MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI DAN NILAI EIGEN VEKTOR EIGEN

UPT PERPUSTAKAAN

Tgl. terima	CB-9-05
Asal Dari	Fak. Mipa
Banyaknya	1 Exp
Harga	Hadiah
No. Inventaris	180905297
No. Klas	

OLEH

SYATHRIFITHRAH ABDUL LATIEF
H 121 96 004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2003

MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI DAN NILAI EIGEN VEKTOR EIGEN

Tugas Akhir
untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi
syarat-syarat dalam memperoleh
gelar sarjana

OLEH

SYATHRIFITHRAH ABDUL LATIEF
H 121 96 004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2003

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa Skripsi yang saya buat dengan judul :

MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI

DAN NILAI EIGEN, VEKTOR EIGEN

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Desember 2003

SYATHRIFITHRAH ABDUL LATIEF
NIM : H121 96 004

MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI DAN NILAI EIGEN, VEKTOR EIGEN

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama

Drs. La Podje Talangko
NIP. 131 650 920

Pembimbing Pertama

Drs. Muh. Zakir, M.Si
NIP. 131 959 064

Desember 2003

Pada hari, Sabtu tanggal 11 Desember 2003, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI DAN NILAI EIGEN, VEKTOR EIGEN

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Statistika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Desember 2003

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. M. Saleh AF.	(..............................)
2. Sekretaris	: A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si	(..............................)
3. Anggota	: Drs. La Podje Talangko	(..............................)
4. Anggota	: Drs. Muh. Zakir, M. Si	(..............................)
5. Anggota	: Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc.	(..............................)

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Tiada kata yang pantas penulis ucapkan selain puji dan syukur kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat dam limpahan hidayah-Nya lah semata sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang merupakan salah satu syarat untuk meraih gelar sarjana pada jurusan matematika fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam Universitas Hasanuddin.

Dalam proses penyelesaian studi dan tugas akhir ini tidak sedikit hambatan dan rintangan yang penulis alami, namun berkat kerja keras yang tak kenal menyerah serta senantiasa dibarengi dengan do'a akhirnya tugas akhir ini pun alhamdulillah dapat penulis selesaikan. Sehubungan dengan itu pula semua ini bukanlah semata atas kerja keras penulis. Penulis banyak menerima dukungan serta bantuan moril dan materil dari berbagai pihak yang telah turut membantu penulis dalam proses penyelesaian studi dan tugas akhir ini. Karena itu, pada kesempatan ini dengan penuh kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang tiada terhingga kepada :

- Ayahanda H. Abdul Latief dan ibunda St. Syamsiah, yang dengan penuh kesabaran telah merawat, membesarkan, senantiasa melimpahkan kasih saying sejak penulis kecil hingga dewasa, bantuan moril dan materil serta iringan do'a restu bagi penulis dalam menyelesaikan studi.
- Bapak Drs. Lapodje Talangko, selaku pembimbing utama, dan bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si, selaku pembimbing pertama yang ditengah kesibukan dan aktifitas

yang begitu padat senantiasa meluangkan waktu dengan penuh keihklasan untuk memberikan arahan dan bimbingan bagi penulis selama menyelesaikan tugas akhir ini.

- Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh staf atas segala bantuan serta fasilitas yang diberikan.
- Bapak Drs. Alimin Bado, MS, selaku Pembantu Dekan I yang senantiasa turut memberikan bimbingan dan arahan pada penulis terutama dalam proses penyelesaian studi.
- Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
- Bapak Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc selaku penasehat akademik yang banyak memberikan dukungan dan bantuan moril serta nasehat-nasehat hingga penulis menyelesaikan studi.
- My first and end love, suami tercinta Tamrin, SH atas segala bantuan, perhatian dan pengertiannya senantiasa mendukung penulis, menjadi teman dalam suka dan duka, serta senantiasa memotifasi penulis untuk dapat menyelesaikan studi.
- Buah hati tercinta, Tasya Salsabila dan Syakirah Inayah, dua malaikat kecil yang memotifator penulis untuk menyelesaikan studi, menjadi penghibur dan penghapus duka diantara segala lelah dalam upaya penulis menyelesaikan studi.
- Saudaraku tercinta : Ir. Muh Luthfie dan Sabrawaty Tuli, Muh Alauddin, S.Sos dan Hasma, Muh Al Qadri dan Syahriani, Muh Al-Azhar dan Husniar, Istiqamah,

Muh Amiluddin, Muthmainnah, keponakanku yang lucu dan manis : Farits, Uswah, Rizqah, Tawakkal, Putri dan Kayla.

- Segenap kerabat dan keluarga besar Sumbang "Gesok Puang Gati dan Saifa" serta keluarga besar Tallung Ura "Nene' Ruku".
- Sahabatku yang baik yang senantiasa bersedia membantu "Haerati (stat. 99)" dan Ester (almarhumah), thanks ya !
- Teman-teman satu angkatan : Aki, Fajar, Arni, Asni, Sri, Erna, dan semua tanpa terkecuali, rekan-rekan : Niar, Mia, Yani, Nino, dan segenap warga Himatika tanpa terkecuali.

Semoga segala budi baik dan dukungan mereka mendapat pahala bernilai tinggi dari-Nya, amin.

Akhir kata, tiada karya manusia yang sempurna, demikian pula dalam penulisan tugas akhir ini yang tak luput dari berbagi kekurangan, oleh sebab itu dengan penuh kerendahan hati penulis senantiasa mengharapkan saran dan kritik membangun demi perbaikan dan kesempurnaan tugas akhir ini.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi pembaca dan bernilai ibadah disisi Allah SWT, amin.

Makassar, Desember 2003

Penulis

ABSTRAK

Kadang-kadang ada lebih dari satu himpunan data berpasangan, dan untuk tiap himpunan data itu akan dihitung persamaan regresinya. Selanjutnya akan dibandingkan apakah garis-garis itu berimpit.

Jika A adalah matriks n x n sering dijumpai tidak ada hubungan geometrik yang nyata antara vektor x dan bayangannya Ax di bawah perkalian oleh A, akan tetapi ada beberapa vektor tak nol yang sering memetakan A kedalam skalar dengan perkalian skalarnya.

ABSTRACT

Sometime more than one group of pair data, and for each group of data will be count that seem regression. Next will to compare if that lines is tight.

If A is a matrix n x n often get nothing real geometric relation between vector x and the shadow Ax under multiplication by A, but some not zero vector often distribute A in scalar with it scalar multiplication.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang melahirkan berbagai macam ilmu pengetahuan dan teknologi. Tak dapat disangkal bahwa hal ini juga merupakan penyebab terjadinya perubahan-perubahan yang sangat besar dan cepat. Karena semakin kompleksnya informasi, membutuhkan suatu kemampuan untuk menangkap, menganalisa, merangkum dan membahas suatu permasalahan.

Dalam hal ini ilmu-ilmu dasar tentu tak bisa diabaikan begitu saja. Matematika sebagai salah satu ilmu dasar tentunya memegang peranan penting dalam menunjang kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Secara garis besar ilmu matematika terbagi atas dua bagian yaitu matematika murni dan matematika terapan. Matematika murni mempelajari masalah statistika dan komputer.

Dalam pembahasan pertama masalah ini penulis menguraikan secara sederhana tentang " Menentukan Kesejajaran Dua Garis Regresi " kemudian pada pembahasan yang kedua diuraikan tentang " Nilai Eigen, Vektor Eigen ".

1.2.Ruang Lingkup Pembahasan

Ruang lingkup pembahasan meliputi dua topik utama yaitu :

1. Menentukan Kesejajaran Dua Garis Regresi
2. Nilai Eigen, Vektor Eigen

Pada Bab II, sebagai Bab utama membahas masalah statistika yaitu Menentukan Kesejajaran Dua Garis Regresi sedangkan masalah analisis dibahas pada Bab III yaitu Nilai Eigen, Vektor Eigen.

Selanjutnya judul tugas akhir ini adalah " Menentukan Kesejajaran Dua Garis Regresi dan Nilai Eigen, Vektor Eigen".

Demikianlah tugas akhir ini dibuat sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

BAB II

MENENTUKAN KESEJAJARAN DUA GARIS REGRESI

2.1 Regresi Linear

Istilah "*regresi*" pertama kali diperkenalkan oleh Sir Francis. Galton (1822 – 1911), seorang antropolog dan ahli meteorologi dari Inggris. Dalam makalahnya "regression towards mediocrity in hereditary stature" Galton melaporkan penemuannya bahwa biji keturunan "tidak cenderung menyerupai biji induknya dalam hal besarnya, namun selalu lebih medioker (mendekati rata-rata). Percobaannya menunjukkan bahwa regresi keturunan menuju mediokritas berbanding langsung dengan simpangan induk dari rataan itu." Galton menjelaskan bahwa hal itu teramati pada catatan." Tinggi badan 930 anak." Yang sudah dewasa berikut tinggi badan orang tua mereka yang berjumlah 205 orang ia menunjukkan bahwa jika :

Y = "tinggi badan anak", dan

X = "tinggi badan orang tua"

maka berlaku suatu persamaan regresi, yaitu: $\hat{y} = \bar{y} + \left(\frac{2}{3}\right)(x - \bar{x})$.

