MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

Oleh :

USWAH HASANAH

H 111 99 008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2005

MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu Syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin

Oleh :

USWAH HASANAH

H 111 99 008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2005

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguhnya bahwa Skripsi yang saya buat dengan judul :

MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Maret 2005

USWAH HASANAH
NIM : H 111 99 008

MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

Disetujui oleh

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
A. Kresna Jaya, S. Si, M. Si	**Firman, S. Si, M. Si**

Pada Tanggal : Maret 2005

Pada hari ini, Selasa Tanggal 15 Maret 2005, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik Skripsi yang berjudul :

MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Maret 2005

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. Raupong, M. Si	(.........................)
2. Sekretaris	: Amran, S. Si, M. Si	(.........................)
3. Anggota	: A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si	(.........................)
4. Anggota	: Firman, S.Si, M.Si	(.........................)
5. Anggota	: Drs. Muh. Zakir, M.Si	(.........................)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat **Allah SWT** atas segala nikmat, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini untuk memenuhi salah satu persyaratan akademik guna menyelesaikan studi pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.

Dalam penulisan skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan, dorongan, dan bimbingan dari berbagai pihak yang sangat besar manfaatnya. Oleh karena itu dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada Bapak **A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si** sebagai pembimbing utama dan Bapak **Firman, S.Si, M.Si** sebagai pembimbing pertama yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan petunjuk serta bimbingan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Kedua orang tuaku tercinta **Drs. Tasri Ponta** dan **Ratna Ningsih, A.Ma** yang telah membesarkan dan membimbing penulis dengan segala cinta dan kasih sayang yang tulus serta adik-adikku tercinta **Qadri**, **Kurniawan** dan **Ainun** yang selalu menemaniku dan mengganguku.
2. Seluruh keluargaku **kakek**, **nenek**, **tante**, **om** dan **sepupu-sepupuku**, terimaksih atas semua perhatian, dorongan dan doa kalian.

3. Bapak Pimpinan Fakultas dan Ilmu Pengetahuan Alam UNHAS beserta staf.
4. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** dan Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku Ketua dan Sekertaris Jurusan Matematika FMIPA UNHAS, serta seluruh Dosen Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya.
5. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, MS** selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNHAS.
6. Bapak **Drs. Raupong, M.Si** selaku ketua penguji.
7. Bapak **Amran, S.Si, M.Si** selaku penguji.
8. Bapak **DR. Moh. Ivan Asis, M.Sc** selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan perhatian dan nasehat-nasehat yang berguna kepada penulis.
9. My love **Umar** yang selalu menemaniku dan memberikan dorongan kepadaku. Thanks for everything.
10. My sohib-sohibku **Anthy (ciddo)**, **Mela (melon)**, **Nanna (bondeng)**, **Annie gila**, **Ira (irapang)**, dan **Kasmi caem**, saya sangat sayang sama kalian, dengan kalianlah saya banyak menghabiskan waktu dan hari yang memberikan banyak kenangan indah, lucu dan gila, dan karena itu persahabatan dan kenangan yang telah kalian berikan padaku tak akan aku lupakan sampai kapan pun. I love you all.
11. My friend **angkatan' 99 Lulu, Dado**, **Icham**, **Atun**, **Jamil**, **Achank**, **Chimenk**, **Arham**, **Risna**, **Mail, Aco**, **Fifi**, **Ibar**, **Niswar**, **Haerati**, **Alam**, **Oni**, my senior **kak Hamka, kak Adi**, **kak Ile**, **kak Ummu**, dan seluruh

adik-adik **angkatan' 00**, **angkatan' 01** dan **angkatan'02**, terima kasih atas kebersamaan kalian di kampus merah.

12. Sobatku **Viny Marsanta**,**Ari**, **Eko** dan **Danu**, **Adi**, **Bella** dan **kawan-kawan**, kalian akan selalu kuingat.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan baik dari segi teknis maupun materi mengingat keterbatasan kemampuan pengetahuan penulis. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat mambangun dari semua pihak demi perbaikan dimasa yang akan datang.

Akhirnya penulis berharap semoga hasil dari skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya.

Makassar,   Maret 2005

Penulis

USWAH HASANAH

ABSTRAK

Tulisan ini menguraikan tentang bagaimana memperoleh matriks nonnegatif dari sembarang pasangan terurut-n $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dengan λ_i adalah bilangan kompleks untuk $i = 1,2,3,\dots,n$. Untuk memperoleh matriks nonnegatif orde-n dari pasangan terurut-n tersebut dilakukan dengan mengkonstruksinya dalam kasus-perkasus. Konstruksi yang dilakukan adalah dengan melihat fungsi karakteristik dengan nilai eigennya adalah λ_i $\forall i = 1,2,3,\dots,n$ dihubungkan dengan matriks nonnegatif. Syarat-syarat yang diperoleh dari pencarian spektrum sebuah matriks nonnegatif yaitu

- $\exists\ \lambda$ maksimal positif
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$

digunakan untuk mencari sebuah matriks nonnegatif. Jika dipandang $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dan memenuhi syarat di atas maka $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dipandang sebagai spektrum dari matriks nonnegatif.

ABSTRACT

This paper explain about how to get the nonnegative matrices from an n-tuple $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ with λ_i is complex number for i = 1,2,3,...,n. To get the matrices of nonnegatif order-n from the couple n-tuple conducted with construction in case by case. Construction taken is seenly characteristic function with eigen value λ_i, $\forall i$ = 1,2,3,...,n to be connected with nonnegative matrices. Conditions obtained from seeking spectrum a nonnegative matrix that is

- $\exists\, \lambda$ maksimal positif
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$

used to look for a nonnegative matrix. If looked $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ and fulfill the condition then $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ is spectrum a nonnegative matrices.

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Secara umum hampir semua orang mampu menyelesaikan soal-soal aljabar linear yang berkaitan dengan nilai eigen dari sebuah matriks riil sembarang yang berukuran $n \times n$, tapi jika permasalahan dibalik, yaitu mencari matriks riil berukuran $n \times n$ dengan nilai-nilai eigen yang diberikan tidaklah selalu mudah untuk diselesaikan. Untuk mendapatkan suatu matriks riil sembarang yang berukuran $n \times n$, cara yang paling mudah adalah mengambil matriks diagonal dengan entri-entrinya adalah nilai-nilai eigen riil yang diberikan. Akan tetapi jika nilai-nilai eigen yang diberikan adalah nilai eigen yang kompleks maka untuk memperoleh matriks riilnya diperlukan cara-cara tersendiri untuk mendapatkannya.

