EKSISTENSI AUTOMORFISMA
DALAM LAPANGAN PERLUASAN BERDIMENSI HINGGA

OLEH

R U D Y A M I R
H 111 00 015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2005

LEMBAR KEOTENTIKAN

saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

EKSISTENSI AUTOMORFISMA DALAM LAPANGAN PERLUASAN BERDIMENSI HINGGA

adalah benar hasil kerja saya sendiri bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 20 Desember 2005

RUDY AMIR
Nim : H 111 00 015

EKSISTENSI AUTOMORFISMA DALAM LAPANGAN PERLUASAN BERDIMENSI HINGGA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Jurusan

Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Oleh :

RUDY AMIR

H 111 00 015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2006

EKSISTENSI AUTOMORFISMA DALAM LAPANGAN PERLUASAN BERDIMENSI HINGGA

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dra. Nur Erawaty, M.Si.	Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc
NIP. 132 050 973	NIP. 131 992 471

Pada Tanggal : 20 Desember 2005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

Pada hari ini, 20 tanggal Desember 2005, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

EKSISTENSI AUTOMORFISMA DALAM LAPANGAN PERLUASAN BERDIMENSI HINGGA

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Statistika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 20 Desember 2005

PANITIA UJIAN SKRIPSI

1. Ketua	**: Drs. Budi Nurwahyu, M.S**	( )
2. Sekretaris	**: Sri Astuti Thamrin, S.Si, M.Stats**	( )
3. Anggota	**: Dra. Nur Erawaty, M.Si**	( )
4. Anggota	**: Dra. Amir Kamal Amir, M.Sc**	( )
5. Anggota	**: Drs. Diaraya**	( )

ABSTRAK

Sebuah perluasan aljabar E atas lapangan F adalah lapangan dengan setiap elemen-elemennya aljabar atas F. Jika $\overline{F}'$ tutupan aljabar yang memuat F' dan terdapat pemetaan Isomorfisma σ dari F pada F', maka pemetaan Isomorfisma τ dari E pada sublapangan $\overline{F}$ adalah perluasan dari pemetaan Isomorfisma σ, Sedemikian sehingga $\tau(a)=\sigma(a)$ untuk setiap $a \in F$. Indeks sebuah lapangan perluasan merupakan jumlah berhingga pemetaan-pemetaan isomorfisma dan berbentuk grup terhadap koleksi semua isomorfisma pada lapangan Automorfisma.

ABSTRACT

An algebraic extension field E over field F is a field with each algebraic elemens over F . If $\overline{F'}$ algebraic closure obtain F' and there is ishomorphism σ of F onto F' , then ishomorphism maps τ from E onto a subfield of F is ishomorphism maps extension of σ, Such that $\tau(a)=\sigma(a)$ for each $a \in F$. The Indeks for an extension field is finite numbers ishomorphism maps and made a grup from collection of all ishomorphism in automorphism field.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan segala kerendahan hati atas segala keterbatasan dari seorang hambah, sungguh setiap yang ada di langit dan di bumi termasuk diri ini adalah milik Allah Semata. penulis sadar bahwa apa yang telah dihasilkan dari usaha ini hanyalah sebahagian dari segala bentuk nikmat yang telah dilimpahkan dan atas segala Rahmat dari yang maha pemberi rahmat. Isinkan kami membasahi lisan kami dengan dzikir memuji Mu yah Rabb..!, Karena tiada Dzat yang lebih pantas untuk kami haturkan puji syukur kecuali hanya kepadaMu. Semoga Engkau senantiasa menuntun hambaMu yang Doif ini dengan sebaik-baik petunjukMu, berkenan mendengarkan segalah keluh kesah kami dan mengampuni segalah dosa-dosa kami. Shalawat dan salam penulis haturkan kepada orang yang paling muliah sepanjang zaman Baginda Rasulullah Muhammad Sallallahu Alaihi Wasallam. Karena melalui beliaulah segala kebenaran dari risalah Allah Azza Wa Jalla.

Ucapan terimah kasih yang tulus kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam penyelesaikan tulisan ini terutama kepada Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si dan Bapak Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc. masing-masing sebagai Pembimbing Utama dan Pembimbing Pertama yang tidak jenuhnya mengarahkan penulis dalam menyelesaikan tulisan ini. Semoga segalah usaha dan waktu yang telah diluangkan untuk penulis dibalas Oleh Allah dengan sebaik-baik balasanNya.

Demikian pula penulis ucapkan terimah kasih kepada :

1. Kedua Orang Tua penulis atas segala upaya yang tiada henti dan doa yang senantiasa terucap penuh harap agar penulis menjadi anak yang berbakti sunggguh penulis tak akan pernah sanggup membalasnya semoga Allah memanjangkan umur dan memuliakan keduanya. Dan kepada saudariku

(Emmy Amir. SE) atas segala sugesti yang telah engkau berikan semoga Allah memberikan kemudahan bagimu.

2. Bapak Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNHAS atas kemudahan yang telah diberikan selama penulis dalam menuntut ilmu.
3. Bapak dan Ibu Dosen yang telah berupaya mendidik dan mengajarkan ilmu kepada penulis.
4. Kanda Muhtar, S.Si dan saudaraku Aco Firsam Rizal atas segala fasilitas yang sangat penulis butuhkan. Semoga Allah membalas Nya dengan sebaik-baik balasan.
5. Saudaraku Angkatan 00 Matematika sebuah ekspresi cinta dariku karena engkau layak menjadi sahabat sejati. *"kemarilah, kemarilah ! Kita akan mengukir "cinta", sebuah janji setia dengan derasnya air mata yang akan membersihkan segala penyakit dan dosa. Kemarilah ! kita perbaharui janji setia itu dalam hati kita. Aku mendatangimu dengan penuh sukarela dan aku akan membalasimu dengan cinta"*. (A'idh Al-Qarni)

   semoga segalah perhatian yang telah kalian berikan dibalas oleh Allah .
6. Seluruh Ikhwan MPM dan Mesjid Kampus Unhas sebagai salah satu bagian yang memberi kenangan indah semoga Allah meneguhkan hati-hati kita dan mempertemukan kita dalam JannahNya
7. Semua rekan-rekan angkatan 99+, 01-05. kita pernah menjadi satu bahagian dan akan terus menjadi sebuah bahagian yang tak pernah terbagi, walaupun kita tak lagi ada disini.

Akhirnya dengan segala kedhoifan yang ada pada penulis, tulisan ini sangat jauh dari kesempurnaan. Untuk itu segala kritik dan saran yang bersifat membangun akan penulis sambut dengan lapang dada. Dan semoga tulisan ini memberi manfaat bagi yang membutuhkannya.

Makassar, 20 Desember 2005

Penulis

Makassar 22 Desember 2005

بسم الله الرحمن الرحيم

*Sebuah **Kisah Indah** menyelimuti hari-hari kita. Telah disadari semua ini telah menjadi ketetapan Allah semata. Semoga kebersamaan kita tak pernah menorehkan luka sehingga hati-hati kita tetap dipertemukan OlehNya. Ku harap kita ikhlas menerima cobaan ini seperti keikhlasan diri kita dipertemukan oleh Nya. Wahai saudaraku Aku bukanlah sahabat yang baik untukmu seperti yang senantiasa engkau tanamkan dalam hatimu, Aku bukanlah saudagar yang mampu membantumu dalam kekurangan. Dan juga bukan pemandu ketika engkau kehilangan arah. Tapi yakinlah saudaraku kita masih punya Allah yang senantiasa memantau dan mengawasi kita maka jangan sungkan untuk mengaduh padaNya. Akhirnya saudaraku walau hati ini berat berpisah denganmu ikhlaskanlah diriku sebagaimana aku ikhlas tanpa Engkau disisiku.*

SAHABAT *adalah orang yang menemani kita dalam perjalanan,*
perjalanan maknawi ataupun hakiki . . . .
DIA memang punya tempat tersendiri dalam diri ini,
sehingga tetap saja mengusik hati
Kebersamaan membuat [illegible] membuatku merindu

DIA memang bukan orang yang sempurna dan pernah bersalah
sebagaimana manusia
DIA pernah menyakitiku demikian pula aku,
namun kemaafan selalu saja hadir
Disaat banyak orang melupakan temannya
DIA selalu ingat padaku

Untaian kata ini [illegible] jika dibandingkan kebaikannya
[illegible] dan bukan orang yang terlahir dari rahim yang sama denganku,
namun dia tetap punya hak yang agung padaku
Karena persaudaraan iman itulah yang abadi
teman sejati yang akan dibawah mati
teman yang selalu mengingatkan mati
Karena [illegible] dalam hati tidak akan pupus hanya dengan . . . .

UNTUKMU SAUDARAKU

Abdillah Malik, Aco Firsam Risal, Suparman,S.Si Fany Novembri, Marlin Winardi, Istiawan Lauseng, S.Si, Abdul Gafur Arsyad, S.Si, Abdul Rahman, S.Si, Muhammad Makmun arsyad, S.Si Abdul halid Nusi, S.Si, Muhammad Ali Imran Achmad, S.Si, Djafar Lessi, S.Si Yusra Siswadi, S.Si Sugimin dan Kanda Muhtar, S.Si

Azwaty, S.Si Andi Azizah Iqbal, S.Si Indah Puspa Dewi, S.Si Muliana, S.Si Merli Sri sulastri, S.Si, Sutina Amiruddin, Resnawati, S.Si, Dwi Novita Maharani S, S.Si, Gusniar, S.Si Herlina Kamaruddin.
Dan segenap rekan-rekan mahasiswa Matematika yang tak dapat dituliskan satu-persatu.

DAFTAR ISI

Halaman

Simbol	Arti
λ	[lambda]
σ	[sigma]
τ	[tau]
ψ	[psi]
φ	[phi]
α	[alpha]
β	[beta]
γ	[gamma]
$\leq$	Relasi lebih kecil dari
$\subseteq$	Subset
$F[x]$	Gelanggang polinomial atas lapangan F
$f(x)$	Polinomial
$\langle p(x) \rangle$	Ideal yang dibangun oleh polinomial $p(x)$
$F[x]/\langle p(x) \rangle$	Lapangan hasil bagi dari himpunan polinomial atas F dengan ideal $p(x)$
$(\psi)^{-1}$	Invers fungsi psi

$\psi_{\alpha,\beta}$	Pemetaan konjugasi α dilanjutkan β
$\langle R,+,\cdot \rangle$	Gelanggang
$F(\alpha)$	Lapangan yang memuat elemen α
ϕ_α	Homomorfisma Evaluasi dengan elemen α
$\overline{F_E}$	Tutupan Aljabar dengan elemen aljabar atas F
$G(E/F)$	Grup Automorfisma E atas F
$[E:F]$	Indeks E dari F
$irr(\alpha, F)$	Polinomial taktereduksi dengan elemen α atas F

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Pemetaan isomorfisma adalah suatu konsep pemetaan dari dua grup dengan susunan yang identik (*isomorfik*). Suatu pemetaan homomorfisma dikatakan Isomorfisma jika bersifat *1-1* pada (*bijektif*). Pemetaan Isomorfisma dari suatu grup kedalam grup itu sendiri disebut sebagai automorfisma.

Seperti halnya pada sebuah grup, pemetaan Isomorfisma juga berlaku pada sebuah lapangan. Kita dapat saja menentukan suatu pemetaan dari sebuah lapangan ke dalam lapangan yang lain merupakan isomorfisma atau bukan, hingga pada pemetaan dari sebuah lapangan ke dalam dirinya sendiri.
Suatu hal yang menarik dalam kajian ini yaitu jika terdapat suatu lapangan perluasan dari sebuah lapangan dengan pemetaan isomorfisma yang terdapat pada lapangan tersebut. Misalkan E dan F adalah lapangan dimana E adalah lapangan perluasan dari F. Sedangkan $\overline{F}$ sebuah tutupan aljabar dari F yang memuat F'. Misalkan terdapat sebuah pemetaan isomorfisma dari lapangan F ke dalam lapangan F', maka dapatkah kita menunjukkan sebuah pemetaan pada E sebagai hasil dari perluasan pemetaan dari F ke dalam F'.

Tulisan ini menitikberatkan pada pengembangan pemetaan isomorfisma hingga didapatkan suatu automorfisma yang memetakan elemen-elemen dari suatu lapangan perluasan E ke dalam dirinya sendiri. Dengan hasil ini dapat dipelajari susunan kesimetrisan sebuah lapangan perluasan, serta dapat ditentukan jumlah isomorfisma sebagai indeks dari automorfisma dalam lapangan perluasan.

Dari uraian latar belakang diatas maka tulisan ini diberi judul

" Eksistensi Automorfisma dalam Lapangan Perluasan Berdimensi Hingga "

1.2 RUMUSAN DAN BATASAN MASALAH

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah

1. Bagaimana memperluas pemetaan isomorfisma pada suatu lapangan menjadi suatu pemetaan automorfisma lapangan perluasan aljabar dari lapangan tersebut.
2. Menentukan Indeks pada lapangan perluasan aljabar.

Ruang lingkup pembentukan automorfisma dalam suatu lapangan perluasan dibatasi hanya pada lapangan perluasan aljabar berdimensi hingga.

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memperoleh suatu automorfisma pada perluasan pemetaan isomorfisma dan menentukan jumlah pemetaan isomorfisma dalam suatu lapangan perluasan.

BAB 2
GELANGGANG

2.1. Gelanggang, Integral Domain dan Lapangan

Pada sistem bilangan riil dan sistem bilangan kompleks telah dikenal mempunyai dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Teori grup belum cukup untuk merangkum semua struktur aljabar dari sistem bilangan tersebut, karena suatu grup hanya berkaitan dengan satu operasi biner saja. Oleh karena itu diperkenalkan sebuah konsep struktur aljabar dengan dua operasi biner didalamnya. Suatu gelanggang adalah sistem aljabar dengan dua operasi biner , yaitu "+" (penjumlahan) dan "." (perkalian).

Definisi 1

Sebuah gelanggang $\langle R,+,\cdot\rangle$ adalah himpunan R bersama dua operasi biner "+" dan "." disebut penjumlahan dan perkalian yang terdefinisi dalam R sedemikian sehingga aksioma berikut :

R_1 . $\langle R,+\rangle$ adalah Grup Abel

R_2 . Operator perkalian bersifat Assosiatif

R_3 . Untuk setiap $a,b,c \in R$

hukum distributif kiri $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ (1)

hukum distributif kanan $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$ (2)

terpenuhi. [3]

Diberikan beberapa tipe dari gelanggang diantaranya :

1. Misalkan R gelanggang, misalkan $1 \in R$ disebut identitas di R terhadap perkalian atau unsur kesatuan (*unity*). Himpunan R yang memuat unsur kesatuan disebut gelanggang dengan unsur kesatuan.
2. Misalkan R gelanggang dengan unsur kesatuan, misalkan $a \in R$ mempunyai balikan terhadap perkalian, a disebut sebagai unit. [3]

Definisi 2

Sebuah gelanggang dengan unit dimana semua elemen taknol berbentuk grup dibawah operator perkalian disebut sebagai gelanggang pembagian. [3]

Definisi 3

Integral domain D adalah sebuah gelanggang pembagian komutatif dengan setiap elemennya merupakan unit dan tidak memuat pembagi nol. [3]

Definisi 4

Lapangan adalah gelanggang pembagian yang komutatif. [5]

Definisi 5

Sebuah subset takkosong disebut sebagai sublapangan F jika K adalah lapangan terhadap operator biner dari F sehingga setiap lapangan F adalah sublapangan dari F dan disebut sublapangan *improper* dari F. suatu sublapangan dari F selain F adalah sublapangan *proper* dari F. [4]

Contoh 1

Misalkan $\langle Q,+,\cdot\rangle$ himpunan bilangan rasional dengan dua operator penjumlahan dan perkalian merupakan sebuah gelanggang, karena

1. $\langle Q,+\rangle$ adalah Grup Abel
2. $\forall a,b,c \in Q$; berlaku sifat assosiatif

   $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3. memenuhi sifat distributif

   $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ atau $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$

Dan terdapat $1\in Q \ni 1\cdot a=a\cdot 1=a \quad \forall a\in Q$ maka Q adalah gelanggang dengan unit.