Istilah regresi kemudian digunakan pada hubungan-hubungan yang situasinya berbeda, termasuk situasi yang peubah peramalnya tidak acak dan pemakaian itu berlangsung terus sampai sekarang.

2.1.1 Model Regresi Linear Sederhana

Model regresi linear yang paling sederhana adalah garis lurus, di mana terdapat peubah bebas x dan peubah yang bergantung pada x yaitu peubah tak bebas *y*. Jika kita menaruh perhatian pada ketergantungan suatu peubah acak *y* terhadap suatu besaran atau kuantitas *x* yang bervariasi namun bukan merupakan peubah acak maka suatu persamaan yang menghubungkan *x* dan *y* disebut persamaan regresi.

Misal terdapat satu *x* dan satu *y* maka data berbentuk pasangan pengamatan $\{(X_i,Y_i);\ \ i = 1,2,3,\ldots,n\}$. Bila nilai *x* diatur, yaitu bila percobaan dirancang maka proses percobaan menetapkan atau memilih nilai-nilai X_i terlebih dahulu dan kemudian mengamati nilai padanannya yaitu Y_i.

Bila dimisalkan bahwa semua rataan $\mu_Y|x$ terletak pada suatu garis lurus, maka peubah acak $Y_i = Y|x_i$ dapat ditulis sebagai :

$$Y_i = \mu_Y|x_i + E_i = \alpha + \beta x_i + E_i$$

dengan E_i peubah acak yang mempunyai rataan nol. Setiap pengamatan (X_i,Y_i) dalam sampel memenuhi hubungan :

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

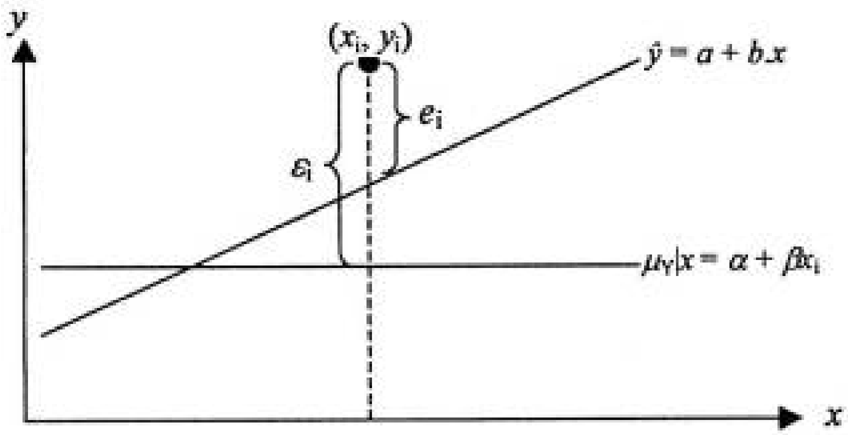
dengan ε_i nilai yang dicapai E_i bila Y_i berharga y_i.

Demikian juga dengan menggunakan persamaan regresi :

$$\hat{y} = a + bx$$

e_i disebut sisa. Beda antara e_i dengan ε_i terlihat pada tabel. Nilai a dan b yaitu taksiran untuk α dan β akan dicari sehingga jumlah kuadrat sisa menjadi minimum.

Jumlah kuadrat sisa sering pula disebut jumlah galat di sekitar garis regresi dan dinyatakan dengan JKG.



Tabel 1. Membandingkan ε_i dengan sisa e_i.

Cara peminimuman untuk menaksir parameter dinamakan metode kuadrat terkecil. Jadi a dan b akan dicari sehingga akan meminimumkan

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

bila JKG diturunkan terhadap a dan b maka diperoleh :

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)$$

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)x_i$$

bila kedua persamaan di atas disamakan dengan nol kemudian disusun kembali, maka diperoleh apa yang disebut persamaan normal

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

yang akan menghasilkan

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

dari persamaan pertama diperoleh

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Penaksir parameter α dan β garis regresi

$$\mu_Y|x = \alpha + \beta x$$

ditaksir dari sampel $\{(X_i, Y_i);\ i = 1,2,3,\ldots,n\}$ dengan garis

$$\hat{y} = a + bx$$

dengan

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

2.1.2. Sifat Penaksir Kuadrat Terkecil

Di samping anggapan bahwa galat E_i dalam model

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + E_i$$

merupakan peubah acak dengan rataan nol, misalkan selanjutnya bahwa E_i berdistribusi normal dengan variansi sama σ^2, dan bahwa $E_1, E_2, \ldots, E_n$ saling bebas dari suatu pengamatan ke pengamatan berikutnya dalam percobaan. Dengan anggapan normalitas maka dapat dicari rataan dan variansi untuk penaksir α dan β.

Perlu diingat bahwa nilai a dan b hanya taksiran untuk parameter sebenarnya α dan β didasarkan pada sampel sebesar n pengamatan. Taksiran untuk α dan β yang dapat dihitung dengan mengambil beberapa sampel sebesar n, dapat dipandang sebagai nilai acak A dan B.

Karena nilai x tidak berubah maka nilai A dan B bergantung pada variansi dalam nilai y atau lebih pada nilai peubah acak $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Karena E_i saling bebas dan berdistribusi normal maka Y_i ; i = 1, 2, …, n saling bebas dan masing-masing berdistribusi $n(y_i;\alpha + \beta x_i, \sigma)$.

Karena

$$B = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

merupakan fungsi linear peubah acak $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dengan koefisien

$a_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$; i = 1, 2, ..., n maka berdasarkan teorema berikut :

Teorema: "Bila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peubah acak bebas yang berdistribusi normal masing-masing dengan rataan $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ dan variansi $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ maka peubah acak : $Y = a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_n x_n$ berdistribusi normal dengan rataan : $\mu_Y = a_1^2.x_1^2 + a_2^2.x_2^2 + \ldots + a_n^2.x_n^2$ dan variansi :

$$\sigma_Y^2 = a_1^2.\sigma_1^2 + a_2^2.\,\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2.\sigma_n^2$$

dapat disimpulkan bahwa B berdistribusi normal dengan rataan

$$\mu_B = E(B) \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) E(Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$= E(B) \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}).(x + \beta x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$= \beta$$

dan variansi

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sigma_{Yi}^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

bahwa peubah acak A juga berdistribusi normal dengan rataan $\mu_A = \alpha$ dan

$$\text{variansi } \sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \sigma^2$$

Agar inferensi mengenai α dan β dapat dibuat, maka perlu ditaksir parameter σ^2 yang muncul dalam kedua rumus variansi A dan B di atas. Untuk itu dari segi teori diperlukan teori notasi berikut

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2}{n}$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]^2}{n}$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]}{n}$$

Sekarang jumlah kuadrat galat dapat ditulis sebagai

$$JKG = \sum_{i}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(y_i - \overline{y}) - b(x_i - \overline{x})\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= J_{yy} - 2bJ_{xy} + b^2 J_{xx}$$

$$= J_{yy} - bJ_{xy}$$

Sekarang kita telah siap untuk membuktikan teorema berikut:

Teorema: suatu taksiran tak bias untuk σ^2 diberikan oleh

$$s^2 = \frac{JKG}{n-2} = \frac{J_{yy} - bJ_{xy}}{n-2}$$

Bukti: Mengingat bahwa jumlah kuadrat galat adalah suatu peubah acak yang harganya akan berubah bila percobaan diulang beberapa kali, maka:

$$
\begin{aligned}
JKG &= J_{yy} - BJ_{xy} \\
&= J_{yy} - B^2 J_{xx} \quad (\text{karena } J_{xy} = BJ_{xx}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - B^2 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i^{\,2} - n\overline{Y}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\overline{X}^2\right)B^2
\end{aligned}
$$

Jika diambil ekspektasinya maka diperoleh

$$
E(JKG) = \sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^{\,2}\right) - nE\left(\overline{Y}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\overline{X}^2\right)E\left(B^2\right)
$$

<u>Teorema</u>: variansi peubah acak x adalah $\sigma^2 = E\,(x^2) - \mu^2$, maka berdasarkan teorema di atas kita dapat mengganti ketiga besaran

$$E(Y_i^2) = \sigma_{yi}^{\;2} + \mu_{yi}^{\;2}$$

$$E\left(\overline{Y}^2\right) = \sigma_{\bar{y}}^{\;2} + \left(\bar{y}^2\right)$$

$$E(B^2) = \sigma_B^{\;2} + \mu_B^{\;2}$$

Kemudian diperoleh

$$
\begin{aligned}
E(JKG) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{yi}^2 + \mu_{yi}^2\right) - n\left(\sigma_{\bar{y}}^2 + \mu_{\bar{y}}^2\right) - \left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sigma_B^2 + \mu_B^2\right) \\
&= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha + \beta x_i)^2 - n\left[\tfrac{\sigma^2}{n} + (\alpha + \beta\bar{x})^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right]\left[\tfrac{\sigma^2}{S_{xx}} + \beta^2\right]
\end{aligned}
$$

dengan menyamakan $Jxx = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$ dan kemudian disederhanakan, diperoleh: $E(JKG) = (n\text{-}2)\sigma^2$ jadi, $E(S^2) = \frac{E(JKG)}{n-2} = \sigma^2$ dan s^2 merupakan taksiran tak bias untuk σ^2.