Matriks riil disini adalah matriks riil nonnegatif. Matriks nonnegatif ini adalah matriks yang semua entrinya adalah bilangan riil nonnegatif. Matriks ini biasanya banyak digunakan dalam teori graph (membuat matriks adjency) atau dalam statistik khususnya proses stokastik.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji nilai eigen kompleks tersebut dalam bentuk tugas akhir dengan judul matriks nonnegatif yang diperoleh dari spektrum nilai eigen kompleks.

1.2. RUMUSAN MASALAH

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini yaitu bagaimana sebuah matriks nonnegatif n x n dapat diperoleh jika nilai-nilai eigen kompleksnya diberikan.

1.3. BATASAN MASALAH

Tulisan ini dibatasi pada pasangan kompleks terurut-n untuk dihubungkan dengan sebuah matriks nonnegatif orde-n.

1.4. TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan ini adalah bagaimana menentukan syarat perlu dan cukup sehingga sembarang pasangan terurut-n dapat dipandang sebagai spektrum dari suatu matriks nonnegatif orde-n.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Suatu masalah yang sering timbul dalam penerapan aljabar linier adalah mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks. Pada bagian ini akan ditunjukkan konsep dasar dari masalah ini.

Definisi 2.1

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor taknol $\mathbf{x}$ *di dalam* R^n *dinamakan vektor eigen dari A jika* $A\mathbf{x}$ *adalah kelipatan skalar dari* $\mathbf{x}$, *yakni*

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. *Skalar* λ *dinamakan nilai eigen dari A, dan* $\mathbf{x}$ *dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan* λ. *(Anton Howard,1998)*

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$, persamaan $Ax = \lambda x$ dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \lambda x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \lambda x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \tag{1}$$

Selanjutnya diperoleh :

$$
\begin{array}{lllll}
(a_{11}-\lambda)x_1 + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = 0 \\
a_{21}x_1 & + \ (a_{22}-\lambda)x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \\
a_{n1}x_1 & + \quad a_{n2}x_n & + \dots + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0
\end{array}
\qquad (2)
$$

Dalam notasi matriks, persamaan diatas ditulis sebagai

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

dimana

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

adalah matriks koefisien, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sistem persamaan linier homogen (3) mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika

$$\det(A\text{-}\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

dengan kata lain determinan dari matriks koefisien sama dengan nol.

Determinan ini adalah suatu polinom dalam λ. Suku berderajat tertinggi dalam λ pada polinom ini berasal dari hasil kali unsur-unsur diagonal. Jadi $(-\lambda)^n$ adalah suku berderajat tertinggi sehingga

$$\det(A-\lambda I)=(-\lambda)^n+b_{n-1}(-\lambda)^{n-1}+\ldots+b_1(-\lambda)+b_0=0 \qquad (5)$$

Persamaan (5) adalah polinom dalam λ yang berderajat n dengan n akar. Tidak perlu semua akar-akar ini berlainan, dan jika akarnya dihitung, maka ada n akar, yang beberapa akarnya dapat berupa bilangan riil atau kompleks dan yang lainnya mungkin ada yang sama dengan nol. Akar-akar dari persamaan polinomial (4) ini disebut juga akar karakteristik atau nilai eigen dari A.

Untuk menentukan vektor eigen dari matriks A, harus ditentukan terlebih dahulu nilai eigennya. Setelah nilai eigen diketahui, maka vektor eigen padanannya dapat ditentukan dari persamaan (2), dimana λ merupakan nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen tersebut.

2.2. Matriks Nonnegatif

Sebuah matriks riil A dikatakan positif jika semua entrinya adalah positif dan dikatakan nonnegatif jika semua entrinya adalah nonnegatif. Untuk lebih mudahnya dapat dituliskan A positif jika $a_{ij}>0,\ a_{ij}\in \boldsymbol{R}$,($\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan rill) ,

$\forall\ i,j=1,2,3,\ldots n$ dan A nonnegatif jika $a_{ij}\geq 0,\ a_{ij}\in\boldsymbol{R}, \forall\ i,j=1,2,3,\ldots n$.

Sebuah matriks X dikatakan cogredient terhadap matriks Y jika terdapat matriks permutasi P sehingga $X = P^T YP$. Matriks permutasi P itu adalah sebuah matriks yang dimana entrinya adalah 1 dan 0, bilangan 1 tersebut terletak pada baris dan kolom yang berlainan.

Definisi 2.2

Sebuah matriks nonnegatif A yang berukuran $n \times n$ dikatakan tereduksi jika matriks A tersebut cogredient terhadap matriks yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

dimana B dan D adalah submatriks bujur sangkar.(Minc Henryk, 1988)

2.3. Spektrum Matriks Nonnegatif

Sebuah spektrum dari suatu matriks A nonnegatif $n \times n$ merupakan koleksi nilai-nilai eigen matriks A dan dapat dipandang sebagai suatu pasangan terurut-n $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A. Suatu pasangan terurut-n $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dipandang sebagai spektrum dari matriks A yang nonnegatif jika memenuhi kondisi:

$$\exists\, i \in \{1,2,...,n\} \text{ sehingga } \lambda_i \text{ maks} \qquad (1)$$

Jika $tr(AB) = tr(BA)$ dimana A dan B berordo n dan $A = E\Lambda E^{-1}$, dimana Λ merupakan matriks diagonal dengan entri λ_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$, maka

$$tr(A) = tr(E\Lambda E^{-1})$$

$$= tr(\Lambda E^{-1}E)$$

$$= tr(\Lambda)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

dan

$$tr(A^m) = tr((E\Lambda E^{-1})^m)$$

$$= tr(E\Lambda E^{-1}E\Lambda E^{-1}E\Lambda E^{-1}...E\Lambda E^{-1})$$
(sebanyak m faktor)

$$= tr(E\Lambda^m E^{-1})$$

$$= tr(\Lambda^m E^{-1}E)$$

$$= tr(\Lambda^m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$$

Jadi, jika A adalah matriks nonnegatif maka:

$$0 \le tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ ,$$

dan

$$0 \le tr(A^m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \quad , m = 1,2,... \qquad (2)$$

pers.(1) & (2) merupakan syarat cukup untuk kasus n = 2. Sedangkan untuk $n \geq 3$,kondisi tersebut belum dapat menjadi syarat cukup.

Teorema Loewy dan London telah membuktikan kondisi tambahan yang perlu untuk suatu pasangan terurut-n dalam hal ini $n = 3$ agar menjadi spektrum dari matriks nonnegatif 3×3. Kondisi ini berlaku baik untuk pasangan terurut riil maupun kompleks.