Untuk $\forall a,b\in Q$, $a,b\neq 0$ maka $a\cdot b\neq 0$. Jadi Q tidak memuat pembagi nol sehingga $\langle Q,+,\cdot\rangle$ adalah sebuah integral domain. Setiap elemen taknol dalam

Q akan memiliki invers terhadap operator kali sehingga $\langle Q,+,\cdot\rangle$ adalah lapangan. ♦

2. 2. Gelanggang Polinomial dan Ideal

Polinomial merupakan sebuah unsur berbentuk penjumlahan dan memiliki variabel yang biasanya disimbolkan dengan x. Secara lengkap pengertian polinomial akan diberikan pada definisi berikut.

Definisi 7

Misalkan R gelanggang, sebuah *Polinomial* $f(x)$ berbentuk jumlahan takhingga

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{3}$$

Dimana $a_i \in R$ dan $a_i = 0$ untuk setiap bilangan takhingga yang bernilai lebih besar dari i. a_i merupakan koefisien $f(x)$. jelas untuk $a_i \neq 0$ berlaku jika $i \geq 0$. Nilai terbesar pada i adalah derajat dari $f(x)$, dinotasikan sebagai der $f(x)$. Jika semua $a_i = 0$, maka der $f(x)$ tak terdefinisi. [3]

Himpunan semua polinomial atas gelanggang R dinotasikan $F[x]$. Jika $F[x]$ membentuk gelenggang maka disebut sebagai gelanggang polinomial atas R.

Untuk mendapatkan suatu penyelesaian bentuk persamaan polinomial maka dapat digunakan sifat homomorfisma. Bentuk dari homomorphisma yang dimaksud biasa disebut sebagai *Homomorfisma Evaluasi*. Proses pembentukan homomorfisma ini dapat dilihat pada *diagram 1*

Diagram Pembentukan Homomorfisma Evaluasi

$$\begin{tikzcd}
& & E \\
F[x] \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, dash, dotted] \arrow[dd, dash] & & \phi_\alpha[F[x]] \arrow[u, dash] \arrow[dr, dash, dotted] \arrow[dd, dash] & \\
& x & & \alpha = \phi_\alpha(x) \\
F \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, dash, dotted] & & F \arrow[dr, dash, dotted] & \\
& a & & a = \phi_\alpha(a)
\end{tikzcd}$$

Diagram 1

Sumber : Buku [3] Hal. 312

Diagram 1 memperlihatkan pemetaan identitas dalam F sehingga untuk setiap $a \in F$ maka $a = \phi_\alpha(a)$. ϕ_α memetakan $F[x]$ ke dalam sublapangan E, sehingga $\alpha = \phi_\alpha(x)$ untuk setiap x dalam $F[x]$. Garis putus-putus mengisyaratkan elemen-elemen dari himpunan yang bersesuaian.

Misalkan E dan F lapangan dan F sublapangan E. Terdapat pemetaan homomorfisma dari F ke dalam E yang diperlihatkan dalam teorema 1

Teorema 1

Misalkan F sublapangan E, misalkan $\alpha \in E$ dengan suatu variabel taktentu x. Didefinisikan suatu pemetaan $\phi_\alpha : F[x] \to E$

$$\phi_\alpha\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n \tag{4}$$

merupakan sebuah homomorfisma dari $F[x]$ ke dalam E dimana $\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) \in F[x]$. Juga $\phi_\alpha(x) = \alpha$ dan ϕ_α memetakan F secara isomorphisma oleh Pemetaan Identitas yakni $\phi_\alpha(a) = a$ untuk $a \in F$. Homomorfisma ϕ_α disebut sebagai sebuah evaluasi atas α. [3]

Bukti

1. Akan dibuktikan ϕ_α adalah homomorfisma.

   Jika $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$ dan

   $h(x)=f(x)+g(x)=c_0+c_1x+...+c_rx^r$, maka

   $\phi_\alpha(f(x)+g(x))=\phi_\alpha(h(x))=c_0+c_1\alpha+...+c_r\alpha^r$ berarti juga

   $\phi_\alpha(f(x)+g(x))=(a_0+a_1\alpha+...+a_n\alpha^n)+(b_0+b_1\alpha+...+b_m\alpha^m)$

   Dari definisi penjumlahan polinomial diatas, diperoleh $c_r=a_n+b_m$ sehingga $\phi_\alpha(f(x)+g(x))=\phi_\alpha(f(x))+\phi_\alpha(g(x))$. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan jika $f(x)g(x)=d_0+d_1x+...+d_sx^s$, maka

   $\phi_\alpha(f(x)g(x))=d_0+d_1\alpha+...+d_s\alpha^s$ berarti juga

   $[\phi_\alpha(f(x))][\phi_\alpha(g(x))]=(a_0+a_1\alpha+...+a_n\alpha^n)(b_0+b_1\alpha+...+b_m\alpha^m)$

   Karena definisi perkalian polinomial, diperoleh $d_j=\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i}$ sehingga diperoleh $\phi_\alpha(f(x)g(x))=[\phi_\alpha(f(x))][\phi_\alpha(g(x))]$ jadi ϕ_α adalah homomorfisma.

2. Akan dibuktikan ϕ_α memetakan F secara isomorfisma dengan $\phi_\alpha(a)=a$ untuk setiap $a\in F$.

   Dari definisi homomorfisma evaluasi ini juga untuk sebuah polinomial konstan $a\in F[x]$ dan juga $a\in F$ diperoleh $\phi_\alpha(a)=a$ sehinggga ϕ_α memetakan F secara isomorfisma oleh oleh pemetaan identitas yang selanjutnya dengan definisi ϕ_α diperoleh $\phi_\alpha(x)=\phi_\alpha(1x)=1\alpha=\alpha$.

Contoh 2

Diberikan R,Q secara berturut-turut merupakan himpunan bilangan riil dan himpunan bilangan rasional. Misalkan $F = Q$, $R = E$, didefinisikan pemetaan $\phi_2 : Q[x]\to R$

$$\phi_2(a_0+a_1x+...+a_nx^n)=a_0+a_12+...+a_n2^n$$

misalkan $q(x)=x^2+x-6$ diperoleh

$$\phi_2\left(-6+x+x^2\right)=-6+2++2^2=0$$

Dengan demikian x^2+x-6 disebut kernel dari ϕ_2.

Ide dasar penyelesaian suatu persamaaan polinomial adalah menemukan suatu akar yang memenuhi polinomial tersebut.

Definisi 8

Misalkan F sublapangan dari E, dan misalkan $\alpha \in E$. Misalkan

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n \in F[x] \tag{5}$$

dan misalkan $\phi_\alpha : F[x] \to E$ sebuah homomorfisma evaluasi. Misalkan $f(\alpha)$ dinotasikan sebagai :

$$\phi_\alpha(f(x))=a_0+a_1\alpha+...+a_n\alpha^n \tag{6}$$

jika $f(\alpha)=0$ maka α adalah akar dari $f(x)$. [3]

Hasil dari *Definisi 8* dapat digunakan dalam pemfaktoran polinomial atas sebuah lapangan. Ide ini dapat diperlihatkan dengan memisalkan E dan F adalah gelanggang dan $F \le E$. Misalkan $f(x) \in F[x]$ mempunyai faktor dalam $F[x]$, sedemikian sehingga

$$f(x)=g(x)h(x) \tag{7}$$

untuk $g(x), h(x) \in F[x]$ dan misalkan $\alpha \in E$, dengan homomorfisma evaluasi ϕ_α diperoleh

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \phi_\alpha f(x) \\ &= \phi_\alpha(g(x)h(x)) = \phi_\alpha g(x)\phi_\alpha h(x) \\ &= g(\alpha)h(\alpha) \end{aligned}$$

Dengan demikian jika $\alpha \in E$ maka $f(\alpha)=0$ jika dan hanya jika $g(\alpha)=0$ atau $h(\alpha)=0$. Untuk mencari akar dari $f(x)$ maka $f(x)$ perlu dituliskan dalam bentuk faktorisasi polinomial.

Teorema 2

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \tag{9}$$

dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0 \tag{10}$$

adalah dua elemen dari $F[x]$, dengan kedua elemen taknol a_n dan b_m di F dan $m > 0$ maka terdapat polinomial tunggal $q(x)$ dan $r(x)$ dalam $F[x]$ sedemikian sehingga

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{11}$$

Dengan der $r(x)$ lebih kecil dari der $g(x)$. [3]

Bukti

Jika $f(x)$ merupakan polinomial nol maka $q(x) = 0$ dan $r(x) = 0$ sehingga diperoleh $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, dimana $r(x) = 0$. Misalkan $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$ dan misalkan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0, a_n \neq 0$ dan $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0$, $a_m \neq 0$, sehingga der $f(x) = n$ dan der $g(x) = m$.

Tinjau dua kasus :

Kasus 1 : untuk $n < m$

Dalam kasus ini dapat dituliskan $f(x) = 0.g(x) + f(x)$ sehingga $q(x) = 0$ dan $r(x) = f(x)$ adalah suatu polinomial dalam $F[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dimana der $r(x) =$ der $f(x)$ < der $g(x)$ sehingga der $f(x) <$ der $g(x)$.

Kasus 2 : Untuk $n \geq m$.

Dalam hal ini $f(x)$ dapat dituliskan sebagai suatu polinomial berderajat lebih rendah dari *n*, dari teorema 2 dan juga pembagian oleh $g(x)$ diperoleh

$$f(x)=\left(a_n b_m^{-1} x^{n-m}\right)g(x)+f_1(x) \tag{12}$$

dimana der $f_1(x)=(n-1)$ dalam $F[x]$. Dari teorema 2 diperoleh

der $f_1(x)<$ der $g(x)$. Terdapat dan $q_1(x), r(x)$ dalam $F[x]$ sehingga $f_1(x)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x) \tag{13}$$

dimana

$$\text{der}\, r(x)<\text{der}\, g(x) \tag{14}$$

dari (12), (13) an (14) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(a_n b_n^{-1} x^{n-m}\right)g(x)+q_1(x)g(x)+r(x) \qquad (15)\\ &= \left[a_n b_n^{-1} x^{n-m}+q_1(x)\right]g(x)+r(x)\\ &= q(x)g(x)+r(x) \end{aligned}$$

Dimana $a_n b_m^{-1} x^{n-m}+q_1(x)=q(x)$ dan der $r(x)<$der $g(x)$.

Akibat 1

Sebuah elemen $a \in F$ adalah akar dari $f(x)\in F[x]$ jika dan hanya jika $x-a$ adalah faktor $f(x)$ dalam $F[x]$. [3]

Akibat 2

Sebuah polinomial taknol $f(x)\in F[x]$ dengan derajat n memiliki paling banyak n akar dalam lapangan F. [3]

Definisi 9

Sebuah polinomial takkonstan $f(x)\in F[x]$ disebut polinomial taktereduksi atas F atau sebuah polinomial taktereduksi dalam $F[x]$ jika $f(x)$ tidak dapat dituliskan dalam bentuk $g(x)h(x)$ dari dua polinomial $g(x)$ dan $h(x)$ dalam $F[x]$ yang keduanya memiliki derajat yang lebih kecil dari derajat $f(x)$. [3]

Teorema 3

Misalkan $f(x) \in F[x]$ dan $f(x)$ memiliki derajat 2 atau 3 maka $f(x)$ tereduksi atas F jika dan hanya jika $f(x)$ memiliki akar dalam F. [3]

Bukti

Jika $f(x)$ tereduksi maka dapat ditulis sebagai $f(x) = g(x)q(x)$ dengan der $g(x)$, der $h(x) <$ der $f(x)$ berarti salah satu diantara $g(x), h(x)$ berderajat 1. Jika der $g(x) = 1$ maka terdapat sebuah faktor $x - a$ maka $g(a) = 0$ mengakibatkan $f(a) = 0$ jadi $f(x)$ memiliki akar.

Sebaliknya, dari akibat 1 teorema 2 jika $f(a) = 0$ untuk $a \in F$ maka $x - a$ adalah faktor dari $f(x)$, sehingga $f(x)$ tereduksi.

Sebuah polinomial dalam $F[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal ke dalam bentuk polinomial taktereduksi dalam $F[x]$.

Untuk $f(x)$, $g(x) \in F[x]$ $g(x)$ disebut membagi $f(x)$ dalam $F[x]$ jika terdapat $q(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x)$.

Akibat 3

Jika $p(x)$ taktereduksi dalam $F[x]$ dan $p(x)$ membagi hasil $r_1(x)...r_n(x)$ untuk $r_i \in F[x]$ maka $p(x)$ membagi paling sedikit satu elemen pada $r_i(x)$.

Teorema 4

Jika F lapangan maka setiap polinomial takkonstan $f(x) \in F[x]$ dapat difaktorkan ke dalam sebuah hasil dari polinomial taktereduksi, polinomial taktereduksi adalah tunggal selain sebagai faktor urutan juga untuk faktor unit (yakni konstanta yang tidak nol) dari F. [3]

Bukti

Misalkan $f(x) \in F[x]$ polinomial tak konstan. Jika $f(x)$ tidak taktereduksi maka $f(x) = g(x)h(x)$ dengan der $g(x)$ dan der $h(x)$ < der $f(x)$.

Jika $g(x), h(x)$ taktereduksi, maka bukti gagal, jika tidak, maka terdapat paling tidak satu dari keduanya yang merupakan faktor ke dalam polinomial berderajat rendah. Jika proses ini dilanjutkan, maka diperoleh faktorisasi

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_r(x) \qquad (16)$$

Dimana $p_i(x)$ taktereduksi untuk $i = 1,2,...,r$

terakhir akan dibuktikan ketunggalannya.

