalam hal ini distribusi kerusakan dipengaruhi oleh gelombang seismik dalam kaitannya dengan topografi lokal dan karakteristik dalam tanah.

Dalam beberapa kondisi, pergerakan tanah akibat gempa dapat dibuatkan model secara sederhana, akan tetapi untuk topografi tak beraturan harus dihadapkan oleh peristiwa mengenai ruang, misalnya kejadian gempa yang melalui lembah tertimbun. Sehingga para pakar sepakat bahwa guna menyelesaikan problem ini, harus meninjau lembah tertimbun ini sebagai masalah dua dimensi yang merupakan permukaan dari suatu half space elastic.

Lembah tertimbun yang dimaksud sudah tentu tidak beraturan bentuknya jika ditinjau secara nyata di alam. Oleh karena itu diperlukan pendekatan-pendekatan tertentu guna mencari solusi penyebaran dan difraksi gelombang datar pada lembah tersebut. Tingkat kerusakan gempa akibat gelombang permukaan datar pada sebuah half space elastic berbeda di setiap titik, hal ini tergantung oleh bagaimana

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik mempelajari fenomena-fenomena tersebut dan menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul :

” Pergerakan Tanah Pada Lembah Tertimbun Yang Dipengaruhi Gelombang Permukaan Datar ”

1.2 Tujuan dan Manfaat Penulisan

a) Tujuan Penulisan

- 1) Menyelesaikan model perambatan gelombang permukaan datar pada lembah tertimbun.
- 2) Intepretasi terhadap kasus yang ditinjau.

b) Manfaat Penulisan

Tulisan ini merupakan bentuk aplikasi matematika terapan untuk memberikan gambaran, informasi, dan pengetahuan mengenai pergerakan tanah dalam lembah tertimbun oleh gelombang permukaan datar.

1.3 Tinjauan Pustaka

Secara garis besar yang dijadikan materi dasar sebagai pendukung dalam penulisan tugas akhir ini sebagai berikut:

- Gelombang Harmonik

bentuk half space, materi di dalamnya, serta sudut datang gelombang.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik mempelajari fenomena-fenomena tersebut dan menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul :

” Pergerakan Tanah Pada Lembah Tertimbun Yang Dipengaruhi Gelombang Permukaan Datar ”

1.2 Tujuan dan Manfaat Penulisan

a) Tujuan Penulisan

- 1) Menyelesaikan model perambatan gelombang permukaan datar pada lembah tertimbun.
- 2) Intepretasi terhadap kasus yang ditinjau.

b) Manfaat Penulisan

Tulisan ini merupakan bentuk aplikasi matematika terapan untuk memberikan gambaran, informasi, dan pengetahuan mengenai pergerakan tanah dalam lembah tertimbun oleh gelombang permukaan datar.

1.3 Tinjauan Pustaka

Secara garis besar yang dijadikan materi dasar sebagai pendukung dalam penulisan tugas akhir ini sebagai berikut:

- Gelombang Harmonik

- Refleksi, refraksi, dan difraksi
- Gelombang dalam ruang dua dimensi
- Fungsi Hankel
- Fungsi Delta Dirac
- Fungsi Green
- Integral Fredholm

1.4 Rumusan dan Batasan Masalah

Ruang lingkup pembahasan dari tugas akhir ini adalah bagaimana menyelesaikan model pergerakan tanah pada lembah tertimbun akibat gelombang permukaan datar SH dengan meninjau beberapa model lembah seperti : kotak(persegi), segitiga, setengah lingkaran, dan semi elips.

1.5 Sistematika Penulisan

Secara garis besar, sistematika pembahasan terdiri atas:

- a) Bab I dibahas mengenai latar belakang masalah, tujuan dan manfaat penulisan, tinjauan pustaka, rumusan dan batasan masalah, serta sistematika pembahasan.
- b) Bab II berisi teori pendukung yang didalamnya dibahas mengenai : hankel function, green's function, fredholm function, harmonic function, dirac delta function, refleksi, refraksi, difraksi, dan pengertian



gelombang.

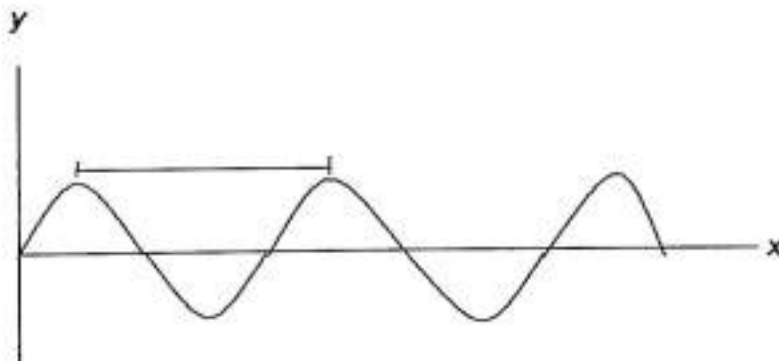
- c) Bab III dibahas mengenai pergerakan tanah pada lembah tertimbun yang dipengaruhi gelombang permukaan datar .
- d) Bab IV akan dibahas mengenai kesimpulan dan saran

BAB II

TEORI PENDUKUNG

2.1 Gelombang Harmonik

Jika kita menggerakkan salah satu ujung tali naik dan turun berupa gerak harmonik sederhana (misalnya dengan menyambunginya pada garpu tala yang bergetar), deretan gelombang sinusoidal akan menjalar sepanjang tali. Gelombang seperti ini disebut gelombang harmonik, bentuk tali pada suatu saat berupa bentuk fungsi sinus seperti pada gambar 1



Gambar 1
Propagasi gelombang tali pada satu arah

Sekali lagi, apakah ini fungsi sinus atau kosinus semata mata bergantung pada dimana titik asal dipilih pada sumbu x . Gambar demikian dapat diperoleh dengan mengambil foto tali secara snapshot. Jarak antara 2 puncak gelombang yang berurutan di sebut panjang gelombang λ . Panjang gelombang adalah jarak perulangan gelombang. Ketika gelombang menjalar menyusuri tali, tiap titik pada tali akan bergerak naik dan turun, tegak lurus terhadap arah penjarannya, berupa

gerak harmonik sederhana dengan frekuensi f dan garpu tala atau sumber apapun yang menggerakkan ujung tali. Ada hubungan sederhana antara frekuensi f , panjang gelombang λ , dan laju gelombang harmonik. Selama satu periode $T=1/f$, gelombang menempuh jarak satu panjang gelombang, sehingga laju ditentukan oleh:

$$V = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \quad (2.1)$$

Karena timbul hanya dari definisi panjang gelombang dan frekuensi, persamaan(1) berlaku pada semua bentuk gelombang harmonik. Karena laju penjalaran gelombang ditentukan oleh sifat-sifat medium, panjang gelombang ditentukan oleh frekuensi sumber melalui persamaan:

$$\lambda = \frac{V}{f} \quad (2.2)$$

Semakin besar frekuensi, semakin kecil panjang gelombang. Fungsi sinus yang menggambarkan simpangan yang ditunjukkan dalam gambar (1) adalah:

$$Y(x) = A \sin kx, \quad (2.3)$$

dimana : A = Amplitudo,

k = konstanta bilangan gelombang.

Bilangan gelombang berhubungan dengan panjang gelombang. Jika pergerakan dari titik x_1 ke titik lain sejauh satu panjang gelombang; $x_2 = x_1 + \lambda$, maka argumen fungsi berubah sebesar 2π , jadi diperoleh:

$$\begin{aligned} k(x_1 + \lambda) &= kx_1 + 2\pi \\ \Rightarrow kx_1 + k\lambda &= kx_1 + 2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k\lambda = kx_1 - kx_1 + 2\pi$$

$$\Rightarrow k\lambda = 2\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.4}$$



Untuk menggambarkan gelombang yang sedang menjalar ke kanan dengan laju v , x dalam persamaan (2.3) diganti dengan $x - vt$ seperti yang dilakukan pada pulsa gelombang.

Jadi fungsi gelombang untuk gelombang menjalar dengan laju v ke kanan ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= A \sin k(x - vt) \\ &= A \sin(kx - kv t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Atau

$$Y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) ; \omega = kv \tag{2.6}$$

dimana ω = frekuensi sudut.

2.2 Refleksi, Refraksi dan Difraksi Gelombang

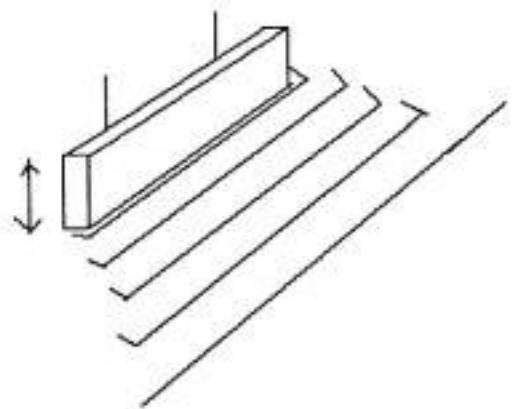
Dalam medium homogen seperti udara dengan kecepatan konstan, gelombang akan menjalar dengan garis lurus searah berkas. Pada jarak yang sangat jauh dari sumber titik, suatu bagian kecil muka gelombang dapat didekati dengan suatu bidang, dan berkas-berkas hampir merupakan garis-garis paralel: gelombang-gelombang yang demikian disebut gelombang bidang (lihat gambar 2).

Analogi dua dimensi untuk gelombang bidang adalah gelombang garis yang merupakan suatu bagian kecil muka gelombang sirkular (melingkar) yang berada pada jarak yang sangat jauh dari sumber gelombang seperti ini dapat juga dihasilkan dalam tangki riak dengan suatu sumber garis seperti gambar 3. Gelombang bidang menjalar dengan garis lurus searah berkas-berkas seperti berkas-berkas partikel.