Teorema 2.1 (Loewy dan London)

Jika $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in$ ¢(¢ *adalah himpunan bilangan kompleks*)

dan

λ_2 *dan* $\overline{\lambda}_3$ *saling sekawan,*

$\lambda_1 \geq |\lambda_j|, \quad j = 2,3,$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0,$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \leq 3\ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$

Maka terdapat suatu matriks nonnegatif dengan spektrum σ.*(Minc Henryk*,1988)

Bukti :

Misalkan $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ adalah pasangan riil terurut-3 dan memenuhi kondisi:

$$\lambda_1 \geq |\lambda_j|, \quad j = 2,3,$$

dan

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0,$$

Jika $\lambda_2 \geq 0$ atau $\lambda_3 \geq 0$, maka matriks nonnegatif dengan spektrum σ adalah :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Jika λ_2 dan λ_3 keduanya negatif maka matriks

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 1 \\ -2\lambda_1\lambda_3 & -2\lambda_1\lambda_3 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks nonnegatif dan σ adalah spektrum dari matriks tersebut.

Jika $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in$ ¢, dan memenuhi :

λ_2 *dan* $\overline{\lambda_3}$ *saling sekawan,*

$\lambda_1 \geq |\lambda_j|, \quad j = 2,3,$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0,$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \leq 3\ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2),$

akan dikonstruksi matriks 3×3 dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Misalkan $\sigma' = (\rho, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, dimana $\rho = \lambda_1 / |\lambda_2|$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = |\lambda_2| e^{i\theta}$, $\quad 0 < \theta < \pi$

Maka diperoleh matriks dengan spektrum σ' adalah

$$B = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks Q berikut

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} C &= QBQ^{-1}\\ &= Q\left(\rho\dot{+}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right)Q^{-1}\end{aligned}$$

jadi diperoleh matriks C adalah :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\rho+2\cos\theta & \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right) & \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\\ \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right) & \rho+2\cos\theta & \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\\ \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right) & \rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right) & \rho+2\cos\theta\end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan entri-entri dalam C adalah nonnegatif.

Untuk $0<\theta<\pi$ dan $\rho\geq 1$ maka

$$\rho+2\cos\theta\geq 0 \tag{6}$$

dan

$$\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\geq 0.$$

Dan dengan sifat $\cos 2\theta = 1-2(\sin\theta)^2$ dan $\rho+1-2\cos\theta \geq 0$, maka

$$\left(\rho-2\cos\theta\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right)\left(\rho-2\cos\theta\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right)\geq 0.$$

maka

$$\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\geq 0, \tag{7}$$

jadi matriks C adalah matriks nonnegatif.

Karena C similar dengan matriks B, maka $\sigma' = \left(\rho, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right)$ adalah juga spektrum C.

Konstruksi matriks nonnegatif $A = |\lambda_2|C$, maka matriks A adalah

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) \\ |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) & |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) \\ |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) & |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) \end{bmatrix}$$

dan spektrum dari A adalah $\sigma(A) = \left(|\lambda_2|\rho, |\lambda_2|e^{i\theta}, |\lambda_2|e^{-i\theta}\right)$ atau $\sigma(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Maka A adalah matriks nonnegatif dengan spektrum σ.

2.4. Teorema-Teorema untuk Matriks Nonnegatif

Teorema 2.2

Jika A adalah matriks nonnegatif taktereduksi berukuran $n \times n$, $n \geq 2$, dan y adalah sebuah pasangan terurut-n yang nonnegatif dengan koordinat positif ke k, $1 \leq k \leq n-1$, maka koordinat positif ke k dari $(I_n + A)y$ lebih besar dari pada koordinat positif ke k dari y.

Bukti :

Andaikan bahwa koordinat ke k dari y adalah positif dan yang lainnya adalah nol. Misalkan P adalah matriks permutasi sehingga koordinat pertama ke k dari $x = Py$ adalah positif dan yang lainnya adalah nol. Karena $A \geq 0$, bilangan koordinat yang nol dalam $(I_n + A)y = y + Ay$ tidak bisa lebih besar dari $n - k$. Andaikan $n - k$, ini berarti bahwa $(Ay)_i = 0$ bilamana $y_i = 0$, dan $(PAy)_i = 0$ bilamana $(Py)_i = 0$. Tapi $Py = x$, dan oleh karena itu asumsi bahwa $(I_n + A)y$ mempunyai banyak entri 0 seperti y equivalen terhadap pernyataan $(PAP^T x)_i = 0$ untuk $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$. Misalkan $B = (b_{ij}) = PAP^T$, maka

$$
\begin{aligned}
(Bx)_i &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_j \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

untuk $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$. Tapi $x_j > 0$ untuk $1 \leq j \leq k$ dan oleh karena itu $b_{ij} = 0$ untuk $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, k$. Jadi jika $(I_n + A)\, y$ mempunyai bilangan yang sama dari koordinat y yang nol, maka matriks A menjadi tereduksi.

Misalkan E^n adalah subset dari P^n maka $E^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i\}$

Definisi 2.3

Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks nonnegatif aktereduksi yang berukuran $n \times n$. Defenisi fungsi f_A dari P^n untuk himpunan bilangan nonnegatif yaitu :

$$f_A(x) = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

untuk setiap $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P^n$ taknol. Fungsi f_A ini adalah fungsi collatz-wielandt.(*Minc Henryk*,1988)

Teorema 2.3

Sebuah vektor eigen nonnegatif dari sebuah matriks nonnegatif taktereduksi harus positif.(*Minc Henryk*,1988)

Bukti :

Andaikan

$$Ax = \lambda x,$$

Dimana $A \geq 0$ adalah taktereduksi, $x \geq 0$, dan $x \neq 0$. Dengan jelas, λ harus nonnegatif.

Sekarang, $(I_n + A)\mathbf{x} = (1 + \lambda)\mathbf{x}$. Jika $\mathbf{x}$ memiliki koordinat ke k yang nol untuk suatu k, $1 \le k \le n$, maka $(1 + \lambda)\mathbf{x}$ juga memiliki koordinat ke k yang nol, mengingat dari teorema 2.2 $(I_n + A)\mathbf{x}$ memiliki paling sedikit koordinat ke k yang nol, karena itu $\mathbf{x}$ harus positif.