2.1.3 Selang Kepercayaan Dan Uji Keberartian

Di samping menaksir hubungan linear antara x dan y untuk tujuan peramalan, orang yang melakukan percobaan (peneliti) mungkin pula ingin menarik inferensi mengenai kemiringan (koefisien arah). Perpotongan garis regresi dengan sumbu y, atau sifat yang menyeluruh dari garis regresi yang ditaksir. Bahkan sering terjadi hasil regresi dilaporkan oleh peneliti tanpa menyebutkan seberapa baiknya b menaksir β atau bagaimana baiknya garis regresi meramalkan respon.

Karena B merupakan peubah acak yang normal dan $(n-2)s^2/\sigma^2$ peubah yang berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajat kebebasan n-2, maka menurut teorema berikut:

Teorema: Misalkan Z peubah acak normal baku dan V peubah acak Chi- kuadrat dengan derajat kebebasan v. bila Z dan V bebas, maka distribusi peubah acak T, bila:

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{v}}}$, diberikan oleh

$$h(t) = \frac{\Gamma(v+1)/2}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi v}}\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}; \quad -\infty < t < \infty$$

ini dikenal dengan nama distribusi t dengan derajat kebebasan v. Statistik

$$T = \frac{(B-\beta)/\left(\sigma/\sqrt{J_{xx}}\right)}{\frac{s}{\sigma}}$$

$$= \frac{B-\beta}{\frac{s}{\sqrt{J_{xx}}}}$$

berdistribusi t dengan derajat kebebasan n-2. Statistik T dapat digunakan untuk membentuk selang kepercayaan untuk koefisien β dengan kepercayaan $(1-\alpha)100\%$

Selang kepercayaan untuk β.

Suatu selang kepercayaan sebesar$(1-\alpha)100\%$, untuk parameter β dalam persamaan regresi $\mu_{Y|X}= \alpha+\beta x$ adalah

$$b-\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}.s}{\sqrt{J_{xx}}}<\beta<b+\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}.s}{\sqrt{J_{xx}}}$$

$$\text{statistik } T=\frac{A-\alpha}{S\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2/n.J_{xx}}}$$ berdistribusi t dengan derajat kebebasan n-2,

Selang kepercayaan untuk α.

Suatu selang kepercayaan sebesar$(1-\alpha)100\%$, untuk parameter α dalam persamaan regresi $\mu_{Y|X}= \alpha+\beta x$ adalah

$$a-\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}.s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}{\sqrt{n.J_{xx}}}<\alpha<a+\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}.s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}{\sqrt{n.J_{xx}}}$$

sehingga selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk parameter α dapat dibuat.

Untuk menguji hipotesis nol H_0 bahwa $\alpha = \alpha_0$ lawan suatu pilihan yang sesuai, dapat digunakan distribusi t dengan derajat kebebasan n-2 untuk mendapatkan daerah kritis dan kemudian mendasarkan keputusan pada nilai

$$t = \frac{a - \alpha_0}{s\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / n.J_{xx}}}$$

Misalkan hendak diteliti rataan y pada nilai $x = x_0$ dan akan ditaksir $\mu_{Y|x_0} = \alpha+\beta x_0$ dengan penaksir (titik) $\hat{y}_0 = A + Bx_0$. Karena $E(\hat{y}_0) = E(A + Bx) = \alpha+\beta x_0$, maka penaksir $\hat{y}_0$ tak bias dan mempunyai variansi

$$\sigma^2_{yo} = \sigma^2_{A+Bxo} = \sigma^2_{\bar{Y}+B(xo-\bar{x})}$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}} \right]$$

Selanjutnya akibat dari kov $(\overline{Y}, B) = 0$ maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk rataan respon $\mu_{Y|x_0}$ dapat dibuat dari statistik

$$T = \frac{\overline{Y}_0 - \mu_{Y|x_0}}{S\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) + \left[(x_0 - \bar{x})^2 / J_{xx}\right]}},$$

yang berdistribusi t dengan derajat kebebasan n-2.

Selang kepercayaan untuk $\mu_{Y|x_0}$.

Suatu selang untuk rataan respon $\mu_{Y|x_0}$ diberikan oleh

$$\hat{y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}.s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}} < \mu_{Y|x_0} < \hat{y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}.s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}}$$

$t_{\alpha/2}$ adalah nilai distribusi t dengan derajat kebebasan n-2.

2.1.4. Contoh

Data percobaan I

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,5	1,8	2,4	3,0	3,5	3,9	4,4	4,8	5,0
y_i	4,8	5,7	7,0	8,3	10,3	12,3	13,1	13,6	15,3

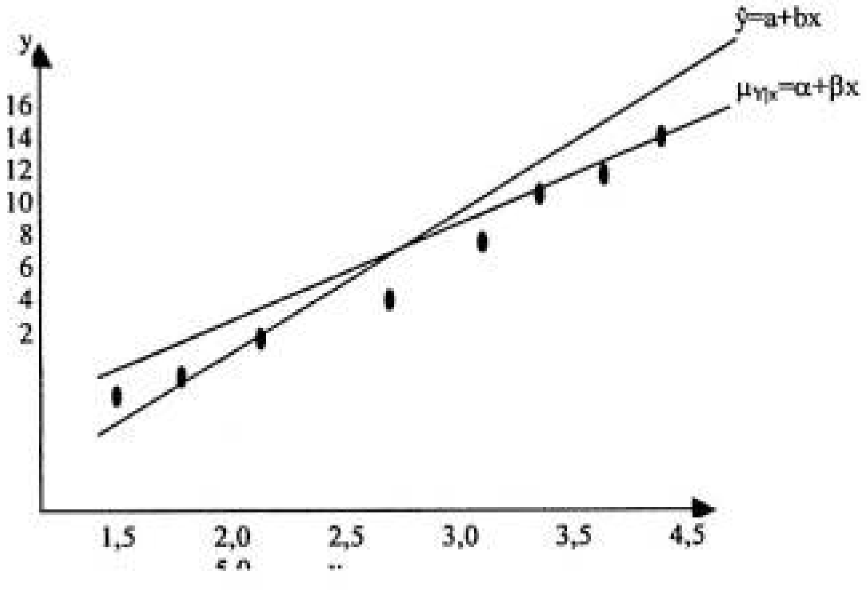
Akan dinyatakan sampel acak ukuran n dengan himpunan $\{(x_i,y_i); i = 1, 2, \ldots, n\}$.Bila diambil sample tambahan pada sejumlah harga x yang tepat sama maka harga y akan berbeda-beda.Jadi harga y_i pada pasangan terurut (x_i,y_i) merupakan harga dari suatu peubah acak Y_i. Untuk lebih mudahnya $Y|x$ dinyatakan dengan $f(y|x)$. Jelas, bahwa bila $x= x_i$ maka lambang $Y|x$ menyatakan peubah acak Y_i.

Istilah regresi linear berarti, bahwa rataan $Y|x$ berkaitan linear dengan x dalam bentuk persamaan linear biasa.

$$\mu_{Y|x}=\alpha+\beta x$$

α dan β merupakan dua parameter yang akan ditaksir dari data sampel. Bila taksiran untuk kedua parameter itu masing-masing dinyatakan dengan a dan b maka taksiran untuk respon $\hat{Y}$ dapat diperoleh dari bentuk garis regresi berdasarkan sampel

$\hat{y} = a + bx$



Contoh 1

Taksirlah garis regresi dari data pada tabel 2.