Gambar 2

Gelombang menjalar dengan garis lurus arah berkas

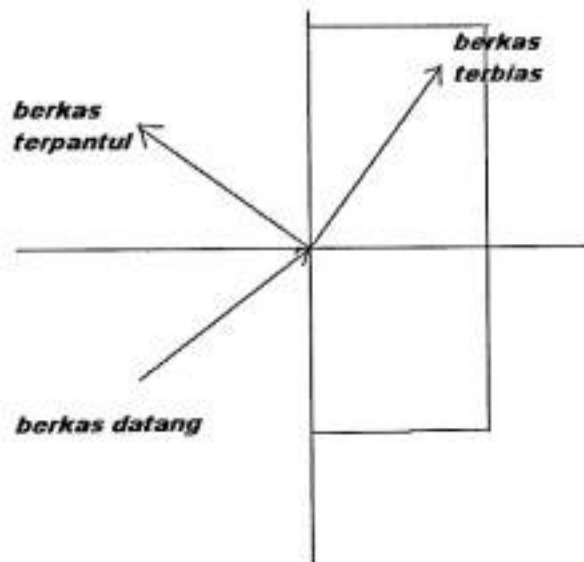


Gambar 3

Gelombang dihasilkan dalam tangki riak

Bila suatu gelombang datang pada suatu permukaan batas yang memisahkan dua daerah dengan laju gelombang berbeda, maka sebagian gelombang akan dipantulkan dan sebagian yang lain akan ditransmisikan. Ini terjadi misalnya, ketika suatu gelombang bunyi di udara menumbuk suatu permukaan padat atau cair. Berkas yang terpantulkan membentuk sudut dengan garis normal permukaan yang besarnya sama sudut berkas datang, sebaliknya berkas yang ditransmisikan akan dibelokkan atau menjauh dari garis normal bergantung normal bergantung pada apakah laju

gelombang dalam medium kedua lebih kecil atau lebih besar daripada laju gelombang dalam medium datar. Pembelokan berkas yang ditransmisikan disebut refraksi/pembiasan (lihat gambar 4).



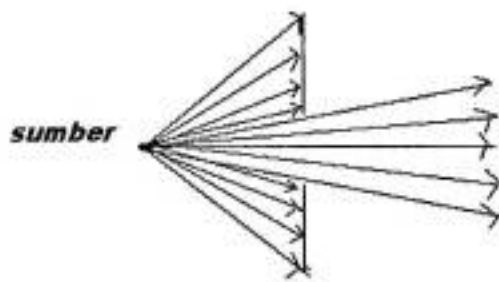
Gambar 4
Pembelokan berkas yang ditransmisikan

Penjalaran gelombang berbeda dengan penjalaran aliran partikel, sebagai contoh anak-anak panah menunjukkan aliran partikel yang mengenai perintang dengan lubang kecil atau celah (lihat gambar 5).

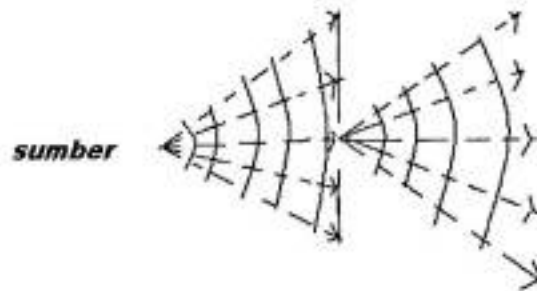
Partikel-partikel yang menembus lubang ini akan terbatas hanya pada suatu sudut yang kecil (gambar 6). Anak panah menunjukkan berkas-berkas yang menyatakan penjalaran gelombang lingkaran menuju perintang. Setelah melewatinya, berkas akan membelok melengkungi pinggir-pinggir lubang kecil tersebut. Pembelokan berkas ini yang hingga batas tertentu selalu terjadi ketika



semua muka gelombang dibatasi disebut difraksi.



Gambar 5
Aliran partikel melalui perintang celah



Gambar 6
Partikel menembus lubang terbatas pada sudut kecil

2.3 Gelombang dalam Ruang Dua Dimensi

Dalam medium yang berdimensi dua, misalnya selaput elastis yang direntang, persamaan yang berlaku adalah :

$$\frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, t)}{\partial x_2^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

dimana : $\bar{x} = (x_1, x_2)$

Gelombang ini lazim disebut gelombang permukaan. Kecepatan rambatnya dalam kasus gelombang selaput elastis ditentukan oleh rumus :

$$v = \sqrt{\tau / \sigma} \quad (2.8)$$

dimana : τ = gaya tegangan permukaan persatuan panjang sepanjang sisi selaput

σ = rapat massa medium per satuan luas permukaan

$\psi(x,t)$ = pergeseran kedudukan transversal terhadap kedudukan setimbang.

Salah satu jenis solusinya adalah

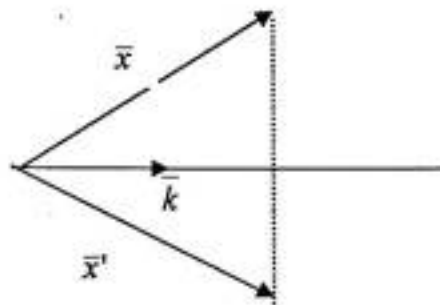
$$\psi(\bar{x}, t) = f(x \pm vt) \quad (2.9a)$$

$$= f(\bar{k}x + \omega t) \quad (2.9b)$$

dimana: $\bar{k} = \left(\frac{\omega}{v}\right)\bar{v}$

Dalam persamaan (2.9a), x menyatakan vektor kedudukan dalam arah V , sedangkan dalam persamaan selaput. Karakteristik gelombang ini dapat diperjelas dengan bantuan konsep muka gelombang yaitu tempat kedudukan semua titik sefase pada saat tertentu untuk gelombang yang bersangkutan. Jadi muka gelombang tersebut ditentukan oleh semua vektor x yang memenuhi syarat $k \cdot x = \text{konstanta}$ untuk t tertentu.

Perhatikan gambar (7), jelas terlihat bahwa muka gelombang berupa garis lurus (garis datar) yang tegak lurus pada arah rambat gelombang ($\pm \bar{k}$) yang menjalar hanya sepanjang satu arah, dengan karakteristik serba sama sepanjang arah tegak lurus pada arah rambatnya. Karena itu, gelombang datar ini secara efektif dapat dipandang sebagai gelombang satu dimensi.



Gambar 7.

Tempat kedudukan ujung vektor \bar{x} yang memenuhi syarat $\bar{k} \cdot \bar{x} = (\hat{k} \cdot \bar{x}) \bar{k} =$ konstanta pada t tertentu.

Jadi solusi untuk gelombang permukaan datar terbentuk :

$$\psi(\bar{x}, t) = f(\bar{k} \cdot \bar{x} \pm \omega t)$$

2.4 Fungsi Hankel

Di beberapa problem fisika ditemukan kombinasi-kombinasi kompleks dari fungsi Bessel jenis kedua dan kesatu yang begitu sering, sehingga ini sangat tepat untuk mentabulasi kombinasi dan definisi fungsi baru.

Fungsi baru yang didefinisikan memenuhi persamaan :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \tag{2.10}$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \tag{2.11}$$

dimana : $i = \sqrt{-1}$

Persamaan diatas yang disebut fungsi Bessel order n dan jenis kedua atau fungsi Hankel Order n

$$\text{dimana : } J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

2.5 Fungsi Delta Dirac

Fungsi delta dirac dinotasikan dengan $\delta(x)$ dan didefinisikan :

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty; x = 0 \\ 0; x \neq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

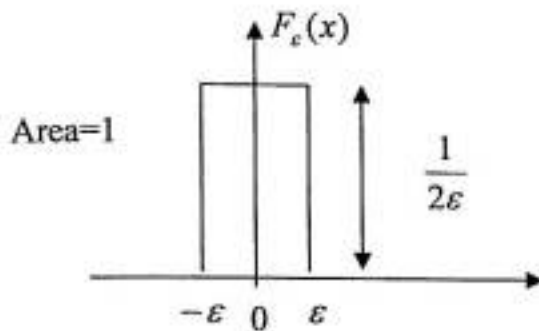
Dan mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.13)$$

Fungsi delta dirac adalah bukan fungsi yang mengandung pengertian biasa. Ini dapat didefinisikan dengan proses limit sebagai berikut:

$$F_{\epsilon}(x) = \begin{cases} 0; x < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}; -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0; x > \epsilon \end{cases} \quad (2.14)$$

Perhatikan gambar (8) berikut:



$$\delta(x) = \lim F_\epsilon(x) \quad (2.15)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.16)$$

2.6 Fungsi Green

Fungsi Green dinotasikan dengan $G(r_1, r_2)$ dengan bentuk persamaan:

$$G(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi|r_1 - r_2|} \quad (2.17)$$

dimana energi potensial bergerak pada $r = r_1$ sebagai titik asal menuju $r = r_2$

2.7 Integral Fredholm

Persamaan Integral Fredholm jenis pertama berupa persamaan integral berbentuk :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (2.18)$$

dimana: $K(x, t) = \text{kernel}$

$\varphi(t) = \text{fungsi tak diketahui}$

Jika kernel mempunyai bentuk khusus $k(x-t)$ dan limitnya tak hingga maka persamaan (2.18) menjadi :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt \quad (2.19)$$

Dengan demikian solusi (diasumsikan transformasinya ada) diberikan oleh :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\Phi(k)} e^{2\pi i k x} dk \quad (2.20)$$

Dimana : $F(k) = \mathcal{F}_x[f(x)](k)$ dan $\Phi(k) = \mathcal{F}_x[K(x)](k)$ merupakan transformasi

Fourier.