Teorema 2.4

Misalkan A adalah sebuah matriks taktereduksi, dan misalkan f_A fungsi collatz-wieland dari A, maka

i). Fungsi f_A adalah homogen dengan derajat 0.

ii). Jika $\mathbf{x}$ adalah vektor nonnegatif yang bukan vektor nol dan ρ adalah bilangan riil terbesar untuk $A\mathbf{x}$ - $\rho\mathbf{x}$, maka $\rho = f_A(x)$.

*iii). Jika $\mathbf{x} \in P^n, \mathbf{x} \neq 0$ dan $y = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$ maka $f_A(y) \geq f_A(x)$.(Minc Henryk,*1988)

Bukti :

i). Untuk t > 0 dan $\mathbf{x} \in P^n, \mathbf{x} \neq 0$ diperoleh

$$f_A(tx) = \min_{(tx)_i} \frac{(A(tx))_i}{(tx)_i}$$

$$= \min_{tx_i} \frac{t(Ax)_i}{tx_i}$$

$$= \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

$$= f_A(x).$$

ii). Definisi f_A secara tidak langsung menyatakan bahwa

$$A\mathbf{x} - f_A(x)\mathbf{x} \geq 0$$

dan terdapat bilangan bulat k, $1 \leq k \leq n$, sehingga $x_k \neq 0$ dan koordinat ke-k dari $A\mathbf{x} - f_A(x)\mathbf{x}$ adalah nol. Jika $c > f_A(x)$, maka koordinat ke-k dari $A\mathbf{x} - c\mathbf{x}$ adalah negatif. Sehingga $f_A(x)$ adalah bilangan riil terbesar, sehingga $A\mathbf{x} - f_A(x)\mathbf{x} \geq 0$.

iii). Diketahui $A\mathbf{x} - f_A(x)\mathbf{x} \geq 0$ dengan mengalikan kedua ruas dengan $(I_n + A)^{n-1}$,

$$(I_n + A)^{n-1}\ A\mathbf{x} - f_A(x)\mathbf{x}\ \geq (I_n + A)^{n-1}.0$$

diperoleh

$$\mathrm{A}(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} - f_A(x)\ (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} \geq 0$$

Misalkan $(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} = y$ maka

$$Ay - f_A(x)y \geq 0,$$

tetapi dari bagian (ii) $f_A(y)$ adalah bilangan terbesar yang memenuhi

$$Ay - f_A(y)y \geq 0$$

maka

$$f_A(y) \geq f_A(x)$$

Teorema 2.5

Misalkan A adalah sebuah matriks nonnegatif takteredeksi yang berukuran $n \times n$, maka fungsi f_A mencapai maksimum dalam E^n. (*Minc Henryk*,1988)

Bukti :

Misalkan G = $(I_n + A)^{n-1} E^n$ = { y | y = $(I_n + A)^{n-1} x, x \in E^n$}

Maka G adalah himpunan kompak. Jika $(I_n + A)^{n-1} y > 0$, maka semua pasangan terurut dalam G pasti positif, dan f_A kontinyu di G. Karena G adalah kompak, fungsi f_A mencapai nilai maksimum dalam G dengan suatu $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in$ G.

Misalkan $x^0 = y^0 \Big/ \sum_{i=1}^{n} y_i^0 \in E^n$, dan misalkan x adalah vektor dalam E^n. Maka, jika y $= (I_n + A)^{n-1} x$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
f_A(x) &\le f_A(y), && \text{dari teorema 2.4. (iii),}\\
&\le f_A(y^0), && \text{dari maksimal } y^0 \text{ dalam G,}\\
&= f_A(x^0), && \text{dari teorema 2.4. (i).}
\end{aligned}
$$

Karena x merupakan vektor dalam E^n, maka f_A mempunyai maksimum mutlak dalam E^n dengan x^0.

BAB III

NILAI EIGEN DARI MATRIKS NONNEGATIF ORDE-N

Nilai-nilai eigen dari sebuah matriks nonnegatif dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan umum nilai eigen yang telah dibahas pada bab II.

Jika matriks A adalah matriks nonnegatif maka dari persamaan (4) pada bab II diperoleh polinom dalam λ seperti pada persamaan (5) dalam bab II, sehingga dari persamaan tersebut diperoleh akar-akar persamaan yang juga disebut akar-akar karakteristik atau nilai-nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Teorema 3.1 (Perron-Frobenius)

Jika A adalah matriks nonnegatif dan taktereduksi maka:

1. *A mempunyai sebuah nilai eigen maksimal yaitu* λ_i, *sehingga* $\lambda_i \geq |\lambda_j|$, *untuk* λ_j *nilai-nilai eigen dari* $A, j \neq i, j = 1,2,3,\dots,n$.
2. *Terdapat vektor eigen positif* $\overline{x}$ *yang bersesuaian dengan* λ_i.
3. *Maksimal nilai eigen A adalah sebuah akar sederhana dari persamaan karakteristik.(Minc Henryk,*1988)

Bukti :

* Misalkan A adalah sebuah matriks nonnegatif taktereduksi $n \times n$. Dari teorema 2.3 terdapat vektor x^0 dalam E^n sehingga

$$f_A(x^0) \geq f_A(x)$$

untuk setiap x dalam E^n.

Misal $\lambda_i = f_A(x^0)$, maka $\lambda_i = \max\{f_A(x) \mid x \in E^n\}$.

Sebelum memperlihatkan bahwa λ_i adalah nilai eigen maksimal, pertama diperlihatkan bahwa λ_i positif.

Misal $u = (1,1,\ldots,1)/n$, maka :

$$\lambda_i \geq f_A(u)$$

$$= \min_i \frac{(Au)_i}{u_i}$$

$$= \min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$> 0$$

karena A tidak mempunyai baris nol. Selanjutnya diperlihatkan bahwa λ_i adalah nilai eigen dari A.

Dipunyai

$$Ax^0 - \lambda_i x^0 \geq 0 \qquad (1)$$

andaikan $Ax^0 - \lambda_i x^0 \neq 0$, maka

$$(I_n + A)^{n-1}(Ax^0 - \lambda_i x^0) > 0$$

$$(I_n + A)^{n-1} x^0 (A - \lambda_i) > 0$$

sehingga

$$Ay^0 - \lambda_i y^0 > 0 \tag{2}$$

dimana $y^0 = (I_n + A)^{n-1} x^0$. Ketidaksamaan (2) mempunyai sebuah bilangan positif ε sehingga

$$Ay^0 - (\lambda_i + \varepsilon) y^0 \geq 0$$

akan tetapi dari teorema 2.2.(ii)

$$\lambda_i + \varepsilon \leq f_A(y^0)$$

dan secara tidak langsung $\lambda_i < f_A(y^0)$.