Jawab:

$$\sum_{i=1}^{9} \chi_i = 1{,}5 + 1{,}8 + 2{,}4 + 3{,}0 + 3{,}5 + 3{,}9 + 4{,}4 + 4{,}8 + 5{,}0 = 30{,}3$$

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 4{,}8 + 5{,}7 + 7{,}0 + 8{,}3 + 10{,}9 + 12{,}4 + 13{,}1 + 13{,}6 + 15{,}3 = 91{,}1$$

$$\sum_{i=1}^{9} \chi_i y_i = (1{,}5 * 4{,}8) + (1{,}8 * 5{,}7) + (2{,}4 * 7{,}0) + (3{,}0 * 8{,}3) + (3{,}5 * 10{,}9) + (3{,}9 * 12{,}4)$$
$$+ (4{,}4 * 13{,}1) + (4{,}8 * 3{,}6) + (5{,}0 * 133) = 345{,}09$$

$$\sum_{i=1}^{9} \chi_i^{\ 2} = (1{,}5)2 + (1{,}8)2 + (2{,}4)2 + (3{,}0)2 + (3{,}5)2 + (3{,}9)2 + (4{,}4)2 + (4{,}8)2 + (5{,}0)2$$
$$= 115{,}11$$

$$\overline{\chi} = \frac{30{,}9}{9} = 3{,}3667$$

$$\overline{y} = \frac{91{,}1}{9} = 10{,}1222$$

sehingga

$$b = n\sum_{i=1}^{n} XiYi - \left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Yi\right)$$

$$b = \frac{(9)(345.09)-(30.3)(91.1)}{(9)(115.11)-(30.3)^2} = 2.9303$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$a = 10.1222 - (2.9303)(3.3667) = 0.268$$

Jadi taksiran untuk garis regresi adalah $\hat{y}$=0,2568+2,9303x

dengan memasukkan sembarang dua nilai x pada persamaan, misalnya x_1= 1,5 dan x_2= 5,0, maka diperoleh ordinat $\hat{y}_1$= 4,7 dan $\hat{y}_2$= 14,9. Garis regresi sampel pada tabel 2 didapat dengan menghubungkan kedua titik yang baru diperoleh itu.

Contoh 2

Carilah selang kepercayaan 95% untuk β dalam garis regresi $\mu_{y|x}=\alpha+\beta x$ berdasarkan data dalam tabel 2.

Jawab:

$$\sum_{i=1}^{9}\chi_i = 30,3 \quad \sum_{i=1}^{9}\chi_i^2 = 115,11 \quad \sum_{i=1}^{9}y_i = 91,1 \quad \sum_{i=1}^{9}\chi_i y_i = 345,09.$$

Dari data tabel 2 dapat dihitung $\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 1036,65.$

Jadi

$$J_{xx} = 115{,}5 - \frac{(30{,}3)^2}{9} = 13{,}10$$

$$J_{yy} = 1036{,}65 - \frac{(91{,}1)^2}{9} = 114{,}52$$

$$J_{xy} = 345{,}09 - \frac{(30{,}3)(91{,}1)}{9} = 38{,}39$$

Diketahui bahwa b=2,9303, maka

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{J_{yy} - bJ_{xy}}{n-2} \\ &= \frac{114{,}52 - (2{,}9303)(38{,}38)}{7} \\ &= 0{,}2894 \end{aligned}$$

Jika diambil akarnya akan diperoleh $\sqrt{J_{xx}}$ =3,6194 dan s = 0,5380. dengan menggunakan tabel distribusi Chi-kuadrat diperoleh $t_{0{,}025} = 2{,}365$ untuk derajat kebebasan 7, sehingga suatu selang kepercayaan 95 % untuk β adalah:

$$2{,}9305 - \frac{(2{,}365)(0{,}5380)}{(3{,}6194)} < \beta < 2{,}9305 + \frac{(2{,}365)(0{,}5380)}{(3{,}6194)}$$

yang bila disederhanakan menjadi

$$2{,}579 < \beta < 3{,}282$$

Untuk menguji hipotesis nol H_0 bahwa $\beta=\beta_0$ lawan suatu alternatif yang sesuai dengan persoalan, kembali digunakan distribusi t dengan derajat kebebasan n-2 untuk mendapatkan suatu daerah kritis dan kemudian mendasarkan keputusan atas nilai

$t = \dfrac{b - \beta_0}{s / \sqrt{J_{xx}}}$, metode ini dijelaskan dalam contoh 3.

Contoh 3

Dengan menggunakan harga taksiran b= 2,9303 pada contoh 1, ujilah hipotesis bahwa β= 2,5 pada taraf keberartian 0,01 lawan alternatif bahwa β> 2,5.

Jawab:

1. H_0: β= 2,5

   H_1: β> 2,5

2. Pilih taraf keberartian α=....

3. Daerah kritis: T> 2,998

4. Perhitungan:

$$t = \frac{b - \beta_0}{s / \sqrt{J_{xx}}}$$

$$= \frac{2{,}9303 - 2{,}5}{0{,}5380 / 3{,}194}$$

$$= 2{,}8948$$

5. Kesimpulan

   Karena t= 2,8948 < 2,998 maka H_0 diterima, ini berarti bahwa β tidak berbeda secara berarti dengan 2,5.

Contoh 4

Dengan menggunakan data dalam tabel 2, buatlah selang kepercayaan 95% untuk rataan respon $\mu_{Y|x_0}$.

Jawab:

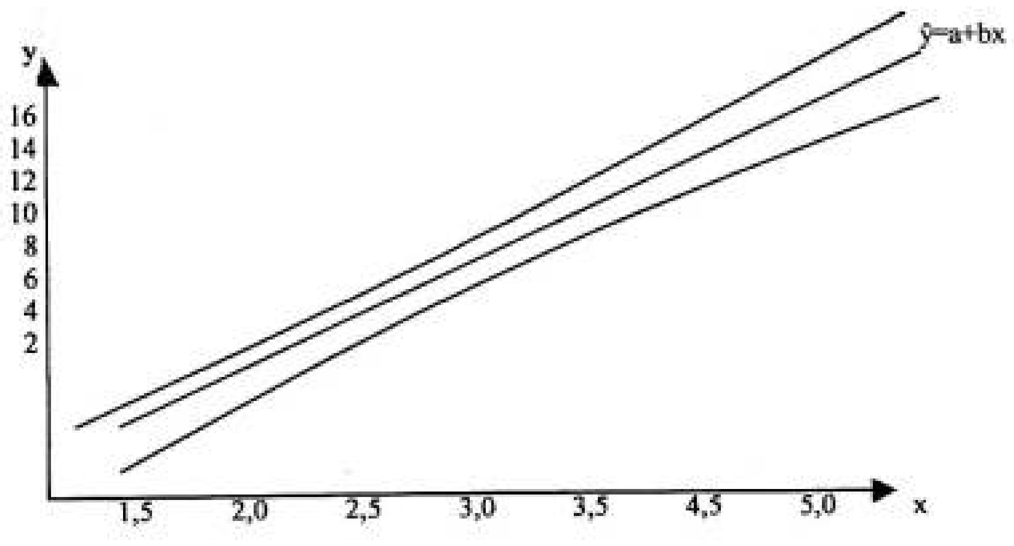
Dari persamaan regresi untuk misalnya $x_0 = 2$ diperoleh $\hat{y}_0 = 0{,}2568 + (2{,}9303)(2) = 6{,}1174$. di mana diketahui bahwa $\bar{x} = 3{,}3667$; $J_{xx} = 13{,}10$; $S = 0{,}5380$ dan $t_{0,025} = 2{,}365$ untuk derajat kebebasan 7. Jadi selang kepercayaan 95 % untuk $\mu_{y|2}$ diberikan oleh:

$$\hat{y}_0 - t_{\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}} < \mu_{Y|x_0} < \hat{y}_0 + t_{\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}}$$

$$6{,}1174 - (2{,}365)(0{,}5380)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{(2 - 3{,}3667)^2}{13{,}10}} < \mu_{Y|2} < 6{,}1174 + (2{,}365)(0{,}5380)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{(2 - 3{,}3667)^2}{13{,}10}}$$

$$5{,}4765 < \mu_{Y|2} < 6{,}7583$$

Jika perhitungan di atas diulangi untuk beberapa nilai x_0 yang berlainan maka akan diperoleh beberapa selang kepercayaan masing-masing untuk tiap $\mu_{Y|X_0}$. Tabel 3 memperlihatkan titik-titik data, taksiran garis regresi serta batas atas dan batas bawah dari limit kepercayaan untuk rataan Y|x



2.2 Dua Garis Regresi Linear (Sejajar dan Berimpit)

Kadang-kadang ada lebih dari satu himpunan data berpasangan, dan untuk tiap himpunan data itu harus dihitung persamaan regresinya. Selanjutnya akan dibandingkan apakah garis-garis itu berimpit. Pertama akan dibicarakan apakah dua garis regresi linear itu sejajar. Misalnya dipunyai dua model regresi garis lurus, yaitu:

