

ANALISIS KESTABILAN LIMIT CYCLE UNTUK MODEL

SATU MANGSA SATU PEMANGSA



PERPUSTAKAAN	UNIVERSITAS HASANUDDIN
Tgl. Terima	21-10-2003
Asal Dari	Fak. MIPA
Banyaknya	1 (satu) eksemplar
Harga	Horseshoe
No. Inventaris	031021185
	16949

OLEH

PATRAHYUNA SUHATSA MALLEWAI

H 111 98 035

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2003

**ANALISIS KESTABILAN LIMIT CYCLE UNTUK MODEL
SATU MANGSA SATU PEMANGSA**

SKRIPSI

*Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat dalam
memperoleh gelar sarjana matematika*

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2003**

ANALISIS KESTABILAN LIMIT CYCLE UNTUK MODEL

SATU MANGSA SATU PEMANGSA



Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama

Drs. Syamsuddin Toaha, M. Sc
NIP. 132 126 028

Pembimbing Pertama

Mawardi, S. Si, M. Si
NIP. 132 205 479

Pada Tanggal, Oktober 2003

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur dipanjatkan kehadirat Ilahi atas segala nikmat, rahmat dan hidayah-Nya karena dalam menjalankan kehidupan ini terasa sangat berarti petunjuk, pertolongan serta kesehatan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Salam serta shalawat semoga tetap tercurah kepada **Nabi Muhammad SAW** pemberi syafaat yang maha sempurna akhlaknya.

Penulis menyadari bahwa sejak penyusunan proposal sampai skripsi ini banyak hambatan, rintangan dan halangan namun berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak semua ini dapat teratasi dengan baik.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca demi kesempurnaan skripsi ini.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan penghargaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada **Ayahanda Almarhum Abd. Kadir Wahid** dan **Ibunda Almarhumah Suparsih** yang hanya sekejap melahirkan dan membesarkanku dengan iringan doa-doa mereka demi keberhasilan pendidikan penulis, saudara-saudaraku **Ikhsan Kauzar M, Istiati Hatma M.,Spd, Hairiah Fitri M, dan Afif Agung M** terima kasih atas segala pengorbanan, kesabaran, dan pengertiannya serta bantuan moril dan materil sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan.

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Drs. Syamsuddin Toaha, M.Sc** dan Bapak **Mawardi, S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang penuh kesabaran, kesungguhan dan kebaikan hatinya yang telah banyak memberikan petunjuk serta bimbingan sehingga kesulitan penulis dapat teratasi sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak **Drs. Nirwan Ilyas, M.Si** dan Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan dan Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, para Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak **Pimpinan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta stafnya.
4. Ibu **Naimah Aris, S.Si** dan Bapak **DR. Moch Ivan Azis, M.Sc** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya kepada penulis selama perkuliahan.
5. Keluargaku yang tercinta **H. Jadjang Wahid, H. Zahrah Wahid dan H. Maryam Wahid** yang selalu senantiasa mendoakan dengan tulus, ikhlas dan sabar merelakan segalanya demi keberhasilan pendidikan penulis. Keluarga **La Boena dan Umiyati, Keluarga Nono. S, Keluarga Santika, Nenekku yang tercinta Mimih, Keluarga Almarhum H. Anis Kasim, Yusuf, Ceceng,**

Erah, Nico'x, Elly dan Suhair yang telah banyak memberikan bantuan moril dan materil bagi penulis selama menempuh pendidikan.

6. Rekan Angkatan'98 **Obi, Dalmi, Nanni, Ikas, ida, nita, rini, ocha, ical, anca, emha, eva, nanna, yuni, ode, iwan, ibhe, zule, azis, edy, luky, adi, asly, hendra, darnah** dan seluruh mahasiswa Angkatan'98 yang tidak sempat disebut satu persatu, **adikku muha', mail, niar, tris, niswar, jamil** dan seluruh Angkatan '99 dan angkatan '00.
7. Sahabatku **Robiatul Adawiyah, almarhum Aspiah Basir, Rumiak, Dalmi** dan **Asniah** yang telah memberikan bantuan dorongan spiritual, dukungan dan kebersamaannya melalui fase kehidupan kampus dan kegiatan lainnya maupun dalam penulisan skripsi.

Semoga segenap bantuan dan partisifasinya bernilai ibadah dan mendapat pahala yang setimpal di sisi Allah, swt. Akhirnya semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang memburuhkannya serta bernilai ibadah disisi Allah swt, Amin.

Makassar, Oktober 2003

Penulis

ABSTRAK

Model satu mangsa satu pemangsa merupakan salah satu model dinamika populasi yang dibentuk berdasarkan tingkat kelahiran mangsa, tingkat penyerangan pemangsa, tingkat pertumbuhan populasi pemangsa, daya dukung lingkungan. Tulisan ini membahas keberadaan suatu limit cycle pada model satu mangsa satu pemangsa. Metode yang digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model tersebut adalah metode pelinearan dengan menggunakan matriks Jacobi dan untuk menentukan stabil atau tidaknya titik kesetimbangan tersebut ditentukan oleh nilai-nilai Eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik matriks Jacobi. Dari analisis kestabilan titik kesetimbangan diperoleh bahwa limit cycle tersebut mungkin stabil mungkin juga tidak stabil, bergantung pada nilai parameter dari model dan nilai awal dari populasi mangsa dan pemangsa.

ABSTRACT

Model of one prey – one predator is a model of dynamical population forming based on birth rate of prey, attack rate of predator, growth rate of both prey and predator and carrying capacity of their habitat. We show the existence of a limit cycle of the prey – predator model. Method using to analyze the stability of equilibrium point of the model is linearisation method using Jacobian matrix and to determine whether the equilibrium point is stable or not by investigating Eigenvalues of characteristic equation. From the stability analysis of the equilibrium points, we found that the limit cycle may be stable or also unstable, depend on the value of parameters of the model and the initial value of prey-predator populations.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGESAHAN	
KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR SIMBOL	vii
BAB I. PENDAHULUAN	
I.1 Latar Belakang Masalah.....	1
I.2 Tujuan Penulisan.....	2
I.3 Rumusan Masalah.....	2
I.4 Tinjauan Pustaka.....	3
I.5 Sistematika Pembahasan.....	4
BAB II. TEORI PENDUKUNG	
II.1 Kestabilan Solusi Periodik.....	5
II.2 Teorema Kolmogrov.....	5

II.3 Titik Keseimbangan Dan Trajektori Pada Sistem Persamaan Linear.....	6
II.4 Solusi Periodik Dan Limit Cycle.....	23
II.5 Kestabilan Sistem Linear.....	32
II.6 Kestabilan Sistem Non Linear.....	38

**BAB III. ANALISIS KESTABILAN LIMIT CYCLE UNTUK MODEL
SATU MANGSA SATU PEMANGSA**

III.1 Pembentukan Limit Cycle Untuk Model Satu Mangsa Satu Pemangsa.....	41
III.2 Penentuan Titik Keseimbangan.....	44
III.3 Analisis Kestabilan Limit Cycle.....	45
III.4 Interpretasi Model Dan Pembahasan.....	55

BAB IV. PENUTUP

IV.1 Kesimpulan.....	56
IV.2 Saran.....	58

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
λ	Lambda
\forall	Untuk setiap
\exists	Terdapat
ω	Omega
α	Alfa
β	Beta
π	Phi
ε	Epsilon
δ	Delta
∞	Tak Berhingga
\leq	Lebih Kecil Atau sama
\geq	Lebih besar atau sama
\rightarrow	Mendekati
J	Matriks Jacobi
∂	Do

BAB I

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Semua makhluk hidup di dunia saling berinteraksi antara spesies yang satu dengan spesies yang lain. Baik itu antara spesies yang sejenis maupun yang tak sejenis. Interaksi antara dua spesies tersebut ada yang bersifat negatif dan ada pula yang bersifat positif. Interaksi yang negatif cenderung mengurangi populasi yang telah berinteraksi dalam jangka waktu yang lama menyebabkan spesies yang satu tidak memusnahkan spesies yang lain.

Interaksi antar spesies dapat dibentuk ke dalam persamaan sederhana disekitar titik kesetimbangan pada matriks komunitas. Dimana Persamaan sederhana tersebut merupakan persamaan Lotka Volterra. Persamaan Lotka Volterra tersebut kita batasi untuk tingkat kelahiran mangsa, tingkat penyerangan pemangsa dan tingkat pertumbuhan populasi pemangsa dengan realistik (kenyataan) yang ada. Untuk memperoleh kepadatan kestabilan tak bebas dalam interaksi antar spesies diperlukan limit cycle. Maka penulis merasa tertarik untuk menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul:

***“Analisis Kestabilan Limit Cycles Untuk Model Satu Mangsa
Satu Pemangsa”***

2. Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan yaitu :

1. Menganalisis kestabilan *limit cycles* untuk model satu pemangsa satu mangsa.
2. Interpretasi model terhadap solusi yang diperoleh.

3. Rumusan Masalah

Akan ditinjau dari satu model sederhana yaitu model satu mangsa satu pemangsa yang berbentuk :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H(rHK - rH^2 + rKD - rHD - kKP)}{K(H + D)}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(s\gamma H - sP)}{\gamma H}$$

dimana

\dot{H} adalah laju pertumbuhan populasi mangsa (prey) terhadap waktu

\dot{P} adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa (predator) terhadap waktu

r adalah nilai intrinsik pada penambahan populasi mangsa

H adalah spesies mangsa (prey)

P adalah spesies pemangsa (predator)

s adalah nilai intrinsik pada penambahan populasi pemangsa

K adalah kapasitas bawaan pada populasi mangsa

k adalah kepadatan populasi pemangsa

γ adalah pertumbuhan populasi pemangsa yang makan mangsa

dimana $H, P, D, r, s, K, k, \gamma > 0$.

4. Tinjauan Pustaka

Secara garis besar yang dijadikan sebagai materi dasar yang mana merupakan pendukung dari tugas akhir ini adalah:

- Kestabilan Solusi Periodik
- Teorema Kolmogrov
- Titik Kesetimbangan dan Trajektori Pada Sistem Persamaan Linear
- Solusi Periodik dan Limit Cycle
- Kestabilan Sistem Linear
- Kestabilan Sistem Non Linear

5. Sistematika Pembahasan

Secara garis besar sistematika pembahasan di bagi menjadi:

- Bab I membahas latar belakang masalah, tujuan penulisan, tinjauan pustaka rumusan masalah serta sistematika pembahasan.
- Bab II berisi teori pendukung yang di dalamnya membahas kestabilan solusi periodik, teorema Kolmogrov, titik kesetimbangan dan trajektori pada sistem persamaan linear, solusi periodik dan limit cycle, kestabilan sistem linear, kestabilan sistem non linear.