Hal ini kontradiksi dengan maksimal λ_i. Akibatnya bentuk (1) menjadi sebuah persamaan,yaitu $Ax^0 - \lambda_i x^0 = 0$. Ini berarti λ_i adalah nilai eigen dan x^0 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i.

Telah dipunyai petunjuk yang sebenarnya jika x adalah vektor tak nol yang nonnegatif dan $Ax - \lambda_i x \geq 0$ maka x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i, maka secara tidak langsung $x > 0$.

Selanjutnya, misalkan Az = $\lambda_j z$ dimana $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ bukan vektor nol, maka

$$\lambda_j z_t = \sum_{r=1}^{n} a_{tr} z_r \quad ,t = 1,2,\ldots,n$$

dan oleh karena itu

$$|\lambda_j||z_t| \leq \sum_{r=1}^{n} a_{tr} |z_r|, \quad t = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

dalam notasi vektor (3) ditulis sebagai

$$|\lambda_j||z| \leq A|z|$$

karena itu

$$|\lambda_j| \leq f_A(|z|) \leq \lambda_1$$

dan terbukti bahwa λ_1 adalah nilai eigen maksimal, dan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1.

* Misalkan λ_1 adalah nilai eigen maksimal dari A yang merupakan matriks nonnegatif taktereduksi berukuran $n \times n$, dan misalkan x adalah vektor eigen nonnegatif yang bersesuaian dengan λ_1 dimana $x > 0$. Pertama-tama ditunjukkan bahwa ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ_1 berdimensi satu. Andaikan

$$Ay = \lambda_1 y$$

dimana $y \neq 0$. Maka dari ketidaksamaan segitiga,

$$A|y| \geq \lambda_1 |y| \tag{6}$$

dimana $|y|$ adalah vektor taknol yang nonnegatif. Jadi disimpulkan bahwa dalam bukti di atas bahwa (6) adalah sebuah persamaan dan $|y|$ adalah vektor eigen positif yang bersesuaian dengan λ_1. Telah ditunjukkan bahwa vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 tidak memiliki entri nol.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa λ_1 adalah akar sederhana dari persamaan karakteristik, misalkan $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Akan diperlihatkan bahwa $\Delta'(\lambda_1) \neq 0$.

Mengingat bahwa jika setiap entri dari X = (x_{ij}) adalah sebuah fungsi yang terdiferensial terhadap variabel λ, maka

$$\frac{d}{d\lambda}(\det(X)) = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(X(i\,|\,j))\frac{d}{d\lambda}x_{ij}$$

sehingga

$$\Delta'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(\det(\lambda I_n - A)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\det((\lambda I_n - A)(i|i))$$

$$= \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)),$$

karena

$$\frac{d}{d\lambda}((\lambda I_n - A)_{ij}) = \delta_{ij}$$

maka

$$\Delta'(\lambda_i) = tr(adj(\lambda_i I_n - A)).$$

Misalkan $B(\lambda_i) = adj(\lambda_i I_n - A)$, maka

$$(\lambda_i I_n - A)B(\lambda_i) = I_n \det(\lambda_i I_n - A)$$

$$= 0. \qquad (7)$$

karena λ_i mempunyai ruang eigen berdimensi satu, rank dari $\lambda_i I_n - A$ adalah $n-1$ dan oleh karena itu $B(\lambda_i) \neq 0$. Andaikan bahwa kolom $B(\lambda_i)^{(j)}$ berbeda dari nol, maka dari (7),

$$(\lambda_i I_n - A)B(\lambda_i)^{(j)} = 0$$

$B(\lambda_i)^{(j)}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i dan juga $B(\lambda_i)^{(j)}$ adalah perkalian riil dari sebuah vektor positif, yaitu $B(\lambda_i)^{(j)} > 0$ atau $B(\lambda_i)^{(j)} < 0$, dengan kata lain kolom dari $B(\lambda_i)$ salah satunya adalah semua positif atau semua negatif atau nol, dan sekurang-kurangnya terdapat satu kolom yang tidak nol. Sekarang $(B(\lambda_i))^T = adj(\lambda_i I_n - A^T)$, dan A^T taktereduksi dengan nilai eigen maksimal λ_i. Jadi tiap-tiap baris dan tiap-tiap kolom dari $B(\lambda_i)$ salah satunya adalah positif atau negatif atau nol, dan sekurang-kurangnya terdapat satu baris dan satu kolom taknol. Dengan mengikuti salah satunya yaitu :

$$B(\lambda_i) > 0$$

atau

$$B(\lambda_i) < 0$$

maka

$$\Delta'(\lambda_i) = tr(B(\lambda_i)) \neq 0$$

dan oleh karena itu λ_i adalah akar sederhana dari persamaan karakteristik matriks A.

Teorema 3.2

Sebuah matriks nonegatif A dengan nilai eigen maksimal λ_i adalah tereduksi jika dan hanya jika λ_i adalah sebuah nilai eigen dari sebuah submatriks A.

(*Minc Henryk*,1988)

Teorema 3.1. dan 3.2. menyatakan sifat dari sebuah matiks nonnegatif taktereduksi dan tereduksi.

Jadi , jika terdapat nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dari sebuah matriks A yang nonnegatif maka

1. tr (A) = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$

2. Trace matriks pangkat positifnya : tr(A^m) = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \geq 0$

3. Jika matriks A yang nonnegatif tersebut adalah taktereduksi maka
   - Terdapat nilai eigen maksimal diantara semua nilai eigen yang ada.
   - Terdapat vektor eigen positif yang bersesuaian dengan nilai eigen maksimal.
   - Maksimal nilai eigennya merupakan akar sederhana dari persamaan karakteristik.

4. Jika matriks A yang nonnegatif tersebut tereduksi $\left(A = P^T \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P \right)$, dimana B dan D adalah sebuah matriks bujur sangkar nonnegatif tak tereduksi maka :
   - Nilai eigen dari matriks A adalah semua nilai eigen dari submatriks B dan submatriks D.
   - Nilai eigen maksimal dari matriks A adalah salah satu nilai eigen maksimal dari submatriks B atau submatriks D.

BAB IV

MATRIKS NONNEGATIF YANG DIPEROLEH DARI SPEKTRUM NILAI EIGEN KOMPLEKS

Pasangan terurut $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dipandang sebagai spektrum dari matriks A yang nonnegatif jika memenuhi kondisi yang telah dikemukakan pada bab II, dimana kondisi itu merupakan syarat cukup untuk kasus n = 2.(untuk selanjutnya tanpa mengurangi berlakunya bukti λ_1 dianggap nilai eigen maksimal).