$Y_1 = \alpha_1+\beta_1 x_1+E_1$, dan

$Y_2 = \alpha_2+\beta_2 x_2+E_2$

masing-masing untuk populasi I: (x_1,y_1), dan populasi II: (x_2,y_2). Dari sampel 1: (x_{1i}, y_{1i}), i =1, 2, ..., n_1, yang diambil dari populasi I dilakukan analisis regresi lengkap, demikian juga dari sampel 2: (x_{1j}, y_{1j}), j =1, 2, ..., n_2 dilakukan analisis regresi serupa. Jadi diperoleh garis regresi estimasi:

$$\hat{Y}_1 = a_1+b_1x_1 \text{ dan } \hat{Y}_2 = a_2+b_2x_2$$

Selanjutnya dilakukan uji hipotesis:

H_0: $\beta_1=\beta_2$ (kedua garis regresi sejajar); versus

H_1: $\beta_1\neq\beta_2$ (kedua garis regresi tidak sejajar)

Untuk ini dianggap bahwa E_1 dan E_2 berdistribusi normal dengan variansi sama, karena itu dapat digunakan statistik penguji:

$$t = \frac{(b_1 - b_2)-(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{\operatorname{var}(b_1 - b_2)}}$$

yang berdistribusi t dengan derajat kebebasan = $(n_1 + n_2 - 4)$ di sini:

$$\widehat{\mathrm{var}\,(b_1 - b_2)} = \widehat{\mathrm{var}\,(b_1)} + \widehat{\mathrm{var}\,(b_2)}$$

$$= \frac{S_p^2}{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} + \frac{S_p^2}{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}$$

dengan

$$S_p^2 = \frac{JKS_1 + JKS_2}{(n_1 - 2) + (n_2 - 2)}$$

dan

$$JKS_1 = \sum Y_1^2 - a_1 \sum Y_1 - b_1 \sum x_1 y_1$$

$$JKS_2 = \sum Y_2^2 - a_2 \sum Y_2 - b_2 \sum x_2 y_2$$

Contoh 1

Data dalam tabel 1 menunjukkan IQ ($=x_1$) dan IP ($=Y_1$) dari 8 orang mahasiswa putra.

Tabel 1

IQ dan IP delapan mahasiswa putra

IQ	101	117	137	146	114	125	134	143
IP	1,7	2,2	2,9	3,4	1,9	2,8	3,1	3,5

Data tabel 2 menunjukkan IQ ($=x_1$) dan IP ($=Y_1$) dari 7 orang mahasiswa putri.

Tabel 2

IQ dan IP tujuh mahasiswa putri

IQ	117	106	146	133	112	124	137
IP	2,0	1,8	3,5	2,8	1,7	2,9	3,3

Untuk mahasiswa putra dihitung:

$n_1 = 8$; $\Sigma x_i = 1017$; $\Sigma Y_i = 21{,}5$; $\Sigma x_i^2 = 131001$; $\Sigma y_i^2 = 61{,}01$; $\Sigma x_i y_i = 2805{,}3$; maka

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{n\left(\sum x_1 y_1\right) - \left(\sum x_1\right)\left(\sum y_1\right)}{n\left(\sum x_1^{\ 2}\right) - \left(\sum x_1\right)^2} \\ &= \frac{8.(2805{,}3) - (1017)(21{,}5)}{8.(131001) - (1011117)^2} \\ &= 0{,}042 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{y}_1 - b_1 \bar{x}_1 \\ &= 2{,}6875 - (0{,}042)(127{,}125) \\ &= -2{,}65175 \end{aligned}$$

maka persamaan regresi estimasinya adalah: $\hat{Y}_1 = -2{,}65175 + 0{,}042\ x_1$

$$JKS_1 = 61{,}01 - (-2{,}65175)(21{,}5) - (0{,}042)(2805{,}3) = 0{,}200025$$

Hasil perhitungan untuk mahasiswa putri diperoleh:

$n_2 = 7$; $\Sigma x_2 = 875$; $\Sigma y_2 = 18{,}0$; $\Sigma x_2^2 = 110619$; $\Sigma y_2^2 = 49{,}52$; $\Sigma x_2 y_2 = 2301{,}3$; maka

$$b_2 = \frac{7(2310{,}3) - (875)(18{,}0)}{7(110619) - (875)^2} = 0.0485$$

$$a_2 = 2{,}57143 - (0{,}0485)(125) = -3{,}49107$$

Jadi, persamaan regresi estimasinya adalah: $\hat{Y}_2 = -3{,}49107 + 0{,}0485 x_2$

$$JKS_2 = 49{,}52 - (-3{,}49107)(18{,}0) - (0{,}0485)(2310{,}3) = 0{,}30971$$

Untuk menguji apakah kedua garis regresi itu sejajar, yakni H_0: $\beta_1=\beta_2$ maka:

$$S_p^2 = \frac{JKS_1 + JKS_2}{(n_1-2)+(n_2-2)}$$
$$= \frac{0{,}200025 + 0{,}30971}{6+5}$$
$$= 0{,}04634$$
$$\widehat{\text{var}(b_1 - b_2)} = S_p^2\left[\frac{1}{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2} + \frac{1}{\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}\right]$$
$$= (0{,}04634)(13{,}8699)x10^{-4}$$
$$maka \quad t = \frac{0{,}042 - 0{,}0485}{\sqrt{64{,}27316x10^{-6}}} = -0{,}811$$

Kriterium:

H_0 ditolak jika t> (11; 0,05) atau t≤ -t (11;0,05)

H_0 diterima jika-t (11;0,05)≤ t(11;0,05)

Karena harga t (11;0,05)=1,796>0,811, maka dengan demikian H_0diterima pada tingkat signifikasi 10 %.

Ini berarti bahwa kedua garis regresi itu sejajar.

Selanjutnya jika dalam uji kesejajaran telah disimpulkan bahwa dua garis regresi itu sejajar, dilakukan lagi uji hipotesis untuk mengetahui apakah dua garis regresi yang sejajar juga berimpit, hipotesisnya yakni H_0: $\alpha_1=\alpha_2$ (jika $\beta_1=\beta_2$).

Untuk ini pertama gabungkan b_1 dan b_2 menjadi b_g (b gabungan) dengan rumus:

$$b_g = \frac{\sum(x_1-\bar{x}_1)(y_1-\bar{y}_1)+\sum(x_1-\bar{x}_1)(y_1-\bar{y}_1)}{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2+\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\sum x_1y_1 - \frac{(\sum x_1)(\sum y_1)}{n_1}\right]+\left[\sum x_2y_2 - \frac{(\sum x_2)(\sum y_2)}{n_2}\right]}{\left[\sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n_1}\right]\left[\sum x_2^2 - \frac{(\sum x_2)^2}{n2}\right]}$$

$$= \frac{\left[2805{,}3 - \frac{(1017)(21{,}5)}{8}\right]+\left[2310{,}3 - \frac{(875)(18{,}0)}{7}\right]}{\left[131001 - \frac{(1017)^2}{8}\right]+\left[110619 - \frac{(875)^2}{7}\right]}$$

$$= \frac{132{,}4125}{2958{,}8765}$$

$$= 0{,}04475$$

Statistik penguji yang digunakan adalah:

$$t = \frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_2)-b_g(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{S_p^2\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{(x_1-\bar{x}_2)^2}{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2+\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}\right]}}$$

yang berdistribusi t dengan $db = (n_1+n_2-3)$

$$= \frac{(2{,}6875-2{,}5714)-(0{,}04475)(127{,}125-125)}{\left[0{,}046534\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{(127{,}125-125)^2}{1714{,}875+2958{,}8765}\right)\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{0{,}021}{0{,}11173}$$

$$= 0{,}1880$$

Karena harga t= 0,1880 < t (54;0,10)= 1,296, maka H_0 diterima pada tingkat signifikansi 10 % sehingga dapat disimpulkan bahwa kedua garis regresi itu berimpit.