BAB III

PERGERAKAN TANAH PADA LEMBAH TERTIMBUN YANG DIPENGARUHI GELOMBANG PERMUKAAN DATAR

3.1 Menyelesaikan Model Pergerakan Tanah oleh Gelombang Permukaan Datar

Misalkan u_1 dan u_2 perpindahan pada arah z di setengah ruang dan lembah secara berurutan, untuk perambatan gelombang permukaan datar, perpindahannya memenuhi persamaan gelombang:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}; \quad j=1,2 \quad (3.1)$$

Dimana : $\beta_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}$ = kecepatan gelombang pada medium j tertentu

$j = 1,2$ tergantung pada setengah ruang dan lapisan secara berurutan

μ_j = modulus tertentu

ρ_j = massa jenis

t = waktu

Untuk gelombang harmonik yang tergantung pada waktu maka $u_j = e^{mt}$, akibatnya persamaan 1 menjadi :

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial^2 (e^{i\omega t})}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial (i\omega e^{i\omega t})}{\partial t} \\
&= \left(\frac{(i^2 \omega^2 e^{i\omega t})}{\beta_j^2} \right) \\
&= i^2 \cdot \frac{\omega^2}{\beta_j^2} \cdot e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $k_j = \frac{\omega}{\beta_j}$ dan $u_j = e^{i\omega t}$ maka persamaan menjadi persamaan

Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + k_j^2 u_j = 0 \quad (3.2)$$

Dengan pertimbangan bahwa sebuah gelombang datar dari satu amplitudo yang merambat terhadap atau pada permukaan setengah ruang elastis, maka

$$u^{(i)} = \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} \right) \right] \quad (3.3)$$

Diaman: $c_x = \frac{\beta_1}{\sin \gamma}$

$$c_y = \frac{\beta_1}{\cos \gamma}$$

$\gamma =$ sudut datang (gambar 10)

Untuk memperoleh dengan mudah kondisi batas permukaan setengah ruang pada

lembah tertimbun, maka dibutuhkan gelombang pantul / refleksi berbentuk :

$$u^{(r)} = \exp\left(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y}\right) \quad (3.4)$$

Jadi, jika tidak ada iregularitas maka dengan mudah diperoleh daerah solusi yakni:

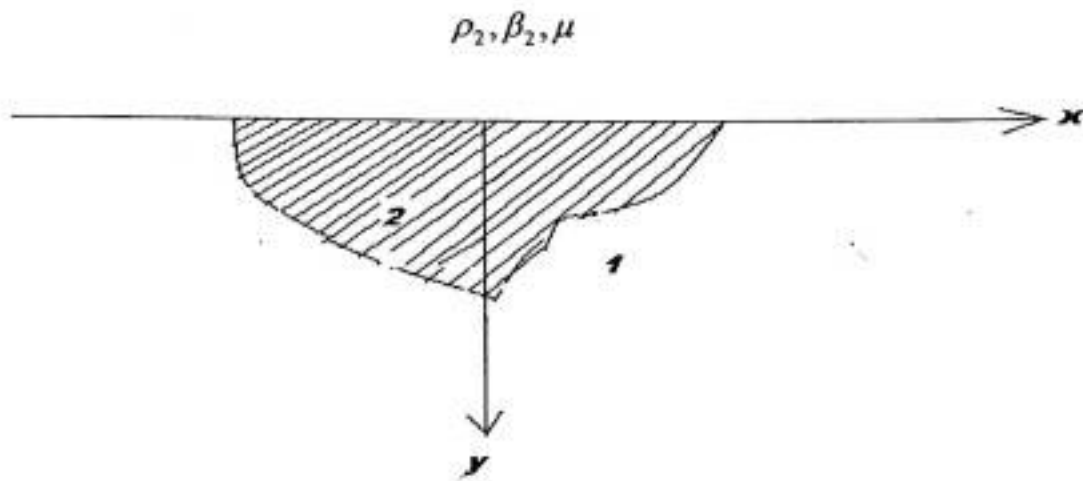
$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^{(i)} + u^{(r)} \\ u^{(0)} &= \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y}\right) + \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y}\right) \\ &= \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x}\right) \left[\exp i\omega \left(\frac{y}{c_y}\right) + \exp i\omega \left(-\frac{y}{c_y}\right)\right] \\ &= \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x}\right) \left[\left(\cos \frac{\omega y}{c_y} + i \sin \frac{\omega y}{c_y}\right) + \left(\cos \frac{\omega y}{c_y} - i \sin \frac{\omega y}{c_y}\right)\right] \\ &= \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x}\right) \left[\left(\cos \frac{\omega y}{c_y} + \cos \frac{\omega y}{c_y}\right) + \left(i \sin \frac{\omega y}{c_y} - i \sin \frac{\omega y}{c_y}\right)\right] \\ &= \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x}\right) \left[2 \cos \frac{\omega y}{c_y}\right] \\ \therefore u^{(0)} &= 2 \cos\left(\frac{\omega y}{c_y}\right) \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x}\right) \quad (3.5) \end{aligned}$$

Untuk memasukan pengaruh pada lembah tertimbun, maka solusi untuk daerah luar lapisan akan berbentuk:

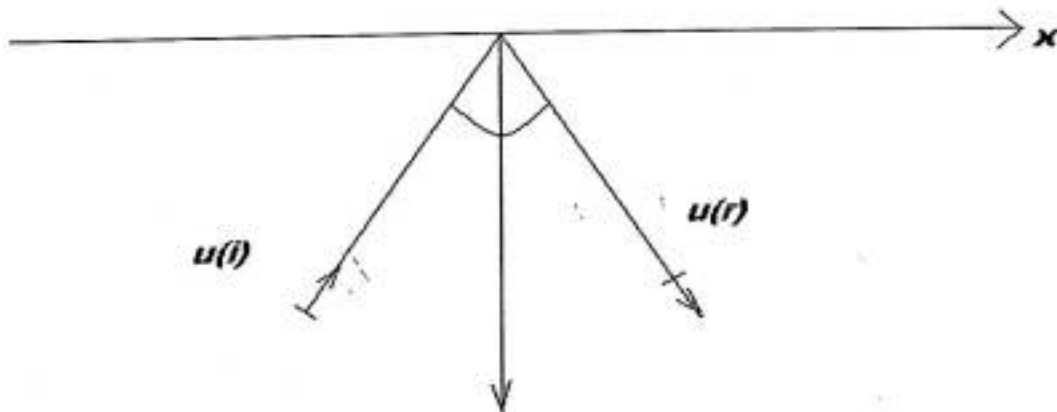
$$u_i = u^{(0)} + u^{(d)} \quad (3.6)$$

Dimana : $u^{(d)}$ = perpindahan ke gelombang difraksi

Pada lembah, perpindahan u_2 akan diakibatkan oleh gelombang refraksi.



Gambar 9
Daerah setengah ruang dan lembah tertimbun



Gambar 10
Peristiwa dan Refleksi gelombang datar, solusi bebas

Misalkan bahwa $u^{(d)}$ dan u_2 dapat ditulis sebagai penghasil potensial sendiri (Ursell; 1973) maka kurva c_1 dan c_2 (gambar 11) yang mana terdefinisi

didalam daerah setengah ruang dan lembahnya secara berurutan, maka:

$$u^{(d)}(P) = \int_1 \sigma_1(Q)G_1(P,Q)dS_Q \quad (3.7)$$

Dimana : $Q \in c_1; P \in E \cup \partial E$ (gambar 11.b)

$$u_2(P) = \int_2 \sigma_2(Q)G_2(P,Q)dS_Q \quad (3.8)$$

Dimana: $Q \in c_2; P \in R \cup \partial E$ (gambar 11.c)

$\sigma_1(Q)$ dan $\sigma_2(Q)$ = fungsi kepadatan yang merupakan fungsi tidak umum yang hasilnya diperoleh dari syarat/kondisi batas ; G_1 dan G_2 adalah fungsi Green sehingga semua memenuhi persamaan :

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + k_j^2 u_j = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 \right) u_j = 0$$

Karena perpindahan u_j tergantung pada posisi P dan Q maka

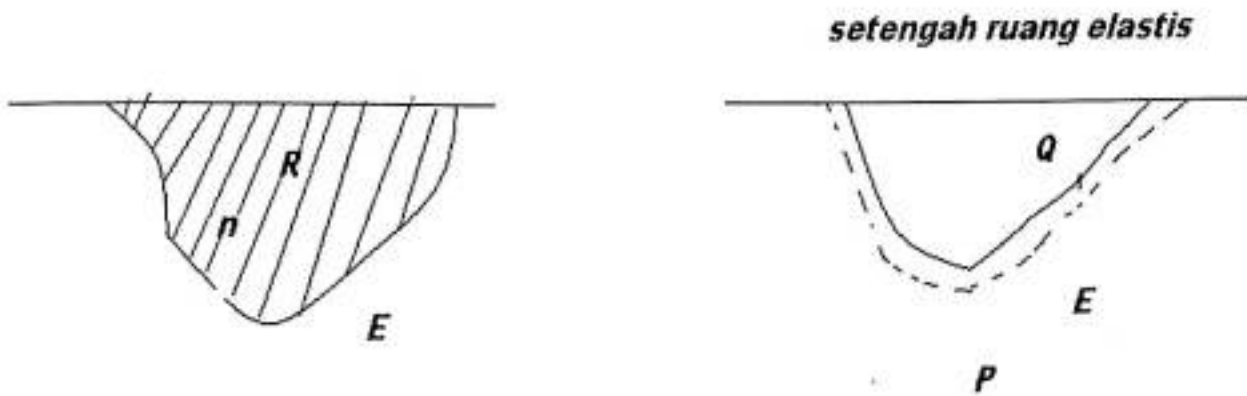
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 \right) G_j(P,Q) = 0$$