Untuk kasus n = 3 telah ditemukan syarat perlu dan syarat cukup sehingga suatu pasangan terurut-3 baik itu riil maupun kompleks dapat dipandang sebagai spektrum dari suatu matriks nonnegatif 3×3. Hal ini dapat dilihat pada teorema 2.1.

Untuk kasus n = 4 belum ditemukan syarat perlu dan cukup sehingga suatu pasangan kompleks terurut-4 dapat dipandang sebagai spektrum dari suatu matriks nonnegatif 4 × 4. Sebelum menentukan syarat perlu dan syarat cukupnya terlebih dulu akan dikonstruksi sebuah matriks A yang nonnegatif 4×4 dengan nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}$. Sebelum mengkonstruksi matriks A nonnegatif 4×4 tersebut terlebih dulu diperlihatkan bentuk matriks nonnegatif untuk n = 1, n = 2, dan n = 3 dengan $\sigma = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan riil).

1. Untuk n = 1.

   Misalkan $\sigma = (\lambda_1)$ dan memenuhi kondisi :

$\lambda_1 \geq 0$ dan merupakan nilai eigen maksimal, maka matriks dengan spektrum σ adalah :

$$A = [\lambda_1]$$

2. Untuk $n = 2$.

   Misalkan $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2)$ dan memenuhi kondisi :

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2|$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$$

   maka matriks nonnegatifnya adalah :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \end{matrix}$$

   jadi σ adalah spektrum dari matriks nonnegatif tersebut.

3. Untuk $n = 3$ dengan $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ dan memenuhi kondisi :

$$\lambda_1 \geq |\lambda_j|, \quad j = 2,3,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0,$$

   ada 3 kasus yang akan ditinjau, yaitu

- Jika λ_1, λ_2, dan λ_3 semuanya positif, dipilih matriks nonnegatifnya adalah matriks diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i > 0$$

  maka nilai eigen dari matriks A adalah λ_1, λ_2, dan λ_3.

- Jika $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \geq \lambda_3$, maka pilih matriks nonnegatifnya adalah :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} \geq 0,$$
$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \geq 0,$$
$$\lambda_2 \geq 0.$$

karena A adalah matriks tereduksi dengan submatriks utamanya adalah matriks 2×2 seperti bentuk pada kasus $n = 2$ dan matriks 1×1 seperti bentuk pada kasus $n = 1$, maka nilai eigen dari matriks A adalah : λ_1, λ_2, dan λ_3.

- Jika λ_2 dan λ_3 keduanya negatif.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 1 \\ -2\lambda_1\lambda_3 & -2\lambda_1\lambda_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} \geq 0,$$
$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{2} \geq 0,$$
$$-2\lambda_1\lambda_3 \geq 0,$$
$$\frac{1}{2} \geq 0.$$

Maka σ adalah spektrum dari matriks nonnegatif.

Sedangkan untuk $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in ¢$, telah dibentuk sebuah matriks nonnegatif yang terdapat pada teorema 2.3.1 yaitu :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) \\ |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) & |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) \\ |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right) & |\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right) & |\lambda_2|(\rho+2\cos\theta) \end{bmatrix}$$

dimana $\rho = \lambda_1/|\lambda_2|$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = |\lambda_2|e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$.

Setelah melihat bentuk-bentuk matriks nonnegatif di atas, sekarang akan dikonstruksi sebuah matriks $A = (a_{ij})$ yang nonnegatif untuk kasus $n = 4$, dengan σ $=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}$. Sebelum melihat bentuk matriks yang dikonstruksi untuk σ $=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}$ terlebih dulu diperlihatkan bentuk matriks nonnegatif dengan σ $=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \boldsymbol{R}$, dimana matriks yang dibentuk adalah matriks tereduksi dimana kedua submatriks utamanya adalah matriks taktereduksi yang berukuran 2×2. Bentuk matriksnya yaitu :

- Jika $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0 \geq \lambda_4$, maka matriks 4×4 yang dipilih :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_1-\lambda_4 & 0 & 0 \\ \lambda_1-\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{bmatrix}$$

- Jika $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ dan $\lambda_2 \geq -\lambda_3$, maka matriksnya adalah :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_1-\lambda_4 & 0 & 0 \\ \lambda_1-\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2-\lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_3 & \lambda_2+\lambda_3 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat bentuk matriks di atas maka bentuk matriks yang dikonstruksi untuk $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in ¢$ adalah matriks tereduksi yang dimana salah satu submatriks utamanya adalah matriks taktereduksi yang berukuran 3×3 dan submatriks yang satunya berukuran 1×1, sedang yang lain bernilai sembarang. Submatriks yang berukuran 3×3 ini merupakan matriks yang diperoleh pada teorema 2.1., sedangkan untuk submatriks 1×1 adalah merupakan salah satu nilaieigen yang riil dari nilai-nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Jadi matriks A nonnegatif berukuran 4×4 yang diperoleh yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{|\lambda_2|(\rho+2\cos\theta)}{3} & \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right)}{3} & \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right)}{3} & a_{14} \\ \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right)}{3} & \frac{|\lambda_2|(\rho+2\cos\theta)}{3} & \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right)}{3} & a_{24} \\ \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right)}{3} & \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi-\theta\right)\right)}{3} & \frac{|\lambda_2|(\rho+2\cos\theta)}{3} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

dimana $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dfrac{|\lambda_2|(\rho+2\cos\theta)}{3}$,

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = \frac{|\lambda_2|\left(\rho-2\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)\right)}{3},$$

$$a_{13} = a_{21} = a_{32} = \frac{|\lambda_2|\left(\rho - 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi - \theta\right)\right)}{3},$$

a_{14}, a_{24}, a_{34} sembarang nilai nonnegatif,

$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$,

$a_{44} = \lambda_4$.

maka dari itu, $\sigma(A) = \left(|\lambda_2|\rho, |\lambda_2|e^{i\theta}, |\lambda_2|e^{-i\theta}, \lambda_4\right)$ atau $\sigma(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ merupakan spektrum dari matriks A nonnegatif.

Untuk pasangan terurut-5, misalkan σ = $\left(1, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ meskipun memenuhi kondisi, tapi σ bukan spektrum dari suatu matriks nonnegatif 5×5, karena terdapat dua nilai eigen maksimal sedangkan diketahui dari teorema didepan matriks nonnegatif hanya memiliki sebuah nilai eigen maksimal.

Oleh karena itu jika pasangan terurut-n $\sigma = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dapat dipartisi, sehingga dari σ dapat dibentuk matriks seperti pada kasus 1-4 dan σ tersebut memenuhi kondisi dan sifat dari matriks nonnegatif maka σ merupakan spektrum dari matriks nonnegatif $n \times n$.

BAB V

PENUTUP

5.1. KESIMPULAN

1. Untuk kasus pasangan kompleks terurut-4 diperoleh sebuah matriks nonnegatif tereduksi 4×4, dimana matriks yang diperoleh tersebut adalah merupakan perluasan dari matriks 3×3.
2. Syarat perlu dan cukup untuk pasangan kompleks terurut-4 agar dapat dipandang sebagai spektrum dari matriks nonnegatif adalah sama dengan syarat yang dipenuhi untuk pasangan kompleks terurut-3.
3. Untuk kasus pasangan terurut-*n* meskipun kondisi tersebut terpenuhi belum dapat disimpulkan bahwa pasangan terurut tersebut merupakan spektrum dari sebuah matriks nonnegatif.

5.2. SARAN

Penulis menyadari dalam tulisan ini banyak sekali kekurangan baik itu dari segi materi maupun dari metode yang digunakan. Untuk itu penulis menyarankan kepada pembaca yang ingin melanjutkan tulisan ini agar mencari metode lain dan lebih memperbanyak referensi.

Daftar Pustaka

(1) Fraleigh, & Beauregard. "***Linear Algebra***", Second edition, University of Rhode Island England,1989.

(2) Minc Henryk. "***Nonnegative Matrices***". Departement of Mathematics University of California Santa Barbara America, 1988.

(3) Anton Howard. "***Aljabar Linear Elementer***". Edisi kelima, Erlangga Jakarta, 1998

(4) Jaya Kresna, A. "***Masalah nilai karakteristik invers real nonnegatif***". Tesis Bandung, 2001.

LAMPIRAN

Contoh-contoh matriks yang diperoleh dari nilai eigen yang diberikan dengan menggunakan program maple

1. n = 1

   Diberikan nilai eigen $\sigma = 5$, maka matriksnya

$$[5]$$

2. n = 2

   Contoh 1:

   Diberikan nilai eigen $\sigma = (5,-3)$,

```
> lambda:=5,-3;
```

$$\lambda := 5, -3$$

```
> lambda1:=5;
```

$$\lambda 1 := 5$$

```
> lambda2:=-3;
```

$$\lambda 2 := -3$$

```
> a11:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a11 := 1$$

```
> a12:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a12 := 4$$

```
> a21:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a21 := 4$$

```
> a22:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a22 := 1$$

```
> A:=Matrix([[a11,a12],[a21,a22]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$5, -3$$

Contoh 2:

Diberikan nilai eigen $\sigma = (4,2)$,

```
> lambda:=4,2;
```

$$\lambda := 4, 2$$

```
> lambda1:=4;
```

$$\lambda 1 := 4$$

```
> lambda2:=2;
```

$$\lambda 2 := 2$$

```
> a11:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a11 := 3$$

```
> a12:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a12 := 1$$

```
> a21:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a21 := 1$$

```
> a22:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a22 := 3$$

```
> B:=array([[a11,a12],[a21,a22]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(B);
```

$$4, 2$$

Contoh 3:

Diberikan nilai eigen $\sigma = (3,2)$,

```
> lambda:=3,2;
```

$$\lambda := 3, 2$$

```
> lambda1:=3;
```

$$\lambda 1 := 3$$

```
> lambda2:=2;
```

$$\lambda 2 := 2$$

```
> a11:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a11 := \frac{5}{2}$$

```
> a12:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a12 := \frac{1}{2}$$

```
> a21:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a21 := \frac{1}{2}$$

```
> a22:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a22 := \frac{5}{2}$$

```
> C:=array([[a11,a12],[a21,a22]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(C);
```

$$3, 2$$

Contoh 4 :

Diberikan nilai eigen $\sigma = (6,-4)$;

```
> lambda:=6,-4;
```

$$\lambda := 6, -4$$

```
> lambda1:=6;
```

$$\lambda 1 := 6$$

```
> lambda2:=-4;
```

$$\lambda 2 := -4$$

```
> a11:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a11 := 1$$

```
> a12:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a12 := 5$$

```
> a21:=(1/2)*(lambda1-lambda2);
```

$$a21 := 5$$

```
> a22:=(1/2)*(lambda1+lambda2);
```

$$a22 := 1$$

```
> E:=array([[a11,a12],[a21,a22]]);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(E);
```

$$6, -4$$

```
>
```

3. n = 3

Untuk kasus n = 3 nilai eigen yang diberikan adalah nilai eigen riil dan kompleks.

Untuk nilai eigen riil ada 3 kasus yaitu :

- Nilai eigen yang diberikan semuanya positif.

  Contoh :

  Nilai eigen σ = (4,3,1), maka matriksnya

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nilai eigen yang diberikan salah satunya negatif

  Contoh :

  Nilai eigen σ = (5,3,-2)

```
> lambda:=5,3,-2;
```

$$\lambda := 5, 3, -2$$

```
> lambda1:=5;
```

$$\lambda1 := 5$$

```
> lambda2:=3;
```

$$\lambda2 := 3$$

```
> lambda3:=-2;
```

$$\lambda 3 := -2$$

```
> a11:=(1/2)*(lambda1+lambda3);
```

$$a11 := \frac{3}{2}$$

```
> a12:=(1/2)*(lambda1-lambda3);
```

$$a12 := \frac{7}{2}$$

```
> a13:=0;
```

$$a13 := 0$$

```
> a21:=a12;
```

$$a21 := \frac{7}{2}$$

```
> a22:=a11;
```

$$a22 := \frac{3}{2}$$

```
> a23:=a13;
```

$$a23 := 0$$

```
> a31:=a13;
```

$$a31 := 0$$

```
> a32:=a13;
```

$$a32 := 0$$

```
> a33:=(1/2)*(2*lambda2);
```

$$a33 := 3$$

```
> A:=array([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$-2, 3, 5$$

- Untuk nilai eigen yang kompleks yaitu :

  Contoh :