Misalkan

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_r(x) = q_1(x)q_2(x)..q_s(x)$$

Dua faktorisasi dari $f(x)$ ke dalam polinomial taktereduksi, dengan *akibat* 3 maka $p_i(x)$ membagi suatu $q_j(x)$. Kita asumsikan terdapat suatu $q_1(x)$, karena $q_1(x)$ taktereduksi maka dapat dituliskan sebagai

$$q_1(x) = u_1 p_1(x) \qquad (17)$$

Dimana $u_1 \neq 0$ dan u_1 dalam F maka u_1 unit. Dengan substitusi $u_1 p_1(x)$ ke dalam $q_1(x)$ dan hukum penghapusan diperoleh

$$p_2(x)...p_r(x) = u_1 q_2(x)...q_s(x)$$

dengan cara yang sama, kita katakan $q_2(x) = u_2 p_2(x)$, jadi

$$p_3(x)...p_r(x) = u_1 u_2 q_3(x)...q_s(x)$$

jika proses ini dilanjutkan maka diperoleh

$$1 = u_1 u_2 ... u_r q_{r+1}(x)..q_s(x) \qquad (18)$$

Sebagai bahagian akhir proses, dengan substitusi $q_s(x) = u_r p_r(x)$. Berarti haruslah $s = r$, dengan demikian dengan persamaan $1 = u_1 u_2 ... u_r$, jelas memberikan $p_i(x)$ dan $q_j(x)$ sebagai faktor yang sama untuk urutan dan faktor unit. ♦

Proses faktorisasi juga berlaku dalam konsep ideal. Konsep ini sangat diperlukan dalam teori lapangan yang pada akhirnya membantu dalam penentuan akar dalam polinomial.

Definisi 10

Misalkan N adalah ideal dalam gelangang R maka $(R/N,+,\cdot)$ disebut sebagai *Gelanggang Kosien* R modulo N. [1]

Definisi 11

Sebuah subset takkosong S dari suau gelanggang disebut ideal kanan (kiri) jika

(i) $a,b \in S$ mengakibatkan $a-b \in S$

(ii) $ar \in S(ra \in S)$ untuk setiap $a \in S$ dan $r \in R$. [1]

Jika $1 \in R$ maka $\bar{1}$ unit dari R/N dan jika R gelanggang komutatif maka R/N juga gelanggang komutatif.

Setiap gelanggang R memiliki dua ideal, yaitu ideal R tak sejati dan ideal trivial $\{0\}$. Untuk ideal trivial maka gelangang faktornya dilambangkan dengan R/R, yang hanya memiliki satu anggota dan terdapat pemetaan isomorfisma dari $R/\{0\}$ ke dalam R. Sebuah ideal nontrivial sejati dari gelanggang R adalah sebuah ideal N dari R sedemikian sehingga $N \neq R$ dan $N \neq \{0\}$.

Teorema 5

Jika R gelanggang dengan unit dan N ideal dari R yang mengandung unit, maka N=R.

Akibat 4

Lapangan tidak memuat ideal nontrivial sejati.

Definisi 12

Ideal maksimal dari gelanggang R adalah ideal M yang berbeda dari R sedemikian sehingga tidak terdapat ideal sejati N dari R yang memuat M. (M bukan himpunan bagian sejati dari N) [1]

Teorema 6

Misalkan R gelanggang komutatif dengan unit, maka M adalah Ideal Maksimal dari R jika dan hanya jika R/M adalah lapangan. [1]

Akibat 5

Gelanggang komutatif dengan unit adalah lapangan jika dan hanya jika gelanggang komutatif tersebut tidak memuat ideal nontrivial sejati.

Definisi 13

Ideal $N \neq R$ dalam gelanggang komutatif R disebut ideal prim jika $ab \in N$ mengakibatkan salah satu dari $a \in N$ atau $b \in N$ untuk setiap $a, b \in R$. [3]

Teorema 7

Misalkan R gelanggang komutatif dengan unit, dan misalkan $N \neq R$ merupakan ideal dalam R maka R/N adalah integral domain jika dan hanya jika N ideal prim. [3]

Akibat 6

Setiap ideal maksimum dalam gelanggang komutatif R dengan unit adalah ideal prim.

Definisi 14

Jika R sebuah gelanggang komutatif dengan unit dan $a \in R$, sebuah ideal utama yang dibangun oleh a dengan bentuk $\{ra | r \in R\}$ adalah ideal dari setiap perkalian a dan dilambangkan dengan $\langle a \rangle$. N dikatakan ideal utama jika $N = \langle a \rangle$ untuk suatu $a \in R$. [3]

Contoh 3

$\langle x \rangle$ adalah ideal dalam $F[x]$ yang terdiri atas semua polinomial yang memiliki konstanta nol dalam $F[x]$.

Teorema 8

Jika F lapangan, setiap ideal dalam $F[x]$ adalah ideal utama. [3]

Bukti

Misalkan N sebuah ideal dari $F[x]$. Jika $N = \{0\}$ maka $N = \langle 0 \rangle$. Misalkan $N \neq \langle 0 \rangle$ dan misalkan $g(x)$ sebuah elemen taknol dalam N dengan derajat minimum. Jika der $g(x) = 0$ maka $g(x)$ adalah unit di F sehingga $N = F[x] = \langle 1 \rangle$ sehingga N adalah ideal utama.

Jika der $g(x) \geq 1$ misalkan $f(x)$ suatu elemen dari N maka dari *teorema 2* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dengan der $r(x) \leq$ der $g(x)$ karena $f(x) \in N$ dan $g(x) \in N$ mengakibatkan $f(x) + g(x)q(x) = r(x)$ dalam N karena $g(x)$ sebuah elemen taknol dengan derajat minimum dalam N maka harus $r(x) = 0$ sehingga $f(x) = g(x)q(x)$ dan $N = \langle g(x) \rangle$.

Karakteristik ideal maksimum dari $F[x]$ adalah memperlihatkan bahwa polinomial tak konstan $f(x)$ dalam $F[x]$ akan memiliki akar pada lapangan perluasan E dari F.

Teorema 9

Sebuah ideal $\langle p(x) \rangle \neq \{0\}$ dari $F[x]$ adalah ideal maksimal jika dan hanya jika $p(x)$ taktereduksi atas F. [3]

Bukti

Misalkan $\langle p(x)\rangle \neq \{0\}$ adalah ideal maksimal dari $F[x]$ maka $\langle p(x)\rangle \neq F[x]$, jadi $p(x) \notin F$. Misalkan $p(x) = f(x)g(x)$ merupakan pemfaktoran dari $p(x)$ dalam $F[x]$. Karena $\langle p(x)\rangle$ ideal maksimal dan juga ideal prim, $(f(x)g(x)) \in \langle p(x)\rangle$ mengakibatkan $f(x) \in \langle p(x)\rangle$ atau $g(x) \in \langle p(x)\rangle$; sehingga salah satu dari $f(x)$ atau $g(x)$ sebagai faktor $p(x)$. Karena tidak terdapat der $f(x)$ atau der $g(x)$ lebih kecil dari der $p(x)$ hal ini berarti $p(x)$ taktereduksi atas F.

Sebaliknya, jika $p(x)$ taktereduksi atas F, andaikan N sebuah ideal sedemikian sehingga $\langle p(x)\rangle \subseteq N \subseteq F[x]$. Karena N sebuah ideal utama, dan dari *teorema 8* maka $N = \langle g(x)\rangle$ untuk suatu $g(x) \in N$. Karena $p(x) \in N$ mengakibatkan $p(x) = g(x)q(x)$ untuk suatu $q(x) \in F[x]$. Tetapi $p(x)$ taktereduksi mengakibatkan salah satu diantara $q(x)$ atau $g(x)$ berderajat 0. Jika der $g(x) = 0$ maka terdapat sebuah konstanta taknol dalam F, sehingga $g(x)$ merupakan unit dalam $F[x]$ dan $\langle g(x)\rangle = N = F[x]$.

Jika der $q(x) = 0$ maka $q(x) = c$ dimana $c \in F$ dan $g(x) = (1/c)p(x)$ termuat dalam $\langle p(x)\rangle$, jadi

$\langle p(x)\rangle = N$ berarti $p(x)$ taktereduksi atas F sehingga $\langle p(x)\rangle \neq \{0\}$dengan demikian $\langle p(x)\rangle \neq F[x]$. sehingga takmungkin $\langle p(x)\rangle \subseteq N \subseteq F[x]$. Jadi $\langle p(x)\rangle$ adalah ideal maksimum.

Teorema 10

Misalkan $p(x)$ polinomial taktereduksi dalam $F[x]$, jika $p(x)$ membagi $r(x)s(x)$ untuk $r(x), s(x) \in F[x]$, maka $p(x)$ membagi salah satu dari $r(x)$ atau $s(x)$. [3]

Bukti

Misalkan $p(x)$ membagi oleh $r(x)s(x)$, dari *teorema 10* maka $r(x)s(x) \in \langle p(x) \rangle$ adalah ideal maksimal meskipun $\langle p(x) \rangle$ ideal prim (oleh *akibat 6*) karena $r(x)s(x) \in p(x)$ mengakibatkan salah satu dari $r(x) \in \langle p(x) \rangle$ memberikan $p(x)$ membagi $r(x)$ atau $s(x) \in \langle p(x) \rangle$ memberikan $p(x)$ membagi $s(x)$.

Beberapa teorema yang telah diberikan di atas khususnya *Teorema 10* sangat diperlukan dalam memahami lapangan perluasan. Tujuan yang hendak diperlihatkan adalah jika F lapangan dan misalkan $f(x)$ polinomial takkonstan dalam $F[x]$, maka terdapat lapangan E yang memuat F dan memuat sebuah akar dari $f(x)$.

Berikut diberikan beberapa bagian-bagian penting dalam memperoleh suatu lapangan perluasan yang memuat sebuah polinomial yang memiliki akar .

1. Misalkan $p(x)$ adalah faktor yang taktereduksi dari $f(x)$ dalam $F[x]$.
2. Misalkan E lapangan dari $F[x]/\langle p(x) \rangle$ (dari *teorema 9* dan *teorema 6*)
3. dapat diperlihatkan bahwa tidak terdapat dua elemen dari F merupakan koset yang sama dari $F[x]/\langle p(x) \rangle$, dan dari hal ini memungkinkan untuk diperoleh suatu pemetaan isomorfisma t dari F ke dalam sebuah sublapangan E.
4. Misalkan α sebuah koset $x + \langle p(x) \rangle$ dalam E, akan ditunjukkan bahwa diperoleh $\phi_\alpha(f(x)) = 0$ dengan sebuah homomorfisma evaluasi. Sehingga α merupakan akar dari $f(x)$ dalam E. ♦

2. 3 Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma merupakan sebuah struktur relasi pemetaan yang memetakan elemen-elemen dari sebuah gelanggang ke dalam gelanggang lain. Sebuah homomorfisma gelanggang harus memenuhi relasi antara dua struktur yaitu struktur penjumlahan dan struktur perkalian. [3]

Misalkan R gelanggang dan misalkan N adalah ideal dalam R. Misalkan R/N gelanggang koesien dari R modulo N. maka terdapat *Pemetaan Natural*

$$\gamma : R \to R/N$$

yang memetakan setiap $a \in R$ ke dalam $\bar{a} \in R/N$ karena kedua operasi biner pada gelanggang R terdefinisi dengan baik, diperoleh

$$\gamma(a+b) = \gamma(a) + \gamma(b) \tag{19}$$

$$\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b) \ \forall a, b \in R \tag{20}$$

Pemetaan dengan dua sifat diatas disebut pemetaan homomorfisma dari R kedalam R/N. Pemetaan γ disebut *Homomorfisma kanonik.* [1]

Definisi 15

$\phi : R \to R'$ disebut pemetaan homomorfisma jika

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

untuk setiap a dan b dalam R. [3]

Atau jika ϕ adalah pemetaan pada maka disebut R bersifat homomorfisma pada R'.

Definisi 16

Sebuah isomorfisma $\phi : R \to R'$ adalah homomorfisma yang bersifat satu-satu dan pada. [3]

Sebuah homomorfisma gelanggang dari gelanggang R ke dalam dirinya sendiri adalah *Endomorfisma*. Isomorfisma gelanggang dari gelanggang R ke dalam dirinya sendiri adalah *Automorfisma*. [2]

Sifat-sifat dari Isomorfisma gelanggang diantaranya :

Teorema 11

Jika ϕ sebuah isomorfisma dari sebuah gelanggang R ke dalam R' maka

1. Image dari nol di R adalah nol di R'
2. Image dari elemen negatif dari R adalah elemen negatif dari R'. [4]

Definisi 17

Misalkan sebuah pemetaan $\phi : R \to R'$ adalah pemetaan homomorfisma dari gelanggang R ke dalam gelanggang R'. Subgelanggang

$$\phi^{-1}[0'] = \{r \in R \mid \phi(r) = 0'\}$$

adalah *Kernel* dari ϕ dinotasikan $\ker(\phi)$. [3]

Teorema 12

Misalkan $\phi : R \to R'$ sebuah homomorfisma gelanggang dengan kernel N. maka koset penjumlahan dari N berbentuk sebuah gelanggang R/N yang mana operator binernya terdefinisi oleh pemilihan wakil yaitu jumlah dari dua buah *Koset* akan didefinisikan sebagai :

$$(a+N)+(b+N)=(a+b)+N \tag{21}$$

dan perkalian *Koset* yang didefinisikan

$$(a+N)(b+N)=(ab)+N \tag{22}$$

Juga pemetaan $\mu : R/N \to \phi[R]$ yang didefinisikan oleh

$$\mu(a+N)=\phi(a) \tag{23}$$

adalah sebuah isomorfisma. [3]

Teorema 13

Misalkan N ideal dari gelanggang R maka $\gamma : R \to R / N$ yang diberikan oleh

$$\gamma(x) = x + N \tag{24}$$

adalah gelanggang homomorfisma dengan kernel N. [3]

Bukti

Ambil sembarang $a, b \in R$ oleh definisi diperoleh :

$$\gamma(a) = a + N \;,\; \gamma(b) = b + N$$

1. Akan ditunjukkan bahwa $\gamma(a) + \gamma(b) = \gamma(a + b)$

$$\begin{aligned} \gamma(a) + \gamma(b) &= (a + N) + (b + N) \\ &= (a + b) + N \\ &= \gamma(a + b) \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$

$$\begin{aligned} \gamma(a)\gamma(b) &= (a + N)(b + N) \\ &= (ab) + N \\ &= \gamma(ab) \end{aligned}$$

Diperoleh sebuah gelanggang homomorfisma dengan kernel N.

Diagram 2 dibawah memperlihatkan pemetaan dari tiga buah gelanggang yaitu gelanggang R , $\phi[R]$ dan R/N oleh ϕ, γ dan μ yang diatur dalam suatu teorema yaitu *Teorema Dasar Homomorfisma.*

Siklus Teorema Dasar Homomorfisma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \phi[R] \\ & R/N \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Diagram 2

Sumber : Buku [3] Hal. 349

Teorema 14

Misalkan $\phi: R \to R'$ homomorfisma gelanggang dengan kernel N maka $\phi[R]$ merupakan gelanggang, dan pemetaan $\mu: R/N \to \phi[R]$ yang diberikan oleh $\mu(x+N) = \phi(x)$ adalah isomorfisma jika $\gamma: R \to R/N$ adalah sebuah homomorfisma yang diberikan oleh $\gamma(x) = x + N$ untuk setiap $x \in R$ diperoleh $\phi(x) = \mu\gamma(x)$. [3]

Bukti

- $\phi[R]$ adalah gelanggang.

  Ambil sebarang $a, b, c \in R$. Akan ditunjukkan bahwa :

  1. $\phi[R]$ adalah grup abel terhadap operator penjumlahan

     a. Sifat tertutup.

     Karena ϕ homomorfisma maka $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)\ \forall a, b \in R$ berarti $\phi(a+b) \in \phi[R]$ sehingga $\phi(a), \phi(b) \in \phi[R]$. jadi $\phi[R]$ tertutup.

     b. Sifat assosiatif.