Karena fungsi Direc Delta = $\begin{cases} \infty; (x,y)=0 \\ 0; (x,y) \neq 0 \end{cases}$

dan \bar{r}, \bar{r}_0 merupakan vektor posisi pada P dan Q, sehingga:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 \right) G_j(P,Q) = -\delta(|\bar{r} - \bar{r}_0|) \quad (3.9)$$

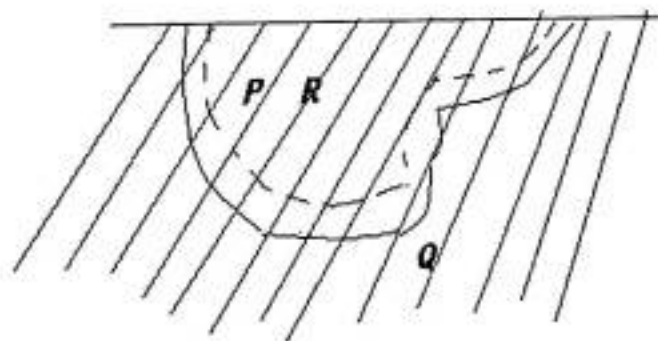
Dengan kondisi batas bebas: $\frac{\partial G_j}{\partial y} = 0$; pada $y=0$; $j=1,2$ (3.10)



Gambar 11.a

Gambar 11.b

lembah setengah ruang elastis



Gambar 11.c

Gambar 11. definisi daerah R dan E serta kurva c_1 , c_2 , dan ∂E

Fungsi Green diberikan oleh

$$G_j(P,Q) = \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(k_j r_1) + H_0^{(2)}(k_j r_2) \} ; j=1,2 \quad (3.11)$$

Dimana: $H_0^{(2)}(.) = J_0(.) - iY_0(.)$ fungsi Hankel jenis kedua dan berorder nol

$r_1 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}$ = jarak antara titik P(x,y) dan Q(x₀,y₀)

$r_2 = [(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2]^{1/2}$ = jarak antara titik P dan bayangan Q dengan koordinat (x₀,y₀).

Pada persamaan (3.11) fungsi Hankel menggambarkan gelombang permukaan datar yang berbentuk silinder yang mana merambat sangat jauh atau tak terbatas dengan kecepatan yang memenuhi kondisi radiasi Sommerfeld's (Sommerfeld's, 1949).

Kondisi batas bebas sangat sesuai dengan u_1 dan u_2 . Kondisi kontinu seharusnya memenuhi di atas daerah ∂E , untuk perpindahan dan stress secara berurutan yakni:

$$u_1 = u_2 \tag{3.12}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{3.13}$$

Dimana : n= vektor normal pada batas ∂E (gambar 3a)

Berdasarkan persamaan (3.6) dan (3.7), diperoleh :

$$u_1 = u^{(0)} + u^{(d)}$$

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + u^{(d)}(P)$$

$$= u^{(0)}(P) + \int_{S_1} \sigma_1(Q) G_1(P,Q) dS_Q$$

$$\therefore u_1(P) = u^{(0)}(P) + \int_{S_1} \sigma_1(Q) G_1(P,Q) dS_Q \tag{3.14}$$

dimana: $P \in E \cup \partial E$

Substitusi persamaan (3.8) dan (3.14) ke persamaan (3.12), diperoleh:

$$u_1 = u_2$$

$$u_1(P) = u_2(P)$$

$$u^{(0)}(P) + \int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q = \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q$$

$$\int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q - \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q = -u^{(0)}(P) \quad (3.15)$$

Substitusi persamaan (3.8) dan (3.14) ke persamaan (3.13), diperoleh:

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1(P)}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2(P)}{\partial n}$$

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial n} [u^{(0)}(P) + \int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q] = \mu_2 \frac{\partial}{\partial n} [\int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q]$$

$$\mu_1 \left[\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q \right] = \mu_2 \left[\frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q \right]$$

$$\left[\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q \right] = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) G_1(P, Q) dS_Q - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) G_2(P, Q) dS_Q = -\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n}$$

$$\int_{\Sigma_1} \sigma_1(Q) \frac{\partial G_1(P, Q)}{\partial n} dS_Q - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{\Sigma_2} \sigma_2(Q) \frac{\partial G_2(P, Q)}{\partial n} dS_Q = -\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n}$$

Karena $P \in \partial E$, n_P = vektor normal pada batas titik P, dan $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \alpha$, maka

persamaan diatas menjadi:

$$\therefore \int_{\Gamma_1} \sigma_1(Q) \frac{\partial G_1(P, Q)}{\partial n_p} dS_Q - \alpha \int_{\Gamma_2} \sigma_2(Q) \frac{\partial G_2(P, Q)}{\partial n_p} dS_Q = -\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n_p} \quad (3.16)$$

Persamaan (3.15) dan (3.16) akan dibuat dalam sistem persamaan integral fredholm jenis pertama dengan σ_1 dan σ_2 sebagai fungsi tak diketahui.

Untuk memecahkan solusi persamaan dengan cara yang praktis, akan ditentukan dengan luasan minimum yaitu solusi mean square error:

$$\int_{\Omega} \left\{ |u_1 - u_2|^2 + f \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial n} \right|^2 \right\} dS_p \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) di atas bernilai minimum dan f merupakan faktor normalisasi.

3.2 Solusi Numerik Model Pergerakan Tanah Oleh Gelombang Permukaan Datar

Solusi numerik pada kasus daerah yang bermaterial komposit sebenarnya merupakan pengembangan solusi numerik pada material homogen. Oleh karena itu persamaan dan pendekatan-pendekatan numerik pada daerah homogen juga berlaku pada daerah komposit.

Dalam hal ini, guna mendapatkan solusi numerik maka dimisalkan :

$\sigma_j(Q)$; $j=1,2$ dalam bentuk:

$$\sigma_1(Q) = \sum_{m=1}^M a_m \delta(|Q - Q_m|), Q, Q_m \in c_1 \quad (3.18)$$

$$\sigma_2(Q) = \sum_{n=1}^N b_n \delta(|Q - Q_n|), Q, Q_n \in c_2 \quad (3.19)$$

Dimana M dan N merupakan bilangan yang berasal dari maksimal dari a_m dan b_n pada titik-titik $Q_m \in c_1$ dan $Q_n \in c_2$ secara berurutan.

Karena persamaan (3.18) dan (3.19) maka persamaan (3.8) dan (3.14) menjadi:

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + \sum_{m=1}^M a_m G_1(P, Q_m); P \in E \quad (3.20)$$

$$u_2(P) = \sum_{n=1}^N b_n G_2(P, Q_n); P \in R \quad (3.21)$$

Dengan cara yang sama, persamaan (3.15) dan (3.16) dapat didiskritkan dengan menentukan L pada titik-titik P_l , diperoleh:

$$\sum_{m=1}^M a_m G_1(P_l, Q_m) - \sum_{n=1}^N b_n G_2(P_l, Q_n) = -u^{(0)}(P_l); l = 1, 2, \dots, L \quad (3.22)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial G_1(P_l, Q_m)}{\partial n_{p_l}} - \alpha \sum_{n=1}^N b_n \frac{\partial G_2(P_l, Q_n)}{\partial n_{p_l}} = -\frac{\partial u^{(0)}(P_l)}{\partial n_{p_l}} \quad (3.23)$$

Persamaan (3.22) dan (3.23) akan dibentuk dalam sebuah sistem persamaan linear $2L$ dengan $M + N$ yang tidak diketahui. Jika $2L = M + N$, sistem ini memiliki hasil yang unik sehingga mudah mendapat informasi syarat batas yaitu dengan mengambil $2L > M + N$.

Dengan demikian persamaan (3.22) dan (3.23) dapat ditulis sebagai :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.24)$$

Solusi $\{x\}$ yakni minimum mean square error yang ekuivalen dengan persamaan (3.17) dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan :

$$[A^*]^T [W][A]\{x\} = [A^*]^T [W]\{b\} \quad (3.25)$$

Dimana: $[A^*]$ = tranpose konjugat dari matriks koefisien $[A]$

$[W]$ = matriks diagonal yang memuat faktor normal

Hasil sistem persamaan yang diperoleh memiliki orde $(M + N) \times (M + N)$.

Pergerakan tanah yang terjadi merupakan kasus komposit, maka hubungan resiprokal yang terjadi adalah:

$$\int_c \left(u_j \frac{\partial G_j}{\partial n} - G_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) dS_j = 0; j = 1, 2 \quad (3.26)$$

Persamaan integral diturunkan dengan memperhatikan kontur yang membatasi domain yang ditinjau. Bila material komposit terdiri dari material pertama yang bagian luarnya dibatasi oleh kontur c_1 dan material kedua seluruhnya berada dalam material pertama dan dibatasi oleh kontur c_2 maka kontur yang membatasi material pertama seluruhnya adalah kontur tertutup sederhana $c_1 \cup c_2$.

Dengan mengeluarkan sebuah titik (a, b) dari dalam kontur tertutup yang membatasi material pertama, misalkan kontur ini berbentuk lingkaran kecil Γ dengan jari-jari ε maka diperoleh:

$$\int_{c_1 + c_2 + \Gamma} \left(u_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3.27)$$

$$\psi u_1(a, b) = \int_{c_1 + c_2} \left(u_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS \quad (3.28)$$

Dimana ψ adalah konstanta yang merupakan nilai tengah Cauchy. Konstanta tersebut akan bernilai 1 jika titik (a, b) pada material pertama berada dalam kontur



$c_1 \cup c_2$ dan bernilai 0.5 jika titik (a,b) berada pada kontur $c_1 \cup c_2$. Disini kontur c_1 dipilih dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam sedangkan kontur c_2 dipilih searah jarum jam.