- Bab III membahas pembentukan limit cycle untuk model satu mangsa satu pemangsa, penentuan titik kesetimbangan, Analisis kestabilan limit cycle, dan interpretasi model dan pembahasan.
- Bab IV membahas kesimpulan dan saran.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

II.1 Kestabilan Solusi Periodik

Perhatikan sistem persamaan linier berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.1.1)}$$

dimana a, b, c, d konstan

Dalam notasi vektor persamaan (II.1.1) dapat ditulis sebagai :

$$\dot{X} = AX \quad \dots \text{ (II.1.2)}$$

$$\text{dimana } \dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (II.1.3)}$$

Teorema II.1.1

Syarat cukup dan syarat perlu sistem (II.1.1) memuat solusi periodik tidak nol pada periodik ω adalah $I - e^{A\omega}$ singular. Di mana I adalah matriks identitas.

Setiap solusi periodik pada persamaan (II.1.2) ditunjukkan sebagai solusi kurva tertutup. Solusi kurva tertutup disebut juga *Limit Cycles*.

II.2 Teorema Kolmogrov

Kolmogrov menuliskan persamaan satu mangsa satu pemangsa sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= HF(H,P) \\ \frac{dP}{dt} &= PG(H,P) \end{aligned} \quad \dots \text{ (II.2.1)}$$

F dan G merupakan fungsi kontinu pada H dan P dengan domain asal kontinu $H \geq 0$ dan $P \geq 0$ dan bahwa:

1. $\frac{\partial F}{\partial P} < 0$
2. $\frac{\partial G}{\partial H} > 0$
3. $\frac{\partial G}{\partial P} < 0$
4. $\frac{\partial F}{\partial H} < 0$ (equivalen dengan $C > B$)
5. $F(0, A) > 0$ untuk suatu $A > 0$
6. $F(B, 0) = 0$ untuk suatu $B > 0$
7. $F(C, 0) = 0$ untuk suatu $C > 0$

Di mana A adalah populasi pemangsa dalam jumlah tertentu dan B, C adalah populasi mangsa dalam jumlah tertentu. Maka persamaan II.2.1 mempunyai limit cycle.

II.3 Titik Keseimbangan Dan Trajektori Pada Sistem Persamaan Linear

Dalam bagian ini akan dibahas kemungkinan bentuk trajektori pada persamaan:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + ey\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.3.1)}$$

di mana a, b, c, e adalah konstan real dan $ae - bc \neq 0$. Adapun persamaan bidang fasenya yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey}{ax + by} \quad \dots \text{ (II.3.2)}$$

Pada persekitaran di titik kesetimbangan $(0,0)$. Yang mana $ae - bc \neq 0$ untuk setiap titik pada garis $ae - bc = 0$ merupakan titik kesetimbangan pada persamaan (II.3.1) dan diasumsikan bahwa titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak dapat dipisahkan. Untuk melihat asumsi tersebut pada batas tertentu di mana $a \neq 0$, perhatikan sistem

$$\begin{aligned}ax + by &= 0 \\ cx + ey &= 0\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.3.3)}$$

Jika c pada persamaan II.3.2 merupakan pengurangan dari kedua a yang memuat $(ae - bc)y = 0$. Oleh karena itu persamaan II.3.2 ekuivalen dengan persamaan

$$\begin{aligned}ax + by &= 0 \\ (ae - bc)y &= 0\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.3.4)}$$

Jika $ae - bc \neq 0$ adalah solusi dari persamaan II.3.3 dan menurut persamaan II.3.3 di mana $x = y = 0$ dan $(0,0)$ merupakan titik kesetimbangan dari persamaan II.3.1. Jika $ae - bc = 0$ maka persamaan II.3.2 dan persamaan tunggal $ax + by = 0$ mempunyai solusi yang sama. Setiap titik pada garis $ax + by = 0$ merupakan titik kesetimbangan dari persamaan II.3.1 dan II.3.2. Untuk menyelesaikan persamaan



II.3.1 diasumsikan bahwa $x = Ae^{mt}$ dan $y = Be^{mt}$ dan disubsitusi ke persamaan

II.3.1 dan diperoleh suatu persamaan karakteristik yaitu:

$$\begin{vmatrix} m-a & -b \\ -c & m-e \end{vmatrix} = m^2 - (a+e)m + ae - bc = 0 \dots (II.3.5)$$

Akar pada persamaan II.3.5 ditentukan dari bentuk penyelesaian untuk x dan y dan perputarannya ditentukan dari jenis trajektori pada persamaan II.3.1 dan II.3.2. Ada 3 kasus yang perlu diperhatikan pada saat persamaan II.3.5 memuat diskriminan yaitu:

$$\Delta = (a+e)^2 - 4(ae-bc)$$

dimana $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ atau $\Delta = 0$. Pada saat akar dari persamaan II.3.5 real dan tidak sama maka trajektorinya berbeda pada saat akarnya bertanda sama dengan akarnya berbeda tanda. Apabila akarnya kompleks berarti bentuk dari trajektori berbeda pada saat akarnya imajiner murni dengan bukan imajiner. Hal tersebut diuraikan dalam tabel 1. Batas akar dari persamaan $ae - bc$ dalam persamaan karakteristik II.3.5 adalah sama dengan hasil kali dari akarnya. Oleh karena itu akarnya akan bertanda sama ketika $ae - bc > 0$ dan berbeda tanda ketika $ae - bc < 0$. Persamaan karakteristik pada saat $ae - bc \neq 0$ tidak akan pernah mempunyai akar nol.

Tabel 1:

Jenis dari akar karakteristik	Kondisi pada koefisien dalam persamaan karakteristik
1. Real, tidak sama, dan bertanda sama	$\Delta > 0, a e - b c > 0$
2. Real, tidak sama dan berbeda tanda	$\Delta > 0, a e - b c < 0$
3. a. Real dan sama b. real dan sama	$\Delta = 0, b, c \neq 0$ $\Delta = 0, b = c = 0 (a = e)$
4. Imajiner murni	$\Delta < 0, a - e = 0 (a e - b c > 0)$
5. Kompleks tetapi bukan imajiner murni	$\Delta < 0, a + e \neq 0$

Kasus1:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p x \\ \frac{dy}{dt} &= 2 p x \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.6)}$$

di mana $a = p, b = c = 0, e = 2 p$ dan

$$\Delta = (a - e)^2 - 4(a e - b c) = (p + 2 p)^2 - 4(2 p^2 - 0) = 9 p^2 - 8 p^2 = p^2 > 0$$

Akar karakteristik dari persamaan II.3.6 adalah p dan $2 p$ yang merupakan real, tidak sama dan bertanda sama. Maka persamaan bidang fasenya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

yang mempunyai solusi yaitu:

$$y = kx^2 \quad \dots \text{ (II.3.7)}$$

persamaan II.3.7 merupakan parabola dengan garis $y = 0$ pada titik kesetimbangan $(0,0)$ dan $x = 0$ sebagai axis. Jika persamaan parametrik pada trajektori ditentukan dengan menyelesaikan x dan y pada persamaan II.3.6 sehingga diperoleh:

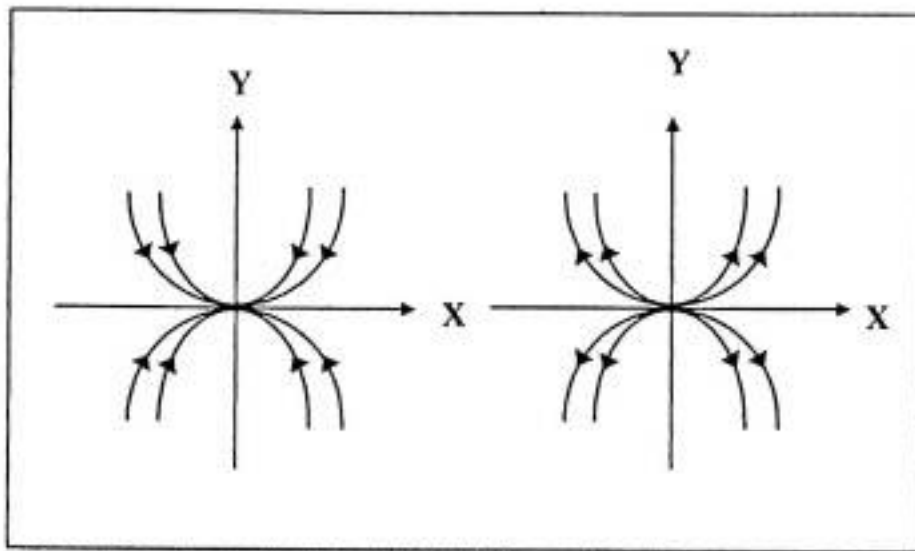
$$x = Ae^{pt} \quad \text{dan} \quad y = Be^{2pt} \quad \dots \text{ (II.3.8)}$$

Dari persamaan II.3.8 pada saat $t \rightarrow \infty$ untuk setiap trajektori yang setengah terbuka pada garis $y = 0$ yang berkorespondensi dengan $A = 0$ maka $p > 0$ akan kembali ke titik kesetimbangan dan jika $p < 0$ akan mendekati titik kesetimbangan pada arah yang terdefinisi dengan baik. Gambar 1 menunjukkan bentuk dari trajektori pada saat $p > 0$ maka kedua akarnya positif dan pada saat $p < 0$ maka kedua akarnya akan negatif yang arah anak panahnya pada masing-masing trajektori merupakan kebalikannya.

Dalam kasus ini bentuk trajektori sangat penting di sekitar titik kesetimbangan yang merupakan persekitaran pada titik kesetimbangannya sedemikian sehingga semua trajektorinya berada pada salah satu persekitarannya:

1. Mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$
2. Mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow -\infty$

Suatu trajektori di sekitar titik kesetimbangan yang mempunyai sifat di atas disebut *node point* (*titik simpul*).



Gambar 1. Trajektori Di Sekitar Node Point Pada Persamaan II.3.6

Kasus 2:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px \\ \frac{dy}{dt} &= -py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.9)}$$

di mana $a = p$, $b = c = 0$, $e = -p$ dan

$$\Delta = (a + e)^2 - 4(ae - bc) = (p - p)^2 - 4(-p^2 - 0) = 0 + 4p^2 = 4p^2 > 0$$

Akar karakteristik dari persamaan II.3.9 adalah p dan $-p$ yang merupakan real tidak sama dan berbeda tanda. Maka persamaan bidang fasenya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

yang mempunyai solusi yaitu:

$$xy = k \quad k \text{ konstan} \quad \dots \text{(II.3.10)}$$

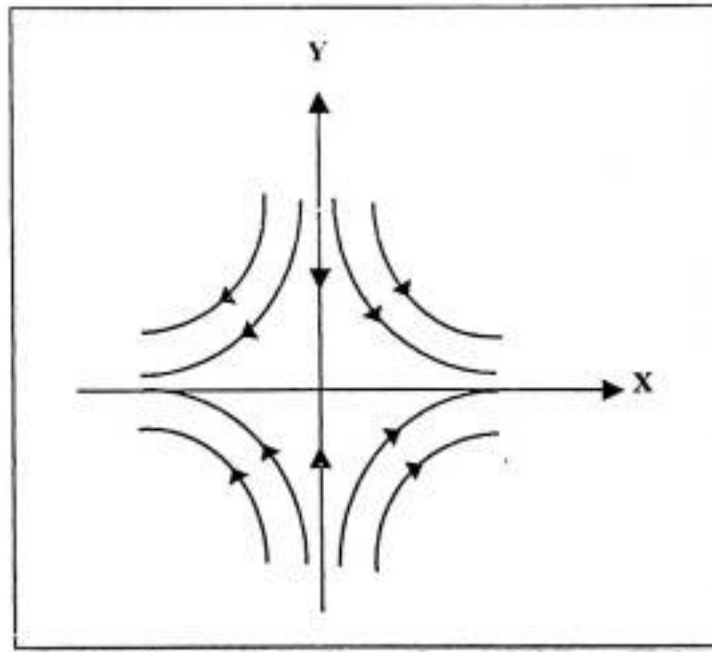
Dari persamaan II.3.10 untuk $k \neq 0$, merupakan hiperbola untuk $x = 0$ dan $y = 0$ pada saat asimptot. Untuk $k = 0$ kurva yang berkoresponden dengan asimptotnya adalah konsisten. Dari persamaan II.3.9 diperoleh suatu persamaan parametrik dari trajektori:

$$x = Ae^{2t} \quad \text{dan} \quad y = Be^{-2t} \quad \dots \text{ (II.3.11)}$$

Kedua hiperbola pada masing-masing trajektori akan kembali ke titik kesetimbangan $(0,0)$ pada saat $t \rightarrow \infty$ dan $t \rightarrow -\infty$. Jika $p > 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$ di $x = 0$ maka trajektorinya akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan $(0,0)$ dan jika $p < 0$ maka titik kesetimbangan akan kembali tak berhingga. Jika $p < 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$ di $y = 0$ maka trajektorinya akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan $(0,0)$ dan jika $p > 0$ maka titik kesetimbangan akan kembali tak berhingga.