     Misalkan $\phi(a), \phi(b), \phi(c) \in \phi[R]$.

$$\phi(a) + (\phi(b) + \phi(c)) = \phi(a) + \phi(b+c) = \phi(a+b+c) \tag{25}$$

$$(\phi(a)+\phi(b))+\phi(c)=\phi(a+b)+\phi(c)=\phi(a+b+c) \tag{26}$$

sehingga berlaku sifat assosiatif di $\phi[R]$.

c. Terdapat unsur identitas $\phi(e)\in\phi[R]$.

Misalkan e identitas di R.

$$\phi(a)=\phi(a+e)=\phi(a)+\phi(e) \tag{27}$$

maka $\phi(e)$ identitas di $\phi[R]$.

d. Terdapat invers $-\phi(a)\in\phi[R]$.

$$\phi(e)=\phi(a+(-a))=\phi(a)+\phi(-a)$$

$$\phi(e)=\phi(a)+\phi(-a)$$

$$-\phi(a)=\phi(-a)\in\phi[R]\ . \tag{28}$$

e. Sifat komutatif misalkan $a', b' \in \phi(R)\ \exists a,b\in R \ni a'=\phi(a), b'=\phi(b)$

$$a'+b'=\phi(a)+\phi(b)=\phi(b+a)$$

$$=\phi(b)+\phi(a) \text{ karena } \phi \text{ adalah homomorfisma}$$

$$=b'+a' \tag{29}$$

jadi $\phi[R]$ bersifat komutatif.

$\because$ $\phi[R]$ adalah grup abel.

2. Operator perkalian bersifat assosiatif.

$\phi(a), \phi(b), \phi(c)\in\phi[R]$.

$$\phi(a)(\phi(b)\phi(c))=\phi(a)\phi(bc)=\phi(abc) \tag{30}$$

$$(\phi(a)\phi(b))\phi(c)=\phi(ab)\phi(c)=\phi(abc) \tag{31}$$

$\because$ $\phi[R]$ bersifat assosiatif terhadap operator perkalian .

3. Berlaku hukum distributif misalkan

$$\forall\ \phi(a),\phi(b),\phi(c)\in\phi[R]$$

Hukum distributif kiri.

$$\phi(a)(\phi(b+c))=\phi(a(b+c))$$

$$=\phi(ab+ac)$$

$$=\phi(ab)+\phi(ac)$$

$$= (\phi(a)\phi(b)) + (\phi(a)\phi(c)) \tag{32}$$

Hukum distirbutif kanan, dengan cara yang sama dapat diperoleh

$$(\phi(a) + \phi(b))\phi(c) = (\phi(a)\phi(c)) + (\phi(b)\phi(c)) \tag{33}$$

Jadi $\phi[R]$ memenuhi sifat distributif.

$\because$ $\phi[R]$ sebuah gelanggang.

- Akan dibuktikan pemetaan $\mu : R/N \to \phi[R]$

  $xN \mapsto \mu(xN) = \phi(x),\ x \in R$.

  Akan ditunjukkan bahwa μ terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang $x_1N, x_2N \in R/N$ dimana $x_1N = x_2N$, $x_1, x_2 \in R$.

  $x_1N = x_2N$ artinya $x_1^{-1}x_2 \in N$.

  Sehingga $e' = \phi(x_1^{-1}x_2)$, e' identitas di N.

  $e' = \phi(x_1^{-1})\phi(x_2)$

  $e' = (\phi(x_1))^{-1}\phi(x_2)$ (kalikan dengan $\phi(x_1)$)

  $$\phi(x_1) = \phi(x_2) \tag{34}$$

  Atau $\mu(x_1N) = \mu(x_2N)$

  Jadi μ terdefinisi dengan baik.

  $\therefore$ μ suatu pemetaan.

- Akan dibuktikan μ isomorfisma.

  a. Akan dibuktikan homomorfisma.

  Ambil sebarang $x_1N, x_2N \in R/N$.

  $\mu(x_1N\ x_2N) = \mu(x_1x_2N) = \phi(x_1x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) = \mu(x_1N)\mu(x_2N)$.

  $\therefore$ μ homomorfisma.

  b. Akan dibuktikan μ pemetaan pada.

  Ambil sebarang $y \in \phi[R]$, artinya $\exists\ xN \in R/N \ni y = \phi(x)$,

  sehingga dapat dipilih suatu xN sedemikian sehingga

$$\mu(xN) = \phi(x) = y \tag{35}$$

Jadi $\forall y \in \phi[R]\ \exists\ xN \in R/N \ni y = \mu(xN)$.

$\therefore$ μ pada.

c. Akan dibuktikan μ pemetaan satu-satu.

Misalkan $\mu(x_1 N) = \mu(x_2 N)$, harus dibuktikan $x_1 N = x_2 N$

$\mu(x_1 N) = \mu(x_2 N)$ menurut definisi pemetaan berarti $\phi(x_1) = \phi(x_2)$.

$(\phi(x_1)^{-1})\phi(x_1) = (\phi(x_1)^{-1})\phi(x_2)$

$e' = \phi(x_1{}^{-1})\phi(x_2)$, e' identitas di N.

$e' = \phi(x_1{}^{-1}x_2)$, artinya $x_1{}^{-1}x_2 \in N$. Sehingga

$$x_1 N = x_2 N. \tag{36}$$

$\therefore$ μ satu-satu.

Dari a, b, c diperoleh μ suatu isomorfisma dengan kata lain R/N isomorfik dengan $\phi[R]$ ditulis $R/N \simeq \phi[R]$. ♦

BAB 3

LAPANGAN PERLUASAN DAN AUTOMORFISMA

3.1. Lapangan Perluasan

Dalam bahagian ini akan diperlihatkan jika F, E lapangan, $F \leq E$, dan misalkan polinomial takkonstan $f(x) \in F[x]$, maka $f(\alpha) = 0$ untuk suatu $\alpha \in E$.

Definisi 18

Sebuah lapangan E disebut sebagai lapangan perluasan dari lapangan F jika $F \leq E$. (F subgrup E) [3]

Tiang Lapangan dan Diagram Lattice

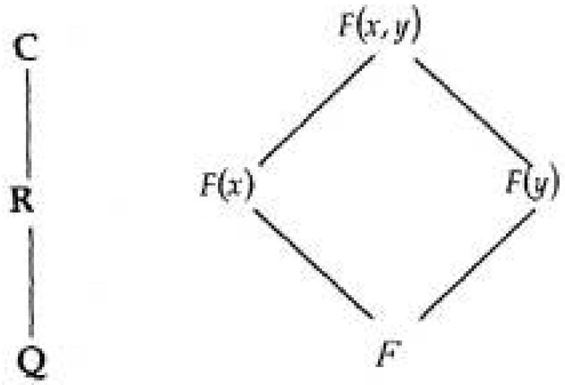

Diagram 3

Sumber : Buku [3] hal. 394

Dengan demikian R merupakan lapangan perluasan dari Q dan C merupakan lapangan perluasan dari R dan Q. Sebagai alat bantu memahami bagian ini akan digunakan *Diagram Lattice* (diagram 3). Lapangan terbesar berada pada bagian teratas pada Tiang Lapangan seperti yang diperlihatkan pada bagian sisi kiri *Diagram 3*. Jika F sebuah lapangan sebarang, dan F

dan F merupakan sublapangan dari dirinya sendiri maka F adalah lapangan perluasan dari F.

Teorema 15 (Teorema Kronecker)

Misalkan F lapangan dan misalkan $f(x)$ polinomial takkonstan dalam $F[x]$ maka terdapat lapangan E sebagai perluasan lapangan F dan $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha)=0$. [3]

Bukti

Menurut *teorema 4*, $f(x)$ dapat difaktorkan ke dalam polinomial taktereduksi dalam $F[x]$ atas F. Misalkan $p(x)$ polinomial taktereduksi untuk setiap pemfaktoran, berarti kita dapat memperoleh sebuah lapangan E sebagai perluasan lapangan F yang memuat suatu elemen α sedemikian sehingga $p(\alpha)=0$.

Dengan *teorema 9*, $\langle p(x)\rangle$ adalah ideal maksimal di $F[x]$, jadi $F[x]/\langle p(x)\rangle$ adalah sebuah lapangan maka terdapat pemetaan natural satu-satu yang didefinisikan oleh $\psi : F \to F[x]/\langle p(x)\rangle$.

untuk $a \in F$ diperoleh $\psi(a)=a+\langle p(x)\rangle$

Jika untuk $\psi(a)=\psi(b)$ maka

$$a+\langle p(x)\rangle = b+\langle p(x)\rangle \tag{37}$$

untuk suatu $a,b \in F$ sehingga $(a-b)\in\langle p(x)\rangle$, berarti $a-b$ harus merupakan sebuah faktor perkalian dalam polinomial $p(x)$ berderajat ≥ 1. Karena $a,b \in F$, mengakibatkan $a-b$ di F, dengan demikian $a-b=0$, sehingga $a=b$.

Untuk bukti pada, pilih $a \in (a+\langle p(x)\rangle)$ sehingga $\psi : F \to F[x]/\langle p(x)\rangle$ adalah pemetaan isomorfisma yang memetakan F pada sublapangan $F[x]/\langle p(x)\rangle$. Dari pemetaan ψ diperoleh bentuk $\{a+\langle p(x)\rangle | a \in F\}$ untuk F. Akan ditunjukkan $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$ adalah lapangan perluasan dari F dengan memperlihatkan bahwa $p(x)$ memiliki akar pada E. Misalkan $\alpha = x + \langle p(x)\rangle$, $\alpha \in E$. Dengan pemetaan homomorfisma $\phi_\alpha : F[x] \to E$, oleh *teorema 1*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{38}$$

dimana $a_i \in F$ maka diperoleh

$$\phi_\alpha(p(x)) = a_0 + a_1(x + \langle p(x)\rangle) + \ldots + a_n(x + \langle p(x)\rangle)^n \tag{39}$$

Dalam $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$. oleh $\alpha = x + \langle p(x)\rangle$ diperoleh

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) + \langle p(x)\rangle \\ &= p(x) + \langle p(x)\rangle \\ &= \langle p(x)\rangle = 0 \end{aligned}$$

Dalam $F[x]/\langle p(x)\rangle$ diperoleh sebuah elemen α didalam $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$ sedemikian sehingga $p(\alpha) = 0$ dengan demikian $f(\alpha) = 0$. Diperoleh $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$ sebagai suatu lapangan perluasan dari F.

Contoh berikut akan menggambarkan proses dari *teorema Kronecker* diatas

Contoh 3

Misalkan F lapangan, $F = R$ dan misalkan $f(x) = x^2 + 1$ yaitu fungsi yang tidak memiliki akar di R jadi tak tereduksi dibawah F.

Oleh *teorema* 9 maka $(x^2 + 1)$ adalah ideal maksimal dalam $R[x]$.

jadi $R[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ merupakan sebuah lapangan. Untuk $r \in R$ dengan $r + \langle x^2 + 1\rangle$ dalam $R[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ diperoleh R sebagai sebuah sublapangan pada $E = R[x]/\langle x^2 + 1\rangle$. Misalkan $\alpha = x + \langle x^2 + 1\rangle$ dalam $R[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 1 &= \left(x + \left(x^2 + 1\right)^2 + \left(1 + \left(x^2 + 1\right)\right)\right) \\ &= \left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 + 1\right) = 0\end{aligned}$$

Sehingga α merupakan sebuah akar pada $x^2 + 1$.

Definisi 19

Sebuah elemen α dalam lapangan perluasan E dari lapangan F dikatakan aljabar atas F jika $f(\alpha) = 0$ untuk suatu elemen tak nol $f(x) \in F[x]$. Jika α bukan aljabar atas F maka α adalah transendental atas F. [3]

Contoh 4

C adalah lapangan perluasan dari lapangan Q karena $\sqrt{2}$ merupakan akar di $x^2 - 2$ kita melihat bahwa $\sqrt{2}$ merupakan aljabar atas Q, juga i merupakan aljabar atas Q karena i akar dari $x^2 + 1$.

Definisi 20

Sebuah elemen di C dan aljabar atas Q merupakan bilangan aljabar. Sebuah bilangan transendental adalah sebuah elemen di C dan transendental atas Q. [3]

Teorema 16

Misalkan E lapangan perluasan dari F dan misalkan $\alpha \in E$, misalkan $\phi_\alpha : F[x] \to E$, sedemikian sehingga $\phi_\alpha(a) = a$ untuk $a \in F$ dan $\phi_\alpha(x) = \alpha$ maka α merupakan transendental atas F jika dan hanya jika ϕ_α adalah isomorfisma dari $F[x]$ ke dalam subdomain dari E, jika dan hanya jika ϕ_α satu-satu. [3]

Bukti

Karena α transendental atas F untuk setiap polinomial takkonstan $f(x) \in F[x]$ jika dan hanya jika $f(\alpha) \neq 0$ yang benar (sesuai definisi) jika dan hanya jika kernel dari ϕ_α adalah $\{0\}$ dengan begitu jika dan hanya jika ϕ_α adalah satu-satu.

Teorema 16 menjamin sebuah lapangan kuosien dari elemen transendental atas F dan tidak akan dikaji lebih mendalam.

Dari contoh 4 diatas telah diperlihatkan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan aljabar atas Q dan sebagai akar dalam polinomial x^2-2. Juga dapat dilihat bahwa $\sqrt{2}$ merupakan akar x^4-3x^2+2. Teorema berikut akan memperlihatkan bahagian ini secara umum.

Teorema 17

Misalkan E lapangan perluasan dari F. Misalkan $\alpha \in E$ dan α aljabar atas F maka terdapat polinomial taktereduksi $p(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $p(\alpha)=0$. $p(x)$ ini sebagai polinomial taktereduksi yang tunggal untuk faktor konstan tertentu dalam F dan berderajat minimum ≥ 1 dalam $F[x]$ yang memiliki α sebagai sebuah akar. Jika $f(\alpha)=0$ untuk $f(x) \in F[x]$ dengan $f(x) \neq 0$ maka $p(x)$ membagi $f(x)$. [3]

Bukti

Misalkan $\phi_\alpha : F[x] \to E$ maka kernel dari ϕ_α adalah ideal dan oleh *teorema 8* harus merupakan ideal utama yang dibangun oleh suatu $p(x) \in F[x]$.

Selanjutnya $\langle p(x) \rangle$ terdiri dari elemen dalam $F[x]$ tepat mempunyai α sebagai akar, jika $f(\alpha)=0$ untuk $f(x) \neq 0$, maka $f(x) \in \langle p(x) \rangle$ dan $p(x)$ membagi $f(x)$. Dengan demikian der $p(x)$ adalah minimum ≥ 1 dan mempunyai α sebagai akar. Untuk suatu $a \in F$ maka polinomial berderajat sama dengan $p(x)$ harus berbentuk $(a)p(x)$.

Akan ditunjukkan bahwa $p(x)$ taktereduksi.