Dengan mendiskritkan kontur c_1 dan c_2 , katakanlah c_1 ke dalam N segmen dan c_2 ke dalam M segmen. Sehingga persamaan (3.28) menjadi:

$$\psi u_1(a,b) = \sum_{i=1}^N \int_{c_1} \left(u_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS + \sum_{i=1}^M \int_{c_2} \left(u_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS \quad (3.29)$$

Demikian pula untuk kontur c_2 yang membatasi material kedua yakni:

$$\psi u_2(c,d) = \sum_{i=1}^M \int_{c_2} \left(u_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dS \quad (3.30)$$

Selanjutnya dengan melakukan pendekatan elemen konstan yaitu dengan menganggap $u_1, \frac{\partial u_1}{\partial n}$ pada kontur c_1 dan c_2 serta $u_2, \frac{\partial u_2}{\partial n}$ pada kontur c_2 sebagai suatu konstan, maka persamaan (3.29) dan (3.30) menjadi:

$$\psi u_1(a,b) = \sum_{i=1}^N \left\{ u_1 \int_{c_1} \frac{\partial G_1}{\partial n} dS - \frac{\partial u_1}{\partial n} \int_{c_1} G_1 dS \right\} + \sum_{i=1}^M \left\{ u_1 \int_{c_2} \frac{\partial G_1}{\partial n} dS - \frac{\partial u_1}{\partial n} \int_{c_1} G_1 dS \right\} \quad (3.31)$$

$$\psi u_2(c,d) = \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial n} \int_{c_2} G_2 dS - u_2 \int_{c_2} \frac{\partial G_2}{\partial n} dS \right\} \quad (3.32)$$

Untuk segmen ke-j, pendekatan solusi (3.31) dan (3.32) menjadi:

$$\psi u_j^{(i)}(a,b) = \sum_{i=1}^N (u_i^1 G_y^1 - \Gamma_i^1 P_{ij}^1) + \sum_{i=N+1}^{N+M} (u_i^1 G_y^1 - \Gamma_i^1 P_y^1) \quad (3.33)$$

Dan

$$\psi u_j^2(c, d) = \sum_{i=N+1}^{N+M} (\Gamma_i^2 P_y^2 - u_i^2 G_y^2) \quad (3.34)$$

Untuk propagasi gelombang yang kontinyu, simpangan gelombang dan shear stress yang dibawa oleh material pertama harus sama dengan yang diteruskan ke material kedua dan sebaliknya. Hal ini sesuai dengan persamaan (3.12) dan (3.13).

Jika diberikan N buah syarat awal yang diketahui pada batasan luar material pertama pada kontur c_1 maka persamaan (3.12) dan (3.13) beserta syarat awalnya akan segera membentuk $N+2M$ persamaan linear dengan $N+2M$ variabel yang tidak diketahui.

Persamaan ini disusun seperti persamaan (3.24) dan diselesaikan, maka simpangan u dan $\frac{\partial u}{\partial n}$ pada material 1 maupun material 2 akan diketahui.

Semua perhitungan yang telah dijelaskan dapat dihitung dengan menggunakan komputer dalam hal ini menggunakan program guna mempermudah hitungan. Dalam program ini, kesalahan numerik bisa saja terjadi, mengingat banyaknya pendekatan yang digunakan..

3.3 Interpretasi Model Pergerakan Tanah Pada Beberapa Bentuk Lembah

Untuk model yang tak berdimensi, lembah tertimbun direpresentasikan sebagai sebuah dataran horizontal dengan ketebalan yang seragam. Peristiwa dan difraksi gelombang hanya sepanjang arah vertikal. Amplitudo perpindahan berada bebas pada permukaan (Roesset and Whitman, 1969) yaitu :

$$\therefore |u| = 2[\cos^2(k_2 H) + (\alpha\beta_1 / \beta_2)^2 \sin^2(k_2 H)]^2 \quad (3.35)$$

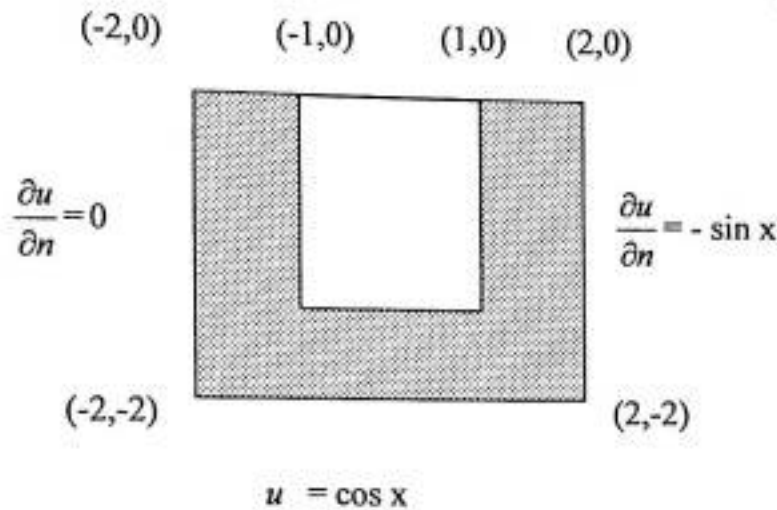
Dimana: H = ketebalan seragam

Jika terdapat irregulitas dengan dasar horizontal dan peristiwa gelombang datang secara vertikal, analisis yang tidak berdimensi akan memberikan hasil yang baik. Tapi jika lereng-lereng merupakan lembah dan dalamnya lapisan kira-kira sama seperti lebarnya, lateral interferensinya signifikan, maka inilah yang menjadikan persamaan (3.35) tidak digunakan.

Secara umum, program yang telah dibuat untuk menghitung simpangan gelombang dan turunanya yang terjadi pada lembah, dapat dipakai pada bentuk lembah seperti bentuk persegi panjang, segitiga maupun setengah lingkaran.

Contoh :

Sebagai ilustrasi keakuratan teknik penyelesaian sebagaimana yang telah dijelaskan di atas, maka ditinjau suatu domain material komposit yang terdiri atas dua macam material homogen. Material pertama menempati daerah persegi yang dibatasi oleh vertex $(-2,0)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,0)$, sedangkan di dalam material ini terdapat material kedua yang dibatasi oleh vertex $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$. Sedangkan syarat batasnya merupakan masalah Robin (masalah campuran) dengan nilai λ untuk material kedua adalah 1.



Gambar 12

Dari gambar 12, dapat diperoleh nilai λ untuk material pertama sebesar 1 dengan memasukan spesifikasi syarat batas.

$$u(x,0) = \cos x$$

$$u(x,-2) = \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(-2, y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(2, y) = -\sin x$$

Ke dalam persamaan Helmholtz (3.2)

Kemudian, jika masing-masing sisi daerah yang berada di sebelah luar (kontur c_1) dibagi atas 2 segmen yang sama panjang, demikian pula untuk daerah yang berada dalam (kontur c_2) maka akan diperoleh total $N=8$ dan $M=8$.

Setiap segmen harus ditentukan titik ujung dan titik tengahnya terlebih dahulu. Contohnya untuk sisi pertama dengan batas $(-2,0)$ sampai $(-2,-2)$

Segment 1 : titik ujung bawahnya (-2,0) dan titik ujung atasnya (-2,-1) dengan titik tengahnya (-2,-0,5).

Segment 2 : titik ujung bawahnya (-2,-1) dan titik ujung atasnya (-2,-2) dengan titik tengahnya (-2,-1,5).

Kemudian ditentukan nilai-nilai solusi u serta fungsi Green dan turunannya pada setiap titik segmen yang berada di kontur c_1 .

Yang mana semua nilai $G_y^{(1)}$ dan $P_y^{(1)}$ dapat dihitung dengan menggunakan metode Bode 10 titik, yaitu dengan mencari nilai fungsi di 10 buah titik untuk mendekati nilai integralnya.

Adapun rumus metode Bode 10 titik adalah sebagai berikut :

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx = \frac{9h}{89600} \{2587(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5)\} - \frac{173}{14620} f^{(10)}(\xi)h^{11}$$

Dengan $f(x_i) = f_i$, $f^{(10)}$ adalah turunan kesepuluh fungsi f , $h = x_{i+1} - x_i$, dan ξ menyatakan nilai errornya. Metode Bode ini juga digunakan untuk menghitung nilai $G_y^{(2)}$ dan $P_y^{(2)}$.

Selanjutnya ditentukan pula nilai-nilai fungsi Green dan turunannya pada setiap titik tengah segmen yang berada di titik kontur c_2 . Hanya saja perlu diingat bahwa kontur c_2 merupakan batas antara material pertama dan kedua, sehingga nilai-nilai fungsi Green dan turunannya di kontur ini memenuhi PD Helmholtz yang berlaku

pada masing-masing material. Dan pada akhirnya, program yang dibuat akan memudahkan untuk mencari solusi pada setiap titik-titik yang dimaksud.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dalam mencari suatu solusi numerik terutama untuk persoalan pergerakan tanah yang menggunakan PD Helmholtz dapat digunakan metode elemen batas yang memanfaatkan batasan domainnya untuk mendekati solusinya. Untuk mendekati domain digunakan bentuk poligon (segi banyak). Dalam hal ini bentuk poligon yang dimaksud merupakan bentuk dari lembah yang tertimbun. Jadi metode ini pada dasarnya membagi-bagi batasan domain menjadi segmen yang lebih kecil. Kemudian segmen-segmen yang dibagi tadi dibagi lagi untuk mendekati integral dengan menggunakan metode bode 10 titik.