Pada persekitaran titik kesetimbangan ada maka karakteristik dari *saddle point* yaitu:

1. Kedua trajektori yang saling berhadapan akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$ dan dua trajektori yang lainnya yang saling berhadapan akan menjauhi dan mendekati titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow -\infty$.
2. Semua trajektori pada kedua titik kesetimbangan akan kembali tak berhingga pada saat $t \rightarrow \infty$ dan $t \rightarrow -\infty$.



Gambar 2. Trajektori Di Sekitar Saddle Point Pada Persamaan II.3.9

Kasus 3.a:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px \\ \frac{dy}{dt} &= px + py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.12)}$$

di mana $a = p$, $b = 0$, $e = c = p$ dan

$$\Delta = (a + e)^2 - 4(ae - bc) = (p + p)^2 - 4(p^2 - 0) = 4p^2 - 4p^2 = 0$$

Akar karakteristik dari persamaan II.3.12 adalah p dan p yang merupakan real dan sama. Maka persamaan bidang fasenya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x} \quad \dots \text{(II.3.13)}$$

yang mempunyai solusi yaitu:

$$y = x \ln|cx| \quad \dots \text{(II.3.14)}$$

di mana

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x \ln|cx|) = 0 \quad \dots \text{ (II.3.15)}$$

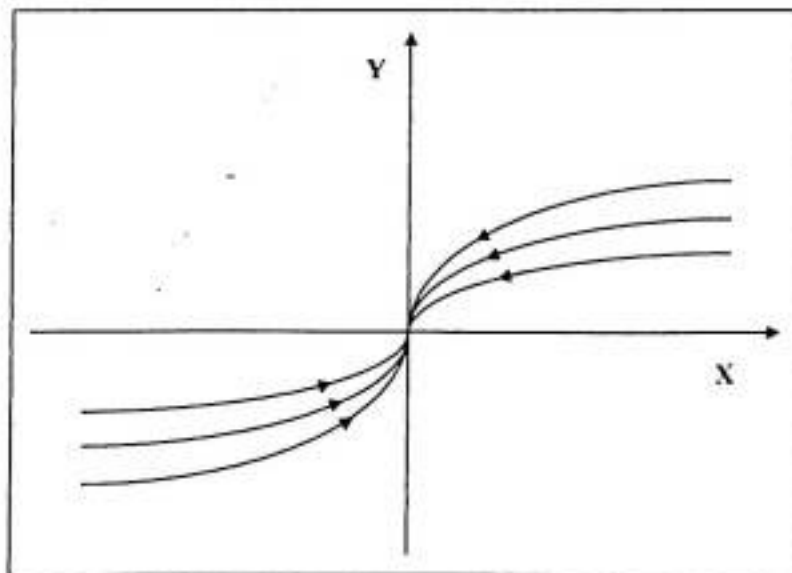
dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x \ln|cx|) = 1 + \ln|cx| \quad \dots \text{ (II.3.16)}$$

persamaan II.3.16 menjadi tak berhingga pada saat $x \rightarrow 0$. Menurut persamaan II.3.14 kurvanya akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan (0,0) pada saat $x \rightarrow \infty$ merupakan trasedental dengan batas slope $^{\infty}$. Dari persamaan II.3.12 diperoleh suatu persamaan parametrik dari trajektori:

$$x = Ae^{pt} \quad \text{dan} \quad y = Be^{-\lambda t} + Atp e^{pt} \quad \dots \text{ (II.3.17)}$$

Jika $p > 0$ pada titik kesetimbangan trajektori akan kembali tak berhingga pada saat $t \rightarrow \infty$ dan jika $p < 0$ trajektori akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$. Oleh sebab itu titik kesetimbangan pada kasus ini disebut *node point*.



Gambar 3. Trajektori Di sekitar Node Pada Persamaan II.3.12

Kasus 3.b:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px \\ \frac{dy}{dt} &= py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.18)}$$

di mana $a = p$, $b = c = 0$, $e = p$ dan

$$\begin{aligned} \Delta &= (a - e)^2 - 4(ae - bc) = (p + p)^2 - 4(2p^2 - 0) = 4p^2 - 8p^2 \\ &= -4p^2 < 0 \end{aligned}$$

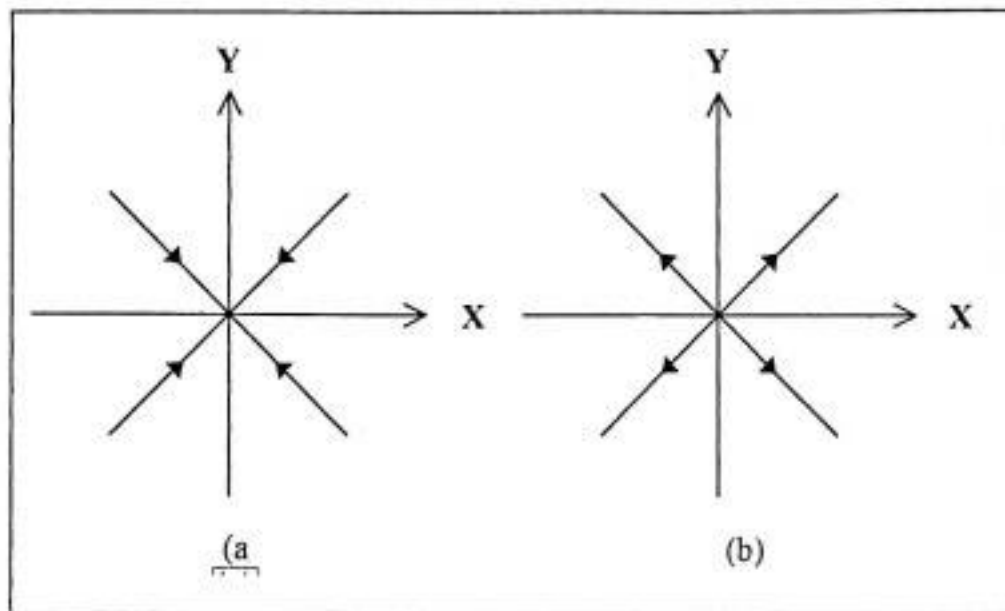
Akar karakteristik dari persamaan II.3.18 adalah p dan p yang merupakan real sama. Persamaan parametrik dari trajektori dalam kasus ini adalah:

$$x = Ae^{pt} \quad \text{dan} \quad y = Be^{pt} \quad \dots \text{(II.3.19)}$$

dan hubungan antara kurva dan garis adalah:

$$y = kx \quad \dots \text{(II.3.20)}$$

Jika $p > 0$ pada titik kesetimbangan maka untuk setiap trajektori akan kembali tak berhingga pada saat $t \rightarrow \infty$ dan jika $p < 0$ maka untuk setiap trajektori akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$. Dalam kasus ini titik kesetimbangannya merupakan *node* yang bertipe *proper node* sedangkan dalam kasus 1 dan 3A bertipe *improper node*.



Gambar 4. Proper Node Point Di Sekitar Trajektori Pada Persamaan II.3.18

Kasus 4:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= py \\ \frac{dy}{dt} &= -px \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.21)}$$

di mana $b = p$, $a = e = 0$, $c = -p$ dan

$$\Delta = (a + e)^2 - 4(ae - bc) = (0 - 0)^2 - 4(0 + p^2) = 0 - 4p^2 = -4p^2 < 0$$

Akar karakteristik dari persamaan II.3.21 adalah $\pm ip$ yaitu imajiner murni. Maka persamaan bidang fasenya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

yang mempunyai solusi yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots \text{(II.3.22)}$$

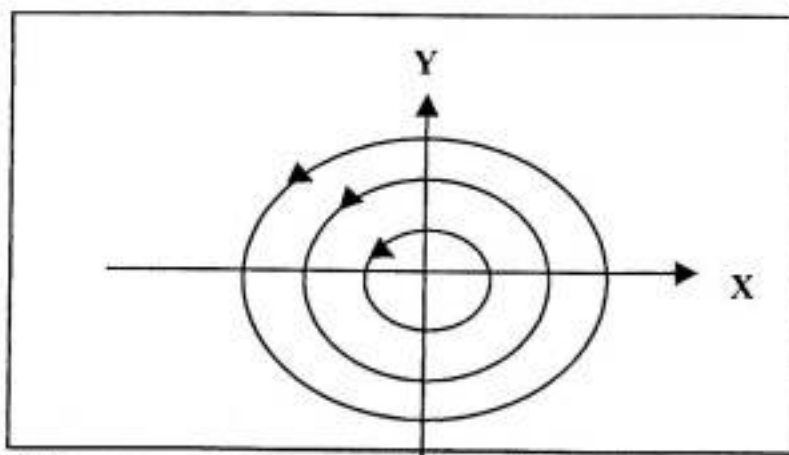
merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai titik kesetimbangan $(0,0)$ sebagai pusat. Penyelesaian dari persamaan II.3.21 diperoleh dari persamaan parametrik pada trajektori:

$$\begin{aligned} X &= A \cos pt + B \sin pt \\ Y &= B \cos pt - A \sin pt \end{aligned} \quad \dots \text{ (II.3.23)}$$

Persamaan parametrik pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ diperoleh dari persamaan II.3.22. Dari persamaan II.3.23 jika $p > 0$ maka semua trajektorinya akan berputar berulang-ulang sesuai arah jarum jam pada saat $t \rightarrow \infty$ dan jika $p < 0$ maka semua trajektorinya akan berputar berulang-ulang berlawanan arah jarum jam.

Di sekitar titik kesetimbangan bentuk dari trajektorinya ditunjukkan dalam gambar 5 disebut *center point*. Yang mana karakteristiknya yaitu:

1. Persekitaran pada titik kesetimbangan yang memuat suatu himpunan tak berhingga pada trajektori tertutup maka memuat titik kesetimbangan di dalamnya.
2. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ di mana trajektori dalam persekitarannya mempunyai panjang maximum kurang lebih ε .



Gambar 5. Center Point Di Sekitar Trajektori Pada Persamaan II.3.21

Kasus 5:

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.24)}$$

di mana $a = p$, $b = -1$, $c = 1$, $e = p$ dan

$$\Delta = (a - e)^2 - 4(ae - bc) = (p + p)^2 - 4(p^2 + 1) = -4 < 0$$

Akar karakteristik dari persamaan II.3.21 adalah $p \pm i$ yaitu kompleks yang bukan imajiner murni. Maka persamaan bidang fasenya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + py}{px - y} \quad \dots \text{(II.3.25)}$$

yang mempunyai solusi yaitu:

$$x^2 + y^2 = K^2 e^{2p \tan^{-1}(y/x)} \quad K \neq 0 \quad \dots \text{(II.3.26)}$$

atau ditransformasikan ke koordinat polar:

$$r^2 = K^2 e^{2p\theta} \quad \dots \text{(II.3.27)}$$

atau dibentuk ke dalam akar kuadrat dan memisalkan k lainnya positif atau negatif

$$r = ke^{p\theta} \quad \dots \text{(II.3.28)}$$

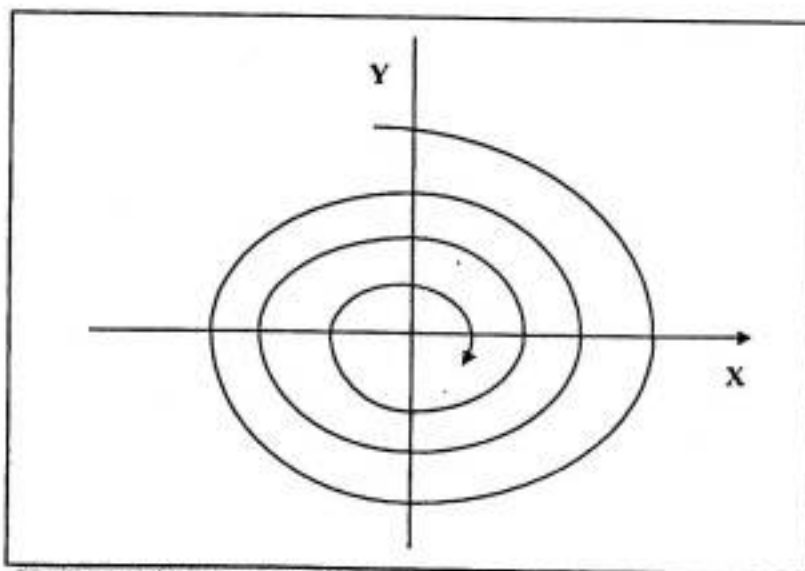
Persamaan di atas merupakan persamaan spiral, yang mana setiap spiral berputar di sekitar titik kesetimbangan (0,0) sebagai limit. Dari persamaan II.3.24 diperoleh suatu persamaan parametrik pada trajektori:

$$\begin{aligned} X &= e^{pt} (A \cos t + B \sin t) \\ Y &= e^{pt} (A \sin t - B \cos t) \end{aligned} \quad \dots \text{(II.3.29)}$$

Jika $p > 0$ pada titik kesetimbangan untuk setiap trajektori akan kembali tak berhingga pada saat $t \rightarrow \infty$ dan jika $p < 0$ maka untuk setiap trajektori akan mendekati dan menjauhi titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$.

Di sekitar titik kesetimbangan bentuk dari trajektorinya ditunjukkan dalam gambar 6 disebut *spiral point*. Yang mana karakteristiknya adalah:

1. Terdapat pesekitaran pada titik kesetimbangan sedemikian sehingga untuk setiap trajektori di dalam pesekitarannya akan mendekati titik kesetimbangan lainnya pada saat $t \rightarrow \infty$ atau $t \rightarrow -\infty$.
2. Pada masing-masing trajektori yang mendekati titik kesetimbangan maka perputaran di sekitar titik kesetimbangan tak berhingga dalam jangka waktu tertentu.



Gambar 6. Spiral Point Di Sekitar Trajektori Pada Persamaan II.3.24

Misalkan $C:(x_0, y_0)$ merupakan titik kesetimbangan terisolasi pada persamaan :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= g(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y)\end{aligned}$$

Misalkan $\Gamma = \{x = x(t), y = y(t)\}$ merupakan sembarang trajektori pada persamaan di atas, dan misalkan:

$$D(t) = \sqrt{[x(t) - x(0)]^2 + [y(t) - y(0)]^2}$$

merupakan jarak pada sembarang titik di Γ dari titik kesetimbangan.

Definisi 1: C adalah titik kesetimbangan terisolasi dikatakan stabil jika hanya jika $\forall \varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga pada suatu trajektori yang memuat titik $[x(t^*), y(t^*)]$ untuk $D(t^*) < \delta$. Jarak $D(t)$ ada dan kurang lebih $\forall \varepsilon, t \geq t^*$.

Definisi 2: Titik kesetimbangan terisolasi C disebut stabil asimtot jika hanya jika pertama stabil dan kedua $\delta^* > 0$ ada sedemikian sehingga jika $D(t^*) < \delta^*$ maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{dan} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$$

Definisi 3: Titik kesetimbangan yang tidak stabil disebut unstabil.

Teorema 1: Diberikan persamaan linear $\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = cx + ey$ dengan $ae - bc \neq 0$. Dimana $(0,0)$ merupakan titik kesetimbangan dari persamaan tersebut. Jika akar karakteristik persamaan $m^2 - (a + e)m + ae - bc = 0$ adalah real dan negatif atau kompleks dengan bagian real negatif, maka titik kesetimbangan adalah stabil

asimptot. Jika akar persamaan karakteristiknya real dan positif atau kompleks dengan bagian real positif, maka titik kesetimbangannya adalah stabil, tetapi tidak satbil asimptot. Pada saat akar karakteristiknya imajiner murni maka persamaan tersebut mempunyai solusi periodik.

Tabel 2: Kestabilan pada titik kesetimbangan (0,0) dari persamaan linear

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + ey \text{ dengan akar karakteristiknya adalah:}$$

Jenis Dari Akar Karakteristik	Jenis Titik Kesetimbangan	Kestabilan Dari Titik Kesetimbangan
1. Real, tidak sama dan bertanda sama.	Node Point (Improper Node Point)	Stabil asimptot jika akarnya negatif, tidak stabil jika akarnya positif.
2. Real, tidak sama dan berbeda tanda.	Saddle Point	Unstabil
3. Real dan sama.	Node Point (Improper atau Proper Node Point)	Stabil asimptot jika akarnya negatif, unstabil jika akarnya positif
4. Imajiner Murni	Center Point	Stabil tetapi tidak stabil asimptot

5. Kompleks tetapi Bukan Imajiner Murni	Spiral Point	Stabil asimtot jika bagian akar realnya negatif , unstabil jika bagian akar realnya positif
--	--------------	---

II. 4 Solusi Periodik Dan Limit Cycles

Perhatikan jika akar dari persamaan karakteristik yaitu:

$$m^2 - (a + e)m + (ae - bc) = 0$$

pada sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= bx + dy \end{aligned} \quad \dots(II.4.1)$$

akarnya imajiner murni, maka titik kesetimbangan (0,0) adalah *center* (*pusat*). Ini berarti bahwa kumpulan dari trajektori yang kontinu pada persamaan sederhana yang mana pada masing-masing kurva tertutup tak berhingga memuat titik kesetimbangan (0,0) di dalamnya. Dalam keadaan ini persamaan mempunyai banyak solusi periodik tak berhingga, tetapi dalam keadaan yang lain tidak mempunyai solusi periodik.

Jika akar dari persamaan karakteristik pada persamaan linear dihubungkan dengan persamaan linear yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(x, y)\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.4.2)}$$

akan diperoleh akar yang imajiner murni, dan titik singular (0,0) merupakan center (pusat) atau merupakan titik spiral.

Semua trajektori yang berputar keluar dari titik spiral sewaktu-waktu menjauhi dan sewaktu-waktu mendekati *spiral* untuk sembarang kurva tertutup sederhana C tak berhingga yang berada dalam titik kesetimbangan.

Pada waktu yang sama, trajektori di luar C tak berhingga harus spiral dan sewaktu-waktu lebih memutar keluar di sekitar C yang tertutup. Jika kemungkinannya harus ada satu atau beberapa solusi periodik maka dibentuk batas pada persekitaran titik kesetimbangan yang mana anggotanya adalah kumpulan dari letak trajektori spiral.

Contoh ini menunjukkan kemungkinan pada persamaan tingkah laku:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad \dots \text{ (II.4.3)}$$

yang mana sesungguhnya sistem tersebut mempunyai solusi periodik yang tunggal terhadap solusi lain yang mana semua spiral. Untuk menyelidiki persamaan tersebut, akan diuraikan perilaku terhadap spiral secara nyata dan kemungkinannya akan dipakai untuk memperoleh $\frac{dr}{dt}$ dan $\frac{d\theta}{dt}$ dalam penyelesaian koordinat polar yang mana lebih baik dari penyelesaian dengan

persamaan (II.3.3). Pada $\frac{dr}{dt}$ akan diuraikan apakah r bertambah tak terbatas, berkurang ke nol atau mendekati nilai batas $r = r_0$ di t dari tak berhingga. Pertama akan diuraikan hubungan koordinat polar dengan cara menghitung turunan pada r dan θ pada masing-masing t . Sehingga diperoleh $r^2 = x^2 + y^2$ di mana $r > 0$

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \quad \dots \text{(II.4.4)}$$

maka diperoleh hubungan dari $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2 + y^2} (y\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\left(\frac{dy}{dt}\right)) \end{aligned}$$

atau

$$-r^2 \frac{d\theta}{dt} = y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \quad \dots \text{(II.4.5)}$$

kembali ke persamaan (II.4.3) jika persamaan (II.4.1) dijumlahkan dengan x dan kedua y diperoleh:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

atau menggunakan (II.4.4)

$$r \frac{dr}{dt} = r^2 - r^4$$

atau dengan kata lain

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \quad \dots \text{(II.4.6)}$$

begitupun jika persamaan (II.4.3) dikalikan dengan y dan kedua x kemudian mengurangnya diperoleh

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2$$

atau menggunakan (II.4.5)

$$-r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2$$

atau dengan kata lain

$$\frac{d\theta}{dt} = -1 \quad \dots \text{(II.4.7)}$$

Dari (II.4.6) bahwa $\frac{dr}{dt} > 0$ jika $0 < r < 1$, bahwa t bertambah ketika r bertambah pada (II.4.6) dan letak lintasan dalam lingkaran $r = 1$ merupakan kurva spiral yang keluar. Dan trajektori di lingkaran $r = 1$ persamaan dari (II.4.6) dan (II.4.7) pada

$$r = 1 \quad \theta = -t + t_0 \quad t_0 \text{ sembarang}$$

yang pasti lebih eksplisit, dengan menggunakan pemisahan variabel pada persamaan (II.4.6) dan kemudian menggunakan tehnik pecahan parsial, diperoleh

$$\frac{dr}{r(1-r^2)} = dt$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r} \right) dr = dt$$

$$\ln \left| \frac{r^2}{1-r^2} \right| = 2t - \ln(|k|) \quad k \neq 0$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}}{k + e^{2t}} = \frac{1}{1 + ke^{-2t}}$$

atau

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}} \quad \dots \text{ (II.4.8)}$$

Jika $k > 0$ maka trajektori pada spiral akan berhubungan dengan lingkaran dalamnya pada saat $t \rightarrow \infty$. Jika $k < 0$ maka kurva pada spiral akan berhubungan dengan lingkaran bagian luar pada saat $t \rightarrow \infty$. Kurva tertutup sederhana pada bidang fase yang mana tidak mempunyai lintasan tertutup terhadap yang lain pada saat $t \rightarrow \infty$ dan $t \rightarrow -\infty$ disebut *limit cycle*. Jika semua trajektori untuk *limit cycle* yang arah spiral mulai tertutup sebelah dalam dan sebelah luar pada saat $t \rightarrow \infty$ disebut *limit cycle dalam keadaan stabil*. Jika trajektori pada *limit cycle* di satu sisi spiral yang arah *limit cycle* pada sisi lain seraya meninggalkan tempatnya pada saat $t \rightarrow \infty$ disebut *limit cycle dalam keadaan semistabil*. Jika trajektori dari *limit cycle* pada kedua sisi spiral meninggalkan tempatnya disebut *limit cycle dalam keadaan unstabil*.

Dalam contoh diuraikan penyelesaian pada persamaan sebenarnya yang ditentukan melalui persamaan yang ada pada *limit cycle*. Tetapi untuk menyelesaikan persamaan tersebut harus dihindari penggunaan metode *solusi periodik* yang ada atau tidak ada untuk yang lain. Menurut hasil yang ada dalam *Teorema Poincare Bendixson dan Teorema Bendixson* yang mana diberikan satu syarat cukup untuk *limit cycle* yang ada, dan syarat cukup yang lain untuk *limit cycle* yang tidak ada.

Teorema II.4.1 (Teorema Poincare Bendixson)

Perhatikan persamaan autonomous berikut ini:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= S(x, y)\end{aligned}$$

di mana F dan G merupakan turunan parsial pertama pada D . Misalkan D_1 adalah subdomain pada D , R adalah daerah yang terdiri dari D_1 beserta batasnya yang mana R tidak memuat titik kesetimbangan pada persamaan tersebut. Jika pada persamaan tersebut mempunyai solusi $x=x(t)$, $y=y(t)$ dan nilai t_0 sehingga trajektorinya terdefinisi di $x=x(t)$, $y=y(t)$ pada R untuk semua nilai $t \geq t_0$, maka salah satu:

1. $x=x(t)$, $y=y(t)$ trajektorinya tertutup di sebut solusi periodik
2. $x=x(t)$, $y=y(t)$ trajektorinya spiral di R yang tertutup pada saat $t \rightarrow \infty$

apabila salah satu keadaan terpenuhi maka persamaan tersebut mempunyai solusi periodik.

Teorema II.4.2 (Teorema Bendixson)

Misalkan F dan S adalah fungsi pada persamaan autonomous yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= S(x, y)\end{aligned}$$

mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu di domain D . Jika $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}$

mempunyai tanda yang sama di D , maka persamaan tersebut tidak mempunyai solusi periodik yang tidak di D .

Pertama ditentukan bahwa daerah R yang tertutup tidak memuat titik kesetimbangan pada persamaan tersebut dan kemudian akan ditunjukkan bahwa

trajektorinya pada nilai t cukup besar. Di mana R tidak harus memuat titik kesetimbangan, yang mana tidak terdapat titik dalam pada lingkaran yang pusatnya bukan di titik asal. Tetapi titik kesetimbangan $R(0,0)$ hanya berbentuk lingkaran yang dibatasi oleh 2 lingkaran konsentrik yang mempunyai $(0,0)$ sebagai pusat, di mana $r = 1/3$ dan $r = 3$ digunakan solusi (II.4.8) untuk r seluruhnya, yang mana solusinya n cukup satu di R untuk $k = 3$ untuk semua $t \geq 0$. Tidak ada diperoleh solusi (II.4.8) yang eksplisit, berarti akan diperoleh trajektori di R dengan catatan solusi untuk R mula-mula di II.4.6. Di mana Radius r merupakan fungsi turun pada t jika $1 < r < 3$ dan suatu fungsi naik pada t jika $1/3 < r < 1$. Demikianlah hipotesa pada *Teorema Bendixson*, yang mana persamaan II.4.3 mempunyai solusi periodik di R , yaitu:

$$r = 1 \qquad \theta = -t + t_0$$

Untuk ilustrasi *Teorema Bendixson*, Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2xy + x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y^2 + x^2y \end{aligned}$$

Misalkan $F = x + 2xy + x^3$ dan $S = -y^2 + x^2y$ mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada semua semua titik dalam bidang $x y$. Selain itu

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= (1 + 2xy + 3x^2) + (-2y + x^2) \\ &= 1 + 4x^2 \end{aligned}$$

di mana $1 + 4x^2$ positif untuk semua nilai pada x (dan y), *Teorema Bendixson* menjamin bahwa persamaan yang diberikan dalam bidang fase di mana saja tidak mempunyai solusi periodik.

Teorema II.4.3

Perhatikan persamaan differensial ordo 2 berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(x)\frac{dx}{dt} + q(x) = 0$$

dan misalkan

$$p(x) = \int_0^x p(g)dg \quad \text{dan} \quad q(x) = \int_0^x q(g)dg$$

jika:

1. $p(x)$ adalah fungsi genap yang kontinu untuk semua nilai pada x
2. $q(x)$ adalah fungsi ganjil yang mana positif untuk $x > 0$ dan mempunyai turunan yang kontinu untuk semua nilai pada x
3. \exists bilangan $x_0 \ni p(x) < 0$ untuk $0 < x < x_0$ dan $p(x) > 0$ untuk $x > x_0$
4. $p(x)$ monoton naik untuk $x > x_0$ dan menjadi tak berhingga ketika $x \rightarrow \infty$
5. $q(x)$ menjadi tak hingga ketika $x \rightarrow \infty$

Maka persamaan tersebut mempunyai trajektori yang tunggal terhadap semua trajektori spiral yang lain pada saat $t \rightarrow \infty$ (diduga solusi trivial $x = y$

$$\cong \frac{dx}{dt} = 0).$$

Contoh 1:

Pada persamaan *Van der pol* diselidiki juga ada solusi periodik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad , \lambda > 0$$

Langkah 1, misalkan persamaan tersebut diganti ke dalam persamaan yang ekuivalen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \lambda(x^2 - 1)y \end{aligned} \quad \dots(II.2.9)$$

dan akan digunakan *Teorema Poincare Bendixson* dan *Teorema Bendixson* . Pertama mengingat *Teorema Poincare Bendixson* (itu lebih sederhana) dengan catatan bahwa

$$F = y \quad S = -x - \lambda(x^2 - 1)y$$

Dan karena itu

$$\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = -\lambda(x^2 - 1)$$

Pada semua titik positif tak berhingga yang mana hubungannya cukup dalam diantara jalur vertikal dengan garis $x = -1$ dan $x = 1$. Dari sini dapat ditarik kesimpulan bahwa persamaan yang diberikan mempunyai trajektori tidak tertutup yang mana letaknya di bagian dalam bidang $x y$. Dan di sebelah kiri $-\lambda(x^2 - 1)$ merupakan simbol negatif konstan pada setengah bidang $x = -1$ dan di sebelah kanan seluruh setengah bidang $x = 1$. Dari sini trajektorinya tidak tertutup pada daerah bidang fase. Tetapi dari *teorema Bendixson* diketahui bahwa untuk semua penyelesaiannya harus ada pada persamaan II.4.9 yang mana trajektorinya tertutup pada sebagian daerahnya yang terdefinisi dan sebagian pada daerah lain.

Dalam suatu perhitungan , akan digunakan *Teorema Poincare Bendixson*

$$\frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt} = -\lambda(x^2 - 1)y^2$$

yang mana dapat ditarik kesimpulan bahwa:

$$\frac{dr}{dt} = -\lambda(r^2 \cos^2 \theta - 1)r \sin^2 \theta$$

Jika $0 < r < 1$ menunjukkan radius r adalah suatu fungsi naik pada t dan trajektorinya adalah kurva spiral yang keluar. Begitupun akan ditunjukkan r adalah fungsi turun pada t di trajektori yang mulai menjauhi t seperti pada uraian dalam persamaan II.4.3. Akan ditarik kesimpulan bahwa daerah sisanya akan berbentuk lingkaran dan akan digunakan *Teorema Poincare Bendixson*. Walaupun demikian $\frac{dr}{dt}$ untuk $r > 1$ di mana $\cos^2 \theta > 1/r^2$ merupakan suatu fungsi turun pada t , tetapi di mana $\cos^2 \theta < 1/r^2$ merupakan suatu fungsi naik dan *Teorema Poincare Bendixson* gagal.

Sebagai jalan terakhir, misalkan digunakan Teorema II.4.3. Di mana $p(x) = \lambda(x^2 - 1)$ adalah fungsi genap yang kontinu dan $q(x) = x'$ adalah turunan fungsi ganjil yang kontinu sesuai dengan teorema. Selain daripada itu

$$q(x) = \int_0^x g dg = \frac{x^2}{2}$$

menjadi tak berhingga pada saat $x \rightarrow \infty$. Juga

$$p(x) = \int_0^x \lambda(g^2 - 1) dg = \lambda \left(\frac{x^3}{3} - x \right)$$

dan diambil $x_0 = \sqrt{3}$, diperoleh:

$$p(x) < 0 \text{ untuk } 0 < x < \sqrt{3}$$

$$p(x) > 0 \text{ untuk } x > \sqrt{3}$$

diperoleh $p'(x) = \lambda(x^2 - 1) > 0$ untuk $x > 1$, di mana p adalah fungsi monoton naik pada x untuk $x > \sqrt{3}$ dan p menjadi tak berhingga ketika $x \rightarrow \infty$. Demikianlah hipotesa pada Teorema II.4.3 sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa *persamaan Van der pol* mempunyai trajektori tertutup yang tunggal terhadap semua trayektori spiral yang lain.

II. 5 Kestabilan Sistem Linear

Solusi umum sistem linear dari persamaan differensial ordo satu adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad \dots(\text{II.5.1})$$

di mana $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$ adalah konstan. serta x_1, x_2, \dots, x_n adalah fungsi terhadap t , dalam hal ini $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$. Persamaan II.5.1 diatas dapat pula ditulis dalam bentuk notasi matriks sebagai berikut:

$$\dot{X} = Ax$$

Di sini A adalah matriks berukuran $n \times n$ yang entri-entri-nya berisi koefisien konstanta, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistem linear yang akan dibahas di sini adalah persamaan linear dengan dua persamaan yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \quad \dots(\text{II.5.2})$$

variabel x dan y pada prinsipnya bergantung pada t ($x = x(t)$ dan $y = y(t)$) dan nilai

a , b , c , dan d merupakan suatu konstanta. Sementara $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ menyatakan

laju perubahan x dan y terhadap t .

Sistem persamaan differensial dapat ditulis dalam notasi matriks:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.5.3})$$

atau

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v} \quad \dots(\text{II.5.4})$$

di mana $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Solusi dari persamaan differensial linear koefisien konstan berbentuk eksponensial, maka untuk mencari solusi dengan menggunakan teori matriks, solusinya dimisalkan berbentuk:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 e^{rt} \quad \dots(\text{II.5.5})$$

ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} e^{rt}$$

di mana \vec{V}_0 adalah vektor konstanta yang berhubungan dengan nilai awal $t = t_0$.

Bila persamaan II.5.5 di substitusi ke persamaan II.3.4 diperoleh:

$$A\vec{V}_0 = r\vec{V}_0 \quad \dots(\text{II.5.6})$$

atau ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.5.7})$$

Solusi tidak trivial dari persamaan II.5.6 $V_0 \neq 0$ selalu ada untuk nilai nyata dari r , yang biasa disebut *nilai eigen dari matriks A*. Persamaan II.5.6 dapat ditulis dalam persamaan homogen (menggunakan *matriks identitas*)

$$(A - rI) V_0 = 0 \quad \dots(\text{II.5.8})$$

atau

$$\begin{bmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots(\text{II.5.9})$$

dengan memanipulasi aljabar, didapat *solusi non trivial* untuk persamaan linear homogen jika hanya jika determinan dari koefisien tidak sama dengan nol.

Dengan demikian haruslah:

$$|A - rI| = 0 \quad \dots(\text{II.5.10})$$

atau

$$\begin{vmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(\text{II.5.11})$$

nilai r dapat diperoleh dari persamaan

$$r^2 - (a + d)r - (ad - bc) = 0 \quad \dots(\text{II.5.12})$$

yang merupakan nilai eigen dari matriks A . Jika nilai eigen dari persamaan II.5.11

berbeda, maka nilai *non trivial* dari $\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian untuk setiap

nilai eigen (biasa disebut *vektor eigen* yang bersesuaian dengan *nilai eigen*)

Dapat juga ditentukan, misalkan *nilai eigen* dinyatakan sebagai r_i ($i = 1, 2$) dan

selanjutnya diperoleh *vektor eigen* $\vec{V}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan *nilai eigen*

r_i maka solusi yang diberikan sebagai berikut:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^2 C_i \vec{V}_i e^{r_i t} \quad \dots(\text{II.5.13})$$

atau

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 C_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} e^{r_i t} \quad \dots(\text{II.5.14})$$

jika nilai eigen dari persamaan II.5.12 adalah *bilangan kompleks*, maka *nilai eigen*

yang lainnya merupakan *kompleks konjugat* dari nilai eigen tersebut. Untuk

mendapatkan solusi dari persamaan differensial tersebut ketika *nilai eigen*

kompleks, digunakan *rumusan Euler's* berikut:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned} \quad \dots(\text{II.5.15})$$

Contoh 2:

Perhatikan sistem persamaan linear di bawah ini:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y\end{aligned}\quad \dots(\text{II.5.16})$$

sistem persamaan II.5.16 dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.5.17})$$

solusi sistem di atas secara umum dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} e^{rt} \quad \dots(\text{II.5.18})$$

nilai eigen dapat ditentukan dengan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 4-r & -3 \\ 3 & -2-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots(\text{II.5.19})$$

sehingga diperoleh akar persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

diperoleh $r_1 = 1 + i$ dan $r_2 = 1 - i$ dan nilai-nilai eigennya adalah kompleks konjugat. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $r_1 = 1 + i$ diperoleh dengan mensubstitusi r_1 ke persamaan (II.5.19) yaitu:

$$\begin{aligned}(3-i)x_0 - 5y_0 &= 0 \\ 2x_0 + (-3-i)y_0 &= 0\end{aligned}\quad \dots(\text{II.5.20})$$

dari persamaan II.5.20 vektor eigen dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5x_0 \\ (3-i)x_0 \end{bmatrix} = \frac{x_0}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ (3-i) \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.5.21})$$

demikian pula untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $r_2 = 1 - i$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5x_0 \\ (3+i)x_0 \end{bmatrix} = \frac{x_0}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ (3+i) \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.5.22})$$

sehingga solusi persamaan II.5.22 dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 5 \\ (3-i) \end{bmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ (3+i) \end{bmatrix} e^{(1-i)t} \quad \dots(\text{II.5.23})$$

Dengan menggunakan Rumusan Euler pada persamaan II.5.23 maka diperoleh:

$$X(t) = 5e^t (C_1 \cos t + i \sin t) + C_2 (\cos t - i \sin t)$$

$$Y(t) = e^t ((3-i) C_1 (\cos t + i \sin t) + (3+i) C_2 (\cos t - i \sin t))$$

Dengan demikian solusi umum dari sistem persamaan (II.5.22) adalah:

$$X(t) = 5e^t (\alpha \cos t + \beta \sin t)$$

$$Y(t) = e^t ((3\alpha - \beta) \cos t + 3(\beta - \alpha) \sin t)$$

Di mana $\alpha = C_1 + C_2$ dan $\beta = i(C_1 + C_2)$.

II.6 Kestabilan Sistem Non Linear

Perhatikan sistem persamaan differensial di bawah ini

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad \dots(\text{II.6.1})$$

di mana f_1 dan f_2 merupakan fungsi yang differensiabel. Misalkan

$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ merupakan keadaan keseimbangan dari II.6.1 dan misalkan

$u_1 = x_1 - \bar{x}_1$ maka menurut *Teorema Taylor* untuk fungsi 2 peubah yaitu:



$$f_i(x_1, x_2) = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_i(u_1, u_2) \dots(\text{II.6.2})$$

untuk $i = 1, 2$ atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_1(u_1, u_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_2(u_1, u_2) \end{aligned} \dots(\text{II.6.3})$$

Diasumsikan u_1 dan u_2 sangat dekat dengan nol jika $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ maka

$$\frac{g_i(u_1, u_2)}{\|u\|} \rightarrow 0 \text{ bila } \|u\| \rightarrow 0 \text{ karena } \bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \text{ adalah keadaan } \textit{kesetimbangan},$$

maka:

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \dots(\text{II.6.4})$$

dan untuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}(x_1 - \bar{x}_1) \\ \dot{x}_2 &= \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}(x_2 - \bar{x}_2) \end{aligned} \dots(\text{II.6.5})$$

maka persamaan II.6.1 dapat ditulis

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} \dots(\text{II.6.6})$$

yang dalam notasi vektor dituliskan sebagai:

$$\dot{u} = au + g(u) \dots(\text{II.6.7})$$

di mana

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \text{Untuk } x = \bar{x}$$

A adalah *matriks Jacobian* dari f pada \bar{x} . Untuk $x(t)$ yang sangat dekat dengan \bar{x} , maka $g(u)$ menjadi kecil dan dapat diabaikan sehingga persamaan II.6.7 dapat didekati oleh persamaan sistem linear.

$$\dot{U} = Au$$

situasi yang mungkin dapat terjadi adalah bergesernya keadaan keseimbangan. Bila keadaan keseimbangan \bar{x} bergeser ke $x(0)$ maka kestabilannya akan berubah. Dengan kata lain $x(t) \rightarrow \bar{x}$ untuk $t \rightarrow \infty$ atau $u(t) = x(t) - \bar{x}$ maka $u(t) \rightarrow 0$. Hal ini telah menjadi persamaan linear yang perlu diperhatikan adalah pendekatan yang dilakukan, x harus dekat ke \bar{x} . Jadi yang sebenarnya adalah *kestabilan lokal saja*.

BAB III

ANALISIS KESTABILAN LIMIT CYCLE UNTUK MODEL SATU MANGSA SATU PEMANGSA

III.1 Pembentukan Limit Cycle Untuk Model Satu Mangsa Satu Pemangsa

Perhatikan persamaan Lotka Volterra di bawah ini:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= H(a - \alpha P) \\ \frac{dP}{dt} &= P(b - \beta H)\end{aligned}$$

pada pembahasan ini penulis hanya membatasi model satu mangsa satu pemangsa dengan realita yang sama untuk tingkat kelahiran mangsa, tingkat penyerangan pemangsa dan tingkat pertumbuhan populasi pemangsa.

Adapun model satu mangsa satu pemangsa sesuai dengan realita yang sama yaitu:

- Tingkat kelahiran populasi mangsa

Pada model Lotka Volterra tingkat kelahiran populasi mangsa diasumsikan konstan yaitu :

$$\frac{dH}{dt} = aH \quad \dots \text{(III.1.1)}$$

yang mana aH pada persamaan III.1.1 merupakan fungsi kepadatan populasi. Persamaan III.1.1 yang mana untuk konstan a diganti dengan bentuk Verhulst Pearl logistik yaitu:

$$a \rightarrow r\left(1 - \frac{H}{K}\right)$$

sehingga persamaan III.1.1 berubah menjadi

$$\frac{dH}{dt} = rH\left(1 - \frac{H}{K}\right) \quad \dots \text{(III.1.2)}$$

- Tingkat Penyerangan Pemangsa

Pada model Lotka Volterra tingkat penyerangan pemangsa di gambarkan oleh batas $-\alpha HP$ yang merupakan hubungan antara kapasitas penyerangan per pemangsa yang tak terbatas, pertumbuhan linear, dan kepadatan mangsa. Jika penambahan penggunaan pemangsa kurang dari linear dengan tingkat pertumbuhan mangsa tetap, dan pengaruh kestabilan dari penyerangan pemangsa tetap linear maka tingkat penyerangan pemangsa cenderung lebih realistis kepada pengaruh ketidakstabilan. Menurut Holling:

$$\alpha HP \rightarrow \frac{kHP}{H + D} \quad \dots \text{(III.1.3)}$$

Di mana D merupakan nilai yang diberikan pada populasi di luar mangsa yang mana tingkat penyerangan pemangsa mula-mula jenuh.

- Tingkat pertumbuhan populasi pemangsa

Menurut Leslie persamaan pemangsa dinamik yaitu:

$$\frac{dP}{dt} = sP\left(1 - \frac{P}{\gamma H}\right) \quad \dots \text{(III.1.4)}$$

pada persamaan III.1.4 pertumbuhan pada populasi pemangsa adalah merupakan bentuk logistik, di mana $K = \gamma H$ seimbang untuk mangsa yang berlebih.

Berdasarkan persamaan III.1.2, III.1.3, III.1.4 dapat dibentuk menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= rH\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \frac{kPH}{H+D} \\ &= \frac{H(rHK - rH^2 + rKD - rHD - kKP)}{K(H+D)} \\ \frac{dP}{dt} &= sP\left(1 - \frac{P}{\gamma H}\right) \\ &= \frac{P(s\gamma H - sP)}{\gamma H}\end{aligned}\quad \dots \text{(III.1.5)}$$

di mana :

\dot{H} adalah laju pertumbuhan populasi mangsa (prey) terhadap waktu

\dot{P} adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa (predator) terhadap waktu

r adalah nilai intrinsik pada pertambahan populasi mangsa

H adalah spesies mangsa (prey)

P adalah spesies pemangsa (predator)

s adalah nilai intrinsik pada pertambahan populasi pemangsa

K adalah kapasitas bawaan pada populasi mangsa

k adalah kepadatan populasi pemangsa

γ adalah pertumbuhan populasi pemangsa yang makan mangsa

D adalah tingkat penyerangan pemangsa yang pertambahannya tetap pada tingkat kepadatan mangsa rendah

III. 2 Penentuan Titik Keseimbangan

Persamaan III.1.5 di ubah ke dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^P}{H+D} \right] \\ \frac{dP}{dt} &= sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right] \end{aligned} \quad \dots \text{ (III.2.1)}$$

Untuk memperoleh titik keseimbangan pada persamaan III.2.1 akan dibentuk:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

sehingga persamaan III.2.1 menjadi:

$$\begin{aligned} rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^P}{H+D} \right] &= 0 \\ sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right] &= 0 \end{aligned} \quad \dots \text{ (III.2.2)}$$

maka diperoleh titik keseimbangan:

$$\begin{aligned} H = 0 & \quad \text{atau} \quad 1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^P}{H+D} = 0 \\ P = 0 & \quad \text{atau} \quad 1 - \frac{P}{\gamma H} = 0 \\ & \quad \quad \quad P = \gamma H \end{aligned} \quad \dots \text{ (III.2.3)}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k\gamma}{r} \\ \beta &= \frac{D}{K} \end{aligned} \quad \dots \text{ (III.2.4)}$$

substitusi nilai α dan β ke persamaan III.2.3 sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{l}
 H_* = 0 \\
 P_* = 0
 \end{array}
 \quad \text{atau} \quad
 \begin{array}{l}
 1 - \frac{H}{K} - \frac{\alpha H}{H+D} = 0 \\
 H_{**} = \frac{D(1-\alpha-\beta+R)}{2\beta} \\
 1 - \frac{P}{\gamma H} = 0 \\
 P_{**} = \gamma H_{**}
 \end{array}
 \quad \dots \text{ (III.2.5)}$$

di mana :

$$R = \left[(1-\alpha-\beta)^2 + 4\beta \right]^{1/2} \quad \dots \text{ (III.2.6)}$$

jadi titik kesetimbangannya adalah:

$$\begin{array}{l}
 \bar{E}_1 = (H_*, P_*) \\
 \bar{E}_2 = (H_{**}, P_{**})
 \end{array}
 \quad \dots \text{ (III.2.7)}$$

III.3 Analisis Kestabilan Limit Cycle

Tinjau kembali model yang berbentuk:

$$\begin{array}{l}
 \frac{dH}{dt} = rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^p}{H+D} \right] \\
 \frac{dP}{dt} = sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right]
 \end{array}$$

Untuk menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan dipilih titik kesetimbangan yang berada dalam kuadran I yang mana diperlukan syarat untuk membuat titik kesetimbangan yang semuanya positif.

Dari titik kesetimbangan yang diperoleh terdapat hanya satu titik kesetimbangan yang berada dalam kuadran I yaitu $\bar{E}_1 = (H_*, P_*)$. Untuk menganalisis kestabilan pada persamaan III.2.1 di sekitar titik kesetimbangan

pada kuadran I di gunakan analisis kestabilan untuk persamaan non linear yaitu dengan menggunakan matriks jacobi pada persamaan diatas. *Stabil atau tidaknya* titik kesetimbangan tersebut ditentukan oleh *nilai eigen* yang diperoleh dari persamaan karakteristik matriks jacobi.

Misalkan:

$$U = rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^p}{H+D} \right] \quad \dots(III.3.1)$$

$$V = sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right]$$

Adapun bentuk umum matriks jacobi dari persamaan III.3.1 yaitu:

$$J_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial H} & \frac{\partial U}{\partial P} \\ \frac{\partial V}{\partial H} & \frac{\partial V}{\partial P} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2rHK - rH^2 + rKD - 2rHD - kKP}{K(H+D)} + \frac{H(rHK - rH^2 + rKD - rHD - kKP)}{K(H+D)^2} & -\frac{Hk}{H+D} \\ \frac{sP^2}{\gamma H^2} & \frac{s\gamma H - 2sP}{\gamma H} \end{bmatrix}$$

substitusi titik kesetimbangan ke matriks jacobi di atas sehingga diperoleh:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

di mana

$$a_{11} = rH_{**} \left[-\frac{1}{K} + \frac{\left(\frac{k}{r}\right) p_{**}}{(H_{**} + D)^2} \right]$$

$$a_{12} = -\frac{k H_{**}}{(H_{**} + D)}$$

$$a_{21} = \gamma s$$

$$a_{22} = -s$$

Adapun persamaan karakteristiknya adalah:

$$f(\lambda) = |L - \lambda I|$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \dots \text{(III.3.2)}$$

di mana

$$a = -(a_{11} + a_{22})$$

$$b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

yang mana salah satu koefisien a dan b adalah positif. Yang mana syarat $b > 0$ secara otomatis terpenuhi yaitu:

$$rsH_{**} \left[\frac{1}{K} - \frac{\alpha H_{**}}{(H_{**} + D)^2} + \frac{\alpha}{(H_{**} + D)} \right] > 0$$

syarat lainnya yaitu $a > 0$:

$$s - rH_{**} \left[-\frac{1}{K} + \frac{\alpha H_{**}}{(H_{**} + D)^2} \right] > 0 \quad \dots \text{(III.3.3)}$$

yang mana akan digunakan persamaan III.2.5 untuk H_{**} sesuai dengan persamaan (III.2.4) dan (III.2.6) sehingga persamaan III.3.3 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{s}{r} > \frac{2(\alpha - R)}{1 + \alpha + \beta + R} \quad \dots \text{(III.3.4)}$$

yang mana merupakan kriteria dari kestabilan. Untuk nilai α yang besar maka ruas kanan dapat mencapai $\frac{1}{\alpha}$ jika $\alpha > 1$ atau $(2\alpha - 1)$ jika $\alpha < 1$ (dengan batas $\beta \rightarrow 0$), dengan catatan bahwa $\alpha < \frac{1}{2}$ maka akan stabil untuk semua $\frac{s}{r}$.

Syarat kestabilan untuk persamaan III.3.4 ada atau tidak ada bergantung pada nilai parameter $\alpha, \beta, \frac{r}{s}$. Walaupun analisis kestabilan persamaan non linear menunjukkan bahwa model tersebut mempunyai titik kesetimbangan stabil center atau limit cycle stabil. Oleh sebab itu persamaan III.3.4 membagi daerahnya menjadi titik kesetimbangan stabil atau limit cycle stabil.

Untuk lebih jelasnya akan disimulasi dalam contoh berikut:

Contoh 3:

Tinjau kembali model yang berbentuk:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)^p}{H + D} \right] \\ \frac{dP}{dt} &= sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right] \end{aligned}$$

di mana:

$$r = 1.77689777, K = 50, k = 1, D = 1, s = 0.1, \gamma = 1$$

Titik kesetimbangannya adalah:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= (23.03196690, 23.03196690) \\ \bar{E}_2 &= (-2.170895791, -2.170895791) \\ \bar{E}_3 &= (50, 0) \end{aligned}$$

Dari titik kesetimbangan di atas diperoleh satu titik kesetimbangan yang berada dalam kuadran I yaitu

$$\bar{E}_1 = (23.03196690, 23.03196690).$$

Matriks jacobinya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

di mana:

$$a_{11} = \frac{1}{50} \frac{87.06799073H - 1.77689777H^2 + 88.84488850 - 50P}{H+1} + \frac{1}{50} \frac{H(87.06799073 - 3.55379554H)}{H+1} - \frac{1}{50} \frac{87.06799073H - 1.77689777H^2}{(H+1)^2} + \frac{88.84488850 - 50P}{(H+1)^2}$$

$$a_{12} = \frac{H}{H+1}$$

$$a_{21} = 0.1 \frac{P}{(H-P)} \frac{P(0.1H - 0.1P)}{H^2}$$

$$a_{22} = \frac{0.1H - 0.1P}{H} - 0.1 \frac{P}{H}$$

jadi matriks jacobinya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} 0.09999999828 & -0.9583887576 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$f(\lambda) = |J - \lambda I|$$

$$\lambda^2 + 0.172 \cdot 10^{-8} \lambda + 0.08583887593$$

maka diperoleh nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -0.8600000000 \cdot 10^{-9} - 0.2929827229 i$$

$$\lambda_2 = -0.8600000000 \cdot 10^{-9} + 0.2929827229 \cdot i$$

di mana pada persamaan di atas $a = 0.172 \cdot 10^{-8} > 0$ dan $b = 0.08583887593 > 0$,

$\alpha = 0.5627785779 > \frac{1}{2}$, $R = 0.05627785684$, $\beta = \frac{1}{50}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{s}{r} > \frac{2(\alpha - R)}{1 + \alpha + \beta + R}$$
$$0.05627785779 > 0.05627785684$$

Karena $\frac{s}{r} > \alpha$ maka titik kesetimbangannya stabil. Untuk mengetahui ada atau

tidaknya limit cycle pada persamaan maka digunakan Teorema Kolmogrov yaitu:

$$r = 1.77689777, K = 50, k = 1, D = 1, s = 0.1, H = 20, P = 20, A = 1, B = 10,$$
$$C = 5, \gamma = 1$$

maka:

$$1. \frac{\partial F}{\partial P} = P / ((H + 1)^2) - 0.03553795540 < 0$$
$$= 0.05 - 0.03553795540 < 0$$
$$= 0.01446204460 < 0$$

$$2. \frac{\partial F}{\partial P} = -H / (H + 1) < 0$$
$$= -0.05 < 0$$

$$3. \frac{\partial G}{\partial P} = -0.1 P / H < 0$$
$$= -0.005263157895 < 0$$

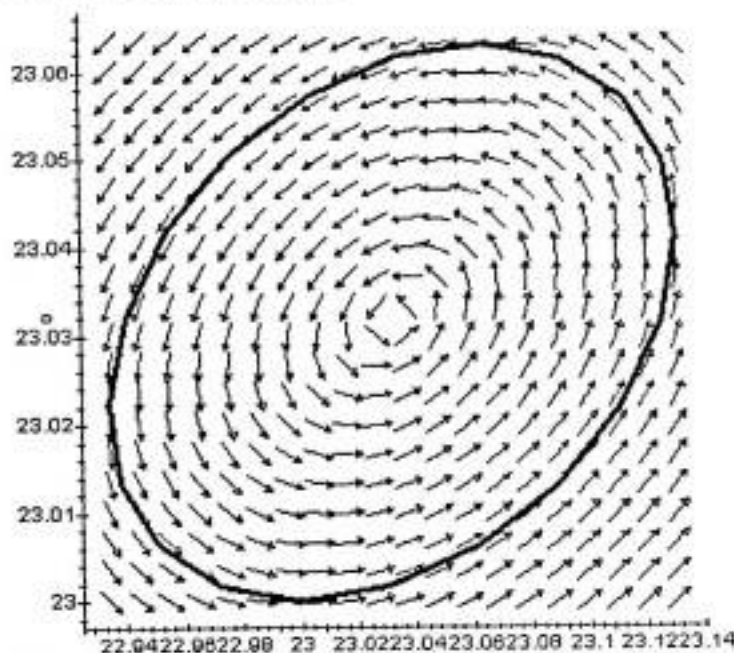
$$4. \frac{\partial G}{\partial H} = 0.1 P^2 / H^2 > 0$$
$$= 0.005540166204 > 0$$

$$5. F(0,1) = 0$$

$$6. G(5,0) = 0$$

$$7. F(50,0) = 0$$

Karena Teorema Kolmogorov terpenuhi pada persamaan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa persamaan tersebut mempunyai limit cycle. Adapun limit cycle dari persamaan tersebut adalah:



Gambar 7. Limit Cycle Dengan Titik Kesetimbangan (23.03196690, 23.03196690)

Pada gambar di atas dapat diketahui bahwa persamaan III.3.1 mempunyai limit cycle yang stabil yang mana arah trajektorinya menuju ke titik kesetimbangan dan kurvanya tertutup. Dimana $H[0]=23$, $P[0]=23$.

Contoh 4:

Tinjau kembali model yang berbentuk:

$$\frac{dH}{dt} = rH \left[1 - \frac{H}{K} - \frac{\left(\frac{k}{r}\right)P}{H+D} \right]$$
$$\frac{dP}{dt} = sP \left[1 - \frac{P}{\gamma H} \right]$$

di mana:

$$r = 1.666899977666668 \quad K = 50, \quad k = 1, \quad D = 1, \quad s = 0.1, \quad \gamma = 1$$

Titik kesetimbangannya adalah:

$$\bar{E}_1 = (21.34650304, 21.34650304)$$
$$\bar{E}_2 = (-2.342304025, -2.342304025)$$
$$\bar{E}_3 = (50, 0)$$

Dari titik kesetimbangan di atas diperoleh satu titik kesetimbangan yang berada dalam kuadran I yaitu

$$\bar{E}_1 = (23.03166632, 23.03166632).$$

Matriks jacobinya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

di mana:

$$a_{11} = \frac{1}{50} \frac{87.066973H - 1.776877H^2 + 88.843850 - 50P}{H+1} + \frac{1}{50} \frac{H(87.066973 - 3.553754H)}{H+1} - \frac{1}{50} \frac{87.066973H - 1.776877H^2}{(H+1)^2} + \frac{88.843850 - 50P}{(H+1)^2}$$

$$a_{12} = \frac{H}{H+1}$$

$$a_{21} = 0.1 \frac{P}{H} \frac{P(0.1H - 0.1P)}{H^2}$$

$$a_{22} = \frac{0.1H - 0.1P}{H} - 0.1 \frac{P}{H}$$

jadi matriks jacobinya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} 0.2008533676 & -0.9552502690 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$f(\lambda) = |J - \lambda I|$$

$$\lambda^2 - 0.1008533676\lambda + 0.07543969014$$

maka diperoleh nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 0.05042668380 + 0.2699941475 i$$

$$\lambda_2 = 0.05042668380 - 0.2699941475 i$$

di mana pada persamaan di atas $a = -0.1008533676 < 0$ dan $b = 0.07543969014 > 0$,

$\alpha = 0.5999160197 > \frac{1}{2}$, $R = 0.4737761413$, $\beta = \frac{1}{50}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{s}{r} > \frac{2(\alpha - R)}{1 + \alpha + \beta + R}$$

$$0.05999160197 > 0.1204951528$$

Karena $\frac{s}{r} > \alpha$ maka titik kesetimbangannya tidak stabil. Untuk mengetahui ada atau tidaknya limit cycle pada persamaan maka digunakan Teorema Kolmogrov

yaitu: $r=1.666899977666668, K=50, k=1, D=1, s=0.1, H=19, P=20, A=1$
 $B=5, C=50, \gamma=1$

maka:

$$1. \frac{\partial I'}{\partial P} = P / (H + 1)^2 - 0.03333799956$$
$$= 0.05 - 0.03333799956 < 0$$

$$2. \frac{\partial I'}{\partial P} = -H / (H + 1) < 0$$
$$= -0.05 < 0$$

$$3. \frac{\partial G}{\partial P} = -0.2 P / H < 0$$
$$= -0.005263157895 < 0$$

$$4. \frac{\partial G}{\partial H} = 0.1 P^2 / H^2 > 0$$
$$= 0.005540166204 > 0$$

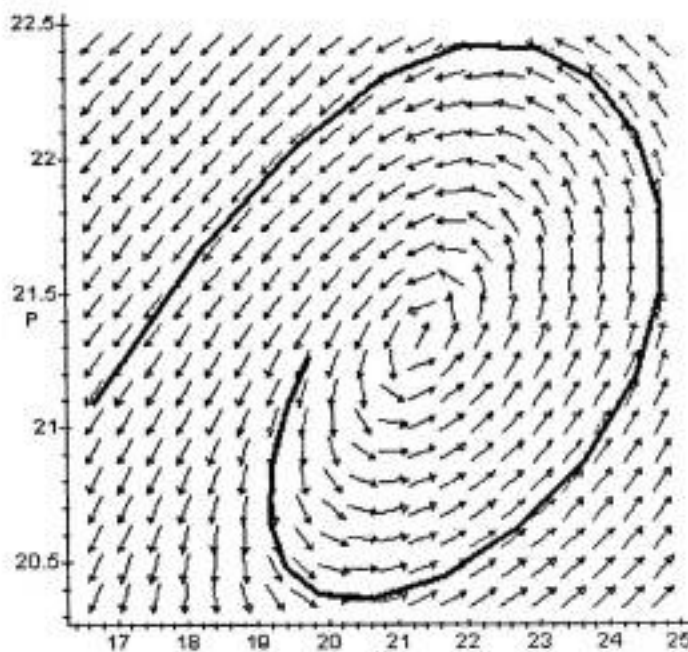
$$5. F(0,1) = 0$$

$$6. G(5,0) = 0$$

$$7. F(50,0) = 0$$



Karena Teorema Kolmogrov terpenuhi pada persamaan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa persamaan tersebut mempunyai limit cycle. Adapun limit cycle dari persamaan tersebut adalah:



Gambar 8. Limit Cycle Dengan Titik Kesetimbangan (21. 34650304, 21. 34650304)

Pada gambar di atas dapat diketahui bahwa persamaan III.1.3 mempunyai limit cycle yang tidak stabil sebab arah trajektori dari limit cycle menjauhi tempatnya. Di mana $H [0] = 19.74$, $P [0] = 21.27$

III.4 Interpretasi Model Dan Pembahasan

Berdasarkan gambar 7 dapat diketahui bahwa model dalam keadaan setimbang pada saat populasi mangsa dan populasi pemangsa di titik 23.03196990 yang mana populasi awal populasi mangsa adalah 23 dan populasi pemangsa adalah 23. Pada suatu saat populasi mangsa dan populasi pemangsa sama-sama bertambah besar seiring dengan waktu, dan pada waktu lain pertambahan populasi mangsa akan konstan tetapi pertumbuhan populasi pemangsa akan tetap bertambah besar. Dalam keadaan yang lain populasi mangsa akan habis dimakan

oleh pemangsa sehingga menyebabkan populasi mangsa akan habis. Yang mana pada gambar 7 populasi pemangsa dan populasi mangsa akan menuju ke titik kesetimbangan sehingga dapat disimpulkan bahwa model tersebut stabil center. Sedangkan pada gambar 8 populasi mangsa dan populasi pemangsa akan menjauhi titik kesetimbangan sehingga model tersebut tidak stabil.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

Model satu mangsa satu pemangsa yang berbentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= rH\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \frac{kPH}{H+D} \\ &= \frac{H(rHK - rH^2 + rKD - rHD - kKP)}{K(H+D)} \\ \frac{dP}{dt} &= sP\left(1 - \frac{P}{\gamma H}\right) \\ &= \frac{P(s\gamma H - sP)}{\gamma H}\end{aligned}$$

mempunyai titik kesetimbangan di kuadran pertama yaitu:

$$E_2 = (H_{..}, P_{..})$$

di mana:

$$\begin{aligned}1 - \frac{H}{K} - \frac{\alpha H}{H+D} &= 0 \\ H_{..} &= \frac{D(1 - \alpha - \beta + R)}{2\beta} \\ 1 - \frac{P}{\gamma H} &= 0 \\ P_{..} &= \gamma H_{..}\end{aligned}$$

yang memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a &= -(a_{11} + a_{22}) > 0 \\ b &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0\end{aligned}$$

atau dengan kata lain:

$$rsH_{..} \left[\frac{1}{K} - \frac{\alpha H_{..}}{(H_{..} + D)^2} + \frac{\alpha}{(H_{..} + D)} \right] > 0$$

dan

$$s - rH_{..} \left[-\frac{1}{K} + \frac{\alpha H_{..}}{(H_{..} + D)^2} \right] > 0$$

yang mana salah satu akarnya mempunyai bagian real yang negatif.

Apabila $\frac{s}{r} > \frac{2(\alpha - R)}{1 + \alpha + \beta + R}$ di mana

$$\alpha = \frac{k\gamma}{r} \quad \text{dan} \quad R = \left[(1 - \alpha - \beta)^2 + 4\beta \right]^{1/2}$$

$$\beta = \frac{D}{K}$$

jika $\alpha < 0.5$ maka stabil untuk semua $\frac{s}{r}$ dan jika $\alpha > 0.5$ maka tidak akan stabil untuk semua $\frac{s}{r}$.

Untuk menentukan ada atau tidak ada limit cycle pada model satu mangsa satu pemangsa di gunakan teorema kolmogrov. Dan apabila salah satu dari teoremakolmogrov tersebut tidak terpenuhi maka teorema kolmogrov tersebut membatasa bagian pada bidang $H - P$. Limit cycle dikatakan stabil apabila semua trajektori untuk limit cycle yang arah spiralnya tertutup pada saat $t \rightarrow \infty$, limit cycle dikatakan dalam keadaan semistabil apabila trajektori pada limit cycle di satu sisi spiral yang arah limit cycle pada sisi lain seakan meninggalkan titik kesetimbangannya pada saat $t \rightarrow \infty$ dan limit cycle dalam keadaan unstabil apabila trajektori dari limit cycle pada kedua spiral meninggalkan titik kesetimbangan.

4.2 Saran

Diharapkan agar mahasiswa dapat membentuk dan menganalisis limit cycle untuk model lebih dari satu mangsa satu pemangsa.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.
- Haberman, R. 1977. *Mathematical Models in Mechanical Vibrations, Population Dynamic and Traffic Flow*.
- Jeffries, C. 1989. *Mathematical Modeling In Ecology*. Birkhauser, Boston.
- Riogilang Drs.RH, *Persamaan Differensial*, Binacipta, Bandung 1983.
- William B.E. and Richard D.P.C. (1991). *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*. Fifth Edition, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Willems, J. L. 1970. *Stability Theory Of Dynamical Systems*. Thomas Nelson and Sons, London.