Andaikan $p(x)=r(x)s(x)$ adalah pemfaktoran dari $p(x)$ ke dalam polinomial berderajat lebih rendah, untuk der $s(x)$ < der $p(x)$ dan $p(\alpha)=0$ mengakibatkan $r(\alpha)s(\alpha)=0$ sehingga $r(\alpha)=0$ atau $s(\alpha)=0$ dengan der $s(x)$ < der $p(x)$ karena E sebuah lapangan. Hal ini akan berakibat kontradiksi dari fakta bahwa $p(x)$ adalah polinomial berderajat minimum ≥ 1, sehingga $p(x)$ taktereduksi.

Dapat diasumsikan bahwa koefisien dari pangkat tertinggi variabel x adalah 1 juga terdapat dalam $p(x)$ dari *teorema 17* dengan perkalian suatu konstanta yang cocok dalam *F*. Setiap polinomial yang mempunyai 1 sebagai koefisien pangkat tertinggi dari x disebut sebagai *Polinomial Monik.*

Definisi 21

Misalkan *E* lapangan perluasan dari *F*, dan misalkan $\alpha \in E$ aljabar atas *F*. Sebuah polinomial monik $p(x)$ yang tunggal seperti pada *Teorema 17* adalah sebuah polinomial taktereduksi untuk α atas *F* dan dinotasikan oleh $irr(\alpha, F)$. Der $irr(\alpha, F)$ adalah derajat dari α atas *F*, dinotasikan dengan $\text{der}(\alpha, F)$. [3]

Contoh 5

Telah diketahui dari *contoh* 4 bahwa $\sqrt{2}$ adalah akar dari x^2-2 jadi menurut *definisi 21* hal ini dapat dituliskan sebagai $irr(\sqrt{2}, Q) = x^2-2$ dengan der $(\sqrt{2}, Q)$ =2.

Misalkan *E* lapangan perluasan dari *F*, dan misalkan $\alpha \in F$. Misalkan ϕ_α merupakan homomorfisma evaluasi dari $F[x]$ ke dalam *E* dengan $\phi_\alpha(a)=a$ untuk $a \in F$. dan $\phi_\alpha = \alpha$ seperti pada *teorema* 1 akan dipertimbangkan dua kasus.

Kasus 1 : Misalkan α aljabar atas F, maka terdapat pemetaan homomorfisma evaluasi yang memetakan elemen $\hat{\alpha}$ dalam E. dengan *teorema 17* diperoleh kernel ϕ_α adalah $\langle irr(\alpha, F)\rangle$. $\langle irr(\alpha, F)\rangle$ berbentuk sebuah polinomial taktereduksi dalam lapangan E dan $\langle irr(\alpha, F)\rangle \neq \{0\}$. Oleh *teorema 9* $\langle irr(\alpha, F)\rangle$ adalah ideal maksimal dari $F[x]$. Dengan demikian terbentuk pula sebuah lapangan hasil bagi $F[x]/\langle irr(F, x)\rangle$ oleh pemetaan natural sebagai sebuah lapangan yang isomorfik dengan *image* $\phi_\alpha[F[x]]$ pada E. dari pemetaan ϕ_α diperoleh Sublapangan $\phi_\alpha[F[x]]$ di E merupakan sublapangan terkecil yang mengandung F dan α. Lapangan ini didefinisikan sebagai $F(\alpha)$.

Kasus 2 : Misalkan α transendental atas F maka *teorema 16* ϕ_α memberikan pemetaan isomorfisma dari $F[x]$ ke dalam subdomain E dengan demikian untuk kasus ini $\phi_\alpha[F[x]]$ bukan lapangan melainkan integral domain yang dinotasikan oleh $F[\alpha]$. Lapangan kuesien dari $F[\alpha]$ yang merupakan sublapangan terkecil dari E yang memuat F dan α seperti dalam kasus 1 dinotasikan sebagai $F(\alpha)$. Karena difokuskan hanya untuk elemen aljabar atas F dengan demikian kasus 2 tidak akan dibahas dalam tulisan ini.

Definisi 22

Lapangan perluasan E dari F disebut sebagai perluasan sederhana jika $E = F(\alpha)$ untuk suatu $\alpha \in E$. [3]

Teorema 18

Misalkan E perluasan sederhana $F(\alpha)$ dari F, dan misalkan α aljabar atas F. Misalkan derajat dari $irr(\alpha, F)$ adalah $n \geq 1$ maka setiap anggota β pada $E = F(\alpha)$ dapat dinyatakan dengan tunggal dalam bentuk

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + ... + b_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{40}$$

berbentuk $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$ adalah polinomial dalam α dengan koefisien dalam F.

misalkan

$$irr(\alpha, F) = p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{41}$$

Maka $p(\alpha) = 0$, jadi

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0 \tag{42}$$

Persamaan dalam $F(\alpha)$ ini dapat digunakan untuk menggambarkan setiap monomial α^m Untuk $m \geq n$ dengan syarat derajat α kurang dari n. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n = \alpha\left(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\right) = -a_{n-1}\alpha^n - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\alpha \\ &= -a_{n-1}\left(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\right) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\alpha \end{aligned}$$

Sehingga jika $\beta \in F(\alpha)$ maka β dapat ditulis dalam bentuk

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{43}$$

Untuk bukti ketunggalan,

jika

$$b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = b'_0 + b'_1\alpha + \ldots + b'_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{44}$$

$+$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

Tabel 1

Sumber : buku [3] Hal 401

Untuk $b'_i \in F$, maka

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)x + \ldots + (b_{n-1} - b'_{n-1})x^{n-1} = g(x) \tag{45}$$

$g(x) \in F[x]$ dan $g(\alpha) = 0$. Juga der $g(x)$ < der $irr(\alpha, F)$. Karena $irr(\alpha, F)$ merupakan polinomial taknol dengan derajat minimum dalam $F[x]$ dan memuat α sebagai sebuah unsur nol. Kita harus memiliki $g(x) = 0$, oleh karena itu $b_i - b'_i = 0$ sedemikian sehingga $b_i = b'_i$, dan b tunggal. ♦

3.2. Ruang Vektor

Konsep lain yang sangat mendukung dalam memahami lapangan perluasan adalah Ruang Vektor. Dalam bahagian ini akan diperlihatkan konsep dari kebebasan linier dan dimensi yang menunjang dalam lapangan perluasan .

Definisi 23

Misalkan F lapangan. Ruang vektor atas F (F-ruang vektor) terdiri dari sebuah grup abel **V** bersama operator penjumlahan dan operator perkalian skalar dari unsur-unsur **V** dan unsur-unsur **F** pada sisi kiri sedemikian sehingga untuk setiap $a, b \in F$ dan $\alpha, \beta \in \mathbf{V}$ memenuhi setiap kondisi berikut :

V_1 $a\alpha \in \mathbf{V}$

V_2 $a(b\alpha) = (ab)\alpha$ (46)

V_3 $(a + b)\alpha = (a\alpha) + (b\alpha)$ (47)

V_4 $a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$ (48)

V_5 $1\alpha = \alpha$ (49)

elemen dari **V** merupakan vektor dan elemen dari F adalah skalar. [3]

Contoh 6

Misalkan F lapangan, $\mathbf{F}[x]$ dapat ditulis sebagai ruang vektor atas F, di mana penjumlahan vektor adalah penjumlahan biasa dari polinomial dalam $F[x]$, dan perkalian skalar $a\alpha$ elemen dari $F[x]$ oleh elemen dari F adalah perkalian biasa dalam $F[x]$. Aksioma V_1 sampai V_5 untuk ruang vektor akan segera diikuti oleh aksioma untuk integral domain $F[x]$.

Bukti

Misalkan $a, b \in F$ dan $\alpha, \beta \in F[x]$ dengan

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n$$

1. Akan ditunjukkan $a\alpha \in F[x]$

$$a\alpha = a(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)$$
$$= a\alpha_0 + a\alpha_1 x + \ldots + a\alpha_n x^n$$

Karena $a\alpha_0 + a\alpha_1 x + \ldots + a\alpha_n x^n$ adalah perkalian skalar dalam $F[x]$ sehingga $a\alpha \in F[x]$

2. Akan ditunjukkan $a(b\alpha) = (ab)\alpha$

$$a(b\alpha) = a(b\alpha_0 + b\alpha_1 x + \ldots + b\alpha_n x^n)$$
$$= (ab\alpha_0 + ab\alpha_1 x + \ldots + ab\alpha_n x^n)$$
$$= (ab)\alpha$$

Terbukti bahwa $a(b\alpha) = (ab)\alpha$

3. Akan ditunjukkan $(a+b)\alpha = (a\alpha) + (b\alpha)$

$$(a+b)\alpha = (a+b)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)$$
$$= (a\alpha_0 + a\alpha_1 x + \ldots + a\alpha_n x^n) + (b\alpha_0 + b\alpha_1 x + \ldots + b\alpha_n x^n)$$
$$= (a\alpha) + (b\alpha)$$

Terbukti bahwa $(a+b)\alpha = (a\alpha) + (b\alpha)$

4. Akan ditunjukkan $a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$

$$a(\alpha + \beta) = a((\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n) + (\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n))$$
$$= ((a\alpha_0 + a\alpha_1 x + \ldots + a\alpha_n x^n) + (a\beta_0 + a\beta_1 x + \ldots + a\beta_n x^n))$$
$$= (a\alpha) + (a\beta)$$

Terbukti bahwa $a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$

5. Akan ditunjukkan $1\alpha = \alpha$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

$=1\alpha_0 + 1\alpha_1 x + \ldots + 1\alpha_n x^n$

$=1\alpha$

Terbukti bahwa $1\alpha = \alpha$

dari (1)..(5) maka $\mathrm{F}[x]$ adalah ruang vektor atas F.

Definisi 24

Misalkan **V** ruang vektor atas F, maka vektor pada subset $S=\{\alpha_i | i \in I\}$ dari **V** dikatakan membangun **V** (*span* **V**) jika untuk setiap $\beta \in \mathbf{V}$ maka

$$\beta = a_1\alpha_{i1} + a_2\alpha_{i2} + \ldots + a_n\alpha_{in} \tag{50}$$

Untuk suatu $a_j \in F$ dan $\alpha_{ij} \in S, j = 1,\ldots,n$. Sebuah vektor $\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{ij}$ adalah kombinasi linier dari α_{ij}. [3]

Contoh 8

Misalkan F lapangan dan E perluasan lapangan F, misalkan $\alpha \in E$ aljabar atas F maka $\mathrm{F}(\alpha)$ merupakan sebuah ruang vektor atas F, dibangun oleh vektor-vektor dalam $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ oleh *teorema 18* dan berderajat n.

Definisi 25

Sebuah ruang vektor V atas lapangan F dikatakan berdimensi hingga jika terdapat subset berhingga dari V yang dibangun oleh vektor v (Span V). [3]

Contoh 9

Jika $F \leq E$ dan $\alpha \in E$ merupakan aljabar atas lapangan F, *contoh 8* memperlihatkan bahwa $\mathrm{F}(\alpha)$ ruang vektor dimensi berhingga atas F.

Definisi 26

Misalkan **V** ruang vektor atas F. misalkan $\mathbf{S} \leq \mathbf{V}$, vektor-vektor dalam subset $S = \{\alpha_i | i \in I\}$ disebut bebas linier atas F jika $\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_{ij} = 0$ mengakibatkan bahwa $a_j = 0$ untuk $j = 1, \ldots, n$. Jika vektor tidak bebas linier atas F, maka vektor tersebut bergantung linier atas F. [3]

Contoh 10

Misalkan E lapangan perluasan dari lapangan F, dan misalkan $\alpha \in E$ bersifat aljabar atas F jika $n = \deg(\alpha, F)$ maka oleh teorema 18 setiap elemen $F(\alpha)$ memiliki bentuk tunggal dalam

$$b_0 + b_{1\alpha} + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

Untuk $b_i \in F$. Khususnya

$$0 = 0 + 0\alpha + \ldots + 0\alpha^{n-1}$$

Pasti tunggal seperti ekspresi untuk 0 sehingga elemen $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ merupakan vektor bebas linier dalam $F(\alpha)$ atas lapangan F, juga sebagai span $F(\alpha)$ sehingga dengan definisi selanjutnya $1, \alpha, \ldots. \alpha^{n-1}$ berbentuk basis untuk $F(\alpha)$ atas F.

Definisi 27

Jika **V** adalah ruang vektor atas sebuah lapangan F, vektor dalam subset $B = \{\beta_i | i \in I\}$ dari **V** berbentuk sebuah basis untuk **V** atas F jika B saling bebas linier dan membangun **V**. [3]

Teorema 19

Misalkan $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ himpunan berhingga dari vektor-vektor yang saling bebas linier dalam ruang vektor **V** berdimensi hingga atas F . maka S dapat diperluas menjadi basis untuk **V** atas F. selanjutnya, jika $B=\{\beta_1,...,\beta_n\}$ suatu basis untuk **V** atas F, maka $r \le n$. [3]

Akibat 7

Dua buah basis dari ruang vektor berdimensi berhingga V atas F memiliki jumlah elemen yang sama.

Definisi 28

Jika **V** adalah ruang vektor berdimernsi hingga atas lapangan F, banyaknya elemen dalam basis adalah dimensi dari V atas F

Contoh 11

Misalkan E sebuah perluasan lapangan dari lapangan F dan misalkan $\alpha \in E$. *Contoh 10* telah diperlihatkan bahwa jika α sebuah aljabar atas F dan deg $(\alpha, F)=n$ maka dimensi dari $F(\alpha)$ sebagai sebuah ruang vektor atas F adalah n.

Beberapa konsep dasar tentang ruang vektor telah diberikan, selanjutnya akan diperlihatkan penggunaan ruang vektor dalam teori lapangan.

Teorema 20

Misalkan E lapangan perluasan dari F, dan misalkan $\alpha \in E$ aljabar atas F. Jika der $(\alpha, F)=n$ maka $F(\alpha)$ ruang vektor berdimensi-n atas F dengan basis $\{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\}$. Selanjutnya untuk setiap elemen β pada $F(\alpha)$ adalah aljabar atas F dan der $(\beta, F) \le \text{der}(\alpha, F)$. [3]

Bukti

Misalkan $\beta \in F(\alpha)$ dimana α aljabar atas F berderajat n. perhatikan elemen-elemen $1, \beta, ..., \beta^n$ yang saling bebas linier atas F. Dengan *teorema 19* terdapat suatu basis pada $F(\alpha)$ atas F akan memiliki paling tidak suatu elemen dalam suatu himpunan vektor-vektor yang saling bebas linier atas F. Meskipun demikian, $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}\}$ adalah basis yang hanya mempunyai n elemen. Jika $\beta^i = \beta^j$, maka $\beta^i - \beta^j = 0$ jadi terdapat $b_i \in F$ sedemikain sehingga

$$b_0 + b_1\beta + b_2\beta + ... + b_n\beta^n = 0 \qquad (51)$$

Karena tidak setiap $b_i = 0$ berarti $f(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$ adalah sebuah polinomial taknol dalam $F[x]$ dengan demikian $f(\beta) = 0$ jadi β merupakan aljabar atas F dan der (β, F) paling tinggi adalah n. ♦

3.3 Perluasan Aljabar berdimensi hingga

Dalam *teorema 20* telah diperlihatkan bahwa jika E lapangan perluasan dari F dan $\alpha \in E$ aljabar atas F maka setiap elemen dari $F(\alpha)$ adalah aljabar atas F. pada bahagian ini akan diperlihatkan sebuah lapangan perluasan dari F yang hanya memuat elemen-elemen yang bersifat aljabar atas F yang disebut sebagai lapangan perluasan aljabar.

Definisi 29

Sebuah lapangan perluasan E dari F disebut sebagai perluasan aljabar dari F jika setiap elemen dalam E adalah aljabar atas F. [3]

Definisi 30

Jika E lapangan perluasan dari F juga sebagai ruang vektor berdimensi hingga n atas F maka E merupakan perluasan berhingga dengan derajat n atas F. akan dimisalkan $[E:F]$ adalah derajat n dari E atas F. [3]

Sebuah fakta yang sering digunakan bahwa jika E lapangan perluasan F, maka $[E:F]$=1 jika dan hanya jika E = F. dari Teorema 19, $\{1\}$ selalu dapat diperluas ke dalam sebuah basis untuk E atas F sehingga $[E:F]=1$ jika dan hanya jika $E = F(1) = F$.

Teorema 21 dapat digunakan untuk memperlihatkan bahwa sebuah perluasan berhingga E dari lapangan F harus merupakan perluasan aljabar dari F.

Teorema 21

Sebuah lapangan perluasan berhingga E dari F merupakan perluasan aljabar dari F. [3]

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa untuk $\alpha \in E$, α adalah aljabar atas F

Oleh *teorema 19* jika $[E:F]=n$ maka.

$1,\alpha,\ldots,\alpha^n$ tidak dapat menjadi elemen-elemen yang saling bebas linier, dengan demikian terdapat $a_i \in F$ sedemikian sehingga

$$a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Karena tidak semua $a_i = 0$ maka $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ sebuah polinomial taknol di $F[x]$, dan $f(\alpha) = 0$ dengan demikian α aljabar atas F.

Teorema 22

Jika E adalah perluasan berhingga dari F, dan K perluasan berhingga dari E, maka K adalah perluasan berhingga dari F, dan

$$[K:F]=[K:E][E:F] \tag{52}$$

Akibat 8

Jika E adalah perluasan lapangan dari F, $\alpha \in E$ adalah aljabar atas F dan $\beta \in F(\alpha)$, maka der (β, F) membagi der (α, F).

Misalkan E perluasan lapangan dari F, dan misalkan $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ tidak harus aljabar atas F. Oleh definisi, $F(\alpha_1)$ adalah perluasan terkecil F dalam E

dan memuat α_1 hal sama pada $(F(\alpha_1))(\alpha_2)$ juga dapat gambarkan sebagai perluasan terkecil F dalam E yang memuat kedua α_1 dan α_2.

Teorema 23

Misalkan E lapangan perluasan aljabar dari lapangan F. terdapat elemen berhingga $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in E$ sedemikian sehingga

$$F=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \tag{53}$$

jika dan hanya jika E sebuah ruang vektor berdimensi hingga atas F yaitu jika dan hanya jika E merupakan lapangan perluasan berhingga dari F. [3]

Bukti

Diberikan $F=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Karena E perluasan aljabar dari F, setiap α_i aljabar atas F dengan demikian α_i adalah aljabar atas untuk setiap lapangan perluasan dari F dalam E. sehingga $F(\alpha_1)$ aljabar atas F, secara umum $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)$ aljabar atas $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1})$ untuk $j=2,\ldots,n$ karena $F=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ sampai $F(\alpha_1)$adalah lapangan perluasan berhingga maka

$$F, F(\alpha_1), F(\alpha_1\alpha_2),\ldots, F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=E \tag{54}$$

Dengan demikian E adalah perluasan berhingga dari F.

Sebaliknya, diberikan E perluasan aljabar berhingga dari F jika $[E:F]=1$, maka $E=F(1)=F$, jika $E\neq F$ misalkan $\alpha_1 \in E$ dan $\alpha_1 \notin F$. Maka $[F(\alpha_1):F]>1$. Jika $F(\alpha_1)=E$, jelas memenuhi. Jika tidak misalkan $\alpha_2 \in E$ dan $\alpha_2 \notin F(\alpha_1)$. Jika proses ini dilanjutkan diperoleh

$$F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=E. \tag{55}$$

Untuk E sebuah lapangan perluasan dari F dan $\alpha,\beta \in E$ adalah aljabar atas F, maka $\alpha+\beta, \alpha\beta, \alpha-\beta, \alpha/\beta \in E$ jika $\beta \neq 0$ hal ini sesuai dengan *Teorema 26* dan termasuk dalam teorema berikut.

Teorema 24

Misalkan E lapangan perluasan dari F, dengan demikian

$$\overline{F_E} = \{ \alpha \in E | \alpha \text{ adalah aljabar atas } F \}$$

Merupakan sebuah sublapangan dari E yang disebut tutupan aljabar dari F dalam E. [3]

Akibat 9

Himpunan semua bilangan aljabar membentuk lapangan.

Definisi 31

Sebuah lapangan F dikatakan bersifat tertutup secara aljabar jika setiap polinomial tak konstan dalam $F[x]$ mempunyai akar dalam F. [3]

Teorema berikut memperlihatkan bahwa konsep dari sebuah lapangan tertutup secara aljabar yang dapat juga terdefinisi dalam syarat-syarat faktorisasi polinomial atas sebuah lapangan.

Teorema 25

Sebuah lapangan F disebut bersifat tertutup secara aljabar jika dan hanya jika setiap polinomial tak konstan dalam $F[x]$ terfaktorkan secara linier dalam $F[x]$. [3]

Akibat 9

Lapangan yang tertutup secara aljabar, tidak memuat perluasan aljabar sejati, yakni , tidak terdapat perluasan aljabar E dengan $F < E$.

Teorema 26

Setiap lapangan F memuat tutupan aljabar yakni lapangan perluasan aljabar $\overline{F}$ yang tertutup secara aljabar. [3]

Untuk memperlihatkan bahwa setiap lapangan memuat perluasan aljabar yang tertutup secara aljabar, maka dapat digunakan bentuk ekivalensi yang disebut *Lemma Zorn's*.

Definisi 32

Sebuah urutan parsial dari himpunan S dengan relasi $\leq$ yang terdefinisi untuk setiap pasangan elemen S sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi

1. $a \leq a \, \forall a \in S$ (hukum refleksif) (56)
2. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$ (hukum anti simetri) (57)
3. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$ (hukum transitif). (58)

[3]

Sebuah subset T dari S merupakan *Rantai* jika setiap dua elemen sebut a dan b dalam T dapat dibandingkan yakni, salah satu dari $a \leq b$ atau $b \leq a$ (atau keduanya). Sebuah u elemen S merupakan batas atas (upper bound) untuk subset A dari himpunan urutan parsial S jika $a \leq u \, \forall a \in A$. Dan sebuah elemen m dari himpunan urutan parsial S adalah maksimal jika tidak terdapat $s \in S$ sehingga $m < s$.

Jika sebuah lapangan F memuat sebuah perluasan aljabar $\overline{F}$ yang bersifat tertutup secara aljabar, maka untuk menyatakan $\overline{F}$ sebuah perluasan aljabar maksimal dalam F maka diperlukan sebuah konsep yang disebut *Lemma Zorn's*.

Lemma Zorn's

Jika S himpunan urutan parsial sedemikian sehingga setiap rantai dalam S mempunyai batas atas S, maka S mempunyai sedikitnya satu elemen maksimal. [3] ♦

3.4 lapangan Automorfisma

Bahagian ini akan memfokuskan pada suatu konsep pemetaan isomorfisma dalam sebuah lapangan yaitu pemetaan isomorfisma yang memetakan elemen-elemen dari sebuah lapangan kedalam dirinya sendiri. Setelah memahami konsep akar-akar polinomial dalam lapangan polinomial, selanjutnya akan diperlihatkan bahwa terdapat sifat yang sama untuk dua elemen aljabar atas sebuah lapangan yang disebut elemen konjugat.

Definisi 33

Misalkan E perluasan aljabar dari lapangan F, terdapat dua elemen $\alpha, \beta \in E$ konjugat atas F jika $irr(\alpha, F) = irr(\beta, F)$ yakni jika α dan β merupakan akar dari polinomial aktereduksi yang sama atas F. [3]

Teorema 27

Misalkan F sebuah lapangan dan misalkan α dan β aljabar atas F dengan $\deg(\alpha, F) = n$. Pemetaan $\psi_{\alpha\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ didefinisikan dengan

$$\psi_{\alpha,\beta}\left(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right) = c_0 + c_1\beta + \ldots + c_{n-1}\beta^{n-1} \tag{59}$$

Untuk $c_i \in F$. $\psi_{\alpha,\beta}$ adalah sebuah isomorfsma dari $F(\alpha)$ pada $F(\beta)$ jika dan hanya jika α dan β bersifat aljabar atas F. [3]

Bukti

Diberikan $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ sebagai sebuah isomorfisma.

Misalkan

$$irr(\alpha, F) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \tag{60}$$

maka

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$$

Dengan demikian

$$\psi_{\alpha\beta}\left(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n\right) = a_0 + a_1\beta + \ldots + a_n\beta^n = 0$$

dari teorema 17, maka $irr(\beta, F)$ membagi $irr(\alpha, F)$.

Didefinisikan pemetaan $\psi_{\beta,\alpha} : F(\beta) \to F(\alpha)$, diperoleh

$$\left(\psi_{\alpha,\beta}\right)^{-1} = \psi_{\beta,\alpha} \tag{61}$$

Digunakan untuk menunjukkan $irr(\beta, F)$ membagi $irr(\alpha, F)$. Berarti $irr(\beta, F)$ adalah sebuah ideal utama $irr(\alpha, F) \in \langle irr(\beta, F)\rangle$. Karena $irr(\alpha, F)$ juga polinomial taktereduksi maka $irr(\beta, F) = irr(\alpha, F)$. Kedua polinomial adalah monik jadi α dan β pasangan konjugat atas *F*.

Sebaliknya diberikan $irr(\beta, F) = irr(\alpha, F) = p(x)$, dengan homomorfisma evaluasi $\phi_\alpha : F[x] \to F(\alpha)$ keduanya memuat kernel yang sama $\langle p(x)\rangle$. Oleh *teorema 14* terdapat isomorfisma natural $\psi_\alpha : F[x]/\langle p(x)\rangle \to \phi_\alpha[F[x]] = F(\alpha)$ yang berhubungan dengan $\phi_\alpha : F[x] \to F(\alpha)$, dengan cara sama ϕ_β menghasilkan pemetaan isomorfisma $\psi_\beta : F[x]/\langle p(x)\rangle \to F(\beta)$. Misalkan $\psi_{\alpha,\beta} = \psi_\beta\left(\psi_\alpha\right)^{-1}$

Untuk $\left(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right) \in F(\alpha)$ diperoleh

$$\psi_{\alpha,\beta}\left(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right)$$

$$= \left(\psi_\beta\psi_\alpha^{-1}\right)\left(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right) \text{ menurut persamaan 61}$$

$$= \psi_\beta\left(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right) + \langle p(x)\rangle \text{ pemetaan } \psi_\alpha^{-1}$$

$$= c_0 + c_1\beta + \ldots + c_{n-1}\beta^{n-1}$$

Diagram Pembentukan Isomorfisma Konjugasi

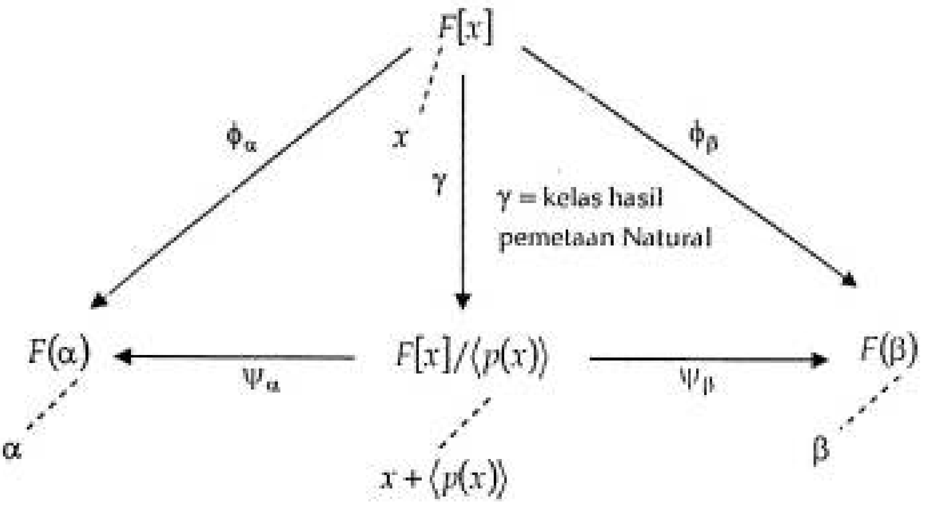

Diagram 4

Sumber: Buku [3] Hal 447

Proses pemetaan ini diperlihatkan pada *diagram* 4. Garis putus-putus menyatakan pengawanan elemen oleh pemetaan yang sesuai. Komposisi dari dua pemetaan isomorfisma juga merupakan pemetaan isomorfisma demikian juga untuk pemetaan $F(\alpha)$ pada $F(\beta)$ merupakan sebuah pemetaan isomorfisma. Dengan demikian $\psi_{\alpha,\beta}$ merupakan pemetaan yang sesuai pernyataan dalam teorema ini.

Akibat 10

Misalkan α aljabar atas F. Setiap ψ adalah isomorfisma yang memetakan $F(\alpha)$ pada sublapangan $\overline{F}$ sedemikian sehingga $\psi(a)=a$ untuk setiap $a\in F$ yang memetakan α pada sebuah konjugat β dari α atas F.

Sebaliknya untuk setiap konjugat β dari α atas F ,terdapat sebuah isomorfisma i$\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to \overline{F}$ yang memetakan α pada β dan memetakan setiap $a \in F$ dari teorema pada dirinya sendiri.

Bukti

Misalkan $\psi : F(\alpha) \to \overline{F}$ pemetaan isomorfisma sedemikian sehingga $\psi(a) = a$ untuk setiap $a \in F$.

Misalkan

$$irr(\alpha, F) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{62}$$

Jadi $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$ dengan demikian

$0 = \psi\left(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n\right) = a_0 + a_1\psi(\alpha) + \ldots + a_n\psi(\alpha)^n$ dan $\beta = \psi(\alpha)$ adalah konjugat dari α.

Sebaliknya untuk setiap konjugat β dari α atas F, jelas terdapat

Isomorfisma konjugasi $\psi_{\alpha,\beta}$ dari *teorema* 27 yaitu sebuah isomorfisma dengan sifat memetakan $F(\alpha)$ pada $F(\beta)$. Bahwa $\psi_{\alpha,\beta}$ satu-satunya pemetaan isomorfisma dari fakta bahwa sebuah isomorfisma pada $F(\alpha)$ adalah sama sekali ditentukan oleh nilai pada elemen di F dan hal itu merupakan nilai atas α.

Akibat 11

Misalkan $f(x) \in R[x]$. Jika $f(a + bi) = 0$ untuk $(a + bi) \in C$ dimana $a, b \in R$, maka juga $f(a - bi) = 0$, akar dari polinomial kompleks dengan koefisien riil terdapat dalam pasangan konjugasi.

Bukti

Akan diperlihatkan bahwa $C = R(i)$,

$$irr(i, R) = irr(-i.R) = x^2 + 1$$

Sehingga i dan $-i$ adalah konjugat atas R oleh *Teorema 27* pemetaan konjugasi $\psi_{i,-i}: C \to C$ diberikan oleh $\psi_{i,-i}:(a+bi) = a - bi$ adalah sebuah isomorphisma. Sehingga jika untuk $a_i \in R$

$$f(a+bi) = a_0 + a_1(a+bi) + \ldots + a_n(a+bi)^n = 0 \qquad (63)$$

maka

$$\begin{aligned} 0 = \psi_{i,-i}(f(a-bi)) &= a_0 + a_1(a-bi) + \ldots + a_n(a-bi)^n \\ &= f(a-bi) \end{aligned}$$

berarti $f(a-bi) = 0$.

Contoh 12

Diberikan $Q(\sqrt{2})$ atas Q . Akar dari $irr(\sqrt{2}, Q) = x^2 - 2$ adalah $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$ sehingga $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$ adalah konjugat atas Q. Menurut *Teorema 27* pemetaan $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : Q(\sqrt{2}) \to Q(\sqrt{2})$ didefinisikan oleh

$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : (a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, adalah sebuah isomorfisma dari $Q(\sqrt{2})$ ke dalam dirinya sendiri.

Dari *contoh 11* diatas diperoleh bahwa sebuah lapangan mungkin saja memiliki suatu pemetaan isomorfisma nontrivial yang memetakan elemen-elemen lapangan tersebut ke dalam dirinya sendiri.

Definisi 34

Sebuah pemetaan Isomorfisma dari sebuah lapangan pada dirinya sendiri merupakan lapangan automorfisma. [3]

Definisi 32

Jika σ adalah pemetaan isomorfisma dari lapangan E ke dalam suatu lapangan, maka sebuah elemen a dari E disebut *dibiarkan tetap* (Left Fixed) oleh σ, jika $\sigma(a) = a$. Misalkan S koleksi isomorfisma dari E *membiarkan* sebuah sublapangan

F dari E *tetap* jika setiap $a \in F$ *dibiarkan tetap* oleh setiap $\sigma \in S$. Jika $\{\sigma\}$ *membiarkan* F *tetap*, maka σ *membiarkan* F *tetap.* [3]

Contoh 13

Misalkan $E = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ pemetaan $\sigma : E \to E$ didefinisikan oleh $\sigma(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}) = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$ untuk $a, b, c, d \in Q$ merupakan sebuah automorfisma dari E dalam hal ini isomorfisma konjugasi $\psi_{\sqrt{3}, -\sqrt{3}}$ dari E ke dalam dirinya sendiri jika dapat diperlihatkan bahwa E sebagai $(Q[\sqrt{2}])[\sqrt{3}]$, diperoleh bahwa σ *membiarkan* $Q[\sqrt{2}]$ *tetap.*

Jika $\{\sigma_i | i \in I\}$ merupakan koleksi automorfisma dari lapangan E, elemen dari E $\{\sigma_i | i \in I\}$ paling tidak menyatakan bahwa $a \in E$ *dibiarkan tetap* oleh setiap σ_i untuk $i \in I$.

Teorema 28

Misalkan $\{\sigma_i | i \in I\}$ merupakan koleksi automorfisma dari sebuah lapangan E. maka himpunan $E_{\{\sigma_i\}}$ untuk setiap $a \in E$ *dibiarkan tetap* oleh setiap σ_i untuk $i \in I$ membentuk sublapangan dari E. [3]

Bukti

Jika $\sigma_i(a) = a$ dan $\sigma_i(b) = b$ untuk setiap $i \in I$

$$\sigma_i(a \pm b) = \sigma_i(a) \pm \sigma_i(b) = a \pm b \tag{64}$$

dan

$$\sigma_i(ab) = \sigma_i(a)\sigma_i(b) = ab \tag{65}$$

Untuk setiap $i \in I$. Juga $b \neq 0$, maka

$$\sigma_i(a / b) = \sigma_i(a) / \sigma_i(b) = a / b \tag{66}$$

Untuk setiap $i \in I$. Karena σ_i automorfisma , diperoleh

$\sigma_i = \sigma_i(0) = 0$ dan $\sigma_i = \sigma_i(1) = 1$ untuk setiap $i \in I$. Oleh karena $0,1 \in E_{\{\sigma_i\}}$, dengan demikian $E_{\{\sigma_i\}}$ sublapangan E.

Definisi 35

Lapangan $E_{\{\sigma_i\}}$ pada *teorema 28* disebut lapangan *tetap* dari $\{\sigma_i | i \in I\}$ untuk isomorfisma tunggal σ, diperoleh $E_{\{\sigma_i\}}$ adalah lapangan *tetap* dari σ. [3]

Contoh 14

Diberikan automorfisma $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ dari $Q(\sqrt{2})$ Dari *contoh 11*. Untuk $a, b \in Q$ diperoleh

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : (a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

Dan $(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ jika dan hanya jika $b = 0$ dengan demikian Q merupakan lapangan tertentu oleh $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$.

Dalam kenyataannya, sebuah automorfisma dari lapangan E adalah pemetaan satu-satu dari E kedalam E yang merupakan permutasi dari E. Jika σ dan τ adalah automorfisma dari E, maka $\sigma\tau$ juga permutasi dari automorfisma E.

Teorema 29

Himpunan semua automorfisma dari lapangan E adalah sebuah grup dibawah fungsi komposisi. [3]

Teorema 30

Misalkan E lapangan dan misalkan F sublapangan E, Maka himpunan $G(E/F)$ adalah himpunan semua automorfisma dari E yang *membiarkan F tetap* berbentuk sebuah subgrup dari grup semua automorfisma dari E. selanjutnya $F \leq E_{G(E/F)}$.

Bukti

Untuk $\sigma, \tau \in G(E/F)$ dan $a \in F$, diperoleh

$$(\sigma\tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \tau(a) = a$$

Jadi $\tau\sigma \in G(E/F)$, termasuk automorfisma identitas i dalam $G(E/F)$. Selain itu, jika $\sigma(a) = a$ untuk $a \in F$, maka $a = \sigma^{-1}(a)$ sehingga $\sigma \in G(E/F)$ mengakibatkan $\sigma^{-1} \in G(E/F)$. Dengan demikian $G(E/F)$ sebuah subgrup dari grup seluruh automorfisma dari F.

Karena setiap elemen dari F *dibiarkan tetap* terhadap setiap elemen dalam $G(E/F)$ berarti bahwa $E_{G(E/F)}$ merupakan lapangan dari seluruh elemen dari E yang *dibiarkan tetap* terhadap $G(E/F)$ yang memuat F.

Definisi 35

$G(E/F)$ adalah grup automorfisma E yang *membiarkan F tetap* atau grup dari E atas F. [3]

E/F dalam notasi $G(E/F)$ tidak hanya melambangkan sebuah ruang koesien tetapi juga berarti E merupakan lapangan perluasan dari F. ♦

BAB 4

TEOREMA PERLUASAN ISOMORFISMA DAN INDEKS LAPANGAN PERLUASAN

4.1 Teorema Perluasan Ishomorpisma

Sebagai perulangan dari *teorema 27*, jika $\alpha,\beta \in E$ adalah konjugat atas F maka terdapat sebuah pemetaan ishomorfisma $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$. Untuk $\alpha,\beta \in E$ berlaku $F(\alpha) \leq E$ dan $F(\beta) \leq E$. Dari pemetaan $\psi_{\alpha,\beta}$ diperoleh sebuah daerah domain $F(\alpha)$ yang dapat diperluas menjadi sebuah lapangan yang lebih besar dan mungkin juga untuk keseluruhan lapangan E.

Diagram 5 akan memperlihatkan proses ini secara sistematik

Diagram Pembentukan Isomorfisma Oleh
Perluasan Ishomorfisma Konjugasi

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{F} \arrow[d, dash] \\
E \arrow[r, "\tau = ?"] \arrow[d, dash] & E \arrow[d, dash] \\
F(\alpha) \arrow[r, "\psi_{\alpha,\beta}"] & F(\beta)
\end{tikzcd}
$$

Diagram 5

Sumber : Buku [3] Hal. 456

Dapat dilihat pada diagram 5 bahwa jika terdapat sebuah pemetaan isomorfisma pada E, misalkan dengan notasi τ, berarti pemetaan τ merupakan perluasan dari pemetaan $\psi_{\alpha,\beta}$. Sebagai pelengkap diberikan sebuah asumsi bahwa semua perluasan aljabar dari F termuat dalam suatu tutupan aljabar $\overline{F}$ dari F.

Dengan memperhatikan permasalahan ini secara umum, pandang E sebuah perluasan aljabar dari lapangan F. Sebuah isomorfisma σ di F pada lapangan F'

dan $\overline{F}'$ tutupan aljabar dari F'. Maka akan ditentukan suatu pemetaan τ dari E pada sublapangan F' sebagai perluasan pemetaan isomorfisma σ pada lapangan F dari E. Keadaan ini diperlihatkan pada diagram 6.

Diagram Pembentukan Isomorphisma Oleh Perluasan
Sebuah Ishomorfisma Pada Suatu Lapangan

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{F}' \arrow[d, dash] \\
E \arrow[r, "\tau = ?"] \arrow[d, dash] & \tau[E] \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, "\sigma"] & F'
\end{tikzcd}$$

Diagram 6

Sumber : Buku [3] Hal. 456

Dengan mencoba untuk memperluas pemetaan σ ke $F(\alpha)$, pilih $\alpha \in E$ yang tidak termuat di F. Jika

$$p(x) = irr(\alpha, F) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{67}$$

Misalkan β akar dalam $\overline{F'}$ dari

$$q(x) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \ldots + \sigma(a_n)x^n \tag{68}$$

Disini $q(x) \in F'[x]$. karena σ adalah isomorfisma dan diketahui bahwa $q(x)$ tak tereduksi di $F'[x]$. Dari alasan diatas maka $F(\alpha)$ dapat dipetakan secara isomorfisma pada $F'(\beta)$ sebagai suatu perluasan pemetaan σ yang memetakan elemen α pada elemen β.

Untuk $F(\alpha) = E$ maka proses ini jelas berlaku. Untuk $F(\alpha) \neq E$ maka akan dicari elemen lain di E tidak didalam $F(\alpha)$ dan proses ini dilanjutkan seperti pada pembentukan tutupan aljabar $\overline{F}$ dari lapangan F.

Karena lapangan E belum tentu sebuah lapangan perluasan berhingga, dalam proses ini perulangan dalam jumlah besar mungkin saja terjadi sehingga untuk mengatasinya dibutuhkan *Lemma Zorn*.

Teorema 31

Misalkan E sebuah perluasan aljabar dari sebuah lapangan F. Misalkan σ sebuah ishomorfisma dari F pada F', dan $\overline{F}'$ merupakan tutupan aljabar di F'; maka σ dapat diperluas menjadi isomorfisma τ dari E pada sublapangan di $\overline{F}'$ sehingga $\tau(a) = \sigma(a)$ untuk setiap $a \in F$.

Teorema ini biasa juga disebut teorema perluasan isomorfisma. Pembuktiannya akan akan dibahas khusus pada akhir bahagian ini.

Akibat 12

Jika E lapangan perluasan aljabar dari lapangan F, $E \leq \overline{F}'$ dan $\alpha, \beta \in E$ merupakan konjugat atas F, maka $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ seperti yang diberikan pada *teorema 28* dapat diperluas menjadi sebuah isomorfisma dari lapangan E ke dalam sebuah sublapangan $\overline{F}'$

Bukti

Bukti dari akibat ini sama dengan pembuktian *teorema 31*. Jika kita mengganti F dengan $F(\alpha)$, F' dengan $F(\beta)$ dan $\overline{F}'$ dengan $\overline{F}$.

Diagram Pembentukan Isomorfisma Oleh
elemen lapangan F *tetap*

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{F'} \arrow[d, dash] \\
\overline{F} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dash] & \tau\left[\overline{F}\right] \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, "i"] & F
\end{tikzcd}
$$

Diagram 7

Sumber : Buku [3] Hal. 456

Akibat 13

Misalkan $\overline{F}$ dan $\overline{F'}$ adalah dua tutupan aljabar di F, maka $\overline{F}$ isomorfik ke $\overline{F'}$ oleh isomorfisma yang *membiarkan* setiap elemen F *tetap.*

Bukti

Dari *teorema 31*, identitas isomorfisma dari F pada F dapat diperluas menjadi pemetaan isomorfisma τ yang memetakan $\overline{F}$ pada sublapangan $\overline{F'}$ di F seperti yang diperlihatkan oleh *diagram 7.* Cukup diperlihatkan bahwa τ adalah pemetaan pada $\overline{F'}$. Tetapi dalam *teorema 31* tersebut, pemetaan $\tau^{-1} : \tau\left[\overline{F}\right] \to \overline{F}$ dapat diperluas menjadi pemetaan isomorfisma $\overline{F'}$ pada sublapangan $\overline{F}$. Karena τ^{-1} selalu pada $\overline{F}$ dengan demikian haruslah $\tau\left[\overline{F}\right] = \overline{F'}$. ♦

4.2 Indeks Lapangan Perluasan

Dalam bagian ini akan ditentukan *Indeks* lapangan perluasan berhingga E dari lapangan F, yang diperoleh dari sejumlah pemetaan isomorfisma yang terdapat di E dari sublapangan $\overline{F}$ yang *membiarkan F tetap*.

Definisi 36

Misalkan E perluasan berhingga dari lapangan F. Jumlah isomorfisma di E oleh setiap elemen-elemen yang di*biarkan F tetap* sublapangan $\overline{F}$ adalah indeks $\{E:F\}$ dari E atas F. [3]

Contoh 15

Diberikan lapangan $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ yang diperoleh dari $(Q(\sqrt{3}))(\sqrt{2})$, dengan isomorfisma konjugasi $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ dari teorema 28 yang didefinisikan sebagai $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}:(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$ untuk $a,b\in Q(\sqrt{3})$ merupakan automorfisma dari $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ yang memiliki $Q(\sqrt{3})$ sebagai lapangan *tetap* dengan cara yang sama diperoleh $Q(\sqrt{2})$ sebagai sebuah lapangan *tetap* dari pemetaan automorfisma $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ di $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Karena hasil dari dua automorfisma juga merupakan automorphisma, dapat didefinisikan $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\ \psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ memindahkan $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$. Misalkan

$i =$ automorfisma identitas

$$\sigma_1=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} \tag{69}$$

$$\sigma_2=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}} \tag{70}$$

$$\sigma_3=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}} \tag{71}$$

Grup semua automorfisma dari $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ memiliki lapangan *tetap.*

Oleh *teorema 31* lapangan *tetap* ini harus memuat Q. Karena setiap automorfisma dari sebuah lapangan *membiarkan* elemen 1 dan karena itu sublapangan *tetap* prim $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ adalah basis untuk $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Karena $\sigma_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \sigma_1(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}$ dan $\sigma_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ maka Q jelas lapangan *tetap* dari $\{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $G = \{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ merupakan grup automorphisma dibawah perkalian grup tabel untuk G diberikan pada tabel 3 sebagai contoh

Grup Tabel Automorphisma untuk G

	i	σ_1	σ_2	σ_3
i	i	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	i	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	i	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	i

Tabel 3

Sumber : Buku [3] Hal 452

$$\sigma_1\sigma_3 = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\left(\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}\right) = \psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}} = \sigma_2 \tag{72}$$

Grup G isomorfik dengan grup-4 klein. Akan dibuktikan G grup.

1. operator perkalian terdefinisi dengan baik, persamaan 72 telah memperlihatkan hal ini. Juga dapat dilihat pada tabel 3, setiap perkalian elemen-elemen dlalam G akan menghasilkan sebuah elemen di G jadi perkalian di G tertutup.
2. terdapat $i \in G$ sebagai identitas terhadap perkalian sehingga $i\sigma_j = \sigma_j$ untuk $j = 1,..3$.

3. terdapat elemen invers di G hal ini diperlihatkan dalam tabel 3 bahwa setiap elemen-elemen di G dicerminkan oleh diagonal utama i sebgai contoh $\sigma_2\sigma_2 = i$ berarti $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$
4. akan dibuktikan Assosiatif berlaku di G. Untuk $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G$

   $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = \sigma_1\sigma_1 = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$ sifat Assosiatif berlaku untuk G.

Dapat diperlihatkan bahwa G adalah grup $G(Q(\sqrt{2},\sqrt{3})/Q)$. Karena setiap automorfisma τ dari $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ memetakan $\sqrt{2}$ pada $\pm\sqrt{2}$ lainnya oleh *akibat* 1 0 dari *teorema 27*.

Dengan cara yang sama τ memetakan $\sqrt{3}$ pada $\pm\sqrt{3}$ yang lain . tetapi karena $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\}$ adalah basis untuk $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ atas Q, sebuah automorphisma dari $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ *membiarkan* Q *tetap* yang ditentukan oleh nilai $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$. $i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ memberikan semua kemungkinan kombinasi dari nilai $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$, dan oleh karena itu semua automorfisma yang mungkin dari $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ $G(Q(\sqrt{2},\sqrt{3})/Q)$ mempunyai orde 4, dan $[Q(\sqrt{2},\sqrt{3}):Q] = 4$.

Teorema berikut memberikan langkah awal yang besar dalam pembuktian ini. Kita nyatakan teorema ini dalam pengertian yang umum untuk digunakan tetapi belum cukup untuk menguatkan pengertian kita.

Teorema 32

Misalkan E lapangan perluasan berhingga dari lapangan F, misalkan σ isomorfisma dari F pada lapangan F', dan misalkan $\overline{F'}$ tutupan aljabar di F'. Maka jumlah perluasan pemetaan σ menjadi pemetaan isomorfisma τ di lapangan E pada sublapangan $\overline{F'}$ adalah berhingga dan tidak bergantung terhadap F', $\overline{F'}$, dan σ. Banyaknya perluasan isomorfisma pada hakekatnya ditentukan oleh dua lapangan E dan F.

Diagram Pembentukan Indeks pada Lapangan Perluasan

$$\begin{tikzcd}
\overline{F_1'} \arrow[rr, "\lambda", "\text{Perluasan } \sigma_2\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & & \overline{F_2'} \arrow[d, dash] \\
\tau_1[E] \arrow[d, dash] & E \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, dash] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\tau_2(\alpha)=(\lambda\tau_1)(\alpha)"] & \tau_2[E] \arrow[d, dash] \\
F'_1 & F \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & F'_2
\end{tikzcd}$$

Diagram 8

Sumber : Buku [3] Hal. 459

Bukti

Diagram 8 mungkin dapat membantu mengikuti proses pembentukan yang hendak kita kerjakan. Diperlihatkan petunjuk dalam pembentukan dua isomorfisma

$$\sigma_1 : F \xrightarrow{Pada} F_1' \quad , \quad \sigma_2 : F \xrightarrow{Pada} F_2'$$

Dimana $\overline{F_1'}$ dan $\overline{F_2'}$ adalah tutupan aljabar F_1' dan F_2', selanjutnya $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ adalah isomorfisma dari F_1' pada F_2' sehingga oleh teorema perluasan isomorfisma dan kedua akibatnya, maka terdapat isomorfisma

$$\lambda : \overline{F_1'} \xrightarrow{Pada} \overline{F_2'}$$

Sebagai perluasan isomorfisma $\sigma_2\sigma_1^{-1} : F' \xrightarrow{Pada} F_2'$. Mengacu pada diagram 8 memperlihatkan hubungan masing-masing $\tau_1 : E \to \overline{F_1'}$ yang memperluas σ_1, ditentukan sebuah isomorfisma $\tau_2 : E \to \overline{F_2'}$.

Memulai di E kemudian menuju ke kiri, selanjutnya keatas dan kemudian ke kanan.

Hingga diperoleh suatu persamaan

$$\tau_2(\alpha)=(\lambda\tau_1)(\alpha) \tag{73}$$

Untuk $\alpha \in E$, jelasnya τ_2 memperluas σ_2 dari fakta ini kita dapat mengawali dari τ_2 dan mendefinisikan τ_1 sebagai

$$\tau_1(\alpha)=(\lambda^{-1}\tau_2)(\alpha) \tag{74}$$

Dengan mencari jalan yang lain disepanjang diagram yang menunjukkan bahwa hubungan antara $\tau_1 : E \to \overline{F_1}'$ dan $\tau_2 : E \to \overline{F_2}'$ dalam korespondensi satu-satu. Jumlah τ memperluas σ tidak bergantung dari F' $\overline{F}'$ dan σ.

Jumlah perluasan pemetaan σ adalah terbatas mengikuti kenyataan bahwa E merupakan perluasan terbatas dari F, $E=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ untuk suatu $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ di E, berdasarkan *teorema* 23 disini terdapat jumlah berhingga calon yang mungkin untuk suatu image $\tau(\alpha_i)$ pada F'. Jika untuk

$$irr(\alpha_i, F)=a_{i0}+a_{i1}x+\ldots+a_{im_i}x^{m_i} \tag{75}$$

Dimana $a_{ik} \in F$, dengan demikian $\tau(\alpha_i)$ harus merupakan satu-satunya akar dari $\overline{F}'$ dengan

$$\left[\sigma(a_{i0})+\sigma(a_{i1})x+\ldots+\sigma(a_{im_i})x^{m_i}\right] \in F'[x]$$

Akibat 1 3

Jika $F \le E \le K$, dimana K sebuah perluasan berhingga disebuah lapangan F, maka $\{K:F\}=\{K:E\}\{E:F\}$. [3]

Bukti

Sesuai dari *teorema* 32 dimana setiap $\{E:F\}$ merupakan isomorfisma τ dari E pada sublapangan F yang *membiarkan* F *tetap* akan mempunyai perluasan $\{K:E\}$ untuk sebuah isomorfisma dari K pada sublapanga $\overline{F}$.

Pembuktian Teorema Perluasan Isomorfisma

Kita menyatakan kembali Teorema Perluasan Isomorfisma

Misalkan E perluasan aljabar dari lapangan F. Misalkan σ isomorfisma dari F pada F', dan $\overline{F}'$ tutupan aljabar di F', maka σ dapat diperluas menjadi isomorfisma τ dari E pada sublapangan $\overline{F}'$ sehingga $\tau(a)=\sigma(a)$ untuk setiap $a \in F$.

Bukti

Perhatikan seluruh pasangan (L,λ) dimana L adalah lapangan sedemikain sehingga $F \leq L \leq K$ dan λ adalah isomorfisma dari L pada sublapangan $\overline{F'}$ dimana $\lambda(a)=\sigma(a)$ untuk $a \in F$. Himpunan S dari setiap pasangan (L,λ) adalah takkosong karena (F,σ) adalah pasangan. Didefinisikan sebuah urutan parsial pada S dengan $(L_1,\lambda_1) \leq (L_2,\lambda_2)$, jika $L_1 \leq L_2$ dan $\lambda_1(a)=\lambda_2(a)$ untuk $a \in L$ dapat dilihat bahwa relasi $\leq$ memberikan suatu urutan parsial dari S.

Misalkan $T=\{(H_1,\lambda_1) | i \in I\}$ sebuah rantai dari S, diberikan $H=\bigcup_{i\in I} H_i$ adalah sublapangan dari E. misalkan $a,b \in H$, dimana $a \in H_1$ dan $b \in H_2$ maka salah satu dari $H_1 \leq H_2$ atau $H_2 \leq H_1$, karena T merupakan sebuah rantai. Jika katakanlah, $H_1 \leq H_2$, maka $a,b \in H_2$ sehingga $a \pm b, ab$ dan a/b untuk $b \neq 0$ semua di H_2 dan dengan demikian juga berada di H karena untuk setiap $i \in I$, $F \subseteq H_i \subseteq E$ kita peroleh $F \subseteq H \subseteq E$ jadi H sublapangan dari E.

Didefenisikan $\lambda : H \rightarrow \overline{F'}$. Misalkan $c \in H$ maka $c \in H_i$ untuk suatu $i \in I$ dan misalkan

$$\lambda\ (c) = \lambda_i(c) \tag{76}$$

Pemetaan λ adalah terdefenisi dengan baik, karena jika $c \in H_1$ dan $c \in H_2$ maka salah satu dari $(H_1, \lambda_1) \leq (H_2, \lambda_2)$ atau $(H_2, \lambda_2) \leq (H_1, \lambda_1)$ karena T adalah rantai. dalam kasus lain, $\lambda_1(c) = \lambda_2(c)$. diklaim bahwa λ adalah isomorfisma dari H pada sublapangan $\overline{F'}$. Jika $a, b \in H$ maka terdapat suatu H_i sedemikian sehingga $a, b \in H_i$ dan

$$\lambda(a+b) = \lambda_i(a+b) = \lambda_i(a) + \lambda_i(b) \tag{77}$$

Sama juga untuk

$$\lambda(ab) = \lambda_i(ab) = \lambda_i(a)\lambda_i(b) = \lambda(a)\lambda(b) \tag{78}$$

Jika $\lambda(a) = 0$, maka $a \in H_i$ untuk suatu i yang mengakibatkan bahwa $\lambda_i(a) = 0$, sehingga $a = 0$. Oleh karena itu λ adalah sebuah isomorfisma dengan demikian $(H, \lambda) \in S$ dan hal ini jelas dari defenisi kita bahwa di H dan λ dimana (H, λ) sebuah batas atas *(upper bound)* dari T.

Kita telah menunjukkan bahwa setiap rantai di S mempunyai batas atas di S sehingga hipotesis pada *lemma Zorn's* selalu berlaku. Oleh karena itu maka terdapat sebuah elemen maksimum (K, τ) di S. Misalkan $\tau(K) = K'$, dimana $K' \leq \overline{F'}$. Sekarang jika $K \neq E$, misalkan $\alpha \in E$ tetapi $\alpha \notin K$. sekarang α elemen aljabar atas F akibatnya α juga aljabar atas K. juga, misalkan $p(x) = irr(\alpha, K)$. Misalkan ψ_α adalah isomorfisma natural

$$\psi_\alpha : K[x]/\langle p(x)\rangle \to K(\alpha),$$

Saling berhubungan untuk homomorfisma evaluasi $\phi_\alpha : K[x] \to K(\alpha)$ jika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

Perhatikan

$$q(x) = \tau(a_0) + \tau(a_1)x + \dots + \tau(a_n)x^n$$

dalam $K'[x]$. Karena τ isomorfisma, $q(x)$ taktereduksi dalam $K'[x]$ karena $K' \le F'$, terdapat sebuah akar α' dari $q(x)$ pada $\overline{F'}$.

Misalkan

$$\psi_{\alpha'} : K'[x]/\langle q(x)\rangle \to K'(\alpha')$$

Diagram Pembentukan Isomorfisma pada
Teorema Perluasan Isomorfisma

$$\begin{tikzcd}
 & & K[x] \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, dash] \arrow[ddl, "\substack{\textit{kanonik}\\ \gamma}"'] & K'[x] \arrow[d, dash] \arrow[ddr, "\substack{\textit{kanonik}\\ \gamma'}"] & & \\
 & & K \arrow[r, "\tau"] & K' & & \\
K(\alpha) & K[x]/\langle p(x)\rangle \arrow[l, "\psi_\alpha"'] \arrow[rrr, "\bar{\tau}", "\bar{\tau} = \gamma'\tau_x\gamma^{-1}"'] & & & K'[x]/\langle q(x)\rangle \arrow[r, "\psi_{\alpha'}"] & K'(\alpha')
\end{tikzcd}$$

Diagram 9

Sumber : Buku [3] Hal. 462

Merupakan suatu isomorfisma seperti pada ψ_α. Pada akhirnya, misalkan

$$\bar{\tau} : K[x]/\langle p(x)\rangle \to K'[x]/\langle q(x)\rangle$$

Merupakan suatu perluasan isomorfisma τ dari K dan memetakan $x + \langle p(x)\rangle$ pada $x + \langle q(x)\rangle$ diperlihatkan pada gambar 9 maka komposisi pemetaan

$$\psi_{\alpha'}\bar{\tau}\psi_\alpha^{-1} : K(\alpha) \to K'(\alpha')$$

adalah isomorfisma dari $K(\alpha)$ pada sublapangan $\overline{F}$. Secara jelas $(K,\tau)<\left(K(\alpha),\psi_\alpha,\bar{\tau}\psi_\alpha^{-1}\right)$ yang mana kontradiksi dengan (K,τ) maksimum. Dengan demikian harus dimiliki $K=E$. ♦

BAB 5

KESIMPULAN

Setelah menelaah tulisan ini, beberapa hal yang perlu digaris bawahi dengan maksud untuk lebih mendalami tulisan ini. Hal tersebut terangkum dalam kesimpulan sebagai berikut :

1. Pemetaan $\psi_{\alpha,\beta}$ sesungguhnya dapat diperluas menjadi pemetaan isomorfisma dari E pada sublapangan $\overline{F}$ yang pada akhirnya menghasilkan suatu pemetaan elemen-elemen dari E pada dirinya sendiri (automorfisma).

2. Penggunaan teorema perluasan isomorfisma yang dihubungkan dengan isomorfisma konjugasi $\psi_{\alpha,\beta}$ akan menjamin keberadaan beberapa pemetaan isomorfisma paling tidak untuk beberapa lapangan.

3. Tutupan aljabar $\overline{F}$ atas F adalah tunggal (unique) yang diperoleh dari pemetaan isomorfisma yang *membiarkan F tetap.*

4. Indeks dari sebuah lapangan perluasan aljabar adalah jumlah berhingga pemetaan-pemetaan isomorfisma hingga mendapatkan suatu pemetaan automorfisma dalam lapangan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bhattacharya, P. B., Jain, S. K. and Nagpaul, S. R., *Basic Abstract Algebra. 2nd Edition*, Cambridge University Press. 1994.

[2] Ehrlich gertrude, *Fundamental Consept of Abstract Algebra*, PWS-KENT Publishing Company, 1991.

[3] Fraleigh, Jhon B, *A First Course in Abstract Algebra* Fifth Edition, Addison-Wasley Publishing Company,1997.

[4] Rasinghania M.D dan Anggerwal R.S, *Modern Algebra* for Post graduate student of indian universities, S. CHAND and COMPANY LTD, 1980.

[5] Surjeet singh dan Qazi Zameeruddin, *Modern Algebra Second Revised and Enlarged Edition*, Vikas Publishing House PVT LTD, 1975.