  Diberikan nilai eigen kompleks $\sigma = (6, -2+3I, -2-3I)$

```
> lambda1:=6;
```

$$\lambda 1 := 6$$

```
> lambda2:=-2+3*I;
```

$$\lambda 2 := -2 + 3\,I$$

```
> lambda3:=-2-3*I;
```

$$\lambda 3 := -2 - 3\,I$$

```
> c:=abs(lambda2);
```

$$c := \sqrt{13}$$

```
> lambda1+lambda2+lambda3;
```

$$2$$

```
> rho:=lambda1/c;
```

$$\rho := \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

```
> d:=argument(lambda2/c);
```

$$d := -\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \pi$$

```
> f:=evalf(d);
```

$$f := 2.158798931$$

```
> pi:=argument(-1);
```

$$\pi := \pi$$

```
> a11:=c*(rho+2*cos(d))/3;
```

$$a11 := \frac{2}{3}$$

```
> a12:=evalf(c*(rho-2*cos(pi/3+d))/3);
```

$$a12 := 4.398717473$$

```
> a13:=evalf(c*(rho-2*cos(pi/3-d))/3);
```

$$a13 := 0.9346158589$$

```
> a21:=a13;
```

$$a21 := 0.9346158589$$

```
> a22:=a11;
```

$$a22 := \frac{2}{3}$$

```
> a23:=a12;
```

$$a23 := 4.398717473$$

```
> a31:=a12;
```

$$a31 := 4.398717473$$

```
> a32:=a13;
```

$$a32 := 0.9346158589$$

```
> a33:=a11;
```

$$a33 := \frac{2}{3}$$

```
> A:=array([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 4.398717473 & 0.9346158589 \\ 0.9346158589 & \frac{2}{3} & 4.398717473 \\ 4.398717473 & 0.9346158589 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$5.999999999, -1.999999999 + 2.999999999\,I, -1.999999999 - 2.999999999\,I$$

4. n = 4

Contoh :

Diberikan nilai eigen kompleks $\sigma = (20, -4+4I, -4-4I, 15)$,

```
lambda1:=20;
```

$$\lambda 1 := 20$$

```
> lambda2:=-4+4*I;
```

$$\lambda 2 := -4 + 4\,I$$

```
> lambda3:=-4-4*I;
```

$$\lambda 3 := -4 - 4\,I$$

```
> lambda4:=15;
```

$$\lambda 4 := 15$$

```
> c:=abs(lambda2);
```

$$c := 4\sqrt{2}$$

```
> rho:=lambda1/c;
```

$$\rho := \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

```
> d:=argument(lambda2/c);
```

$$d := \frac{3\pi}{4}$$

```
> pi:=argument(-1);
```

$$\pi := \pi$$

```
> a11:=c*(rho+2*cos(d))/3;
```

$$a11 := 4$$

```
> a12:=evalf(c*(rho-2*cos(pi/3+d))/3);
```

$$a12 := 10.30940107$$

```
> e:=evalf(a12);
```

$$e := 10.30940107$$

```
> a13:=evalf(c*(rho-2*cos(pi/3-d))/3);
```

$$a13 := 5.690598919$$

```
> f:=evalf(a13);
```

$$f := 5.690598919$$

```
> a14:=3;
>
```

$$a14 := 3$$

```
> a21:=5.690598919;
```

$$a21 := 5.690598919$$

```
> a22:=a11;
```

$$a22 := 4$$

```
> a23:=10.30940107;
```

$$a23 := 10.30940107$$

```
> a24:=5;
```

$$a24 := 5$$

```
> a31:=a23;
```
$$a31 := 10.30940107$$

```
> a32:=a21;
```
$$a32 := 5.690598919$$

```
> a33:=a11;
```
$$a33 := 4$$

```
> a34:=6;
```
$$a34 := 6$$

```
> a41:=0;
```
$$a41 := 0$$

```
> a42:=0;
```
$$a42 := 0$$

```
> a43:=0;
```
$$a43 := 0$$

```
> a44:=lambda4;
```
$$a44 := 15$$

```
>
A:=array([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a3
3,a34],[a41,a42,a43,a44]]);
```
$$A := \begin{bmatrix} 4 & 10.30940107 & 5.690598919 & 3 \\ 5.690598919 & 4 & 10.30940107 & 5 \\ 10.30940107 & 5.690598919 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```
$$19.99999999, -3.999999994 + 3.999999998 I, -3.999999994 - 3.999999998 I, 15.$$

```
> lambda1:=15;
```
$$\lambda 1 := 15$$

```
> lambda2:=-2+3*I;
```
$$\lambda 2 := -2 + 3 I$$

σ (15, -2+3I, -2-3I, 10,

```
> lambda3:=-2-3*I;
```
$$\lambda 3 := -2 - 3 I$$

```
> lambda4:=10;
```
$$\lambda 4 := 10$$

```
> d:=abs(lambda2);
```

$$d := \sqrt{13}$$

```
> rho:=lambda1/d;
```

$$\rho := \frac{15\sqrt{13}}{13}$$

```
> e:=argument(lambda2/d);
```

$$e := -\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \pi$$

```
> f:=evalf(e);
```

$$f := 2.158798931$$

```
> pi:=argument(-1);
```

$$\pi := \pi$$

```
> a11:=d*(rho+2*cos(e))/3;
```

$$a11 := \frac{11}{3}$$

```
> a12:=evalf(d*(rho-2*cos(pi/3+e))/3);
```

$$a12 := 7.398717473$$

```
> a13:=evalf(d*(rho-2*cos(pi/3-e))/3);
```

$$a13 := 3.934615860$$

```
> a14:=4;
```

$$a14 := 4$$

```
> a21:=a13;
```

$$a21 := 3.934615860$$

```
> a22:=a11;
```

$$a22 := \frac{11}{3}$$

```
> a23:=a12;
```

$$a23 := 7.398717473$$

```
> a24:=7;
```

$$a24 := 7$$

```
> a31:=a12;
```

$$a31 := 7.398717473$$

```
> a32:=a13;
```

$$a32 := 3.934615860$$

```
> a33:=a11;
```

$$a33 := \frac{11}{3}$$

```
> a34:=6;
```

$$a34 := 6$$

```
> a41:=0;
```

$$a41 := 0$$

```
> a42:=0;
```

$$a42 := 0$$

```
> a43:=0;
```

$$a43 := 0$$

```
> a44:=lambda4;
```

$$a44 := 10$$

```
>
A:=array([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a3
3,a34],[a41,a42,a43,a44]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & 7.398717473 & 3.934615860 & 4 \\ 3.934615860 & \frac{11}{3} & 7.398717473 & 7 \\ 7.398717473 & 3.934615860 & \frac{11}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$15.000000000, -2.000000000 + 2.999999998 I, -2.000000000 - 2.999999998 I, 10.$$