Contoh 2

Dipunyai dua sampel observasi (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dengan hasil perhitungan dari data adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\text{Sampel I}: n_1 = 28, \textstyle\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2 &= 142{,}35 \\
\textstyle\sum(x_1 - \bar{x}_1)(y_1 - \bar{y}_1) &= 69{,}47 \\
\textstyle\sum(y_1 - \bar{y}_1)^2 &= 108{,}77 \\
\bar{x}_1 &= 14{,}7 \\
\bar{y}_1 &= 32{,}0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sampel II}: n_2 = 30, \textstyle\sum(x_2 - \bar{x}_2)^2 &= 181{,}32 \\
\textstyle\sum(x_2 - \bar{x}_2)(y_2 - \bar{y}_2) &= 97{,}40 \\
\textstyle\sum(y_2 - \bar{y}_2)^2 &= 153{,}39 \\
\bar{x}_2 &= 15{,}39 \\
\bar{y}_2 &= 27{,}4
\end{aligned}$$

dari data sampel I selanjutnya diperoleh :

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sum(x_1 - \bar{x}_1)(y_1 - \bar{y}_1)}{\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2} \\
&= \frac{69{,}47}{142{,}35} \\
&= 0{,}4880
\end{aligned}$$

Catatan:

Rumus ini ekivalen dengan rumus:

$$b_1 = \frac{n\sum(x_1y_1) - (\sum x_1)(\sum y_1)}{n\left(\sum x_1^{\,2}\right) - \left(\sum x_1\right)^2}$$

$$a_1 = \overline{Y}_1 - b_1\overline{x}_1$$
$$= 32{,}0 - (0{,}488)(14{,}7)$$
$$= 24{,}82684$$

$$JKS_1 = \sum\left(Y_1 - \overline{Y}_1\right)^2 - b_1\sum\left(x_1 - \overline{x}_1\right)\left(Y_1 - \overline{Y}_1\right)$$
$$= 108{,}77 - (0{,}488)(69{,}47)$$
$$= 74{,}86864$$

dari sampel II diperoleh:

$$b_2 = \frac{n\sum(x_2y_2) - (\sum x_2)(\sum y_2)}{n\left(\sum x_2^{\,2}\right) - \left(\sum x_2\right)^2}$$
$$= \frac{97{,}40}{181{,}32}$$
$$= 0{,}5372$$

$$a_2 = Y_2 - b_2\overline{x}_2$$
$$= 27{,}4 - (0{,}5372)(15{,}8)$$
$$=$$

$$JKS_2 = \sum\left(Y_2 - \overline{Y}_2\right)^2 - b_2\sum\left(x_2 - \overline{x}_2\right)\left(Y_2 - \overline{Y}_2\right)$$
$$= 15{,}59 - (0{,}5372)(97{,}40)$$
$$= 101{,}26672$$

Untuk uji H_0: $\beta_1 = \beta_2$ (kedua garis regresi sejajar) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
S_p^2 &= \frac{JKS_1 + JKS_2}{(n_1 - 2) + (n_2 - 2)} \\
&= \frac{74{,}86864 + 101{,}26672}{26 + 28} \\
&= 3{,}261766
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{var}(b_1 - b_2)} &= S_p^2 \frac{1}{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} + \frac{1}{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2} \\
&= 3{,}261766 \left[\frac{1}{142{,}35} + \frac{1}{181{,}32} \right]
\end{aligned}
$$

Statistik penguji:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{\widehat{\operatorname{var}(b_1 - b_2)}}} \\
&= \frac{-0{,}0492}{\sqrt{0{,}0125}} \\
&= -0{,}44
\end{aligned}
$$

karena t= -0,44 terletak antara $-t=(54;0{,}05)=-1{,}674$ dan $t(54;\ 0{,}05) = 1{,}674$, maka H_0 diterima pada tingkat signifikansi 10 % yang berarti bahwa kedua garis regresi sejajar.

Selanjutnya akan diuji lagi apakah kedua garis regresi berimpit H_0: $\alpha_1 = \alpha_2$ (jika $\beta_1 = \beta_2$).

$$
b_g = \frac{69{,}47 + 97{,}4}{142{,}35 + 181{,}32} = 0{,}515556
$$

Statistik penguji:

$$t = \frac{(32{,}0 - 27{,}4) - (0{,}515556)(14{,}7 - 15{,}8)}{\left[3{,}261766\left(\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{(14{,}7-15{,}8)^2}{69{,}47+97{,}40}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 10{,}358$$

Karena t = 10,358 > t (55;0,01) =2,396 maka H_0 ditolak. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kedua garis regresi itu tidak berimpit.

BAB III

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

3.1 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks n x n, sering kita jumpai tidak ada hubungan geometric yang nyata diantara vektor x dan bayangannya Ax dibawah perkalian oleh A (gambar 3.1a). akan tetapi ada beberapa vektor taknol yang sering memetakan A ke dalam skalar dengan perkalian skalarnya sendiri (gambar 3.1b). Seperti halnya vector yang memainkan peran penting dalam analisis transformasi linear dan secara natural mengangkatnya dalam penelahan vibrasi, sistem elektris, genetika, reaksi kimia, mekanika kuantum, tegangan mekanis, ekonomi, dan geometri. Pada bagian ini kita akan menunjukkan bagaimana mencari vektor-vektor ini dan pada bagian selanjutnya kita akan menyelidiki beberapa penerapannya.

(a)

(b)

Definisi. Jika A adalah matriks n x n, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (**eigenvektor**) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu scalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x dikatakan vektor eigen **yang bersesuaian** dengan λ.

Contoh 1.

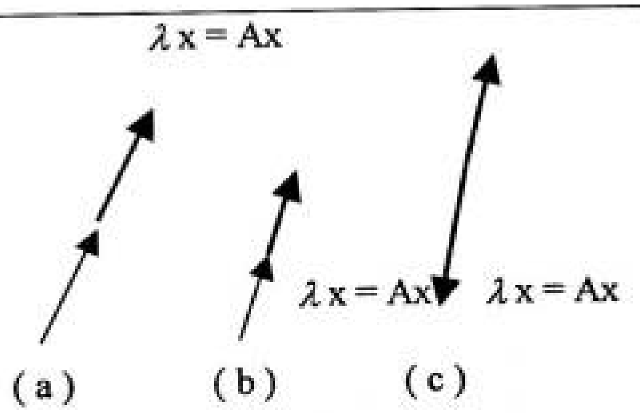
Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

nilai eigen dan vektor eigen mempunyai taksiran geometrik yang bermanfaat dalam R^2 dan R^3. Jika λ adalah nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan x, maka $Ax = \lambda$, sehingga perkalian oleh akan memperbesar x, atau membalik arah x, yang bergantung pada nilai λ.



Untuk mencari nilai eigen matrik A yang berukuran n x n maka kita menuliskan kembali $AX = \lambda X$ sebagai

$$AX = \lambda IX$$

atau secara ekivalen

$$(\lambda I - A)X = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. bila diperluas, maka determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang kita namakan polinom karakteristik dari A. Jika A adalah matriks n x n maka polinom karakteristik A harus memenuhi n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi, polinom karakteristik n x n mempunyai bentuk .

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Contoh 2

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pemecahan. karena

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1 dan \lambda = 2$; inilah nilai-nilai eigen dari A.

Contoh 3

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Pemecahan. Dengan meneruskan seperti ini dalam contoh 2 maka,

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

maka nilai-nilai eigen dari A harus memenuhi persamaan kuadratik $\lambda^2 + 1 = 0$. Karena pemecahan-pemecahan persamaan ini hanya bilangan –bilangan imajiner

$\lambda = i dan \lambda = -i$

dan karena kita menganggap bahwa semua skalar kita adalah bilangan riil, maka A tidak mempunyai nilai eigen.

Contoh 4

Carilah nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Pemecahan.

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

maka nilai-nilai eigen dari A harus memenuhi persamaan pangkat tiga

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

untuk memecahkan persamaan ini kita akan mulai mencari pemecahan-pemecahan bilangan bulat. Dapat disederhanakan dengan memanfaatkan kenyataan bahwa semua pemecahan bilangan bulat (jika ada) dari persamaan polinom dengan koefisien-koefisien bilangan bulat.

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

harus merupakan pembagi dari suku konstan, c_n. Jadi, pemecahan-pemecahan bilangan bulat yang mungkin hanya lah pembagi dari –4, yakni, $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Dengan menssubstitusikan nilai-nilai ini berturut-turut maka akan memperlihatkan bahwa $\lambda = 4$ adalah pemecahan bilangan bulat. Sebagai konsekuensinya, maka

$\lambda - 4$ haruslah merupakan faktor dari ruas kiri. Dengan membagi $\lambda - 4$ ke dalam $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ maka dapat dituliskan kembali sebagai

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

jadi, pemecahan selebihnya dari memenuhi persamaan kuadrat

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

yang dapat dipecahkan dengan rumus kuadrat. Maka,nilai-nilai eigen dari A adalah

$$\lambda = 4 \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3} \text{ dan } \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

contoh 5

carilah basis-basis untuk ruang eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pemecahan. Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai eigen A adalah $\lambda = 1 dan \lambda = 5$. Jadi kita peroleh dua ruang eigen dari A .

menurut definisi

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan taktrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yakni, dari

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jika $\lambda = 5$, maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$x_1 = -s \qquad x_2 = s \qquad x_3 = t$$

Jadi, vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor bebas linear, maka vektor-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$.

Jika $\lambda = 1$, maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen dan nilai eigen dapat didefinisikan untuk operator linear seperti juga untuk matriks. Skalar λ kiata namakan nilai eigen dari operator linear $T : V \to V$ jika ada vektor taknol x dalam V sehingga $Tx = \lambda x$. Vektor x tersebut kita namakan ***vektor eigen T*** yang bersesuaian dengan λ. Secara ekivalen, maka vektor eigen T yang bersesuaian dengan λ adalah vektor taknol dalam kernel $\lambda I - T$. Kernel ini kita namakan ruang eigen T yang bersesuaian dengan λ.

