MENENTUKAN LINTASAN TERPENDEK DENGAN PENDEKATAN ALGORITMA

O L E H

IRZA MASDAYENI
85 03 028

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

1991

S K R I P S I

OLEH

IRZA MASDAYENI

85 03 028

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1991

MENENTUKAN LINTASAN TERPENDEK
DENGAN PENDEKATAN ALGORITMA

Skripsi untuk melengkapi tugas dan
memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar sarjana

OLEH

IRZA MASDAYENI

85 03 028

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1991

MENENTUKAN LINTASAN TERPENDEK DENGAN PENDEKATAN ALGORITMA

Disetujui oleh

Pembimbing Utama

(Prof. Dra Nurul Muchlisah, MS)

Pembimbing Pertama

(Drs Alimin Bado, MS)

Pada Tanggal,   Desember 1991

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT karena dengan izin dan perkenan-NYA jualah maka skripsi ini dapat dirampungkan sesuai rencana dan keinginan penulis.

Dalam penyusunan skripsi ini, partisipasi dari berbagai pihak tentu tidak dapat kami hindarkan, oleh karena itu perkenankanlah kami mengucapkan rasa hormat dan terima kasih kepada :

1. Bapak Rektor Universitas Hasanuddin
2. Bapak Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
3. Bapak Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
4. Ibu Prof. Dra Nurul Muchlisah, MS sebagai pembimbing utama dan Bapak Drs Alimin Bado,MS sebagai pembimbing pertama, yang telah banyak memberikan motivasi dan bimbingan dalam upaya penulisan dan penyempurnaan skripsi ini
5. Bapak-bapak dan Ibu-ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

6. Bapak staf tata usaha Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
7. Rekan-rekan mahasiswa Jurusan Matematika, juga kepada Dinihari Puspita, Dra Nurjaya Bangsawan, Dra Maryanti Manggau, Dra Enny Radjab, Dra Asni Mangina dan Dra Hasniaty Ramli
8. Kepada kedua orang tua kami yang tercinta Ayahanda A. Ma'mun Rauf dan ibunda Aszah Mashudi serta kedua adik kami Mirza Revelita dan Mercy Provita yang tidak henti-hentinya memberikan motivasi dan mendoakan kami dalam penyelesaian skripsi ini
9. Dan kepada yang terkasih A. Syahid NH Lasinrang yang telah banyak memberikan aspirasi dan motivasinya dari awal penyusunan skripsi ini hingga akhir penyelesaiannya.

Demikianlah pernyataan rasa terima kasih kami kepada semua pihak, semoga segala pengorbanan dan atensi yang diberikan mendapat rahmat dan berkah dari Allah SWT. Amien.

Ujung Pandang, Desember 1991

Penulis,

IRZA MASDAYENI

A B S T R A K

Pada tulisan ini dibahas mengenai lintasan "terpendek" suatu graph dengan algoritma Dijkstra. Algoritma Dijkstra digunakan dalam menentukan label pada titik simpulnya. Untuk memperoleh pengertian yang mendalam dan luas diberikan contoh yang dikenal dengan Persoalan Tukang Pos China, yang disamping menggunakan algoritma Dijkstra juga menggunakan sifat graph Euler dalam pemecahannya.

A B S T R A C T

The *shortest* path between two specific vertices s dan t given by Dijkstra algorithm is the most efficient algorithm. The method is based on assigning temporary labels to vertices. By an iteration prosedure one of the temporary labels becomes permanent to find the exact length of the shortest path from s to a certain vertex. As an example there is the solution of the Chinese Postman's problem, which is solved by an algorithm using the special properties of an Eulerian circuit.

DAFTAR ISI

Halaman

B A B I

PENDAHULUAN

I.1 LATAR BELAKANG DAN PERMASALAHAN

Teori graph berhubungan erat dengan berbagai bidang ilmu matematika seperti teori grup, teori matriks, analisa numerik, teori kemungkinan, operational research, topologi dan lain-lain.

Teori graph lahir dari permasalahan alam, yang diperkenalkan oleh *Euler* dengan persoalan jembatan Konigsberg, *Kirchoff* dengan rangkaian listriknya dan *Caley* tentang kimia organik isomernya.

Istilah graph banyak dijumpai hampir disetiap tempat dengan nama yang berbeda, misalnya : "struktur" pada teknik sipil, "jaringan" pada teknik elektro, "sosiogram", "struktur komunikasi" dan "struktur organisasi" pada ilmu-ilmu sosial dan ekonomi, "struktur molekul" pada kimia, "peta jalan" dan sebagainya.

Karena penggunaannya sangat luas, bidang studi teori graph telah berkembang dengan cepat selama tahun-tahun belakangan ini.

Dalam teori graph dikenal beberapa bentuk graph antara lain graph berarah dan graph tidak berarah.

Seperti teori matematika pada umumnya, maka teori graph mempunyai bagian yang murni dan bagian terapan. Dalam bagian yang murni semua bukti diberikan dengan tepat dimana satu-satunya alat bukti adalah logika formal, sedang dalam bagian terapan mempergunakan hasil dari teori murni. Dalam matematika murni menekankan pada teorema-teorema, sedang pada matematika terapan disamping teorema terutama ditekankan pada aplikasinya. Aplikasi dari teori graph sering terkait erat dengan operational research.

Pada bagian ini ditunjukkan sebuah graph yang merupakan aplikasi dari permasalahan yang dihadapi seorang tukang pos, sebagai berikut : Dalam suatu wilayah ada satu kantor pos. Seorang tukang pos tiap hari harus berangkat dari kantor pos untuk mengantarkan surat dari rumah ke rumah pada berbagai banyak jalan. Timbul masalah : Dapatkah ditunjukkan suatu rute (lintasan) yang harus dilalui tukang pos dari kantor pos (titik simpul awal) sampai pada tujuan (titik simpul akhir) dengan menggunalan waktu dan jarak tempuh yang tepat dan efisien.

Permasalahan berikut akan berhubungan dengan permasalahan lintasan terpendek sebagai berikut :

untuk pangkal titik simpul tertentu v_i *dapat dicari lintasan terpendek antara* v_i *dan seluruh titik simpul lainnya dimana* $v_i \in V$.

I.2 RUANG LINGKUP PEMBAHASAN

Materi pembahasan terdiri atas : Pengertian graph dan unsur-unsur graph, menentukan lintasan terpendek dan bentuk aplikasi lintasan terpendek.

I.3 ALASAN MEMILIH JUDUL

Aplikasi dari teori graph banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya yang terkait erat dengan operational research, seperti permasalahan tukang pos, yang sebelumnya telah dijelaskan pada bagian latar belakang dan permasalahan.

Dengan alasan tersebut maka penulis tertarik untuk mempelajari dan menuangkannya dalam bentuk tulisan dan diberi judul *Menentukan Lintasan terpendek dengan Pendekatan Algoritma.*

Dan tulisan ini merupakan tugas akhir untuk memenuhi pensyaratan dalam mencapai gelar sarjana S1 (strata 1), pada jurusan matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

B A B II

KONSEP DASAR

II.1 GRAPH DAN UNSUR-UNSUR GRAPH

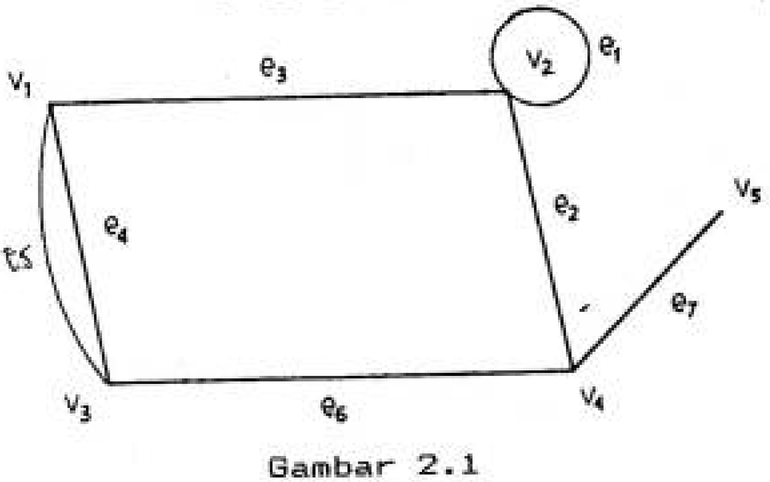
Secara intuisi, suatu graph terdiri atas *titik-titik dan sejumlah garis*, dimana setiap garis menghubungkan satu titik dengan titik yang lain. Titik tersebut sering disebut titik simpul dan garisnya disebut rusuk dari graph.

Himpunan titik simpul suatu graph biasanya dinyatakan dengan V dan himpunan rusuk dari graph dinyatakan dengan E.

Sebagai contoh gambar graph berikut :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$



Gambar 2.1

Graph dengan 5 titik simpul dan 7 rusuk

Rusuk e_3 yang berujung pada titik simpul v_1 dan v_2 secara singkat dapat ditulis $e_3 = (v_1,v_2)$, sedang rusuk e_4 dan e_5 sama-sama berasal dari titik simpul v_1 dan v_3.

Suatu graph ditentukan secara lengkap oleh himpunan titik-titik simpulnya dan himpunan rusuk-rusuknya, sehingga suatu graph G dinyatakan dengan G = (V,E) di mana :

- $V = \{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ yang disebut *himpunan titik simpul*
- $E = \{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\} \subseteq V\times V$ dimana $e_i=(v_i,v_j)$ yang disebut *himpunan rusuk*.

Banyaknya titik simpul dalam graph disebut *orde* dari graph.

Suatu rusuk e = (x,y), titik simpul x disebut *titik simpul awal* sedang y disebut *titik simpul akhir*. Suatu rusuk dalam graph G yang berbentuk (x,x) disebut *gelung (loop)*.

Rusuk e_1 pada gambar 2.1 adalah gelung sedang rusuk e_4 dan e_5 disebut rusuk pararel.

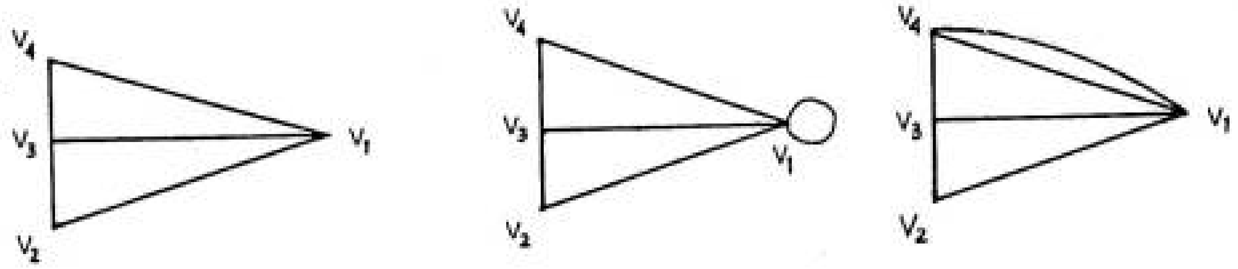
Apabila arah dari rusuk tidak ditentukan, maka graph G = (V,E) disebut *graph tidak berarah*.

Suatu graph tidak berarah disebut *graph sederhana* jika :

1. Graph tersebut tidak mempunyai gelung

2. Tidak lebih dari satu rusuk yang menghubungkan sebarang dua titik simpul.

Contoh graph sederhana dan tidak sederhana seperti gambar dibawah ini :



Graph sederhana *Graph tidak sederhana*

Gambar 2.2

II.2 INCIDENT, DERAJAT DAN SUBGRAPH

Jika sebuah titik simpul v_i adalah titik simpul akhir dari rusuk e_j, v_i dan e_j dikatakan *berhubungan langsung (incident)* satu sama lain. Pada gambar 2.1 terlihat bahwa rusuk e_2,e_6 dan e_7 adalah berhubungan langsung dengan titik simpul v_4. Dua rusuk non pararel disebut *berdekatan (adjacent)* jika keduanya berhubungan langsung pada titik simpul yang sama.

Rusuk e_2 dan e_7 juga titik simpul v_4 dan v_5 pada gambar

2.1 adalah berdekatan.

Derajat (degree) dari sebuah titik v_i pada graph G dinyatakan dengan $d(v_i)$ atau $deg(v_i)$ adalah jumlah dari rusuk yang berhubungan langsung dengan titik simpul v_i. Pada gambar 2.1 sebagai contoh,

$d(v_1) = d(v_3) \doteqdot d(v_4) = 3$ sedang $d(v_2) = 4$ dan $d(v_5) = 1$.

<u>*Lemma 2.2.1*</u>

Jumlah derajat dari semua titik simpul dalam graph G adalah dua kali jumlah rusuk.

Misalkan graph G mempunyai e rusuk dan n titik simpul, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e \qquad (2.1)$$

Bukti : setiap penambahan rusuk memberikan tambahan jumlah derajat G dengan dua. Menggunakan induksi matematika,

bila e = 1 maka

$d(G) = 2$ dan

bila e = 2 maka $d(G) = 4$

anggap e = k maka $d(G) = 2k$

bila e = k + 1 maka graph G mempunyai k

rusuk ditambah 1 rusuk lagi. Hal ini mengakibatkan derajat graph bertambah 2 dengan demikian untuk $e = k + 1$ memberikan $d(G) = 2k + 2 = 2(k + 1)$.

Maka jumlah derajat dari semua titik simpul dalam G adalah dua kali jumlah rusuk dalam G.

Dengan melihat gambar 2.1 maka:

$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) =$

$3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 14$ = dua kali jumlah rusuk.

Theorema 2.2.1 :

Jumlah titik simpul yang berderajat ganjil pada setiap graph adalah genap.

Bukti : misalkan graph G mempunyai n titik simpul.

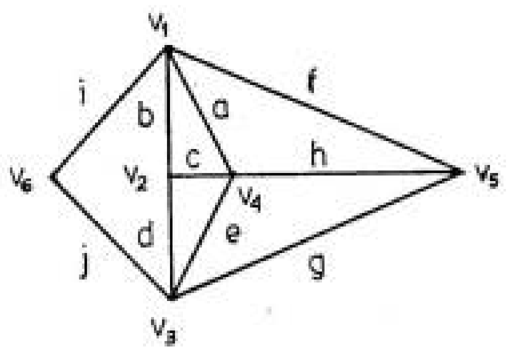
Dari n titik simpul, misal graph G mempunyai m titik simpul yang berderajat ganjil maka $d(v_k)$ nya ganjil. Dari persamaan :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{j=1}^{n-m} d(v_j) + \sum_{k=1}^{m} d(v_k) \qquad (2.2)$$

dan menurut lemma 2.2.1 maka $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ adalah genap. Dan dari n titik simpul terdapat n-m titik simpul yang berderajat genap maka $\sum_{j=1}^{n-m} d(v_j)$

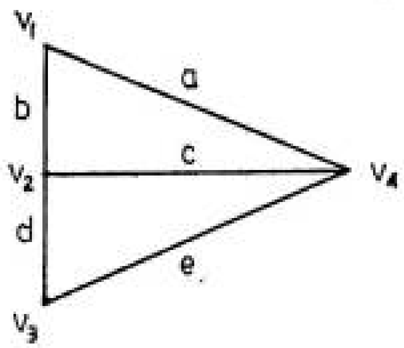
juga genap. Berdasarkan persamaan diatas pasti $\sum_{k=1}^{m} d(v_k)$ genap.

Sebuah graph G' disebut *subgraph* dari graph G jika semua titik simpul dan rusuk dari G' berada dalam graph G. Sebagai contoh graph dalam gambar 2.3 (b) adalah subgraph dari gambar 2.3 (a) dan gambar 2.3 (c) bukan merupakan subgraph dari gambar 2.3 (a).



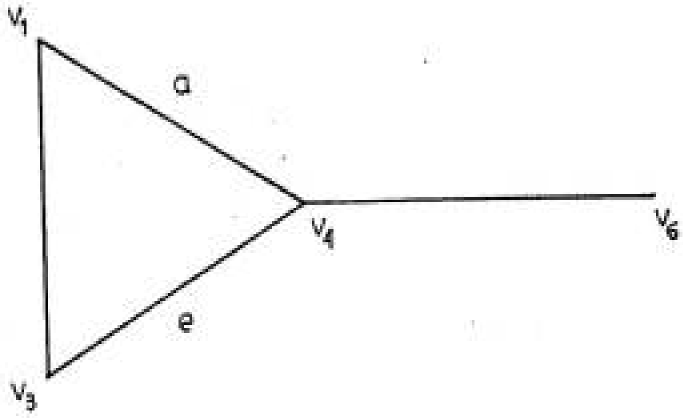
Gambar 2.3 (a)

Graph G



Gambar 2.3 (b)

Graph G' ⊂ G



Gambar 2.3 (c)

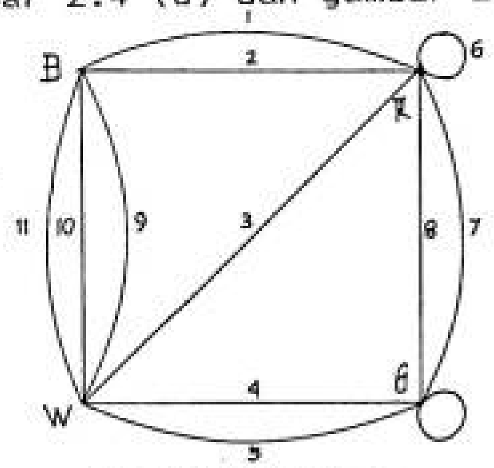
Graph G'' bukan subgraph G

Pengertian subgraph identik dengan pengertian sub himpunan. Subgraph termuat atau merupakan bagian dari suatu graph. Simbol dari teori himpunan, $G' \subset G$, digunakan dalam menyatakan G' subgraph dari G.

Menggunakan pengertian di atas jelas bahwa :

1. *Setiap graph terdiri dari subgraph*
2. *Titik simpul tunggal pada graph G adalah subgraph G*
3. *Rusuk tunggal dalam G dengan dua titik simpul akhirnya adalah subgraph G.*

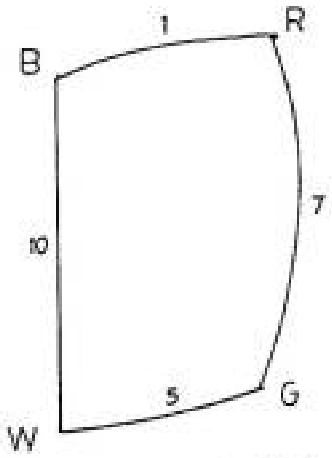
Dua atau lebih subgraph disebut *edge disjoint* bila kedua atau lebih subgraph tidak memiliki satupun rusuk yang sama tetapi boleh memiliki titik simpul yang sama. Sebagai contoh graph dalam gambar 2.4 (b) dan gambar 2.4 (c). Sedangkan pada dua atau lebih subgraph yang tidak memiliki titik simpul yang sama dinamakan *vertice disjoint*. Contoh dari vertice disjoint dapat dilihat pada gambar 2.4 (d) dan gambar 2.4 (e).



Gambar 2.4 (a)

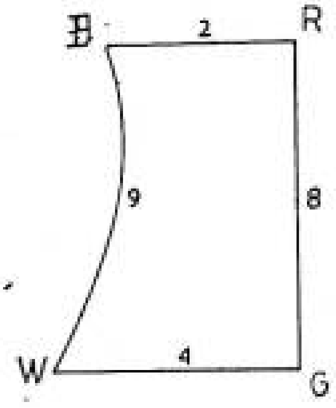
Graph G

Edge Disjoint



Gambar 2.4 (b)

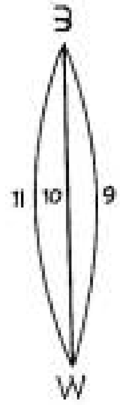
Graph G'



Gambar 2.4 (c)

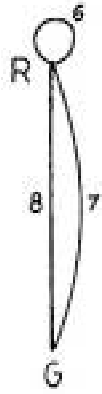
Graph G''

Vertice Disjoint



Gambar 2.4 (d)

Graph G'



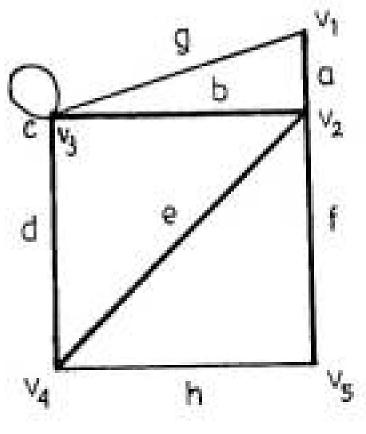
Gambar 2.4 (e)

Graph G''

II.3 JALAN, LINTASAN, SIRKUIT DAN KETERSAMBUNGAN

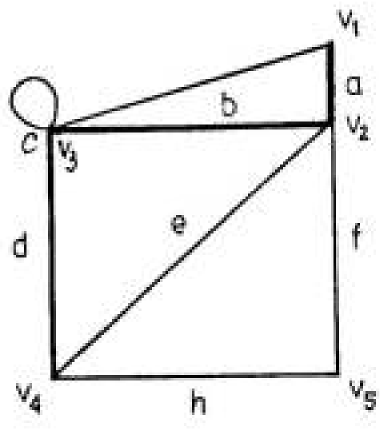
Jalan ialah barisan titik simpul dan rusuk yang silih berganti di mana suatu rusuk hanya terdapat satu kali dalam barisan itu. Dengan pengertian tersebut sebuah titik simpul dapat dilewati lebih dari satu kali pada sebuah jalan dan sebuah jalan selalu dimulai dan diakhiri dengan titik simpul.

Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.5 (a), yaitu barisan : $v_1 a\ v_2 b v_3 c\ v_3 d\ v_4 e\ v_2 f v_5$ adalah sebuah jalan. Himpunan titik simpul dan rusuk pada sebuah jalan dalam graph G adalah *subgraph G*.



Gambar 2.5 (a)

Jalan



Gambar 2.5 (b)

Lintasan

Titik simpul awal dan akhir pada sebuah jalan dikatakan *titik simpul terminal*. Titik simpul v_1 dan v_5 adalah *titik simpul terminal* pada jalan yang disebutkan diatas. Kemungkinan sebuah jalan dimulai dan diakhiri pada titik simpul yang sama. Jalan yang demikian disebut jalan tertutup, jalan yang tidak tertutup disebut jalan terbuka.

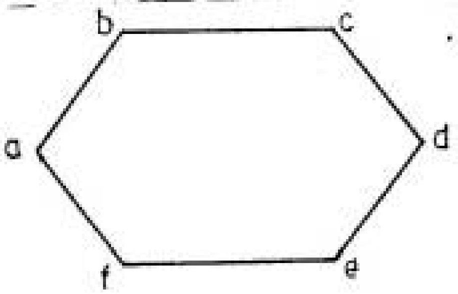
Lintasan adalah jalan yang memenuhi :

1. Jalan terbuka
2. Tidak melewati titik simpul yang sama lebih dari satu kali.

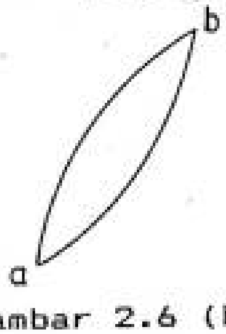
Dalam gambar 2.5 (b), $v_1 a\ v_2 b\ v_3 d\ v_4$ adalah sebuah lintasan, sedangkan $v_1 a\ v_2 b\ v_3 c\ v_3 d\ v_4 e\ v_2 f\ v_5$ bukan lintasan. Jumlah rusuk-rusuk dalam sebuah lintasan adalah panjang lintasan. Sebuah loop adalah sebuah jalan tetapi bukan lintasan.

Titik simpul terminal pada sebuah lintasan adalah *berderajat satu*, dan titik simpul antara (intermediate vertices) adalah *berderajat dua*. Derajat yang dimaksud adalah pada lintasan dan bukan pada graphnya.

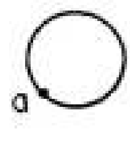
Sebuah jalan tertutup yang tidak mempunyai titik simpul yang berulang dinamakan *sirkuit* (jalan lingkar). Dengan demikian sebuah sirkuit tidak mempunyai jalan yang berpotongan. Gambar 2.5 (a), $v_2 b\ v_3 d\ v_4 e v_2$ adalah contoh sebuah sirkuit. Tiga sirkuit yang berbeda ditunjukkan pada gambar 2.6 (a), (b), (c) dan 2.6 (d) contoh graph yang bukan merupakan sirkuit.



Gambar 2.6 (a)

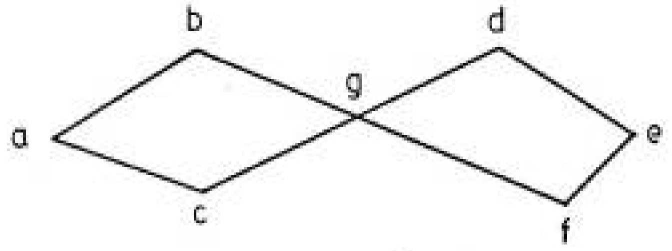


Gambar 2.6 (b)



Gambar 2.6 (c)

Tiga buah sirkuit



Gambar 2.6 (d)

Graph yang bukan sirkuit

Setiap titik simpul dalam sebuah sirkuit adalah *berderajat dua.*

Suatu graph disebut *tersambung* jika setiap pasang titik simpul dihubungkan oleh suatu lintasan. Dua titik simpul dalam graph G sebut v_i dan v_j, dikatakan *berelasi* bila $v_i = v_j$, atau $v_i \neq v_j$ dan terdapat lintasan dalam G yang menghubungkan v_i dan v_j, dan ditulis dengan tanda $v_i = v_j$, *untuk setiap i dan j.*

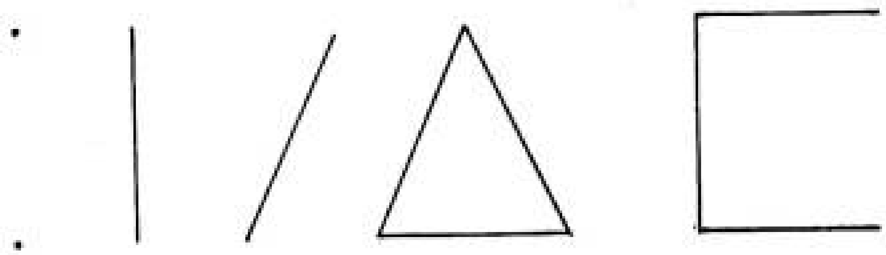
Jadi relasi ini merupakan *relasi eqivalensi*, karena :

1 . $v_i = v_i$ *(sifat refleksi)*

2 . $v_i = v_j, \longrightarrow v_j = v_i$ *(sifat simetri)*

3 . $v_i = v_j, v_j = v_k \longrightarrow v_i = v_k$ *(sifat transitif)*

Jika G suatu graph yang memuat relasi eqivalensi maka himpunan titik-titik simpul V akan terpartisi atas klas-klas eqivalensi. Masing-masing klas eqivalensi itu membentuk subgraph-subgraph tersambung dari G yang disebut *komponen tersambung dari G*. Contoh graph pada gambar 2.7 adalah graph yang terdiri atas 6 komponen tersambung.



Gambar 2.7

Graph dengan 6 komponen tersambung

II.4 BEBERAPA GRAPH KHUSUS

II.4.1 GRAPH EULER

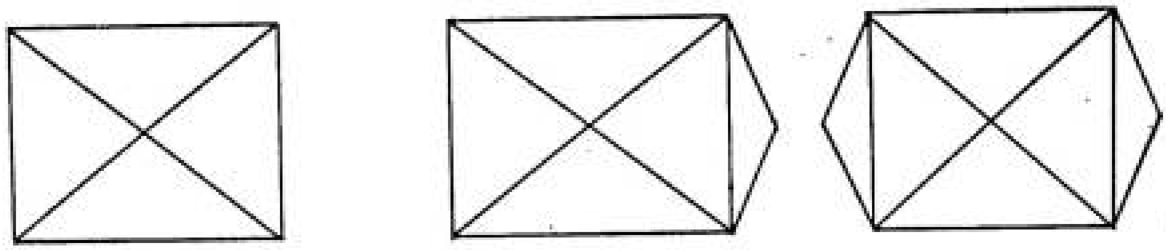
Graph Euler dinyatakan sebagai suatu graph G yang terdiri dari suatu lintasan yang melewati tiap rusuk dari G tepat satu kali, dimulai dari titik awal kesemua titik dari G dan kembali ketitik awal tersebut.

Definisi 2.4.1 :

Suatu graph tersambung disebut graph Euler jika terdapat lintasan tertutup yang melewati semua rusuk dalam G hanya sekali saja.

Apabila syarat ketertutupan dihapuskan maka graph G ini disebut *graph semi-Euler*.

Berikut ini merupakan contoh graph bukan Euler, graph semi-Euler dan graph Euler (gambar 2.8).



Gambar 2.8

Graph bukan Euler *Graph semi-Euler* *Graph Euler*

Ciri-ciri lain yang dimiliki graph Euler dapat dilihat pada theorema berikut.

Theorema 2.4 1 :

Jika G adalah graph tersambung, ketiga pernyataan *dibawah ini adalah pernyataan yang eqivalen :*

1. G adalah graph Euler

2. Setiap titik simpul dari G memiliki derajat yang genap

3. Himpunan rusuk-rusuk dari G dapat dipisah-pisahkan menjadi jalan-jalan lingkar.

Bukti : 1. Akan dibuktikan jika *1* benar maka *2* benar.

Misalkan T adalah jalan lingkar Euler dari G. Karena T adalah lintasan tertutup, maka setiap kali melewati titik simpul dalam T, akan memberikan dua derajat pada titik simpul itu. T adalah suatu jalan lingkar, berarti setiap rusuk muncul sekali saja dalam T, maka derajat setiap titik simpul dalam G adalah genap.

2. Akan dibuktikan bahwa jika *2* benar maka *3* benar.

G adalah graph tersambung dan nontrivial, setiap titik simpulnya mempunyai derajat paling sedikit dua, maka G memuat jalan lingkar Z. Penghilangan rusuk pada Z menghasilkan suatu subgraph G_1 yang setiap titik simpulnya masih berderajat genap. Jika G_1 tidak mempunyai rusuk, berarti *3* benar; bila tidak, berarti masih memuat jalan lingkar. Jika penghilangan rusuk-rusuk pada jalan lingkar tersebut diulangi terus, akan diperoleh graph G_n tak tersambung. Berarti G dapat dikelompokkan kedalam n jalan lingkar.

3. Akan dibuktikan bahwa jika *3* benar maka *1* benar.

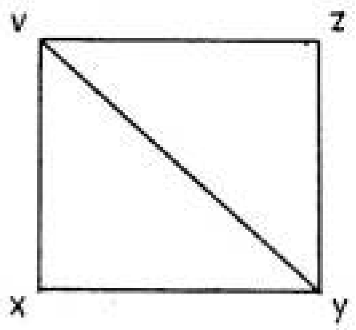
Misalkan Z_1 adalah jalan lingkar dari G. Jika G hanya terdiri dari Z_1 saja, berarti G adalah graph Euler. Sebaliknya jika terdapat jalan lingkar yang lain misalkan Z_2 yang bersekutu dengan Z_1. Misalkan v adalah titik simpul persekutuan dari Z_1 dan Z_2, yang merupakan jalan tertutup yang memuat semua rusuk dari kedua jalan lingkar tersebut. Dengan melanjutkan proses ini, kita dapat menentukan sebuah jalan tertutup yang memuat semua rusuk dari G; maka G adalah graph Euler.

II.4.2 GRAPH HAMILTON

Graph Hamilton pertama kali ditemukan oleh seorang ahli matematika bernama *Sir William Hamilton*. Graph ini mirip dengan graph Euler ialah suatu graph yang memiliki suatu lintasan tertutup yang melewati semua titik simpul dari graph itu, dengan syarat bahwa setiap titik simpul hanya dilewati sekali saja. Karena itu graph yang memenuhi syarat diatas dinamakan *graph Hamilton*.

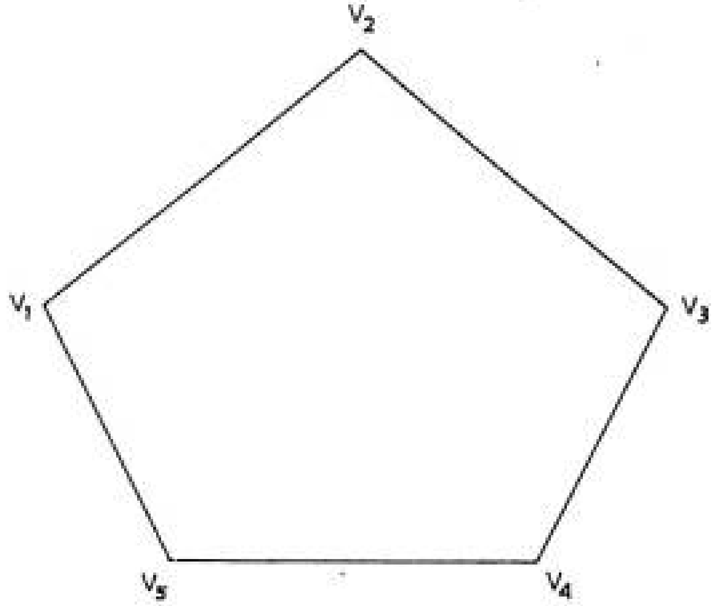
Definisi 2.4.2 :

Suatu graph G dikatakan graph Hamilton jika pada G terdapat suatu lintasan tertutup yang melewati setiap titik simpulnya sekali saja.



Gambar 2.9

Graph Hamilton



Gambar 2.10

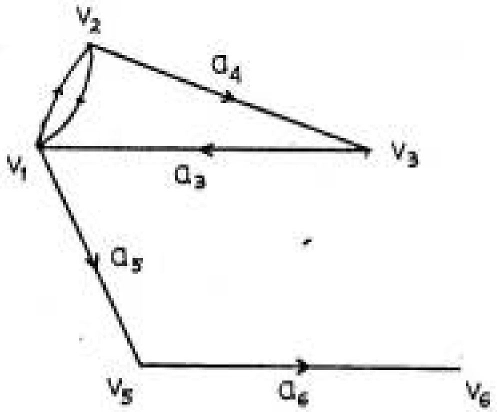
Graph hamilton yang merupakan graph Euler

II.5 GRAPH BERARAH

II.5.1 G R A P H

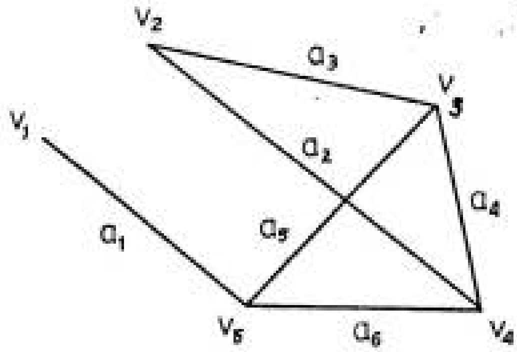
Misalkan E adalah himpunan rusuk-rusuk suatu graph. Jika setiap unsur-unsur E mempunyai arah maka dikatakan busur dan graphnya disebut *graph berarah*. Dengan demikian setiap graph berarah mempunyai *titik simpul awal dan titik simpul akhir.*

Graph G biasa dinyatakan dengan (V,Γ) di mana V adalah himpunan titik simpul dan Γ adalah pemetaan dari V ke V. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.11 di bawah ini :



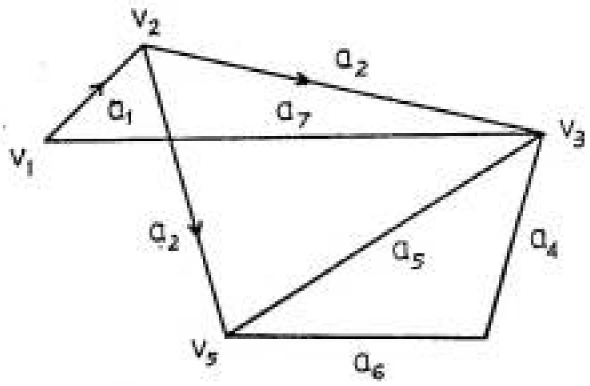
Gambar 2.11 (a)

Graph berarah



Gambar 2.11 (b)

Graph tidak berarah



Gambar 2.11 (c)

Gabungan graph berarah dan tidak berarah

Untuk gambar graph berarah 2.11 (a) :

$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_5\}$ di mana v_2 dan v_5 adalah titik simpul akhir dari busur yang berawal di v_1

$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\}$

$\Gamma(v_3) = \{v_1\}$

$\Gamma(v_4) = \emptyset$

$\Gamma(v_5) = \{v_4\}$

Dan untuk gambar graph tidak berarah 2.11 (b) :

$\Gamma(v_1) = \{v_5\}$

$\Gamma(v_2) = \{v_3, v_4\}$

$\Gamma(v_3) = \{v_2, v_4, v_5\}$

$\Gamma(v_4) = \{v_2, v_3, v_5\}$

$\Gamma(v_5) = \{v_1, v_3, v_4\}$

$\Gamma^{-1}(v_i)$ dinamakan *prapeta*. Dapat ditunjukkan pada gambar 2.11 (a) :

$\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_2, v_3\}$

$\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1\}$ dan ini hanya berlaku pada *graph berarah*.

Pada graph tidak berarah dapat dipandang bahwa $\Gamma(v_i) = \Gamma^{-1}(v_i)$ untuk semua $v_i \in V$. Bila Γ tidak beroperasi pada satu titik simpul tetapi pada himpunan titik simpul seperti $V_q = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ maka :

$$\Gamma(V_q) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \ldots \cup \Gamma(v_q) \qquad (2.3)$$

$\Gamma(v_q)$ adalah himpunan titik simpul $v_j \in V$ untuk paling sedikit satu busur (v_i,v_j) yang termuat dalam G (untuk beberapa $v_i \in V_q$).

Maka pada gambar 2.11 (a) :

$\Gamma(\{v_2,v_5\}) = \Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_5) = \{v_1,v_3\} \cup \{v_4\} = \{v_1,v_3,v_4\}$

$\Gamma(\{v_1,v_3\}) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_3) = \{v_2,v_5\} \cup \{v_1\} = \{v_1,v_2,v_5\}$

Untuk *pemetaan ganda* $\Gamma(\Gamma(v_i)) = \Gamma^2(v_i)$. Dan untuk *pemetaan triple* $\Gamma(\Gamma(\Gamma(v_i))) = \Gamma^3(v_i)$ dan seterusnya.

Pada gambar 2.11 (a) :

$$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2,v_5\}) = \Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_5)$$
$$= \{v_1,v_3\} \cup \{v_4\} = \{v_1,v_3,v_4\}$$

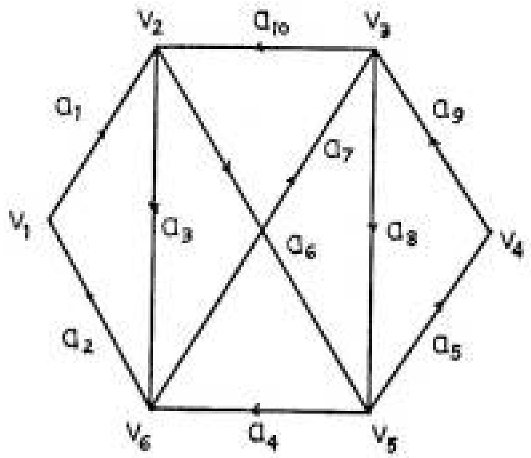
$$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\Gamma(\Gamma(v_1)))$$
$$= \Gamma(\Gamma(\{v_2,v_5\})) = \Gamma(\Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_5))$$
$$= \Gamma(\{v_1,v_3\} \cup \{v_4\}) = \Gamma(\{v_1,v_3,v_4\})$$
$$= \{v_1,v_2,v_5\}$$

Untuk $\Gamma^{-2}(v_2) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_2) = \Gamma^{-1}(\{v_1\}) = \{v_5\}$

Dan $\Gamma^{-3}(v_2) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_2))) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(\{v_1\}))$
$$= \Gamma^{-1}(\{v_5\}) = \{v_1\}$$

II.5.2 LINTASAN

Lintasan pada graph berarah adalah suatu barisan busur-busur di mana titik simpul akhir yang satu merupakan titik simpul awal untuk busur berikutnya. Dalam gambar 2.12 terlihat barisan busur-busur sebagai berikut yang merupakan contoh dari lintasan graph berarah.



Gambar 2.12

- a_6, a_5, a_9, a_8, a_4 .... (1)
- a_1, a_6, a_5, a_9 .... (2)
- $a_1, a_6, a_5, a_9, a_{10}, a_6, a_4$ .... (3)

Dua titik simpul v_i dan v_j disebut *adjacent dalam graph berarah* jika kedua titik simpul tersebut berhubungan langsung pada satu busur yang sama, di mana v_i adalah titik simpul awal sedang v_j merupakan titik simpul akhir. Pada gambar 2.12 terlihat bahwa titik simpul v_2 berdekatan dengan titik simpul v_6, titik simpul v_4 berdekatan dengan titik simpul v_3 tetapi titik simpul v_3 tidak berdekatan dengan titik simpul v_4 begitu juga untuk titik simpul v_6 dan v_2.

Yang dimaksud dengan *lintasan sederhana* (*simple path*) dalam graph berarah adalah lintasan yang tidak melalui dua kali busur yang sama. Pada lintasan (1) dan (2) di atas merupakan *lintasan sederhana* tetapi lintasan (3) *bukan lintasan sederhana*, karena lintasan (3) tersebut melalui busur a_6 dua kali.

Dan yang dimaksud dengan *lintasan elementer* (*elementary path*) dalam graph berarah adalah lintasan yang tidak melalui dua kali titik simpul yang sama. Lintasan (2) adalah *lintasan elementer* sedang lintasan (1) dan (3) *bukan lintasan elementer*. Lintasan (1) adalah *lintasan sederhana* dan *bukan lintasan elementer*, lintasan (2) adalah *lintasan sederhana* dan *lintasan elementer* tetapi lintasan (3) *bukan lintasan sederhana dan bukan pula lintasan elementer*.

II.5.3 BOBOT DAN PANJANG LINTASAN

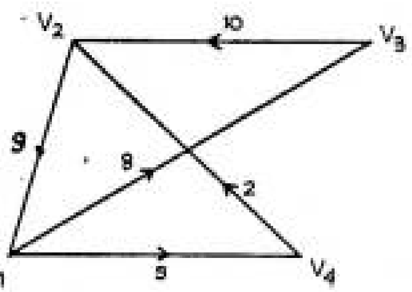
Penamaan c_{ij} diasosiasikan dengan sebuah busur (v_i, v_j). Penamaan tersebut dapat dikatakan *bobot*, *panjang* atau *biaya/nilai*. Busur yang dibobot disebut *busur berbobot (arc weight)*. Demikian juga pada titik simpul yang dibobot disebut *titik simpul berbobot (vertex weight)*, yaitu w_i adalah bobot titik simpul v_i.

Misalkan lintasan μ dinyatakan dengan barisan busur-busur $a_1, a_2, \ldots, a_q$ maka panjang atau nilai lintasan μ dinyatakan $l(\mu)$ dan didefinisikan :

$$l(\mu) = \sum_{(v_i, v_j) \in \mu} C_{ij} \qquad (2.4)$$

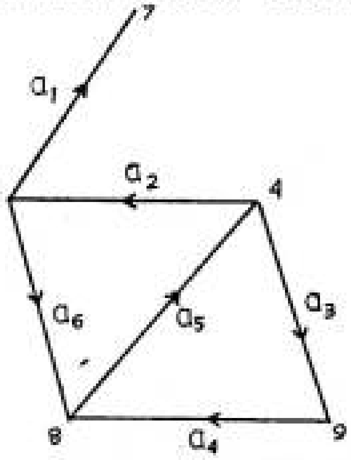
Pengertian panjang, bobot, nilai/biaya adalah bermakna sama kecuali bila digunakan pada hal-hal tertentu dapat diberikan arti yang lain. *Kardinal* suatu lintasan adalah bilangan yang menyatakan banyaknya busur dalam lintasan tersebut.

Dalam gambar 2.13 dapat dilihat contoh busur berbobot dan titik simpul berbobot.



Gambar 2.13 (a)

Busur berbobot



Gambar 2.13 (b)

Titik simpul berbobot

II.5.4 DERAJAT TITIK SIMPUL

Banyaknya busur yang keluar pada titik simpul v_i disebut *derajat luar (outdegree)* yang dinyatakan dengan $d_O(v_i) = |\Gamma(v_i)|$ dan banyaknya busur yang masuk pada titik simpul v_i disebut *derajat dalam (indegree)* yang dinyatakan dengan $d_t(v_i) = |\Gamma^{-1}(v_i)|$ di mana $|\Gamma(v_i)|$ dan $|\Gamma^{-1}(v_i)|$ adalah banyaknya unsur dalam himpunan $\Gamma(v_i)$ dan $\Gamma^{-1}(v_i)$.

Menurut gambar 2.12, outdegree dari x_6 dinyatakan dengan : $d_o(v_6) = |\Gamma\ (v_6)| = |\ \phi\ | = 0$

dan indegree dari x_6 dinyatakan dengan :

$d_t(v_6) = |\Gamma^{-1}(v_6)| = |\{v_1,v_2,v_3,v_5\}| = 4$

Jumlah outdegree atau indegree dari semua titik simpul pada sebuah graph adalah sama dengan jumlah busur-busur dari graph G.

$$\sum_{=1}^{n} d_o(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d_t(v_i) = m \qquad (2.5)$$

di mana n adalah jumlah titik simpul dan m adalah jumlah dari busurnya.

$$d_o(v_1) = |\Gamma(v_1)| = |\{v_1,v_6\}| = 2$$
$$d_o(v_2) = |\Gamma(v_2)| = |\{v_5,v_6\}| = 2$$
$$d_o(v_3) = |\Gamma(v_3)| = |\{v_2,v_5,v_6\}| = 3$$

$$d_o(v_4) = |\Gamma(v_4)| = |\{v_3\}| = 1$$

$$d_o(v_5) = |\Gamma(v_5)| = |\{v_4, v_6\}| = 2$$

$$d_o(v_6) = |\Gamma(v_6)| = |\{\ \}| = 0$$

$$\text{Jadi} \sum_{i=1}^{6} d_o(v_i) = d_o(v_1) + d_o(v_2) + d_o(v_3) + d_o(v_4) + d_o(v_5) + d_o(v_6)$$
$$= 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 0 = 10$$

$$d_t(v_1) = |\Gamma^{-1}(v_1)| = |\{\ \}| = 0$$

$$d_t(v_2) = |\Gamma^{-1}(v_2)| = |\{v_1, v_3\}| = 2$$

$$d_t(v_3) = |\Gamma^{-1}(v_3)| = |\{v_4\}| = 1$$

$$d_t(v_4) = |\Gamma^{-1}(v_4)| = |\{v_5\}| = 1$$

$$d_t(v_5) = |\Gamma^{-1}(v_5)| = |\{v_2, v_3\}| = 2$$

$$d_t(v_6) = |\Gamma^{-1}(v_6)| = |\{v_1, v_2, v_3, v_5\}| = 4$$

$$\text{Jadi} \sum_{i=1}^{6} d_t(v_i) = d_t(v_1) + d_t(v_2) + d_t(v_3) + d_t(v_4) + d_t(v_5) + d_t(v_6)$$
$$= 0 + 2 + 1 + 1 + 2 + 4 = 10$$

$$\text{Maka} \sum_{i=1}^{6} d_c(v_i) = \sum_{i=1}^{6} d_t(v_i) = \textit{jumlah busur} = 10$$

Untuk graph tidak berarah $G = (V, \Gamma)$, derajat dari titik simpul v_i dinyatakan dengan $d(v_i) \equiv |\Gamma(v_i)|$.

B A B III

LINTASAN TERPENDEK

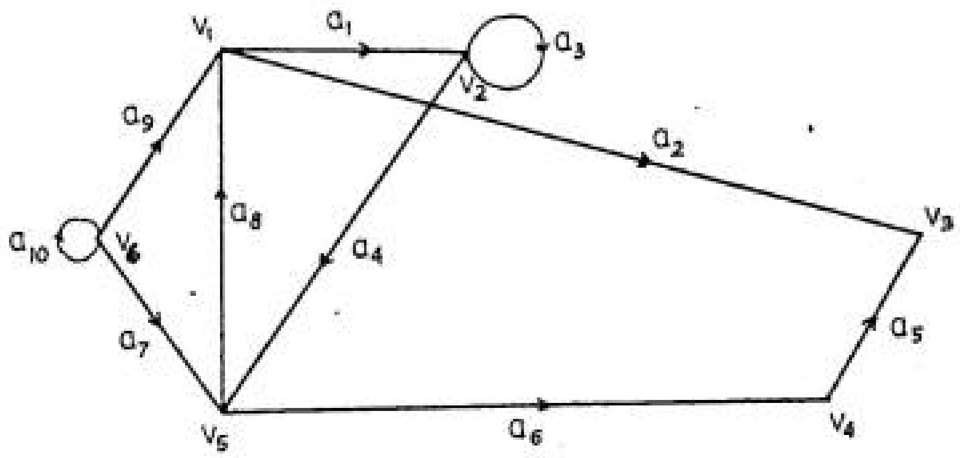
III.1 MATRIKS DALAM GRAPH

III.1.1 MATRIKS ADJACENCY (MATRIKS KEBERDEKATAN)

Matriks adjacency dinyatakan dengan $A = (a_{ij})$ didefinisikan :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jika busur } (v_i, v_j) \text{ berdekatan di G} \\ 0 \text{ jika busur } (v_i, v_j) \text{ tidak berdekatan di G} \end{cases}$$

Matriks adjacency dalam graph G akan diperlihatkan pada gambar 3.1 dibawah.



gambar 3.1

Matriks adjacency :

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Dari matriks A dapat dilihat bahwa jumlah elemen baris v_i dalam matriks menyatakan banyaknya busur yang keluar pada titik simpul v_i (outdegree) dan elemen kolom v_i menyatakan banyaknya busur yang masuk pada titik simpul v_i (indegree). Himpunan unsur-unsur dalam baris v_i yang mempunyai nilai 1 adalah himpunan $\Gamma(v_i)$ dan himpunan unsur-unsur dalam kolom v_i yang bernilai 1 adalah himpunan $\Gamma^{-1}(v_i)$.

III.1.2 MATRIKS PENCAPAIAN DAN JANGKAUAN

Matriks pencapaian $R = (r_{ij})$ didefinisikan :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jika titik simpul } v_j \text{ dicapai dari titik} \\ \text{simpul } v_i \\ 0 \text{ untuk yang lain.} \end{cases}$$

Untuk mendapatkan r_{ij} terlebih dahulu ditentukan $R(v_i)$ yang merupakan himpunan titik simpul yang dapat dicapai dari titik simpul v_i dari graph G.

Untuk suatu titik simpul v_i dari graph G maka:

$$R(v_i) = (v_i) \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^p(v_i) \qquad (3.1)$$

Matriks pencapaian dapat dikonstruksi sebagai berikut :

- *tentukan $R(v_i)$ untuk semua titik simpul $v_i \in V$ seperti yang disebutkan di atas, selanjutnya $r_{ij} = 1$ jika $v_j \in R(v_i)$ dan $r_{ij} = 0$ untuk yang lain. Hasil matriks $R = (r_{ij})$ disebut matriks pencapaian.*

Matriks jangkauan $Q = (q_{ij})$:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jika titik simpul } v_j \text{ dapat dijangkau dari } v_i \\ 0 \text{ untuk yang lain.} \end{cases}$$

Himpunan jangkauan $Q(v_i)$ dari graph G adalah himpunan titik simpul yang dapat dijangkau dari titik simpul v_i.

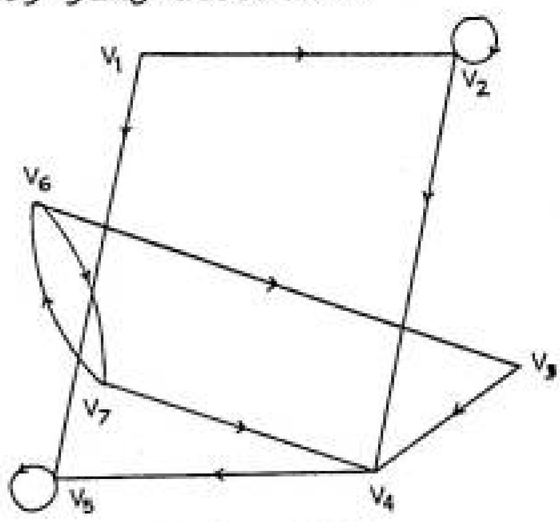
Himpunan $Q(v_i)$ sama seperti himpunan $R(v_i)$:

$$Q(v_i) = (v_i) \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{-p}(v_i) \quad (3.2)$$

di mana $\Gamma^{-2}(v_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_i))$

Kolom v_i dari matriks Q ($q_{ij} = 1$ jika $v_j \in$ Q(v) dan $q_{ij} = 0$ untuk yang lain), sama dengan baris v_i dari matriks R dimana Q = R' (Q = transpose dari matriks R).

Contoh : *Tentukan matriks pencapaian dan jangkauan dari graph G pada gambar 3.2 dengan matriks adjacency yang diberikan.*



Gambar 3.2

Matriks adjacency dari graph G :

$$
A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Jadi himpunan pencapaian dari gambar 3.2 adalah :

$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2,v_5\} \cup \{v_2,v_4,v_5\} \cup \{v_2,v_4,v_5\}$

$\quad = \{v_1,v_2,v_4,v_5\}$

$R(v_2) = \{v_2\} \cup \{v_2,v_4\} \cup \{v_2,v_4,v_5\} \cup \{v_2,v_4,v_5\}$

$\quad = \{v_2,v_4,v_5\}$

$R(v_3) = \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\}$

$\quad = \{v_3,v_4,v_5\}$

$R(v_4) = \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\}$

$\quad = \{v_4,v_5\}$

$R(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\}$

$\quad = \{v_5\}$

$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3,v_7\} \cup \{v_4,v_6\} \cup \{v_3,v_5,v_7\}$

$\quad \cup \{v_4,v_5,v_6\}$

$\quad = \{v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$

$$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\}$$

$$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

Matriks pencapaiannya :

$$R = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

Dan matriks jangkauannya :

$$Q = R' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

III.2. LINTASAN TERPENDEK

Permasalahan lintasan terpendek adalah bagaimana menentukan lintasan terpendek dari titik simpul awal tertentu $s \in V$ ke titik simpul akhir tertentu $t \in V$. Dalam hal ini akan terlihat bahwa lintasan yang demikian memuat $t \in R(s)$, dimana $R(s)$ adalah *himpunan pencapaian* dari titik simpul s seperti yang dijelaskan pada bagian III.1.2.

Pada kasus sesuai dengan uraian diatas yang dimaksud dengan nilai α_{ij} adalah busur bernilai pada matriks $A = [\alpha_{ij}]$ dalam graph $G = (V,\Gamma)$.

Elemen α_{ij} dari matriks A bisa bernilai *positif, negatif atau nol.*

Pada sub bab berikut ini akan diberikan permasalahan pokok dalam menentukan lintasan terpendek yaitu : *untuk titik simpul awal tertentu s, tentukan lintasan terpendek dari s ke titik simpul tertentu yang lain.*

Sering dijumpai dalam praktek bahwa lintasan terpendek tidak hanya satu tetapi mungkin juga dua, tiga dan seterusnya. Dengan informasi ini diharapkan dapat ditemukan lintasan terpendek yang *terbaik*.

III.2.1 LINTASAN TERPENDEK ANTARA DUA TITIK SIMPUL s DAN t

Pada bagian ini akan dipergunakan algoritma untuk menentukan *label* sebagai dasar dalam menggambarkan lintasan terpendek.

Setiap panjang lintasan terpendek dari s ke suatu titik simpul tertentu biasanya dinyatakan dengan angka yang ditulis pada titik simpul tersebut.

Apabila : $l(v_i')$ = panjang lintasan titik simpul v_i' sebelum titik simpul v_i

$a(v_i', v_i)$ = nilai titik simpul v_i' yang berdekatan dengan titik simpul v_i pada matriks A

$l(v_i)$ = panjang lintasan titik simpul v_i dari titik simpul awal,

dimana v_i' adalah titik simpul sebelum v_i pada lintasan terpendek dari s ke v_i. Maka untuk menentukan lintasan terpendek yang dimaksud adalah dengan menerapkan secara berulang-ulang persamaan (3.3) dibawah ini.

$$l(v_i') + a(v_i', v_i) = l(v_i) \qquad (3.3)$$

Sedangkan lintasan terpendek dari s ke beberapa titik simpul tertentu v_i akan berbentuk sebuah '*pohon berarah*', dengan s sebagai akar (*root*).

Sesuai dengan penjelasan pada III.2 bahwa a_{ij} bisa positif, negatif atau nol, sebagai langkah awal akan ditinjau dahulu untuk $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap i,j kemudian untuk $a_{ij} \gtrless 0$.

III.2.2 KASUS NILAI MATRIKS NON NEGATIF

Algoritma yang paling efisien untuk memecahkan permasalahan lintasan terpendek dari s ke t akan diperkenalkan oleh *Dijkstra*. Secara umum methoda ini menjadi dasar dalam menentukan *label sementara* dari titik simpul. Pada setiap perulangan hanya satu dari *label sementara* berubah menjadi *label tetap*, ini menyatakan *panjang lintasan terpendek dari s ke titik simpul yang dikehendaki*.

III.2.2.1 ALGORITMA DIJKSTRA ($a_{ij} \geq 0$)

Misalkan $l(v_i)$ adalah label pada titik simpul v_i.

Permulaan :

Langkah 1 : Ambil $l(s) = 0$ dan ditandai sebagai label tetap, $l(v_i) = \infty$ untuk semua $v_i \neq s$ dan ditandai sebagai label sementara, ambil $p = s$.

Langkah 2 : Untuk semua $v_j \in \Gamma(p)$ yang mempunyai label sementara, diberi label baru menurut :

$$l(v_j) = min\ (l(v_i),\ l(p) + a(p,v_j)) \qquad (3.4)$$

Jika langkah ini berulang maka Γ tidak boleh memetakan ketitik tetap sebelumnya.

Langkah 3 : Tentukan v_i^* dimana $l(v_i^*) = \min \{l(v_i)\}$ dari semua label sementara pada titik simpul.

Langkah 4 : Nyatakan label tidak tetap v_i^* menjadi label tetap dengan mengambil $v_i^* = p$.

Langkah 5 : (i). Untuk lintasan dari s ke t saja yang diinginkan.

Jika p = t, $l(p)$ adalah lintasan terpendek yang diharapkan. Algoritma selesai.

Jika $p \neq t$ kembali ke langkah 2.

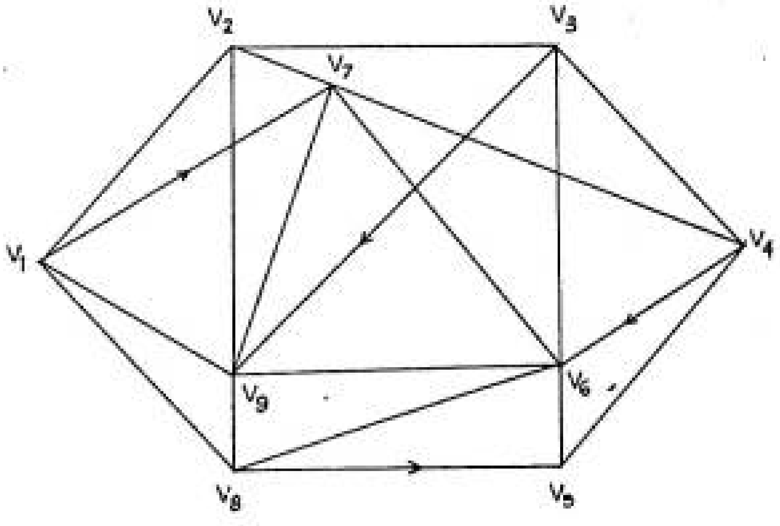
(ii).Untuk lintasan dari s ke setiap titik simpul yang diinginkan.

Jika semua titik simpul diberi label tetap, maka label itu akan menunjukkan panjang dari lintasan terpendek yang dikehendaki. Selesai.

Jika beberapa label masih sementara kembali ke langkah 2.

Contoh soal :

Perhatikan graph pada gambar 3.3 dimana busur tidak berarah dijelaskan sebagai busur dengan nilai yang sama dengan arah yang berbeda. Misalkan nilai matriks A seperti yang ditunjukkan dibawah. Untuk mendapatkan semua lintasan terpendek dari titik simpul v_1 ke titik simpul yang lain, kita gunakan Algoritma Dijkstra dan penambahan tanda (+) pada label jika label itu tetap.



Gambar 3.3

$A =$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1		10					3	6	12
v_2	10		18				2		13
v_3		18		25		20			7
v_4			25		5	16	4		
v_5				5		10			
v_6			20		10		14	15	9
v_7		2		4		14			24
v_8	6				23	15			5
v_9	12	13				9	24	5	

Langkah 1 : Misalkan v_1 adalah titik awal, maka $l(v_1) = 0^+$, $l(v_i) = \infty$ untuk setiap $v_i \neq v_1$, ambil $p = v_1$.

Perulangan pertama.

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_1) = \{v_2, v_7, v_8, v_9\}$ adalah label sementara. Menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min\ \{l(v_i), l(p) + a(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_2,

$l(v_2) = \min\ \{l(v_2), l(v_1) + a(v_1, v_2)\}$

$l(v_2) = \min\ \{\infty,\ 0^+ + 10\} = 10$

untuk titik simpul v_7,

$l(v_7) = \min\ \{l(v_7), l(v_1) + a(v_1, v_7)\}$

$l(v_7) = \min\ \{\infty,\ 0^+ + 3\} = 3$

untuk titik simpul v_8,

$l(v_8) = \min\,[l(v_8), l(v_1) + a(v_1,v_8)]$

$l(v_8) = \min\,\{\infty,\ 0^+ + 6\} = 6$

untuk titik simpul v_9,

$l(v_9) = \min\,\{l(v_9), l(v_1) + a(v_1,v_9)\}$

$l(v_9) = \min\,\{\infty,\ 0^+ + 12\} = 12$

Langkah 3 : $\min\,\{l(v_i)\} = \min\,\{\underset{v_2}{10}, \underset{v_7}{3}, \underset{v_8}{6}, \underset{v_9}{12}, \underset{v_3,v_4,v_5,v_6}{\infty}\}$

$= 3$

bersesuaian dengan titik simpul v_7.

Langkah 4 : v_7 menjadi label tetap, $l(v_7) = 3^+$, $p = v_7$.

Langkah 5 : Tidak semua titik simpul berlabel tetap kembali kelangkah 2.

Perulangan kedua.

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_7) = \{v_2,v_4,v_6,v_9\}$, adalah label sementara. Dari persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min\,\{l(v_i), l(p) + a(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_2,

$l(v_2) = \min\,\{l(v_2), l(v_7) + a(v_7,v_2)\}$

$l(v_2) = \min\,\{10,\ 3^+ + 2\} = 5$

untuk titik simpul v_4,

$l(v_4) = \min\,\{l(v_4), l(v_7) + a(v_7,v_4)\}$

$l(v_4) = \min\,\{\infty,\ 3^+ + 4\} = 7$

untuk titik simpul v_6,

$l(v_6) = \min\{l(v_6), l(v_7) + a(v_7, v_6)\}$

$l(v_6) = \min\{\infty, 3^+ + 14\} = 17$

untuk titik simpul v_9,

$l(v_9) = \min\{l(v_9), l(v_7) + a(v_7, v_9)\}$

$l(v_9) = \min\{12, 3^+ + 24\} = 12$

Langkah 3 : $\min\{l(v_i)\} = \min\{\underset{v_2}{5}, \underset{v_4}{7}, \underset{v_6}{17}, \underset{v_8}{6}, \underset{v_9}{12}, \underset{v_3, v_5}{\infty}\}$

$= 5$

bersesuaian dengan titik simpul v_2.

Langkah 4 : v_2 menjadi label tetap, $l(v_2) = 5^+$, $p = v_2$.

Langkah 5 : Kembali ke langkah 2.

Perulangan ketiga

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_7, v_9\}$ karena v_1 dan v_7 telah menjadi label tetap $\Gamma(v_2) = \{v_3, v_9\}$ menjadi label sementara, menurut persamaan 3.4 : $l(v_j) = \min\{l(v_i), l(p) + a(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_3,

$l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_2) + a(v_2, v_3)\}$

$l(v_3) = \min\{\infty, 5^+ + 18\} = 23$

untuk titik simpul v_9,

$l(v_9) = \min\{l(v_9), l(v_2) + a(v_2, v_9)\}$

$l(v_9) = \min \{12,\ 5^{+} + 13\} = 12$

Langkah 3 : $\min \{l(v_i)\} = \min \{\underset{v_3}{\underline{23}}, \underset{v_4}{\underline{7}}, \underset{v_6}{\underline{17}}, \underset{v_8}{\underline{6}}, \underset{v_9}{\underline{12}}, \underset{v_5}{\underline{\infty}}\}$

$= 6$

bersesuaian dengan titik simpul v_8.

Langkah 4 : v_8 menjadi label tetap, $l(v_8) = 6^{+}$, $p = v_8$

Langkah 5 : kembali kelangkah 2.

Perulangan keempat.

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_8) = \{v_1, v_5, v_6, v_9\}$ karena v_1 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_8) = \{v_5, v_6, v_9\}$ menjadi label sementara, menurut persamaan 3.4 : $l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + a(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_5,

$l(v_5) = \min \{l(v_5), l(v_8) + a(v_8, v_5)\}$

$l(v_5) = \min \{\infty,\ 6^{+} + 23\} = 29$

untuk titik simpul v_6,

$l(v_6) = \min \{l(v_6), l(v_8) + a(v_8, v_6)\}$

$l(v_6) = \min \{17,\ 6^{+} + 15\} = 17$

untuk titik simpul v_9,

$l(v_9) = \min \{l(v_9), l(v_8) + a(v_8, v_9)\}$

$l(v_9) = \min \{12,\ 6^{+} + 5\} = 11$

Langkah 3 : $\min\{l(v_i)\} = \min\{\underset{v_3}{\underline{23}}, \underset{v_4}{\underline{7}}, \underset{v_5}{\underline{29}}, \underset{v_6}{\underline{17}}, \underset{v_p}{\underline{11}}\} = 7$

bersesuaian dengan titik simpul v_4.

Langkah 4 : v_4 menjadi label tetap, $l(v_4) = 7^+$, $p = v_4$.

Langkah 5 : kembali kelangkah 2.

Perulangan kelima

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_4) = \{v_3, v_5, v_6, v_7\}$ karena v_7 telah menjadi label tetap maka $\Gamma(v_4) = \{v_3, v_5, v_6\}$ menjadi label sementara, menurut persamaan 3.4 : $l(v_j) = \min\{l(v_i), l(p) + a(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_3,

$l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_4) + a(v_4, v_3)\}$

$l(v_3) = \min\{23, 7^+ + 25\} = 23$

untuk titik simpul v_5,

$l(v_5) = \min\{l(v_5), l(v_4) + a(v_4, v_5)\}$

$l(v_5) = \min\{29, 7^+ + 5\} = 12$

untuk titik simpul v_6,

$l(v_6) = \min\{l(v_6), l(v_4) + a(v_4, v_6)\}$

$l(v_6) = \min\{17, 7^+ + 16\} = 17$

Langkah 3 : $\min\{l(v_i)\} = \min\{\underset{v_3}{\underline{23}}, \underset{v_5}{\underline{12}}, \underset{v_6}{\underline{17}}, \underset{v_p}{\underline{11}}\} = 11$

bersesuaian dengan titik simpul v_p.

Langkah 4 : v_9 menjadi label tetap, $l(v_9) = 11^*$; $p = v_9$

Langkah 5 : kembali kelangkah 2.

Perulangan keenam

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_9) = \{v_1, v_2, v_6, v_7, v_8\}$ karena v_1, v_2, v_7, v_8 telah menjadi label tetap maka $\Gamma_9(v) = \{v_6\}$ menjadi label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + \alpha(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_6,

$l(v_6) = \min \{l(v_6), l(v_9) + \alpha(v_9, v_6)\}$

$l(v_6) = \min \{17,\ 11^*+9\} = 17$

Langkah 3 : $\min \{l(v_i)\} = \min \{\underset{v_3}{\underline{23}}, \underset{v_5}{\underline{12}}, \underset{v_6}{\underline{17}}\} = 12$

bersesuaian dengan titik simpul v_5.

Langkah 4 : v_5 menjadi label tetap, $l(v_5) = 12^*$, $p = v_5$.

Langkah 5 : kembali kelangkah 2.

Perulangan ketujuh

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_5) = \{v_4, v_6\}$ karena v_4 telah dilalui maka $\Gamma(v_5) = \{v_6\}$ menjadi label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + \alpha(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_6,

$l(v_6) = \min\{l(v_6), l(v_5) + a(v_5,v_6)\}$

$l(v_6) = \min\{17,\ 12^{+} + 10\} = 17$

Langkah 3 : $\min\{l(v_i)\} = \min\{\underset{v_3}{\underline{23}}, \underset{v_6}{\underline{17}}\} = 17$

bersesuaian dengan titik simpul v_6.

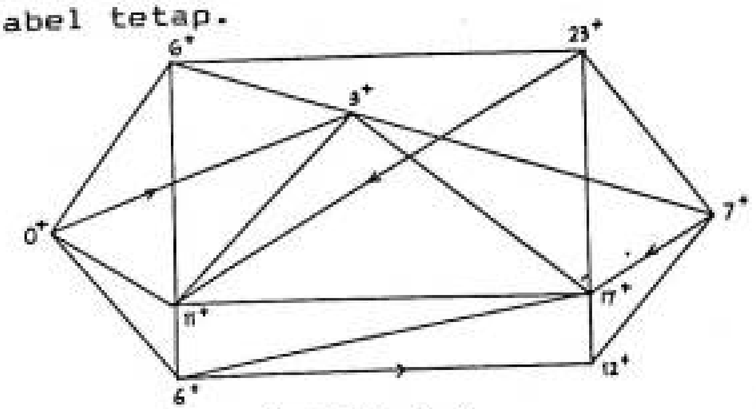
Langkah 4 : v_6 menjadi label tetap, $l(v_6) = 17^{+}$, $p = v_6$.

Langkah 5 : kembali kelangkah 2.

Perulangan kedelapan

Langkah 2 : $\Gamma(p) = \Gamma(v_6) = \{v_3,v_5,v_7,v_8,v_9\}$ karena v_5, v_7, v_8, v_9 telah menjadi label tetap maka $\Gamma(v_6) = \{v_3\}$ maka v_3 merupakan label tetap yang terakhir. Selesai.

Pada gambar 3.4 akan diperlihatkan graph G yang telah mempunyai label tetap.



Gambar 3.4

Graph dengan label tetap dan v_1 *sebagai titik awal*

Untuk mendapatkan lintasan terpendek antara sepasang titik simpul, misalkan v_2 yang berawal dari titik simpul v_1 maka kita menggunakan persamaan 3.3. Dengan mengambil $v_i = v_2$ dan titik simpul v_2' adalah titik simpul sebelum v_2 pada lintasan terpendek dari v_1 ke v_2, menurut persamaan 3.3 :

$$l(v_i') + \alpha(v_i',v_i) = l(v_i)$$

$$l(v_2') + \alpha(v_2',v_2) = l(v_2) = 5$$

Titik simpul v_2' yang memenuhi persamaan diatas adalah titik simpul v_7. Seperti diatas, dengan menggunakan persamaan 3.3 dengan mengambil $v_i = v_7$ kita dapatkan titik simpul v_7' adalah titik simpul sebelum v_7 pada lintasan terpendek dari v_1 ke v_2 :

$$l(v_7') + \alpha(v_7',v_7) = l(v_7) = 3$$

Dan titik simpul v_7' yang memenuhi persamaan diatas adalah v_1 sendiri dan merupakan lintasan terpendek dari v_1 ke v_2 adalah (v_1,v_7,v_2).

Lintasan terpendek dari titik simpul v_1 ke titik simpul v_9 adalah : misalkan $v_i = v_9$

menurut persamaan 3.3 :

$$l(v_i') + \alpha(v_i',v_i) = l(v_i)$$

$$l(v_9') + \alpha(v_9',v_9) = l(v_9) = 23$$

titik simpul sebelum v_3 adalah v_2 maka :

$l(v_2') + a(v_2',v_2) = l(v_2) = 5$

titik simpul sebelum v_2 adalah v_7 maka :

$l(v_7') + a(v_7',v_7) = l(v_7) = 3$

dan titik simpul sebelum v_7 adalah v_1 maka *lintasan terpendek* dari v_1 ke v_3 adalah (v_1,v_7,v_2,v_3).

Lintasan terpendek dari titik simpul v_1 ke titik simpul v_4 adalah : misalkan $v_i = v_4$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_4') + a(v_4',v_4) = l(v_4) = 7$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_7 maka :

$l(v_7') + a(v_7',v_7) = l(v_7) = 3$

dan titik simpul sebelum v_7 adalah v_1 maka *lintasan terpendek* dari v_1 ke v_4 adalah (v_1,v_7,v_4).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 ke titik simpul v_5 adalah : misalkan $v_i = v_5$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_5') + \alpha(v_5',v_5) = l(v_5) = 12$

titik simpul sebelum v_5 adalah v_4

maka :

$l(v_4') + \alpha(v_4',v_4) = l(v_4) = 7$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_7

maka :

$l(v_7') + \alpha(v_7',v_7) = l(v_7) = 3$

dan titik simpul sebelum v_7 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_5 adalah (v_1,v_7,v_4,v_5).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 ke titik simpul v_6 adalah : misalkan $v_i = v_6$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + \alpha(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_6') + \alpha(v_6',v_6) = l(v_6) = 17$

titik simpul sebelum v_6 adalah v_7

maka :

$l(v_7') + \alpha(v_7',v_7) = l(v_7) = 3$

dan titik simpul sebelum v_7 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara titik simpul v_1 ke v_6 adalah (v_1,v_7,v_6).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 *ke titik simpul* v_9 *adalah :* misalkan $v_i = v_9$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i', v_i) = l(v_i)$

$l(v_9') + a(v_9', v_9) = l(v_9) = 11$

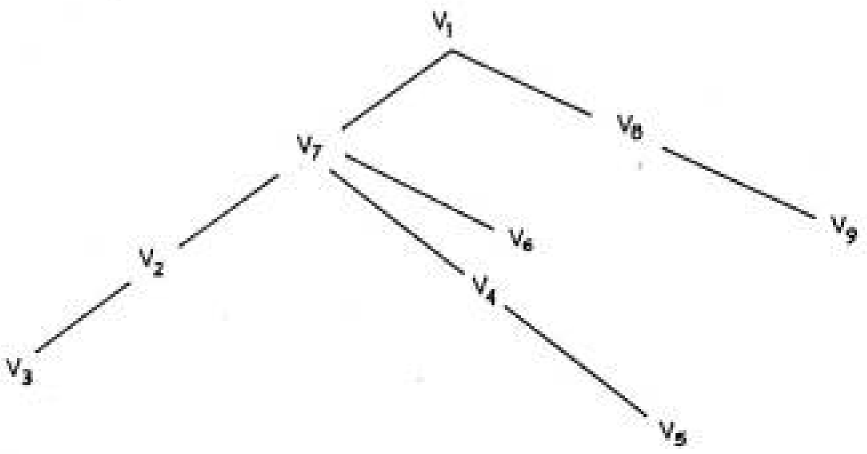
titik simpul sebelum v_9 adalah v_8

maka :

$l(v_8') + a(v_8', v_8) = l(v_8) = 6$

dan titik simpul sebelum v_8 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_9 adalah (v_1, v_8, v_9).



Gambar 3.5

Bentuk pohon dari lintasan terpendek v_1 *ke titik simpul yang lain*

III.2.3 KASUS UNTUK NILAI MATRIKS $\alpha_{ij} \gtrless 0$

Algoritma Dijkstra hanya memenuhi jika $\alpha_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j. Sedangkan algoritma yang akan kami jelaskan pada bagian ini adalah algoritma untuk nilai matriks $\alpha_{ij} \gtrless 0$.

Algoritma untuk nilai matriks $\alpha_{ij} \gtrless 0$ ini diperkenalkan pada pertengahan tahun 1950 oleh *Ford*.

Seperti halnya algoritma Dijkstra maka algoritma ini-pun hanya untuk menentukan *label* pada suatu graph sebelum kita menentukan lintasan terpendek.

Algoritma untuk nilai matriks $\alpha_{ij} \gtrless 0$:

$l^k(v_i)$ adalah panjang lintasan dari titik simpul v_i yang berkardinal k, dan menjadi label pada titik simpul v_i pada bagian akhir dari (k+1) perulangan.

Langkah 1 : Ambil $S = \Gamma(s)$, $k = 1$, $l^1(s) = 0$, $l^1(v_i) = \alpha(s,v_i)$ untuk semua $v_i \in \Gamma(s)$ dan $l^1(v_i) = \infty$ untuk v_i yang lain, s = titik simpul awal.

Perubahan label

Langkah 2 : Untuk setiap titik simpul $v_i \in \Gamma(\Gamma(s)) = \Gamma(S)$ dimana $v_i \neq s$ dan label berubah menurut persamaan :

$$l^{k+1}(v_i) = \min_i (l^k(v_i), \min_{v_j \in T_i} (l^k(v_j) + a(v_j, v_i))) \quad (3.5)$$

dimana $T_i = \Gamma^{-1}(v_i) \cap S$.

S memuat semua titik simpul yang merupakan lintasan terpendek dari s yang berkardinal k. Himpunan T_i memuat titik simpul yang merupakan lintasan terpendek dari s yang berkardinal k, dan untuk sebuah busur ke titik simpul v_i ada. Untuk semua titik simpul $v_i \notin \Gamma(S)$ maka $l^{k+1}(v_i) = l^k(v_i)$.

Langkah 3 : (a). Jika $k \leq n-1$ dimana n adalah banyaknya titik simpul dan $l^{k+1}(v_i) = l^k(v_i)$ untuk semua v_i, maka jawaban optimal sudah diperoleh dan label merupakan panjang dari lintasan terpendek. Selesai.

(b). Jika $k < n-1$ dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ untuk beberapa v_i, lanjutkan kelangkah 4.

(c). Jika $k = n-1$ dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ untuk beberapa v_i maka nilai negatif sirkuit berada pada graph dan persoalan ini tidak mempunyai pemecahan.

Algoritma selesai.

Persiapan untuk perulangan berikutnya

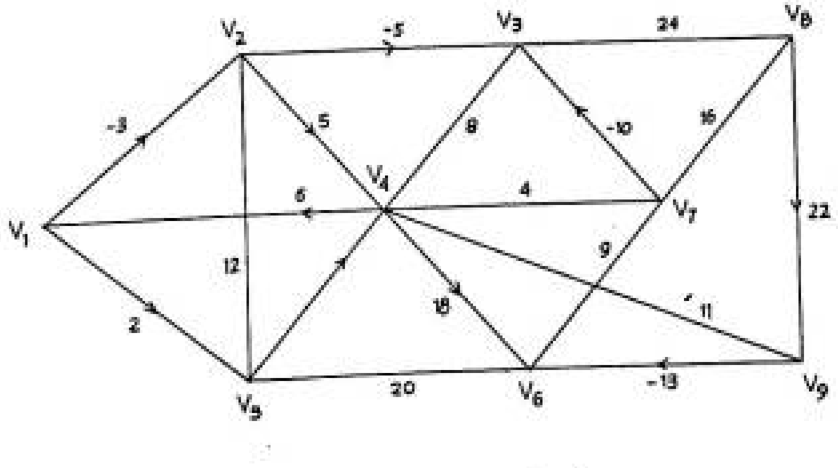
Langkah 4 : Ambil himpunan S baru yang didefinisikan :

$$S = \{v_i \mid l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\} \qquad (3.6)$$

Langkah 5 : Ambil k = k+1 kembali ke langkah 2.

Contoh soal :

Diberikan graph pada gambar 3.6 dimana busur tidak berarah dianggap sebagai busur yang bernilai sama dengan arah yang berbeda. Busur-busur bernilai yang ditunjukkan memuat nilai positif dan negatif.



Gambar 3.6

$$
A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array}
\overset{\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array}}{
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & -3 & & & 2 & & & & \\ \hline
 & & -5 & 15 & 12 & & & & \\ \hline
 & & & 8 & & & & 24 & \\ \hline
6 & & 8 & & & 18 & 4 & & 11 \\ \hline
 & 12 & & -7 & & 20 & & & \\ \hline
 & & & & 20 & & 9 & & \\ \hline
 & & -10 & 4 & & 9 & & 16 & \\ \hline
 & & 24 & & & & 16 & & 22 \\ \hline
 & & & 11 & & -13 & & & \\ \hline
\end{array}}
$$

Proses algoritmanya adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Misalkan v_1 dianggap sebagai titik awal, $s = v_1$, $S = \Gamma(s) = \Gamma(v_1) = \{v_2, v_5\}$, $k = 1$, $l^1(v_1) = 0$, $l^1(v_2) = -3$, $l^1(v_5) = 2$, $l^1(v_i) = \infty$ untuk semua v_i yang lain. Ambil $k = 1$.

Perulangan pertama

Langkah 2 : $\Gamma(S) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

untuk titik simpul v_2,

$T_2 = \Gamma^{-1}(v_2) \cap S$

$T_2 = \{v_1, v_5\} \cap \{v_2, v_5\} = \{v_5\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^2(v_2) = \min\ \{l^1(v_2), (l^1(v_5) + \alpha(v_5, v_2))\}$

$l^2(v_2) = \min \{-3,(2 + 12)\} = -3$

untuk titik simpul v_3,

$T_3 = \Gamma^{-1}(v_3) \cap S$

$T_3 = \{v_2,v_4,v_7,v_8\} \cap \{v_2,v_5\} = \{v_2\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^2(v_3) = \min \{l^1(v_3),(l^1(v_2) + a(v_2,v_3))\}$

$l^2(v_3) = \min \{\infty,(-3+ (-5))\} = -8$

untuk titik simpul v_4,

$T_4 = \Gamma^{-1}(v_4) \cap S$

$T_4 = \{v_2,v_3,v_5,v_7,v_9\} \cap \{v_2,v_5\} = \{v_2,v_5\}$

menurut persamaan 3.5 :

$$l^2(v_4) = \min \{l^1(v_4),\min (l^1(v_2) + a(v_2,v_4),\ l^1(v_5) + a(v_5,v_4))\}$$

$l^2(v_4) = \min \{\infty, \min ((-3+15),(2+(-7)))\} = -5$

untuk titik simpul v_5,

$T_5 = \Gamma^{-1}(v_5) \cap S$

$T_5 = \{v_1,v_2,v_6\} \cap \{v_2,v_5\} = \{v_2\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^2(v_5) = \min \{l^1(v_5),(l^1(v_2) + a(v_2,v_5))\}$

$l^2(v_5) = \min \{2,(-3+12)\} = 2$

untuk titik simpul v_6,

$T_6 = \Gamma^{-1}(v_6) \cap S$

$T_6 = \{v_4,v_5,v_7,v_9\} \cap \{v_2,v_5\} = \{v_5\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^2(v_6) = \min \{l^1(v_6),(l^1(v_5) + \alpha(v_5,v_6))\}$

$l^2(v_6) = \min \{\infty,(2+20)\} = 22$

Label $l^2(v_i) = \{0,-3,-8,-5,2,22,\infty,\infty,\infty\}$ untuk

$v_i = v_1,v_2,v_3,\ldots,v_9$

Langkah 3(a) : karena k tidak lebih kecil atau sama dengan n-1 dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ maka pindah kelangkah 3(b).

Langkah 3(b) : karena k < n-1 dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ maka lanjutkan kelangkah 4.

Langkah 4 : menurut persamaan 3.6 :

$S = \{v_i \mid l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\}$

$S = \{v_i \mid l^2(v_i) \neq l^1(v_i)\}$

$S = \{v_3,v_4,v_6\}$

Langkah 5 : k = 2 kelangkah 2.

Perulangan kedua

Langkah 2 : $\Gamma(S) = \{v_1,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}$

untuk titik simpul v_3.

$T_3 = \Gamma^{-1}(v_3) \cap S$

$T_3 = \{v_2,v_4,v_7,v_8\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_4\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_3) = \min \{l^2(v_3),(l^2(v_4) + \alpha(v_4,v_2))\}$

$l^3(v_3) = \min \{-8,(-5+8)\} = -8$

untuk titik simpul v_4,

$T_4 = \Gamma^{-1}(v_4) \cap S$

$T_4 = \{v_2,v_3,v_5,v_7,v_9\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_3\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_4) = \min \{l^2(v_4),(l^2(v_3) + a(v_3,v_4))\}$

$l^3(v_4) = \min \{-5,(-8+8)\} = -5$

untuk titik simpul v_5,

$T_5 = \Gamma^{-1}(v_5) \cap S$

$T_5 = \{v_1,v_2,v_6\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_6\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_5) = \min \{l^2(v_5),(l^2(v_6) + a(v_6,v_5))\}$

$l^3(v_5) = \min \{2,(22+20)\} = 2$

untuk titik simpul v_6,

$T_6 = \Gamma^{-1}(v_6) \cap S$

$T_6 = \{v_4,v_5,v_7,v_9\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_4\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_6) = \min \{l^2(v_6),(l^2(v_4) + a(v_4,v_6))\}$

$l^3(v_6) = \min \{22,(-5+18)\} = 13$

untuk titik simpul v_7,

$T_7 = \Gamma^{-1}(v_7) \cap S$

$T_7 = \{v_4,v_6,v_8\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_4,v_6\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_7) = \min \{l^2(v_7), \min ((l^2(v_4) + \alpha(v_4,v_7)), l^2(v_6) + \alpha(v_6,v_7))\}$

$l^3(v_7) = \min \{\infty, \min ((-5+4),(22+9))\} = -1$

untuk titik simpul v_8.

$T_8 = \Gamma^{-1}(v_8) \cap S$

$T_8 = \{v_3,v_7\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_3\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_8) = \min \{l^2(v_8),(l^2(v_3) + \alpha(v_3,v_8))\}$

$l^3(v_8) = \min \{\infty,(-8+24)\} = 16$

untuk titik simpul v_9.

$T_9 = \Gamma^{-1}(v_9) \cap S$

$T_9 = \{v_4,v_8\} \cap \{v_3,v_4,v_6\} = \{v_4\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^3(v_9) = \min \{l^2(v_9),(l^2(v_4) + \alpha(v_4,v_9))\}$

$l^3(v_9) = \min \{\infty,(-5+11)\} = 6$

Label $l^3(v_i) = \{0,-3,-8,-5,2,13,-1,16,6\}$

untuk $v_i = v_1,v_2,v_3,\ldots,v_9$

Langkah 3(a) : k tidak lebih kecil atau sama dengan n-1 dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ maka pindah kelangkah 3(b).

Langkah 3(b) : $k < n-1$ dan $l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)$ kelangkah 4

Langkah 4 : menurut persamaan 3.6 :

$S = \{v_i \mid l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\}$

$S = \{v_i \mid l^3(v_i) \neq l^2(v_i)\}$

$S = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$

Langkah 5 : k = 3, ke langkah 2.

Perulangan ketiga

Langkah 2 : $\Gamma(S) = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

untuk titik simpul v_3.

$T_3 = \Gamma^{-1}(v_3) \cap S$

$T_3 = \{v_2, v_4, v_7, v_8\} \cap \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$

$= \{v_7, v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_3) = \min \{l^3(v_3), \min ((l^3(v_7) +$

$a(v_7, v_3), l^3(v_8) + a(v_8, v_3)))\}$

$l^4(v_3) = \min \{-8, \min (-1+(-10), 16+24)\} = -11$

untuk titik simpul v_4.

$T_4 = \Gamma^{-1}(v_4) \cap S$

$T_4 = \{v_2, v_3, v_5, v_7, v_9\} \cap \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$

$= \{v_7, v_9\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_4) = \min \{ l^3(v_4), \min (l^3(v_7) +$

$a(v_7, v_4), l^3(v_9) + a(v_9, v_4))\}$

$l^4(v_4) = \min \{-5, \min (-1+4, 16+11)\} = -5$

untuk titik simpul v_5.

$T_5 = \Gamma^{-1}(v_5) \cap S$

$T_5 = \{v_1,v_2,v_6\} \cap \{v_6,v_7,v_8,v_9\} = \{v_6\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_5) = \min \{l^3(v_5),(l^3(v_6) + a(v_6,v_5))\}$

$l^4(v_5) = \min \{2,(13+20)\} = 2$

untuk titik simpul v_6.

$T_6 = \Gamma^{-1}(v_6) \cap S$

$T_6 = \{v_4,v_5,v_7,v_9\} \cap \{v_6,v_7,v_8,v_9\}$

$= \{v_7,v_9\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_6) = \min \{l^3(v_6),\min ((l^3(v_7) +$

$a(v_7,v_6),l^3(v_9) + a(v_9,v_6)))\}$

$l^4(v_6) = \min \{13,\min (-1+9,6+(-13))\} = -7$

untuk titik simpul v_7.

$T_7 = \Gamma^{-1}(v_7) \cap S$

$T_7 = \{v_4,v_6,v_8\} \cap \{v_6,v_7,v_8,v_9\}$

$= \{v_6,v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_7) = \min \{l^3(v_7),\min ((l^3(v_6) +$

$a(v_6,v_7),l(v_8) + a(v_8,v_7))\}$

$l^4(v_7) = \min \{-1, \min (13+9,16+16)\} = -1$

untuk titik simpul v_8.

$T_8 = \Gamma^{-1}(v_8) \cap S$

$T_8 = \{v_3, v_7\} \cap \{v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_7\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_8) = \min \{l^3(v_8), (l^3(v_7) + a(v_7, v_8))\}$

$l^4(v_8) = \min \{16, ((-1)+16)\} = 15$

untuk titik simpul v_9.

$T_9 = \Gamma^{-1}(v_9) \cap S$

$T_9 = \{v_4, v_8\} \cap \{v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^4(v_9) = \min \{l^3(v_9), (l^3(v_8) + a(v_8, v_9))\}$

$l^4(v_9) = \min \{6, (16+22)\} = 6$

Label $l^4(v_i) = \{0, -3, -11, -5, 2, -7, -1, 15, 6\}$

untuk $v_i = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_9$

Langkah 3(a) : kelangkah 3(b).

Langkah 3(b) : pindah kelangkah 4.

Langkah 4 : menurut persamaan 3.6 :

$S = \{v_i \mid l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\}$

$S = \{v_i \mid l^4(v_i) \neq l^3(v_i)\}$

$S = \{v_3, v_6, v_8\}$

Langkah 5 : k = 4, ke langkah 2.

Perulangan keempat

Langkah 2 : $\Gamma(S) = \{v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$

untuk titik simpul v_3,

$T_3 = \Gamma^{-1}(v_3) \cap S$

$T_3 = \{v_2, v_4, v_7, v_8\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^5(v_3) = \min\{l^4(v_3), (l^4(v_8) + \alpha(v_8, v_3))\}$

$l^5(v_3) = \min\{(-11), (15+24)\} = -11$

untuk titik simpul v_4.

$T_4 = \Gamma^{-1}(v_4) \cap S$

$T_4 = \{v_2, v_3, v_5, v_7, v_9\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_3\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^5(v_4) = \min\{l^4(v_4), (l^4(v_3) + \alpha(v_3, v_4))\}$

$l^5(v_4) = \min\{(-5), ((-11)+8)\} = -5$

untuk titik simpul v_5.

$T_5 = \Gamma^{-1}(v_5) \cap S$

$T_5 = \{v_1, v_2, v_6\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_6\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^5(v_5) = \min\{l^4(v_5), (l^4(v_6) + \alpha(v_6, v_5))\}$

$l^5(v_5) = \min\{2, ((-7)+20)\} = 2$

untuk titik simpul v_7.

$T_7 = \Gamma^{-1}(v_7) \cap S$

$T_7 = \{v_4, v_6, v_8\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_6, v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$$l^5(v_7) = \min\{l^4(v_7), \min(l^4(v_6) + \alpha(v_6, v_7), l^4(v_8) + \alpha(v_8, v_7))\}$$

$l^5(v_7) = \min\{(-1), \min((-7)+9, 15+16)\} = -1$

untuk titik simpul v_8.

$T_8 = \Gamma^{-1}(v_8) \cap S$

$T_8 = \{v_3, v_7\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_3\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^5(v_8) = \min\{l^4(v_8), (l^4(v_3) + \alpha(v_3, v_8))\}$

$l^5(v_8) = \min\{15, ((-11)+24)\} = 13$

untuk titik simpul v_9.

$T_9 = \Gamma^{-1}(v_9) \cap S$

$T_9 = \{v_4, v_8\} \cap \{v_3, v_6, v_8\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^5(v_9) = \min\{l^5(v_9), (l^5(v_8) + \alpha(v_8, v_9))\}$

$l^5(v_9) = \min\{6, (15+22)\} = 6$

Label $l^5(v_i) = \{0, -3, -11, -5, 2, -7, -1, 13, 6\}$

untuk $v_i = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_9$

Langkah 3(a) : kelangkah 3(b).

Langkah 3(b) : pindah kelangkah 4.

Langkah 4 : menurut persamaan 3.6 :

$S = \{v_i \mid l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\}$

$S = \{v_i \mid l^5(v_i) \neq l^4(v_i)\}$

$S = \{v_8\}$

Langkah 5 : k = 5, ke langkah 2.

Perulangan kelima

Langkah 2 : $\Gamma(S) = \{v_3, v_7, v_9\}$

untuk titik simpul v_3,

$T_3 = \Gamma^{-1}(v_3) \cap S$

$T_3 = \{v_2, v_4, v_7, v_8\} \cap \{v_8\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^6(v_3) = \min\ \{l^5(v_3), (l^5(v_8) + \alpha(v_8, v_3))\}$

$l^6(v_3) = \min\ \{(-11), (13+24)\} = -11$

untuk titik simpul v_7,

$T_7 = \Gamma^{-1}(v_7) \cap S$

$T_7 = \{v_4, v_6, v_8\} \cap \{v_8\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^6(v_7) = \min\ \{l^5(v_7), (l^5(v_8) + \alpha(v_8, v_7))\}$

$l^6(v_7) = \min\ \{(-1), (13+16)\} = -1$

untuk titik simpul v_9,

$T_9 = \Gamma^{-1}(v_9) \cap S$

$T_9 = \{v_4, v_8\} \cap \{v_8\} = \{v_8\}$

menurut persamaan 3.5 :

$l^6(v_9) = \min\ \{l^5(v_9), (l^5(v_8) + \alpha(v_8, v_9))\}$

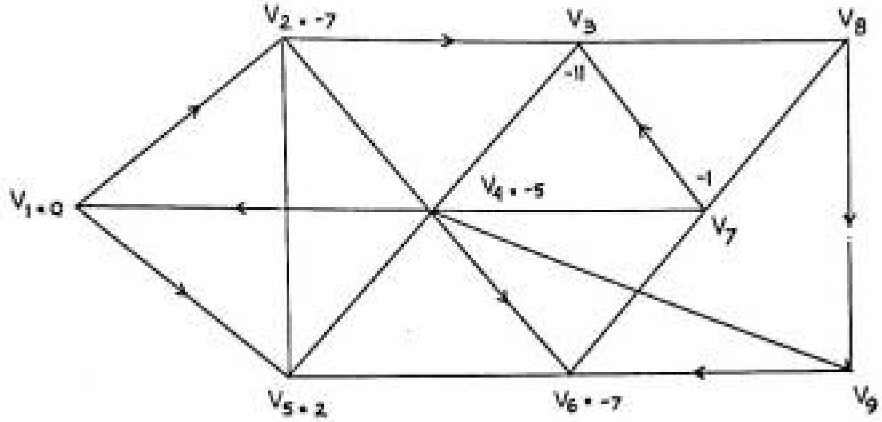
$l^6(v_9) = \min\ \{6, (13+22)\} = 6$

Label $l^6(v_i) = \{0, -3, -11, -5, 2, -7, -1, 13, 6\}$

untuk $v_i = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_9$

Langkah 3(a) : Selesai.

Label $l^6(v_i) = l^5(v_i)$ dan merupakan label dari panjang lintasan terpendek.



Gambar 3.7

Graph berlabel dengan v_1 sebagai titik simpul awal

Untuk mendapatkan lintasan terpendek antara sepasang titik simpul dari graph berlabel (gambar 3.7) dengan v_1 sebagai titik simpul awal, adalah dengan menggunakan persamaan 3.3.

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 ke titik simpul v_3 adalah : misalkan $v_i = v_3$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i', v_i) = l(v_i)$

$l(v_3') + a(v_3', v_3) = l(v_3) = -11$

titik simpul sebelum v_3 adalah v_7

maka : $l(v_7') + a(v_7', v_7) = l(v_7) = -1$

titik simpul sebelum v_7 adalah v_4

maka : $l(v_4') + a(v_4', v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + a(v_5', v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_9 adalah $(v_1, v_5, v_4, v_7, v_9)$.

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 dan titik simpul v_4 adalah : misalkan $v_i = v_4$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i', v_i) = l(v_i)$

$l(v_4') + a(v_4', v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + a(v_5', v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_4 adalah (v_1, v_5, v_4).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 dan titik simpul v_6 adalah : misalkan $v_i = v_6$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i', v_i) = l(v_i)$

$l(v_6') + \alpha(v_6',v_6) = l(v_6) = -7$

titik simpul sebelum v_6 adalah v_9

maka : $l(v_9') + \alpha(v_9',v_9) = l(v_9) = 6$

titik simpul sebelum v_9 adalah v_4

maka : $l(v_4') + \alpha(v_4',v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + \alpha(v_5',v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_6 adalah (v_1,v_5,v_4,v_9,v_6).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 dan titik simpul v_7 adalah : misalkan $v_i = v_7$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + \alpha(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_7') + \alpha(v_7',v_7) = l(v_7) = -1$

titik simpul sebelum v_7 adalah v_4

maka : $l(v_4') + \alpha(v_4',v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + \alpha(v_5',v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_7 adalah (v_1,v_5,v_4,v_7).

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 *dan titik simpul* v_8 *adalah :* misalkan $v_i = v_8$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_8') + a(v_8',v_8) = l(v_8) = 13$

titik simpul sebelum v_8 adalah v_9

maka : $l(v_9') + a(v_9',v_9) = l(v_9) = -11$

titik simpul sebelum v_9 adalah v_7

maka : $l(v_7') + a(v_7',v_7) = l(v_7) = -1$

titik simpul sebelum v_7 adalah v_4

maka : $l(v_4') + a(v_4',v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + a(v_5',v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_8 adalah $(v_1,v_5,v_4,v_7,v_9,v_8)$.

Lintasan terpendek antara titik simpul v_1 *dan titik simpul* v_9 *adalah :* misalkan $v_i' = v_9$

menurut persamaan 3.3 :

$l(v_i') + a(v_i',v_i) = l(v_i)$

$l(v_9') + a(v_9',v_9) = l(v_9) = 6$

titik simpul sebelum v_9 adalah v_4

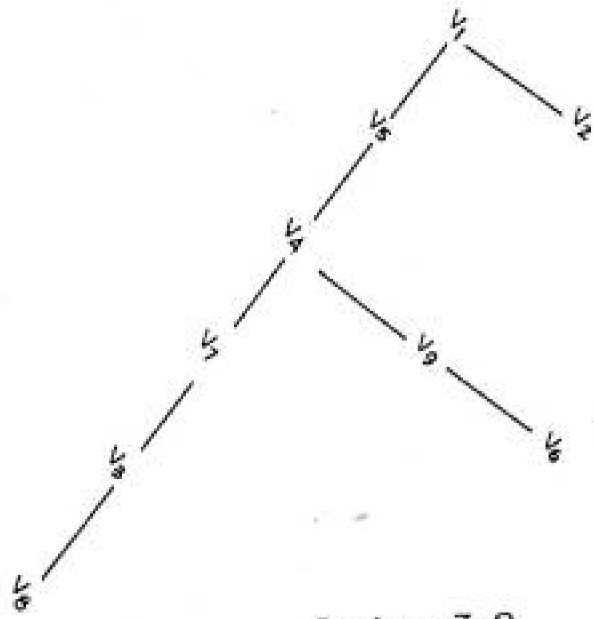
maka : $l(v_4') + \alpha(v_4', v_4) = l(v_4) = -5$

titik simpul sebelum v_4 adalah v_5

maka : $l(v_5') + \alpha(v_5', v_5) = l(v_5) = 2$

dan titik simpul sebelum v_5 adalah v_1

maka *lintasan terpendek* antara v_1 dan v_9 adalah (v_1, v_5, v_4, v_9).



Gambar 3.8

Bentuk pohon dari graph G dengan v_1 sebagai titik simpul awal

B A B IV

APLIKASI LINTASAN TERPENDEK

Pada bagian pendahuluan telah disampaikan bahwa teori graph mempunyai peranan yang makin berkembang pada berbagai bidang matematika, maupun diluar matematika. Dalam bab ini akan ditunjukkan contoh aplikasi dari *lintasan terpendek* pada suatu masalah.

IV.1 PERSOALAN TUKANG POS CHINA

Dalam suatu wilayah ada satu kantor pos. Seorang tukang pos setiap hari harus berangkat dari kantor pos untuk menyampaikan surat ke rumah-rumah disekitar kantor pos dalam wilayahnya dan kembali ke kantor pos tersebut.

Masalahnya dapatkah ditunjukkan suatu rute yang harus dilalui tukang pos tersebut sedemikian hingga setiap jalan yang dilalui paling sedikit sekali dan jumlah lintasan minimum.
Persoalan tukang pos China ini dikemukakan oleh *Bellman dan Cook*.

Misalkan $G = (V,E)$ suatu graph tidak berarah. Beberapa titik simpul dari V misalkan V^+ mempunyai derajat *genap*, dan sebagian lagi misalkan $V^- \equiv V - V^+$ adalah berderajat *ganjil*. Jumlah derajat $d(v_i)$ dari semua titik simpul $v_i \in V$ adalah sama dengan *dua kali jumlah rusuk*.

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{v_i \in V^+} d(v_i) + \sum_{v_i \in V^-} d(v_i) = 2e \qquad (4.1)$$

dengan demikian jelas bahwa $\sum_{v_i \in V^+} d(v_i)$ dan $\sum_{v_i \in V^-} d(v_i)$ genap, ini berarti banyaknya titik simpul yang berderajat ganjil genap.

Andaikan M adalah himpunan lintasan dari G (katakan μ_{ij}) antara titik simpul ujung v_i dan v_j dimana $v_i, v_j \in V^-$, sedemikian hingga tidak terdapat dua lintasan yang mempunyai titik simpul ujung yang sama, yaitu setiap lintasan menghubungkan pasangan-pasangan titik simpul dari V^- yang berbeda. Jumlah lintasan μ_{ij} pada M adalah 1/2 $|V^-|$, dan $|V^-|$ ditunjukkan selalu genap dan nilainya berupa bilangan bulat. Semua busur dibentuk oleh sebuah lintasan μ_{ij} yang ditambahkan pada G sebagai *busur semu* yang pararel dengan busur dari G yang ada. Ini berarti semua busur G yang dibentuk μ_{ij} menjadi *doubel*. Ini dilakukan untuk setiap lintasan $\mu_{ij} \in M$ dan menghasilkan *s-graph* yang disebut $G^-(M)$.

Bila beberapa busur dari G mungkin muncul lebih dari satu dalam lintasan μ_{ij}, maka beberapa busur dari $G^{-}(M)$ mungkin menjadi *rangkap tiga, empat* dan seterusnya.

Theorema 4.1 :

Untuk setiap sirkuit yang melewati G, terdapat beberapa pilihan M dari $G^{-}(M)$ dimana $G^{-}(M)$ memiliki suatu sirkuit Euler yang berkorespondensi dengan sirkuit pada G tersebut. Korespondensi dengan cara demikian : jika sirkuit dari G melewati sebuah busur (v_i, v_j) dari G l kali, sehingga terdapat l busur antara v_i dan v_j dalam $G^{-}(M)$ yaitu satu nyata dan $(l-1)$ busur semu. Setiap busur tersebut dilewati tepat sekali oleh sirkuit Euler dari $G^{-}(M)$ dan sebaliknya.

Bukti : Jika sebuah sirkuit melewati G, maka paling sedikit satu busur berhubungan langsung (incident) pada setiap titik simpul v_i yang berderajat ganjil harus dilalui dua kali, suatu busur yang dilalui dua kalí dapat diartikan sebagai dua busur pararel yaitu satu busur nyata dan satu busur semu dan masing-masing dilalui satu kali. Misalkan busur yang dipilih adalah

(v_i,v_k). Jika derajat v_k yaitu $d(v_k)$ pada G adalah ganjil maka penambahan busur semu sebelumnya akan membuat $d(v_k)$ genap dan hanya busur ini yang dilalui dua kali sepanjang v_i dan v_k yang dimaksud tadi. Jika $d(v_k)$ genap maka penambahan busur semu akan membuat $d(v_k)$ ganjil dan busur kedua yang dimulai dari v_k harus dilalui dua kali. Uraian ini diteruskan dari v_k sampai diperoleh titik simpul yang berderajat ganjil seperti yang dijelaskan diatas. Jadi untuk memenuhi syarat Euler di v_i seluruh lintasan dari v_i kebeberapa titik simpul yang berderajat ganjil v_r pada V^- harus dilalui dua kali. Dengan cara yang sama semua titik simpul yang lain v_i pada V^-, yang berarti himpunan M dari lintasan pada G seperti yang didefinisikan pasti dilalui dua kali dan ini berarti pula bahwa setiap busur dari $G^-(M)$ pasti dilalui hanya satu kali sesuai theorema diatas.

Algoritma untuk memecahkan persoalan tukang pos China dapat dilihat dibawah ini, bahwa untuk memperoleh himpunan lintasan M^*, yaitu lintasan-lintasan yang menghubungkan antara dua titik simpul yang berderajat ganjil, yang diperoleh berdasarkan *nilai terkecil* lintasan. Nilai terkecil sirkuit yang melewati G akan mempunyai *nilai yang sama dengan nilai terkecil jumlah nilai busur pada G bersama jumlah nilai busur pada lintasan M^**. Ini sama dengan *jumlah nilai semua busur nyata dan semu* dari graph $G^-(M^*)$.

IV.1.1 DESKRIPSI DARI ALGORITMA

Langkah 1 : Misalkan $[a_{ij}]$ merupakan nilai busur pada matriks dari graph G. Dengan menggunakan algoritma lintasan terpendek dari bentuk $|V^-| \times |V^-|$ dihasilkan matriks $D = [d_{ij}]$ yang merupakan nilai terkecil lintasan dari titik simpul $v_i \in V^-$ ketitik simpul lain $v_j \in V^-$.

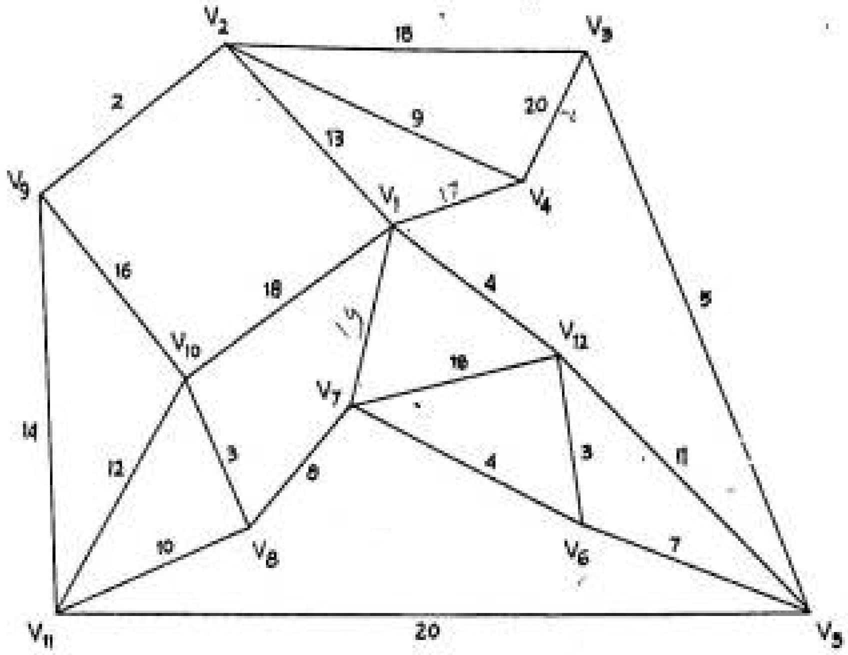
Langkah 2 : Tentukan M^* (dari titik simpul V^-) yang didapat dari nilai terkecil berdasarkan nilai matriks D.

Langkah 3 : Jika titik simpul v_x adalah sesuai dengan titik simpul v_y maka nilai lintasan μ_{xy} yang terkecil sesuai dengan nilai $d(v_{xy})$ pada langkah 1. Sisipkan busur semu pada G yang sesuai dengan busur pada μ_{xy} dan ulangi untuk semua lintasan yang lain yang sesuai dengan M^* yang menghasilkan *s-graph* $G^-(M^*)$.

Langkah 4 : Jumlah nilai dari matriks $[a_{ij}]$ dari semua busur pada $G^-(M^*)$, dengan menambah nilai dari sebuah busur semu akan sama dengan nilai busur nyata yang pararel dengannya, yang menjadikan nilai minimum dari sebuah sirkuit yang melewati G. Banyak kalinya sirkuit melewati sebuah busur (v_i, v_j) akan menambah nilai total busur yang pararel antara v_i dan v_j pada $G^-(M^*)$.

Contoh soal :

Pada gambar 4.1 terlihat sebuah graph yang mempunyai 12 titik simpul dan 22 busur dimana nilai busur diberikan pada matriks A. Masalahnya dapatkah ditemukan sebuah sirkuit yang melewati semua busur pada G paling sedikit sekali dan mempunyai nilai minimum agar tukang pos tersebut dapat dengan cepat dan efisien mengantarkan surat-surat.



Gambar 4.1

$A =$

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
V_1		13		17			19			18		4
V_2	13		18	9					2			
V_3		18		20	5							
V_4	17	9	20									
V_5			5			7					20	11
V_6					7		4					3
V_7	19					4		8				18
V_8							8			3	10	
V_9		2								16	14	
V_{10}	18							3	16		12	
V_{11}					20			10	14	12		
V_{12}	4				11	3	18					

Langkah 1 : Dengan menggunakan Algoritma Dijkstra didapat matriks $D = [d_{ij}]$, yaitu untuk titik simpul yang berderajat ganjil.

<u>titik simpul</u> v_1 <u>sebagai titik awal</u>.

maka $l(v_1) = 0^+$ dan $l(v_i) = \infty$ untuk setiap $v_i \neq v_1$,

ambil $p = v_1$.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_1) = \{v_2, v_4, v_7, v_{10}, v_{12}\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + a(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_2.

$l(v_2) = \min \{l(v_2), l(v_1) + a(v_1,v_2)\}$

$l(v_2) = \min \{\infty, 0^+ + 13\} = 13$

dengan cara yang sama dikerjakan juga untuk titik simpul v_4, v_7, v_{10}, v_{12}.

$\min l(v_i) = \min \{13,\infty,17,\infty,\infty,19,\infty,\infty,18,\infty,4\} = 4$

bersesuaian dengan titik simpul v_{12}.

v_{12} menjadi label tetap, $l(v_{12}) = 4^+$, $p = v_{12}$.

Perulangan kedua.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_{12}) = \{v_1, v_5, v_6, v_7\}$ karena v_1 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_{12}') = \{v_5, v_6, v_7\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + a(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_5.

$l(v_5) = \min \{l(v_5), l(v_{12}) + a(v_{12}, v_5)\}$

$l(v_5) = \min \{\infty,\ 4^+ + 11\} = 15$

dengan cara yang sama dikerjakan pula untuk titik simpul v_6, v_7.

$\min l(v_i) = \min \{13,\infty,17,15,7,19,\infty,\infty,18,\infty\} = 7$

bersesuaian dengan titik simpul v_6.

v_6 menjadi label tetap, $l(v_6) = 7^+$, $p = v_6$

Perulangan ketiga,

$\Gamma(p) = \Gamma(v_6) = \{v_5, v_7, v_{12}\}$ karena v_{12} telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_6) = \{v_5, v_7\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + a(p, v_j)\}$

untuk titik simpul v_5,

$l(v_5) = \min \{l(v_5), l(v_6) + a(v_6, v_5)\}$

$l(v_5) = \min \{15,\ 7^+ + 7\} = 14$

dengan cara yang sama dikerjakan pula untuk titik simpul v_7.

$\min l(v_i) = \min \{13,\infty,17,14,11,\infty,\infty,18,\infty\} = 11$

bersesuaian dengan titik simpul v_7.

v_7 menjadi label tetap, $l(v_7) = 11^+$, $p = v_7$.

Perulangan keempat.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_7) = \{v_1, v_6, v_8, v_{12}\}$ karena v_1, v_6, v_{12} telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_7) = \{v_8\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + \alpha(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_8,

$l(v_8) = \min \{l(v_8), l(v_7) + \alpha(v_7,v_8)\}$

$l(v_8) = \min \{\infty, 11^+ + 8\} = 16$

$\min l(v_i) = \{13,\infty,17,14,19,\infty,18,\infty\} = 13$

bersesuaian dengan titik simpul v_2.

v_2 menjadi label tetap, $l(v_2) = 13^*$, $p = v_2$.

Perulangan kelima.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_2) = \{v_1,v_3,v_4,v_9\}$ karena v_1 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_2) = \{v_3,v_4,v_9\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i), l(p) + \alpha(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_3,

$l(v_3) = \min \{l(v_3), l(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\}$

$l(v_3) = \min \{\infty, 13^+ + 18\} = 31$

dengan cara yang dikerjakan pula untuk titik simpul v_4,v_9.

$\min l(v_i) = \min \{31,17,14,19,15,18,\infty\} = 14$

bersesuaian dengan titik simpul v_5.

v_5 menjadi label tetap, $l(v_5) = 14^+$, $p = v_5$.

Perulangan keenam.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_5) = \{v_3,v_6,v_{11},v_{12}\}$ karena v_6,v_{12} telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_5) = \{v_9, v_{11}\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$\ell(v_j) = \min\{\ell(v_i).\ell(p) + \alpha(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_9,

$\ell(v_9) = \min\{\ell(v_9), \ell(v_5) + \alpha(v_5,v_9)\}$

$\ell(v_9) = \min\{31, 14^+ + 5\} = 19$

dengan cara yang sama dikerjakan pula untuk titik simpul v_{11}.

$\min \ell(v_i) = \min\{19,17,19,15,18,34\} = 15$

bersesuaian dengan titik simpul v_9.

v_9 menjadi label tetap, $\ell(v_9) = 15^+$, $p = v_9$.

Perulangan ketujuh.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_9) = \{v_2, v_{10}, v_{11}\}$ karena v_2 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_9) = \{v_{10}, v_{11}\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$\ell(v_j) = \min\{\ell(v_i), \ell(p) + \alpha(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_{10},

$\ell(v_{10}) = \min\{\ell(v_{10}), \ell(v_9) + \alpha(v_9,v_{10})\}$

$\ell(v_{10}) = \min\{18, 15^+ + 16\} = 18$

dengan cara yang sama dikerjakan pula untuk titik simpul v_{11}.

$\min \ell(v_i) = \min\{19,17,19,18,29\} = 17$

bersesuaian dengan titik simpul v_4.

v_4 adalah label tetap, $l(v_4) = 17^*$, $p = v_4$

Perulangan kedelapan.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_4) = \{v_1,v_2,v_3\}$ karena v_1,v_2 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_4) = \{v_3\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i),l(p) + a(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_3.

$l(v_3) = \min \{l(v_3),l(v_4) + a(v_4,v_3)\}$

$l(v_3) = \min \{19,17^* + 20\} = 19$

$\min l(v_i) = \min \{19,19,18,29\} = 18$

bersesuaian dengan titik simpul v_{10}.

v_{10} adalah label tetap, $l(v_{10}) = 18^*$, $p = v_{10}$.

Perulangan kesembilan.

$\Gamma(p) = \Gamma(v_{10}) = \{v_1,v_8,v_9,v_{11}\}$ karena v_1,v_9 telah menjadi label tetap, maka $\Gamma(v_{10}) = \{v_8,v_{11}\}$ adalah label sementara, menurut persamaan 3.4 :

$l(v_j) = \min \{l(v_i),l(p) + a(p,v_j)\}$

untuk titik simpul v_8.

$l(v_8) = \min \{l(v_8),l(v_{10}) + a(v_{10},v_8)\}$

$l(v_8) = \min \{19,18^* + 3\} = 19$

dengan cara yang sama dikerjakan pula untuk titik simpul v_{11}.

$\min l(v_i) = \min \{19,19,29\} = 19$

bersesuaian dengan titik simpul v_3 dan v_8, dimana $\ell(v_3)$ dan $\ell(v_8) = 19^+$. Maka titik simpul v_{11} adalah label tetap terakhir dimana $\ell(v_{11}) = 29^+$.

Dengan cara yang sama dikerjakan pula pada titik simpul $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ dimana titik simpul tersebut dianggap sebagai titik awal. Akhirnya diperoleh nilai dari matriks D.

D =

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	–	13	19	17	14	7	11	19	15	18	29	4
v_2	13	–	18	9	23	20	24	21	2	18	16	17
v_3	19	18	–	20	5	12	16	24	20	27	25	12
v_4	17	9	20	–	25	24	28	30	11	27	25	21
v_5	14	23	5	25	–	7	11	19	25	22	20	10
v_6	7	20	12	24	7	–	4	12	22	15	22	3
v_7	11	24	16	28	11	4	–	8	27	11	18	7
v_8	19	21	24	30	19	12	8	–	19	3	10	15
v_9	15	2	20	11	25	22	26	19	–	16	14	19
v_{10}	18	18	27	27	22	15	11	3	16	–	12	18
v_{11}	29	16	25	25	20	22	18	10	14	12	–	25
v_{12}	4	17	15	21	10	3	7	15	19	18	25	–

Yang diarsir pada matriks D diatas adalah nilai untuk titik simpul yang berderajat ganjil.

Langkah 2 : untuk menentukan M^* terlebih dahulu ditentukan M yaitu himpunan lintasan antara titik simpul ujung v_i dan v_j dimana $v_i, v_j \in V^-$ yang tidak mempunyai titik simpul ujung yang sama. Titik simpul yang berderajat ganjil adalah $v_1, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9$.

M_1 : $(v_1,v_3) = 19$

$(v_4,v_6) = 24$

$(v_8,v_9) = 22$, jumlah = 19+24+22 = 65

M_2 : $(v_1,v_3) = 19$

$(v_4,v_8) = 30$

$(v_6,v_9) = 22$, jumlah = 19+30+22 = 71

M_3 : $(v_1,v_3) = 19$

$(v_4,v_9) = 11$

$(v_6,v_8) = 12$, jumlah = 19+11+12 = 42

M_4 : $(v_1,v_4) = 17$

$(v_3,v_6) = 12$

$(v_8,v_9) = 19$, jumlah = 17+12+19 = 48

M_5 : $(v_1,v_4) = 17$

$(v_3,v_8) = 24$

$(v_6,v_9) = 22$, jumlah = 17+24+22 = 63

M_6 : $(v_1,v_4) = 17$

$(v_3,v_9) = 20$

$(v_6,v_8) = 12$, jumlah = 17+20+12 = 49

M_7 : $(v_1,v_6) = 7$

$(v_3,v_4) = 20$

$(v_8,v_9) = 19$, jumlah = 7+20+19 = 46

M_8 : $(v_1,v_6) = 7$

$(v_3,v_8) = 24$

$(v_4,v_9) = 11$, jumlah = 7+24+11 = 42

M_9 : $(v_1,v_6) = 7$

$(v_3,v_9) = 20$

$(v_4,v_8) = 30$, jumlah = 7+20+30 = 57

M_{10}: $(v_1,v_8) = 19$

$(v_3,v_4) = 20$

$(v_6,v_9) = 22$, jumlah = 19+20+22 = 61

M_{11}: $(v_1,v_8) = 19$

$(v_3,v_6) = 24$

$(v_4,v_9) = 11$, jumlah = 19+24+11 = 54

M_{12}: $(v_1,v_8) = 19$

$(v_3,v_9) = 20$

$(v_4,v_6) = 24$, jumlah = 19+20+24 = 63

M_{13}: $(v_1,v_9) = 15$

$(v_3,v_4) = 20$

$(v_6,v_8) = 12$, jumlah = 15+20+12 = 47

M_{14}: $(v_1,v_9) = 15$

$(v_3,v_6) = 12$

$(v_4,v_8) = 30$, jumlah = 15+12+30 = 57

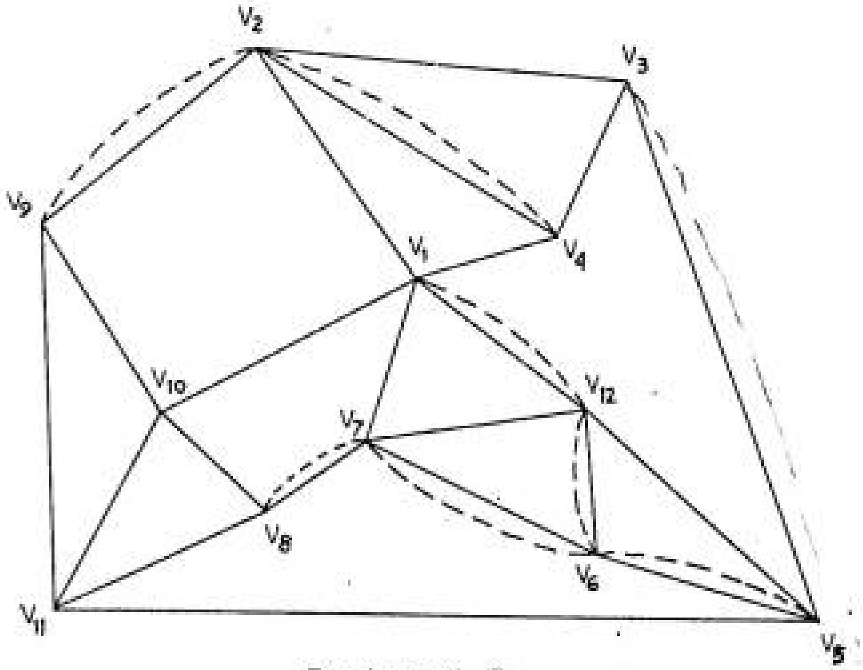
M_{15}: $(v_1,v_9) = 15$

$(v_3,v_8) = 24$

$(v_4,v_6) = 24$, jumlah = 15+24+24 = 63

Jadi $M^* = M_3$ dan M_8, andaikan dipilih $M^*=M_8$ maka M^* : pada (v_1,v_6), lintasan terpendeknya menurut persamaan 3.3 adalah (v_1,v_{12},v_6) dengan nilai 7, pada (v_3,v_8) menurut persamaan 3.3 lintasan terpendeknya adalah (v_3,v_5,v_6,v_7,v_8) dengan nilai 24 dan pada (v_4,v_9) menurut persamaan 3.3 lintasan terpendeknya adalah (v_4,v_2,v_9) dengan nilai 11.

Langkah 3 : sisipkan busur semu pada graph G yang sesuai dengan M^* yang menghasilkan s-graph $G^-(M^*)$ yang ditunjukkan pada gambar 4.2 dan busur semu digambarkan dengan garis putus-putus.



Gambar 4.2

graph $G^{-}(M^{*})$

Langkah 4 : dapat dilihat pada gambar 4.2 bahwa sirkuit optimum pada G melalui busur (9,2) (2,4) (3,5) (5,6) (1,12) (12,6) (7,6) dan (8,7) dua kali, sedangkan busur yang lain hanya sekali. Jadi tukang pos tersebut akan melewati titik simpul yang jika diawali dengan titik simpul v_1 maka akan berakhir di v_1 pula, yang diberikan dengan barisan titik simpul yaitu :

$v_1, v_4, v_3, v_5, v_3, v_2, v_4, v_2, v_1, v_{12}, v_5, v_6, v_7, v_8,$
$v_{10}, v_1, v_7, v_6, v_{12}, v_6, v_5, v_{11}, v_9, v_2, v_9, v_{10}, v_{11},$
$v_8, v_7, v_{12}, v_1.$

Dan nilai terkecil sirkuit yang melewati

G = jumlah nilai semua busur nyata dan semu dari graph $G^-(M^*)$ yaitu :

17+20+5+5+18+9+9+13+4+11+7+4+8+3+18+19+4+3+3 +7+20+14+2+2+16+12+10+8+18+4 = 293 unit.

Atau boleh juga tukang pos tersebut berangkat dari titik simpul v_{11} dan akan kembali ketitik simpul v_{11} yang diberikan dengan barisan titik simpul yaitu :

$v_{11}, v_{10}, v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_{12}, v_7, v_6, v_{12}, v_5, v_3, v_2, v_4, v_1, v_{12}, v_1, v_7, v_6, v_5, v_{11}, v_8, v_7, v_8, v_{10}, v_9, v_2, v_9, v_{11}$.

Dan nilai terkecil sirkuit yang melewati G = 293 unit.

DAFTAR PUSTAKA

1. Christofides, Nicos, "*Graph Theory An Algorithmic Approach*", Academic Press, New York.
2. Deo, Narsingh, "*Graph theory With Application to Engineering and Computer Science*", Prentice Hall. Inc. Englewood Cliff. N.J., U.S.A.
3. Harary, Frank, "*Graph Theory*", Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Philippines.
4. Henley, Ernest J. and Williams, R.A.,"*Graph Theory In Modern Engineering*", Academic Press New York San Francisco London.
5. Muchlisah, Nurul, "*Graf Euler dan Aplikasinya Pendekatan Algoritma*", Ujung Pandang.