Dalam penggunaan metode ini perlu diketahui bahwa semakin banyak pembagian yang dilakukan pada pembagian domain maka semakin akurat hasil yang diperoleh. Jadi dengan melakukan proses perhitungan akan didapatkan solusi dan turunan solusi pada batasan domain dimana solusi tersebut berbentuk numerik karena solusi numeriknya terlalu sulit diperhitungkan.

Semua perhitungan diatas dapat dilakukan dengan program yang diberikan pada lampiran 1. pertama-tama yang dilakukan adalah dengan menentukan koefisien dari persamaan Helmholtz setelah itu ditentukan domain dengan beberapa segmen dimana segmen yang dimaksud dalam tulisan ini terdiri atas daerah komposit yaitu

Daftar Pustaka



- Arfken, George B. "matemathical methods for physicsts", edisi IV, New York, Academic Press.
- J. Sanchez, Fransisco; Sesma; A. Esquivel, Jorge "Ground Motion On Alluvial Valleys Under Incident Plane SH Waves", Bull. Seism. Soc. Am.69, 1979.
- Kusuma, Jeffry. "Persamaan Diferensial Helmholtz", dalam mata kuliah Persamaan Diferensial paresial dan masalah syarat batas(ujung pandang, 8 Desember 1994).
- Trifunac,.M.D, "Survace Motion Of Esemi-Cylindrical Alluvial Valley For Incident Plane SH Waves", Bull.Seism. Soc.Am.61,1971.
- Tjia, MO (1993). "Gelombang", Bandung,, Jurusan Fisika FMIPA ITB.
- Tippler, Paul A (1998). "Fisika Untuk Sains Dan Teknik", Jakarta, Erlangga.

Lampiran

Program Utama

```
Program helmholtz_lembah_tertimbun;
{program ini untuk menyelesaikan pdhelmholtz 2d guna
memprediksi amplitudo gelombang permukaan datar(SH)}
uses crt,green,bessel,uint,tint,uinta,uintb,tinta,tintb;
type ahelper = array [1..10000] of real;
  mata = array [1..300] of real;
  matb = array [1..300] of integer;
var part0,part1,part2,part3,part4,part5,part6,part7,part8 :^ahelper;
  jum,ss,nside1,nside2,i,j,h,x,jk,nc,irr,itt,mn,nn1,nn2,nn12,nn21 : integer;
  dx,dy,ds,tem1,tem2,temp,ape,daa,dab,dac,err,bong,xi,yi,k1,k2,t: real;
  bg,fr,int,phii,phix,phiy : real;
  wk,bb,ap,cp,bp,xx,phi,phi2,phin,phini : mata;
  xxl,xxh,yyl,yyh,xl,yl,xh,yh,xt,yt,xn,yn,val : mata;
  nsegm,code : matb;
  pasw,ch,ans1,ans2 : char;
const small = 1.e-35;
label 10,20,30,40,50;
function getmat(i,j : integer) : real;
{this function is to get the matrix(300,300)value}
var index : longint;
begin
  index :=300*(i-1) + j;
  if index <= 10000 then getmat := part0^[index] else
  if index <= 20000 then getmat := part1^[index-10000] else
  if index <= 30000 then getmat := part2^[index-20000] else
  if index <= 40000 then getmat := part3^[index-30000] else
  if index <= 50000 then getmat := part4^[index-40000] else
  if index <= 60000 then getmat := part5^[index-50000] else
  if index <= 70000 then getmat := part6^[index-60000] else
  if index <= 80000 then getmat := part7^[index-70000] else
  getmat:= part8^[index-80000]
end;
procedure putmat(i,j: integer; r : real);
{ this procedure is to put the matrix(300,300)value}
var index:longint;
begin
  index := 300*(i-j)+j;
  if index <= 10000 then part0^[index] :=r else
  if index <= 20000 then part1^[index-10000] :=r else
  if index <= 30000 then part2^[index-20000] :=r else
```

```

if index <= 40000 then part3^[index-30000] :=r else
if index <= 50000 then part4^[index-40000] :=r else
if index <= 60000 then part5^[index-50000] :=r else
if index <= 70000 then part6^[index-60000] :=r else
if index <= 80000 then part7^[index-70000] :=r else
part8^[index-80000] :=r
end;
begin
clrscr;
mark(part0);mark(part1);mark(part2);
mark(part3);mark(part4);mark(part5);
mark(part6);mark(part7);mark(part8);
{ persiapan data yang perlu untuk boundary-nya }
clrscr;
writeln ( ' ----- ');
writeln ( ' ini adalah pd helmholtz 2d ');
writeln ( ' ----- ');
writeln;
writeln ( ' direvisi oleh :mauliddin ');
writeln;
writeln ('pd helmholtz 2d menggunakan metode integral batas');
writeln ( ' untuk menyelesaikan masalah helmholtz ');
writeln ('yang memenuhi beberapa syarat batas pada boundary c');
writeln ( ' dari daerah berbatas r yang merupakan 2d ');
writeln;
writeln ( ' boundary c dianggap sebagai segi banyak ');
writeln;
gotoxy (16,24);
writeln ('tekan tombol spacebar');
repeat until keypressed;
clrscr; write('nilai konstan materi I '); readln(k1);
write('nilai konstan materi II '); readln(k2);
writeln;
write('jumlah segi banyak materi I '); readln (nside1);
write('jumlah segi banyak materi II '); readln (nside2);
writeln;
write('masukkan jumlah segmen M untuk setiap segi banyak ');
write('dan koordinat titik-titik');
write('ujung tiap sisinya.penentuan arah untuk batasannya');
write('menurut cara berlawanan');
write('arah jarum jam untuk materi I dilanjutkan dengan ');
write('materi II searah jarum jam ');writeln;
writeln;
write('mis: anda ingin membagi jarak antara titik (2,1)-(2,0)');

```

```

write('menjadi 5 segmen ,anda tulis : 5 2 1 2 0');
writeln;
write('sisi sebelah luar / materi I ');
writeln;
for i :=1 to nside1 do
begin
write('side');writeln (i);
read(nsegm[i],xxl[i],yyl[i],xxh[i],yyh[i]);
writeln;
end;
writeln;
writeln('sisi sebelah dalam / materi II ');
writeln;
for i:=(nside1+1)to(nside1 + nside2)do
begin
write('side');writeln(i);
read(nsegm[i],xxl[i],yyl[i],xxh[i],yyh[i]);
writeln;
end;
nn1:=0;nn2:=0;
{nn1=banyaknya boundary pada materi I dan II;
nn2=banyaknya boundary pada materi II;}
for i:=1 to(nside1)do
nn1 :=nn1+nsegm[i];
for i:=(nside1 + 1)to(nside1 + nside2)do
nn2:=nn2 + nsegm[i];
nc:=1 ;nn12:=nn1 + nn2;nn21:=nn1-nn2;
for i:= 1 to (nside1 + nside2)do
for j:= 1 to nsegm[i] do
begin
dx:=(xxh[j]-xxl[i])/nsegm[i]; dy:=(yyh[j]-yyl[i])/nsegm[i];
ds:= sqrt (dx*dx + dy*dy);
xl[nc]:=xxl[i] + dx*(j-1); yl[nc]:= yyl[i]+dy*(j-1);
xh[nc]:=xxl[i] + j*dx; yh[nc]:=yyl[i] + j*dy;
xt[nc]:=(xl[nc] + xh[nc])/2; yt[nc]:=(yl[nc] + yh[nc])/2;
xn[nc]:=dy/ds;yn[nc]:=-dx/ds;
nc:=nc+1;
end;
nc:=nn21 + 1;
for i:=(nn1 + 1) to nn21 do
begin
xl[i]:= xl[nc];yl[i]:=yl[nc];
xh[i]:= xh[nc];yh[i]:=yh[nc];
xt[i]:= xt[nc];yt[i]:=yt[nc];

```



```

xn[i]:= xn[nc];yn[i]:=yn[nc];
nc:=nc + 1;
end;
clrscr;
writeln;
write('tentukan bentuk syarat pada');
writeln('tiap titik tengah dengan bentuk:');
writeln;
writeln('titik tengah (x,y)=kode nilai');
writeln;
writeln('ket:*kode=0 artinya berbentuk U');
writeln('  kode=1 artinya berbentuk dU/dn');
writeln('  *nilai adalah nilai syarat batasnya');
writeln;
writeln('masukkan kode dan nilai !!');
writeln;
for i := 1 to nn12 do
begin
write(i:2,'titik tengah ('xt[i]:6:3,',',yt[i]:6:3,')=');
readln (code[i],val[i]);
end;
{membuat sistem aljabar linearnya }
for i :=1 to nn12 do
begin
bb[i]:=0.0;xx[i]:=0.0;
end;
for i := 1 to nn1 do
begin
for j:= 1 to nn21 do
begin
tem1:= p(i,j,xl[j],yl[j],xh[j],yh[j],xt[i],yt[i],xn[j],yn[j],k1);
tem2:= q(i,h,xl[j],yl[j],xh[j],yh[j],xt[i],yt[i],k1);
if (code[j] = 0) then begin
temp:= tem2;putmat(i,j,temp);
bb[i]:= bb[i]+val[j]*tem1;
{ end else
if (code[j] = 1) then begin
bb[i]:= bb[i]+val[j]*0.25*tem1;
end else
if (code[j] = 2) then begin
temp:= -tem1;putmat(i,j,temp);
bb[i]:=bb[i]-val[j]*tem2; }
end else begin
temp:= -tem1;putmat(i,j,temp);

```

```

    bb[i]:=bb[i]-val[j]*tem2;
end; {endif}
end;
end;
for i:=1 to nn21 do
begin
if (code[i] = 0) then begin
    bb[i]:= bb[i] - 0.5*val[i];
end else begin
    temp:= getmat (i,i) + 0.5; putmat(i,i,temp);
end; {endif}
end;
for i := 1 to nn1 do
begin
for j := (nn21 + 1) to nn1 do
begin
    tem1 := p (i,j,xl[j],yl[j],xh[j],yh[j],xt[j],yt[x],xn[j],yn[j],k1);
    temp := - tem1;
    if(i=j)then begin
        temp := temp + 0.5 ;
    end; {endif}
    putmat (i,j,temp);
end; end;
for i := 1 to nn1 do
begin
for j:=(nn1 + 1) to nn12 do
begin
    jk := j-nn2;
    tem2:= q(i,jk,xl[jk],yl[jk],xh[jk],yh[jk],xt[i],yt[i],k1);
    temp:= tem2;putmat(i,j,temp);
end;
end;
for i := (nn1 + 1) to nn12 do
begin
for j:=1 to nn21 do
begin
    temp:= 0.0;putmat (i,j,temp);
end;
end;
for i :=(nn1 + 1)to nn12 do
begin
for j:= (nn21 + 1) to nn1 do
begin
    tem1 := p(i,j,xl[j],yl[j],xh[j],yh[j],xt[i],yt[i],xn[j],yn[j],k2);

```



```
temp := tem1;
if(i=j+nn2) then begin
  temp:=temp + 0.5;
  end; {endif}
  putmat(i,j,temp);
  end;
end;
for i :=(nn1 + 1)to nn12 do
  begin
  for j:= (nn1+1) to nn12 do
  begin
  tem2:= q(i,j,xl[j],yl[j],xh[j],yh[j],xt[i],yt[i],k2);
  temp:=-tem2;
  putmat(i,j,temp);
  end;
  end;
  {menyelesaikan sistem aljabar liniernya}
  itt:=0;
10:for i:= 1 to nn12 do
  begin
  ape:=0.0;
  for j := 1 to nn12 do
  ape:= ape + getmat(i,j)*xx[j];
  wk[i] := bb[i] - ape;
  end;
  for i := 1 to nn12 do
  begin
  ape := 0.0;
  for j := 1 to nn12 do
  ape:= ape + getmat(j,i)*wk[j];
  ap[i] := ape;
  cp[i]:= ape;
  end;
  irr := 0;
20 : itt := itt + 1; irr :=irr + 1;
  for i := 1 to nn12 do
  bp[i] := 0.0;
  for j := 1 to nn12 do
  begin
  for i := 1 to nn12 do
  bp[i] := bp[i] + getmat(i,j)*ap[j];
  end;
  daa:= 0.0;dab := 0.0;
  for j := 1 to nn12 do
```

```

begin
  daa:= daa + cp[j]*cp[j];dab:= dab + bp[j]*bp[j];
  end;
if ((dab < small) and (irr = 1)) then goto 30;
if (dab < small)then goto 10;
dac := daa/dab;
for i := 1 to nn12 do
begin
wk[i] := wk[i] - dac*bp[i];
xx[i] := xx[i] + dac*ap[i];
end;
err := 0.0;
for i:= 1 to nn12 do
err:= err + wk[i]*wk[i];
if ((err < small) or (itt = (nn12+2)*nn12)) then goto 30;
if(irr = nn12) then goto 10;
bong := 0.0;
for i := 1 to nn12 do
begin
ape := 0.0;
for j := 1 to nn12 do
ape:= ape + getmat(j,i)*wk[j];
cp[i] := ape;
bong := bong + ape*ape;
end;
bong := bong/daa;
for i := 1 to nn12 do
ap[i] := cp[i] + bong*ap[i];
goto 20;
30 : writeln;
release(part0);release(part1);release(part2);
release(part3);release(part4);release(part5);
release(part6);release(part7);release(part8);
{ hasil numerik pada boundary }
for i := 1 to nn21 do
begin
if ( code[i] = 0 ) then begin
phi[i]:= val[i];phi2[i]:=val[i]-0.5;
phin[i]:=xx[i];phini[i]:=xx[i]-0.5;
end else begin
phi[i] :=xx[i];phi2[i]:=xx[i]-0.5;
phin[i] :=val[i];phini[i]:=val[i]-0.5;
end;
end;
end;

```

```

j:= 1;
for i:= (nn21 + 1 ) to nn1 do
begin
phi[i] := xx[i]; phin[i] := xx [nn1 + j];
j := j+1;
end;
bg := nn1/20;
fr := frac(bg);
int := bg-fr;
jum := 0;
repeat
clrscr;
writeln('-----');
writeln(' titik batas    Ur  Ui  dU/dnr  dU/dni ');
writeln('-----');
for i:= 20*jum + 1 to 20*(jum+1)do
begin
write('(',xt[i]:4:4,',',yt[i]:4:4,')');
writeln(",phi[i]:8:3,",phi2[i]:8:3,",phin[i]:8:3,",phini[i+1]:8:3);
end;
writeln('-----');
repeat
pasw := readkey;
until pasw = 'Y';
jum := jum + 1
until (jum = int);
if ss < 0.0 then
begin
clrscr;
writeln('-----');
writeln(' titik batas    Ur  Ui  dU/dnr  dU/dni ');
writeln('-----');
for i := 20*jum+1 to (20*jum+ss)do
begin
write('(',xt[i]:4:4,',',yt[i]:4:4,')');
writeln(",phi[i]:8:3,",phi[i+1]:8:3,",-phin[i]:8:3,",phin[i+1]:8:3);
end;
writeln('-----'); readln;
writeln;writeln;readln;
end; end.

```

Program Unit

```
unit integ;
interface
function inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,h: real) : real;
{ fungsi ini untuk menghitung integral numerik
menggunakan metode Bode 10 titik f0-f9
merupakan nilai fungsi integral pada titik x0 - x9
sedangkan h merupakan jarak antar titik yang sama besar.}
implementation
function inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,h: real) : real;
var tem : real;
begin
tem := 2857*(f0+f9) + 15741*(f1+f8) + 1080*(f2+f7);
tem := tem + 19344*(f3+f6) + 5778*(f4+f5);
inte:= 9 * h * tem / 89600;
end;end.
```

```
unit bessel;
interface
function Bes(x:real; m,n:integer):real;
{ fungsi ini untuk menghitung nilai fungsi Bessel dan turunannya
untuk PD Helmholtz,dengan
m adalah jenis : m = 1 ---> J
m = 2 ---> Y
n adalah ordo : n = 0 ---> ordo 0
n = 1 ---> ordo 1 }
implementation
function bes(x:real; m,n:integer ): real;
var xp3,tpx,f0,f1,teta0,tetal : real;
J0,Y0,J1,Y1,pi2,x32,x33,x34,x35,x36,x38,x310,x312 : real;
begin
if (x<3) then begin
xp3 := x/3;pi2 := 2/pi;
x32 := sqr(xp3);x34 := sqr(x32); x36 := x32 * x34;
x38 := sqr(x34);x310 := x32 * x38;x312 := x32 * x310;
J0 := 1 - 2.249997*x32 + 1.2656208*x34 - 0.3163866*x36;
J0 := J0 + 0.0444479*x38 - 0.0039444*x310 + 0.0002100*x312;
J1 := 0.5 - 0.56249985*x32 + 0.21093573*x34 - 0.03954289*x36;
J1 := J1 + 0.00443319*x38 - 0.00031761*x310;
J1 := x * (J1 + 0.00001109*x312);
if (x>0) then begin
Y0 := (pi2 * ln(x/2) * J0) + 0.36746691 + 0.60559366*x32;
Y0 := Y0 - 0.74350384*x34 + 0.25300117*x36 - 0.04261214*x38;
```

```

Y0 := Y0 + 0.00427916*x310 - 0.00024846*x312;
Y1 := (pi2 * x * ln(x/2) * J1) - 0.6366198 + 0.2212091*x32;
Y1 := Y1 + 2.1682709*x34 - 1.3164827*x36 + 0.3123951*x38;
Y1 := 1/x * (Y1 - 0.0400976*x310 + 0.0027873 *x312 );
end else begin
Y0:=0.00 ;
Y1:=0.00 ;
END;
end else begin
tpx := 3/x; pi2 := 2/pi;
x32 := sqr (tpx); x33 := tpx * x32;x34 := sqr(x32);
x35 := x32 * x33;x36 := x32 * x34;
f0 := 0.79788456 - 0.00000077 * tpx - 0.00552740 * x32;
f0 := f0 - 0.00009512 * x33 + 0.00137237 * x34 - 0.00072805 * x35;
f0 := f0 + 0.00014476 * x36;
teta0 := x - 0.78539816 - 0.04166397 * tpx - 0.00003954 * x32;
teta0 := teta0 + 0.00262573 * x33 - 0.00054125 * x34;
teta0 := teta0 - 0.00029333 * x35 + 0.00013558 * x36;
J0 := (f0 * cos(teta0)) / sqrt(x);
Y0 := (f0 * sin(teta0)) / sqrt(x);
f1 := 0.79788456 + 0.00000156 * tpx + 0.01659667 * x32;
f1 := f1 + 0.00017105 * x33 - 0.00249511 * x34 + 0.00113653 * x35;
f1 := f1 - 0.00020033 * x36;
tetal := x - 2.35619449 + 0.12499612 * tpx + 0.00005650 * x32;
tetal := tetal - 0.00637879 * x33 + 0.00074348 * x34;
tetal := tetal + 0.00079824 * x35 - 0.00029166 * x36;
J1 := (f1 * cos(tetal)) / sqrt (x);
Y1 := (f1 * sin(tetal)) / sqrt (x);
end;
if (m=1)then begin
  if(n=0)then bes:= J0 else bes:= J1
end else begin
  if(n=0)then bes := Y0 else bes:= Y1
end; end; end.

```

Unit Green;

interface

uses *bessel* {, *imagi*, *rili*};

function *g*(*xl*, *yl*, *xh*, *yh*, *k*, *n*:real):real;

{fungsi untuk menghitung turunan fungsi green dan turunannya}

implementation

function *g* (*xl*, *yl*, *xh*, *yh*, *k*, *n*:real):real;

var *xmx*, *ymy*, *r1*, *r2*:real;

function *g0*(*xl*, *yl*, *xh*, *yh*, *k*, *n*:real):real;



```
var xmx,ymy,ymy1,ar,br:real;m:integer;
begin
xmx:=(xh-xl);ymy:=(yh-yl);ymy1:=(yh+yl);
ar:= sqrt (sqr(xmx) + sqr(ymy)) ;
br:= sqrt (sqr(xmx)+ sqr(ymy1)) ;
g0:=(1/4) * (bes(k*ar,m,0)+bes(k*br,m,0));
g0:=(1/4) * (bes(k*ar,m,0)+bes(k*br,m,0));
end;
```

```
function g1 (xl,yl,xh,yh,k,n:real):real;
var xmx,ymy,ymy1,ar,br:real;m:integer;
begin
xmx:= (xh-xl);ymy:=(yh-yl);ymy1:=(yh+yl);
ar:= sqrt (sqr(xmx)+ sqr(ymy)) ;
br:= sqrt (sqr(xmx)+ sqr(ymy1)) ;
g1:=-1/4 *(((bes(k*ar,m,1)*xmx)/ar)+((bes(k*br,m,1)*xmx)/br));
g1:=-1/4 *(((bes(k*ar,m,1)*xmx)/ar)+((bes(k*br,m,1)*xmx)/br));
end;
```

```
function g2 (xl,yl,xh,yh,k,n:real):real;
var xmx,ymy,ymy1,ar,br:real;m:integer;
begin
xmx:= (xh-xl);ymy:=(yh-yl);ymy1:=(yh+yl);
ar:= sqrt (sqr(xmx)+ sqr(ymy)) ;
br:= sqrt (sqr(xmx)+ sqr(ymy1)) ;
g2:=-1/4 *(((bes(k*ar,m,1)*ymy)/ar)+((bes(k*br,m,1)*ymy1)/br));
g2:=-1/4 *(((bes(k*ar,m,1)*ymy)/ar)+((bes(k*br,m,1)*ymy1)/br));
end;
```

```
var xm,ym,ym1,ar,br,y0:real;m:integer;
begin
xm:= (xh-xl);ym:=(yh-yl);ym1:=(yh+yl);
r1:= sqrt(sqr(xm)+ sqr(ym));
r2:= sqrt(sqr(xm)+ sqr(ym1));
case m of
0:g:=g0(xl,yl,xh,yh,k,0);
1:g:=g0(xl,yl,xh,yh,k,1);
2:g:=g1(xl,yl,xh,yh,k,2);
3:g:=g1(xl,yl,xh,yh,k,3);
end;
end;
end.
```



```

unit tint;
interface
uses Bessel,Green,integ;
function p (m,j:integer;xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;
{fungsi ini untuk menghitung integral turunan fungsi green
terhadap normalnya pada segmen ke-j}
implementation
function p(m,j:integer;xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;
var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,tem1,tem2 : real;
begin
dx := (xh-xl)/9;dy := (yh-yl)/9;
ds := sqrt( dx*dx + dy*dy );
f0 := g(xl,yl,a,b,k,1);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,1);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,1);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,1);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,1);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,1);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,1);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,1);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,1);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,1);
tem1 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
f0 := g(xl,yl,a,b,k,2);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,2);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,2);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,2);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,2);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,2);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,2);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,2);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,2);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,2);
tem2 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
p := tem1*nx + tem2*ny;
end; end.

```

```

unit uint;
interface
uses bessel,green,integ;
function q (m,j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;
{fungsi ini untuk menghitung integral fungsi green pada segmen ke-j}
implementation
function q (m,j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;

```

```

var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,rr : real;
begin
dx:= (xh-xl)/9;dy:= (yh-yl)/9;
ds:= sqrt(dx*dx + dy*dy);
if(m=j) then begin
  rr:= 4.5*ds;
  q:= (rr/pi) * (ln(k*rr)-1);
end else begin
f0 := g(xl,yl,a,b,k,0);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,0);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,0);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,0);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,0);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,0);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,0);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,0);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,0);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,0);
q := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
end; end; end.

```

unit tinta;

interface

uses *bessel,green,integ*;

function pa (j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;

{fungsi ini untuk menghitung integral turunan fungsi green terhadap normal a titik interior pada segmen ke-j}

implementation

function pa(j:integer;xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;

var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,tem1,tem2 : real;

begin

dx := (xh-xl)/9;dy := (yh-yl) / 9;

ds := sqrt(dx*dx + dy*dy);

f0 := g(xl,yl,a,b,k,5);

f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,5);

f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,5);

f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,5);

f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,5);

f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,5);

f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,5);

f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,5);

f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,5);

f9 := g(xh,yh,a,b,k,5);

tem1 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);

```

f0 := g(xl,yl,a,b,k,6);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,6);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,6);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,6);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,6);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,6);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,6);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,6);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,6);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,6);
tem2 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
pa := tem1*nx + tem2*ny;
end; end.

```

```

unit tintb;
interface
uses besse1,green,integ;
function pb (j:integer;xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;
{fungsi ini untuk menghitung integral turunan fungsi green
terhadap normal b pada segmen ke-j}
implementation
function pb (j:integer;xl,yl,xh,yh,a,b,nx,ny,k:real) : real;
var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,tem1,tem2 : real;
begin
dx := (xh-xl)/9;dy :=(yh-yl)/9;
ds := sqrt(dx*dx + dy*dy);
f0 := g(xl,yl,a,b,k,7);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,7);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,7);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,7);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,7);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,7);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,7);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,7);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,7);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,7);
tem1 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
f0 := g(xl,yl,a,b,k,8);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,7);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,8);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,8);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,8);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,8);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,8);

```

```

f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,8);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,8);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,8);
tem2 := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
pb := tem1*nx + tem2*ny;
end; end.

```

```

unit uinta;
interface
uses Bessel,Green,Integ;
function qa (j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;
{fungsi ini untuk menghitung integral fungsi green titik interior
terhadap a pada segmen ke-j}
implementation
function qa (j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;
var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9 : real;
begin
dx:= (xh-xl)/9;dy:= (yh-yl)/9;
ds:= sqrt(dx*dx + dy*dy);
f0 := g(xl,yl,a,b,k,3);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,3);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,3);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,3);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,3);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,3);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,3);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,3);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,3);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,3);
qa := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
end; end.

```

```

unit uintb;
interface
uses Bessel,Green,Integ;
function qb (j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;
{fungsi ini untuk menghitung integral fungsi green titik interior
terhadap b pada segmen ke-j}
implementation
function qb (j:integer; xl,yl,xh,yh,a,b,k:real): real;
var dx,dy,ds,f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9 : real;
begin
dx:= (xh-xl)/9;dy:= (yh-yl)/9;

```

```

ds:= sqrt(dx*dx + dy*dy);
f0 := g(xl,yl,a,b,k,4);
f1 := g(xl+dx,yl+dy,a,b,k,4);
f2 := g(xl+2*dx,yl+2*dy,a,b,k,4);
f3 := g(xl+3*dx,yl+3*dy,a,b,k,4);
f4 := g(xl+4*dx,yl+4*dy,a,b,k,4);
f5 := g(xl+5*dx,yl+5*dy,a,b,k,4);
f6 := g(xl+6*dx,yl+6*dy,a,b,k,4);
f7 := g(xl+7*dx,yl+7*dy,a,b,k,4);
f8 := g(xl+8*dx,yl+8*dy,a,b,k,4);
f9 := g(xh,yh,a,b,k,4);
qb := inte(f0,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,ds);
end; end.

```

Run Program

titik batas	Ur	Ui	dU/dnr	dU/dni
(-2.0000,-0.5000)	1.505	1.005	-0.500	-2.000
(-2.0000,-1.5000)	3.510	3.010	-1.500	-2.500
(-1.5000,-2.0000)	-4.000	-4.500	-2.000	-2.500
(-0.5000,-2.0000)	-0.568	-1.068	-2.000	0.000
(0.5000,-2.0000)	-0.000	0.000	-2.409	0.000
(1.5000,-2.0000)	0.000	0.000	-4.672	0.000
(2.0000,-1.5000)	0.000	0.000	0.787	0.000
(2.0000,-0.5000)	0.000	0.000	-0.055	0.000
(1.5000,0.0000)	1.419	0.000	6.539	0.000
(0.5000,0.0000)	1.088	0.000	3.962	0.000
(-0.5000,0.0000)	-0.128	0.000	-0.086	0.000
(-1.5000,0.0000)	-1.527	0.000	-4.496	0.000
(-0.5000,0.0000)	0.000	0.000	0.000	0.000
(0.5000,0.0000)	0.000	0.000	0.000	0.000
(1.0000,-0.2500)	0.000	0.000	0.000	0.000
(1.0000,-0.7500)	0.000	0.000	0.000	0.000
(0.5000,-1.0000)	0.000	0.000	0.000	0.000
(-0.5000,-1.0000)	0.000	0.000	0.000	0.000
(-1.0000,-0.7500)	0.000	0.000	0.000	0.000
(-1.0000,-0.2500)	0.000	0.000	0.000	0.000