Dapat diperlihatkan bahwa jika V adalah ruang vektor berdimensi berhingga dan A adalah matriks T terhadap sebarang basis B, maka :

1. Nilai eigen T adalah nilai eigen matriks A.
2. Vektor x adalah vektor eigen T yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika matriks koordinatnya $[x]_B$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ.

contoh 6

Carilah nilai eigen dan basis untuk ruang eigen dari operator linear $T : P_2 \to P_2$ yang didefinisikan oleh

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$$

Pemecahan. Matriks T terhadap basis baku $B = \{1, x, x^2\}$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen T adalah nilai eigen A; yakni $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$ (contoh 5). Juga dari contoh 5 ruang eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ mempunyai basis $\{u_1, u_2\}$

dan ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ mempunyai basis $\{u_3\}$, dimana

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks ini adalah matriks koordinat terhadap B yang berbentuk

$$P_1 = -1 + x \quad P_2 = x^2 \quad P_3 = 1 + x$$

jadi, $\{-1 + x, x^2\}$ adalah basis untuk ruang eigen T yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$, dan $\{1 + x\}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

3.2 Diagonalisasi

Masalah Diagonalisasi. Diberikan sebuah operator linear $T : V \to V$ pada sebuah ruang vector berdimensi berhingga, apakah terdapat sebuah basis untuk V terhadap mana matriks T diagonal?

Jika A adalah matriks untuk $T : V \to V$ yang bertalian denganbeberapa basis sebarang, maka soal ini ekivalen dengan menanyakan apakah terdapat perubahan basis sehingga matriks baru untuk T diagonal. Menurut teorema berikut. Misalkan $T: V \rightarrow V$ adalah operator linear pada ruang vector V berdimensi berhingga. Jika A adalah matriks T terhadap basis B, dan $A^{'}$ adalah matriks T terhadap basis $B^{'}$, maka $A^{'} = P^{-1}AP$ dimana P adalah matriks transisi dari $B^{'}$ ke B. Maka matriks baru untuk T akan sama dengan $P^{-1}AP$ dimana P adalah matriks transisi yang sesuai.

Bentuk matriks dari Masalah Diagonalisasi. Diketahui matriks kuadrat A, apakah terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal?

Masalah ini menyarankan definisi-definisi berikut.

Definisi. Matriks kuadrat A dinamakan dapat didiagonalisasi (diagonalizable) jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema berikut adalah alat dasar dalam pendiagonaalisaasi;buktinya akan mengungkapkan bagaimana mengdiagonalkan matriks.

Teorema 2. jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain. (a) A dapat didiagonalisasi.

A mempunyai n vektor eigen bebas linear.

Bukti $(a) \Rightarrow (b)$. Karena A dianggap dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang dapat dibalik.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

maka, AP=AD; yakni

$$AP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

jika sekarang kita misalkan $P_1, P_2, \cdots, P_n$ menyatakan vektor-vektor kolom P, maka bentuk kolom-kolom AP yang berurutan adalah $\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n$.

Jadi, kita haarus memperoleh

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \cdots, AP_n = \lambda_n P_n$$

karena P dapat dibalik, maka vektor-vektor kolomnya semuanya taknol; jadi menurut (3.5), $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A, dan $P_1, P_2, \cdots, P_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena P dapat dibalik, maka menurut teorema. jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain.

(a) A dapat dibalik

(b) Ax=0 hanya memp[unyai pemecahan trivial.

(c) A ekivalen basis dengan In.

(d) Ax=b konsisten untuk tiap-tiap matriks b yang berukuran n x 1.

(e) Det(A) $\neq$ 0

(f) A mempunyai rank n.

(g) Vektor-vektor baris A bebas linear.

(h) Vektor-vektor kolom A bebas linear.

Diperoleh bahwa $P_1, P_2, \cdots, P_n$ bebas linear. Jadi, A mempunyai n vector eigen bebas linear.

$(b) \Rightarrow (a)$ anggaplah A mempunyai n vektor eigen bebas linear, maka $P_1, P_2, \cdots, P_n$ dengan nilai eigen yang bersesuaian $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vector-vektor kolomnya adalah $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Kolom-kolom dari hasil kali AP adalah

$AP_1, AP_2, \cdots, AP_n$

Tetapi

$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \cdots, AP_n = \lambda_n P_n$

Sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{PD}$$

di mana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ pada diagonal utama. Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linear, maka P dapat dibalik; jadi (3.6) dapat dituliskan kembali sebagai $P^{-1}AP = D$; yakni, A terdiagonalisasi.

" Dari sinilah kita dapatkan prosedur berikut untuk mendiagonalkan matriks A yang berukuran n dapat didiagonalisasi ".

Langkah 1. Carilah n vektor eigen bebas linear A, $P_1, P_2, \cdots, P_n$.

Langkah 2. Bentuklah matriks p yang mempunyai $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.

Langkah 3. Matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya yang berurutan, di mana λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan $P_i, i = 1,2,\cdots,n$.

Contoh 7

Carilah matriks P yang mendiagonalkan

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Pemecahan. Dari contoh 5 nilai-nilai eigen A adalah $\lambda=1$ dan $\lambda=5$. Juga dari contoh tersebut maka vektor-vektor

$$P_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \text{ dan } P_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=5$, dan

$$P_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$. Dengan mudah dapat memeriksa bahwa $\{P_1,P_2,P_3\}$ bebas linear, sehingga

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

akan mendiagonalkan A. sebagai pemeriksaan, harus membuktikan bahwa

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

tidak ada orde yang didstimewakan untuk kolom-kolom P. karena entri diagonal ke-I dari $P^{-1}AP$ adalah nilai eigen untuk vektor kolom ke-I dari P, maka dengan mengubah orde kolom-kolom P hanyalah mengubah orde nilai-nilai eigen pada diagonal $P^{-1}AP$. Jadi, seandainya kita tuliskan

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di dalam contoh terakhir, maka kita akan memproleh

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh 8

persamaan karakteristik dari

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi $\lambda = -1$ adalah satu-satunya nilai eigen A; vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ adalah pemecahan-pemecahan dari $(-I - A)x = 0$; yakni, dari

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Pemecahan sistem ini adalah $x_1 = t$, $x_2 = t$; maka ruang eigen tersebut terdiri dari semua vektor yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

karena ruang ini berdimensi 1, maka A tidak mempunyai dua vektor eigen bebas linear, sehingga tidak daapat didiagonalisasi.

Contoh 9

Misalkan $T : R^3 \to R^3$ adalah operator linear yang diberikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

Cari basis untuk R^3 relatif terhadap mana matriks T diagonal.

Pemecahan. Jika $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ menyatakan basis baku untuk R^3, maka

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks baku untuk T adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

kita mau mengubah basis baku ke basis $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ supaya mendapatkan matriks diagonal A' untuk T. jika kita misalkan P adaalah matriks transisi dari basis B' yang takdiketahui ke basis baku B, maka menurut teorema A dan A' akan dihubungkan oleh

$$A' = P^{-1}AP$$

dengan kata lain, matriks transisi P mendiagonalkan A. kita telah mencari dalam contoh 7. dari kerja kita dalam contoh tersebut maka

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

karena P menyatakan matriks transisi dari basis $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ ke basis baku $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ maka kolom-kolom P adalah $[u_1']_B, [u_2']_B, dan[u_3']_B$, sehingga

$$[u_1']_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ [u_2']_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ [u_3']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jadi,

$$u_1' = (-1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2' = (0)e_1 + (0)e_2 + (1)e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3' = (1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor basis yang menghasilkan matriks diagonal A' untuk T.

Dalam banyak penerapan tidaklah penting menghitung matriks transisi P yang mendiagonalisasikan matriks A secara actual. Sebaliknya, yang istimewa adalah mengetahui apakah A dapat didiagonalisasi, jika memeang demikian, apakah matriks diagonal itu. Sering, informasi ini dilibatkan secara langsung dari nilai eigen tanpa melakukan kerja penghitungan vektor eigen. Untuk melihat mengapa ini sedemikian, kita membutuhkan teorema berikut, yang bukti-buktinya ditangguhkan hingga akhir bagian ini.

Teorema 3. jika $v_1, v_2, \cdots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, maka $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ adalah himpunan bebas linear.

Sebagai konsekuen teorema ini, kita dapatkan hasil yang berguna berikut.

Teorema 4. jika matriks A yang berukuran n x n mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi.

Bukti. Jika $v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dentgan nilai-nilai eigen yang berbeda, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, maka menurut teorema 3, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ bebas linear.

Contoh 10

Kita lihat dalam contoh 4 bahwa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

mempunyai 3 nilai eigen yang berbeda, $\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3}$. maka, A dapat didiagonalisasi. Selanjutnya,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

untuk suatu matriks P yang dapat dibalik. Jika didinginkan,maka matriks P dapat dicari dengan menggunakan metode yang diperlihatkan pada contoh 7.

Contoh 11

Kebalikan teorema 4 tidak benar ; yakni,matriks A yang berukuran n x n dapat didiagonalisasi walaupun matriks tersebut tidak mempunyai n nilai eigen yang berbeda.

Misalnya, jika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga $\lambda = 3$ adalah satu-satunya nilai eigen A. namun A jelas dapat didiagonalisasikan karena dapat $P = 1$, maka

$$P^{-1}AP = I^{-1}AI = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah matriks n x n dengan nilai eigen yang lebih kecil dari n, maka maka kita memperoleh teorema-teorema yang akan kita telaah dalam pelajaran lebih lanjut yang dapat digunakan untuk menentukan apakah A dapat didiagonalisasi. Akan tetapi, teorema ini tidak dapaat memberikan prosedur perhitungan yang sederhana untuk membuat determinan ini; sesungguhnya kita dapat melakukan perhitungan apabila diperlukan untuk melihat apakah A mempunyai n nilai eigen yang bebas linear.

3.3 Diagonalisasi Ortogonal; Matriks Simetrik

Jika $T: V \to V$ adalah operator linear paada sebuah ruang hasil kali dalam, maka masalah didiagonalisasi dapat terjadi dalam cara yang berbeda. Ketimbang memandang penyederhanaan untuk sebarang basis yang menghasilkan matriks diagonal untuk T, kita dapat berpaling untuk sebuah basis ortonormal yang menghasilkan matriks diagonal untuk T. agar lebih jelas, kiata akan memperlihatkan masalah berikut.

> **Masalah diagonalisasi orthogonal.** Diberikan sebuah operator linear $T: V \to V$ pada sebuah ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga, adakah basis ortonormal untuk V yang bertalian dengan matriks untuk T di mana ia diagonal?

Jika A adalah matriks untuk $T: V \to V$ yang bertalian dengan beberapa basis ortonormal, maka masalah ini ekivalen untuk pertanyaan jika ada perubahan basis terhadap basis ortonormal baru seperti halnya matriks baru untuk T, maka T diagonal. Menurut teorema. jika P adalah matriks transisi dari satu basis ortonormal ke basis ortonormal yang lain untuk sebuah ruang hasil kali dalam, maka $P^{-1} = P'$, matriks transisi untuk perubahan basis ini akan menjadi orthogonal. Jadi, kita berpedoman terhadap bentuk matriks berikut dari masalah diagonalisasi orthogonal tersebut.

> **Bentuk matriks dari masalah diagonalisasi orthogonal.** Diberikan matriks A kuadrat, apakah matriks P orthogonal seperti halnya $P^{-1}AP(= P'AP)$ diagonal?

Masalah ini mendorong kita untuk membuat definisi berikut.

Definisi. Matriks A kuadrat dinamakan ***dapat didiagionalisasi*** secara orthogonal jika terdapat matriks P yang orthogonal sehingga $P^{-1}AP(=P'AP)$ diagonal; matriks P dikatakan ***mendiagonalisasi A secara orthogonal***

Kiata mempunyai dua pertanyaan yang akan ditinjau:

1. matriks-matriks manakah yang dapat didiagonalisasi secara orthogonal
2. bagaimana kita mencari matriks orthogonal untuk melaksanakan diagonalisasi?

Untuk membantu kita menjawab pertanyaan pertama kita akan memerlukan definisi berikut.

Definisi. Matriks A kuadrat kita namakan simetriks jika $A = A'$

Contoh 12

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

maka

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = A$$

dengan demikian A simetrik.

Adalah mudah mengakui matriks simetrik dengan pemeriksaan: entri-entri pada diagonal utama adalah sebarang, namun,"bayangan cermin" dari entri yang melintasi diagonal utama adalah sama.

Teorema selanjutnya merupakan alat uatama untuk menentukan apakah sebuah matriks dapat didiagonalisasi secara orthogonal. Dalam teorema ini dan untuk teorema selebihnya dari bagian ini, orthogonal akan berarti orthogonal yang bertalian dengan hasil kali dalam Euclidis pada R^n.

Teorema 5. jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan berikut ekivlen satu sama lain.

(a) A dapat didiagonalisasi secara orthogonal.

(b) A mempunyai himpunan ortonormal dari n vektor eigen.

A adalah simetrik

Bukti $(a) \Rightarrow (b)$. Karena A dapat didiagonalisasi secara orthogonal, maka terdapat matriks P yang orthogonal sehingga $P^{-1}AP$. seperti yang diperlihatkan dalam teorema 2, maka vektor kolom ke n dari P adalah vektor eigen A. karena P orthogonal, maka vektor-vektor kolom ini ortonormal sehingga A mempunyai n vektor eigen ortonormal.

$(b) \Rightarrow (a)$. Anggaplah bahwa A mempunyai himpunan ortonormal dari n vektor eigen $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$. Seperti yang diperlihatkan dalam bukti teorema 2, maka matriks P dengan vektor-vektor eigen ini sebagai kolom-kolom akan mendiagonalisasi A.

karena vektor-vektor eigen ini ortonormal, maka P orthogonal sehingga akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

$(a) \Rightarrow (c)$. Dalam bukti $(a) \Rightarrow (b)$ kita menunjukkan bahwa matriks A yang berukurab n x n dapat didiagonalisasi oleh matriks P yang berukuran n x n secara orthogonal yang kolom-kolomnya membentuk himpunan ortonormal dari vektor-vektor eigen yang berukuran A. misalkan D adalah matriks diagonal.

$$D = P^{-1}AP$$

jadi,

$$A = PDP^{-1}$$

atau, karena P orthogonal, maka

$$A = PDP'$$

sehingga,

$$A' = (PDP')' = PD'P' = PDP' = A$$

yang menunjukkan bahwa A simetrik.

Teorema 6. jika A adalah matriks simetrik, maka vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda akan orthogonal.

Sebagai konsekuen dari teorema ini maka kita dapatkan prosedur berikut untuk mendiagonalisasi matriks secara orthogonal.

Langkah 1. Carilah basis untuk masing-masing ruang eigen dari A.

Langkah 2. Terapkanlah proses Gram-Schmidt ke masing-masing basis ini untuk mendapatkan basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.

Langkah 3. Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang dibangun dalam langkah 2; matriks ini akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Teorema 6 menjamin bahwa vektor-vektor eigen dari ruang-ruang eigen yang *berbeda* akan orthogonal, sedangkan penerapan proses Gram-Schmidt menjamin bahwa vektor-vektor eigen yang didapatkan dalam ruang eigen yang sama akan ortonormal. Jadi, keseluruhan himpunan vektor eigen yang didapatkan dengan prosedur ini akan ortonormal.

Contoh 13

Carilah matriks orthogonal P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Pemecahan. Persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$$

Jadi, nilai-nilai eigen A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 8$. Menurut metide yang digunakan pada contoh 5, maka dapat diperlihatkan bahwa

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$. Dengan menerapkan proses Gram Schmidt terhadap $\{u_1, u_2\}$ akan menghasilhan vektor-vektor eigen ortonormal.

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 8$ mempunyai

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sebagai basis. Dengan menerapkan proses Gram Schmidt terhadap $\{u_3\}$ maka akan menghasilkan

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya, dengan menggunakan v_1, v_2 dan v_3 sebagai vektor-vektor kolom maka kita dapatkan

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

yang akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Kita simpulkan bagian ini dengan menyatakan dua sifat penting dari matriks simetrik.

Teorema 7

(a) persamaan karakteristik matriks A simetrik hanya mempunyai akar-akar riil.

(b) Jika nilai eigen λ dari matriks simetrik A diulang k kali sebagai akar persamaan karakteristik tersebut, maka ruang eigen yang bersesuaian dengan λ adalah ruang berdimensi k.

DAFTAR PUSTAKA

- R.K. Sembiring, Analisis Regresi, Penerbit ITB Bandung
- N.R. Draper, H. Smith, Analisis Regresi Terapan Edisi kedua, Penerbit PT. Gramedia Pustaka Utama Jakarta, 1992
- Sudjana, Metode Statistika, Penerbit Tarsito Bandung
- Mosteller, Free Derick, Peluang dengan Statistik Terapannya Penerjemah R.K Sembiring, Penerbit ITB Bandung, 1982
- Zanzani Soejoeti, Phd, Metode Statistika II, Penerbit Karunika Jakarta, Universitas Terbuka, 1986
- Walpole, RE, Miyers, Radmond, H. Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Penerbit ITB Bandung, 1986
- Howard Anton, Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima, Penerbit Erlangga 1994

LAMPIRAN

Tabel t.

df	t_{100}	t_{050}	t_{025}	t_{010}	t_{005}	df
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.257	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.809	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf