PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL MELALUI PEMROGRAMAN DINAMIK

SKRIPSI

Untuk melengkapi tugas - tugas dan memenuhi syarat - syarat untuk mencapai gelar sarjana

Oleh

Erna Areks
H 111 96 014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2001

PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL MELALUI PEMROGRAMAN DINAMIK

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama

Drs. Budi Nurwahyu, MS
NIP. 131 414 010

Pembimbing Pertama

Erna Tri Herdiani, S.Si,M.Si
NIP.132 205 486

Makassar, Juni 2001

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat dan karunia-Nya jualah sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyusunan skripsi ini, tidak lepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, pada kesempatan ini secara khusus dan istimewa penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada Ibunda tercinta ***Andi Zaenab HAR*** atas segala do'a, dorongan moril dan materil yang telah diberikan selama ini, mudah-mudahan pengorbanan Ibunda selama ini tidak sia-sia dan mendapat berkah.

Tak lupa pula penulis sampaikan terima kasih kepada :

- Bapak Rektor Universitas Hasanuddin beserta stafnya.
- Bapak Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin beserta stafnya.
- Bapak Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
- Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, MS** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Erna Tri Herdiani, SSi, MSi** selaku Pembimbing Pertama yang penuh keikhlasan telah memberikan motivasi, saran serta bimbingan sejak awal hingga akhir penulisan skripsi ini.
- Bapak Ibu Staf Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan dan bantuan serta pengertiannya selama ini.
- Staf Tata Usaha Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin.
- Kakak-kakakku yang tercinta, Ka' Burhan dan Ka' Mabruk atas segala dorongan, perhatian serta do'anya.

- Rekan-rekan angkatan '96 (Asni, Odha, Niar, Indra, Mega, Mening, Sukma, Fajar, Hera, Ilhe, Muhtar, Aki, Salam, Nasar) serta rekan lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, semoga persahabatan kita abadi selamanya.
- Rekan - rekan di UPT Komputer UNHAS : Ka' Adi, Ka' Hendra, Ka' Arman, Ka' Wahid, Ka' Adi gugun, Ka' Khalik, Asdar, Lukman, Icha, dan Mimiek yang senantiasa memberikan motivasi dalam penulisan skripsi ini.
- Terkhususnya kepada Saudariku Warmiaty Adnan, STP atas segala bantuannya selama ini, semoga persaudaraan kita tidak lekang dimakan waktu.
- Seluruh Warga HIMATIKA FMIPA UNHAS, thank's.

Semoga Allah SWT memberikan balasan yang setimpal atas semua kebaikan yang telah diberikan. Segala kritik dan saran sangat penulis harapkan untuk perbaikan penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi yang membutuhkan utamanya bagi penulis sendiri.

Makassar, Juni 2001

Wassalam

Penulis

ABSTRAK

Jika matriks **A** dengan rank tidak penuh, maka terdapat banyak penyelesaian dari masalah minimalisasi $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$ melalui vector **x**. Diantara vector-vektor **x** tersebut, terdapat satu vector **x** dimana $\|\mathbf{x}\|$ minimum dari beberapa aplikasi. Vektor ini dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$. Dalam tulisan ini, teknik persamaan fungsional dari pemrograman dinamik digunakan untuk menentukan solusi dari masalah kuadrat terkecil dalam bentuk terpisah (sequential).

ABSTRAC

If the matrix **A** is not of full rank, there may be many solution to the problem of minimizing $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$ over **x**. Among such vectors **x**, the unique one for which $\|\mathbf{x}\|$ is minimum is of importance in applications. This vector may be represented as $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$. In this paper, the functional equation technique of dynamic programming is used to find the shortest solution to the least-squares problem in a sequential fashion.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

I.1. LATAR BELAKANG

Ilmu pengetahuan dewasa ini berkembang dengan sangat pesat. Penemuan-penemuan dalam bidang rekayasa dan teknologi hampir setiap hari terdengar. Walaupun untuk mendapatkannya terkadang harus melalui proses dan percobaan-percobaan yang panjang, dan rumit.

Peran matematika sebagai salah satu komponen ilmu pengetahuan, khususnya ilmu-ilmu dasar (Basic Science), sangat menunjang perkembangan tersebut.

Banyak permasalahan yang dapat atau lebih mudah diselesaikan setelah dibahas secara matematika, atau setelah menggunakan perhitungan dan konsep-konsep matematika.

Salah satu permasalahan yang ditemukan ialah menentukan solusi dari masalah kuadrat terkecil

$$\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b},$$

dimana $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks $m\times n$ dengan rank r, kolom pertama r bebas linear, $\mathbf{x}$ adalah sebuah vektor $n\times 1$ dan $\mathbf{b}$ adalah sebuah vector $m\times 1$. Dengan cara yang lain, kita dapat menentukan sebuah vector $\mathbf{x}$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ adalah minimum diantara vector-vektor $\mathbf{x}$ yang mengakibatkan $\mathbf{Ax}$ dekat dengan $\mathbf{b}$ sehingga $(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})$ minimum.

Solusi dari masalah ini adalah :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$$

dimana $\mathbf{A}^{+}$ adalah invers matriks $\mathbf{A}$. Untuk menyelesaikan masalah tersebut, diperlukan suatu teknik yang dapat membantu dalam mencari penyelesaiannya. Salah satu teknik tersebut adalah "Pemrograman Dinamik"

Pemrograman Dinamik pertama kali dipublikasikan pada tahun 1957 oleh Richard Bellman. Pada mulanya program ini pemakaiannya masih terbatas pada beberapa masalah tertentu, namun dewasa ini Pemrograman Dinamik telah berkembang sebagai suatu teknik jumlah untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika, terutama dalam meningkatkan perhitungan dari penyelesaian masalah-masalah program matematika tertentu dengan memecah mereka ke dalam bentuk yang lebih kecil, karena itu perhitungan lebih sederhana.

Berdasarkan alasan-alasan di atas, maka penulis tertarik untuk membahas lebih mendalam tentang masalah tersebut, dan menuangkan dalam bentuk tulisan dengan judul:

"PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL MELALUI PEMROGRAMAN DINAMIK"

I.2. TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk menentukan solusi dari masalah kuadrat terkecil dengan menggunakan teknik persamaan fungsional Pemrograman Dinamik

I.3. BATASAN MASALAH

Berdasarkan judul, latar belakang dan tujuan , maka tulisan ini akan membahas tentang masalah meminimumkan $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ dengan syarat bahwa persamaan linear

$$\mathbf{a}_1 x_x + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{d}$$

memenuhi, dimana $\mathbf{d}$ adalah suatu vektor $m \times 1$ dan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ bebas linear, dengan menggunakan algoritma αQ dan βR .

I.4. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Tugas akhir ini dimulai dengan Pendahuluan yang berisi Latar Belakang, Tujuan Penulisan, Batasan Masalah, dan Sistematika Pembahasan. Kemudian dilanjutkan dengan Tinjauan Pustaka yang mendasari pengerjaan tugas akhir ini yaitu Kuadrat Terkecil dan Pemrograman Dinamik. Inti dari penulisan ini akan disajikan pada Bab III yang akan di bahas mengenai pendekatan solusi kuadrat terkecil melalui pemrograman dinamik dengan algoritma-αQ dan algoritma-βR.

Pada Bab IV kedua algoritma tersebut akan diperluas dan digunakan dalam prosedur-$\alpha Q \beta R$. Dan Bab V berisi Kesimpulan dan Saran.

BAB II

KUADRAT TERKECIL DAN PEMROGRAMAN DINAMIK

II.1. KUADRAT TERKECIL

Setiap sistem persamaan linear mempunyai satu pemecahan, atau tak terhingga banyaknya pemecahan, atau tidak mempunyai pemecahan sama sekali. Suatu sistem linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dengan matriks koefisien kuadrat, memiliki satu pemecahan tunggal dimana banyaknya persamaan sama dengan banyaknya peubah. Selain itu terdapat sistem linear dengan matriks koefisien persegi-panjang. Jika **A** memiliki *m* baris dan *n* kolom, maka **x** adalah sebuah vektor dengan *n* komponen dan **b** adalah vektor dengan *m* komponen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

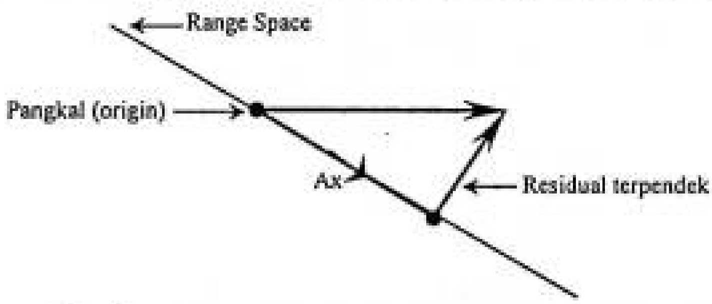
Jika *m>n*, dimana persamaan lebih banyak daripada peubah, sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ biasanya disebut overdetermined, yang kemungkinan besar tidak mempunyai suatu solusi (pemecahan) [7]. Sebaliknya jika *n>m*, dimana peubah lebih banyak daripada persamaannya, maka sistem disebut underdetermined, yang memiliki solusi tak terhingga [7]. Untuk solusi kuadrat terkacil ("least squares" problem) dimana *m>n* atau *n>m*, sistem linier $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ memiliki solusi tunggal (a natural unique solution)[7].

II.1.1. Sistem Overdetermined

Secara umum sistem overdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks $m \times n$ dengan $m > n$, memiliki lebih banyak persamaan daripada peubah, sehingga kemungkinan besar tidak mempunyai suatu solusi (pemecahan). Oleh sebab itu untuk menetukan solusi (pemecahan) dari system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, vektor $\mathbf{x}$ dapat diperoleh bilamana $\mathbf{Ax}$ dekat dengan $\mathbf{b}$. Dengan kata lain, dalam menentukan vector $\mathbf{x}$, 2-norm dari residual $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ sekecil mungkin. Sehingga untuk menemukan solusi kuadrat terkecil dari system overdetermined adalah ekivalen dengan penyelesaian masalah :

$$\min_{x} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \text{ .[7]}$$

Jika sistem mempunyai suatu solusi, maka vektor residualnya adalah nol.



Gambar 1. Ruang Hasil A dan Solusi Kuadrat Terkecil dari Ax=b

Definisi :

Vektor **x** disebut solusi kuadrat terkecil sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jika 2-norm dari vektor residual **r** =**Ax-b** adalah minimum.

Teorema :

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks $m \times n$ dengan $m>n$.

Solusi kuadrat terkecil dengan sistem overdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ merupakan solusi dari persamaan biasa (normal equation) :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

Jika $\mathbf{A}$ dengan rank n, maka $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ adalah nonsingular dan solusi tunggal dari persamaan di atas diperoleh:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

Bukti :

Sistem linear overdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dengan $m>n$, solusi kuadrat terkecil dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ yaitu meminimumkan

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}). \qquad (1)$$

Misalkan $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$, pers.(1) dapat ditulis :

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2, \qquad (2)$$

dimana r_i adalah komponen ke-i dari $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^T = [r_1 \;\; \dots \;\; r_i \;\; \dots \;\; r_m]$.

Pendifferensialan pers.(2) pada x_1 diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}_1^2 + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}_2^2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}_m^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = 2r_1\frac{\partial}{\partial x_1}r_1 + 2r_2\frac{\partial}{\partial x_1}r_2 + \cdots + 2r_m\frac{\partial}{\partial x_1}r_m. \tag{3}$$

Komponoen ke-i dari $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ sama dengan baris ke-i matriks $\mathbf{A}$ kali $\mathbf{x}$ dikurangi dengan b_i :

$$r_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i.$$

Karena $\dfrac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial x_1} = a_{i1}$, pers.(3) diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = 2r_1a_{11} + 2r_2a_{21} + \cdots + 2r_ma_{m1}.$$

Turunan parsial dari $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$ terhadap x_j, diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = 2r_1a_{1j} + 2r_2a_{2j} + \cdots + 2r_ma_{mj}. \tag{4}$$

Sisi kanan pada pers.(4), turunan parsial dari $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$ terhadap x_j adalah perkalian antara bilangan 2 dan kolom ke-j dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{r}$. Dengan mengingat bahwa kolom ke-j dari $\mathbf{A}$ merupakan baris ke-j dari $\mathbf{A}^T$. Akibatnya komponen ke-j dari $\mathbf{A}^T\mathbf{r}$ sama dengan kolom ke-j dari $\mathbf{A}$ kali $\mathbf{r}$, turunan parsial dari $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$ terhadap x_j adalah komponen ke-j dari vektor

$2\mathbf{A}^T\mathbf{r}$. Norm Euclid (Euclidean norm) dari residual adalah meminimumkan $\mathbf{x}$ dimana semua turunan parsial :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = \cdots = \frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{r}^T\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Akibat setiap turunan parsial yaitu 2 kali komponen $\mathbf{A}^T\mathbf{r}$ akan diperoleh $\mathbf{A}^T\mathbf{r} = \mathbf{0}$, karena $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$, maka diperoleh hubungan :

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

dari persamaan di atas, diperoleh persamaan biasa (normal equation) :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{6}$$

Jika $\mathbf{A}$ dengan rank n, maka matriks $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ juga memiliki rank n dengan ukuran matriks $n \times n$. Karena $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ adalah matriks kuadrat, maka matriks tersebut dapat dibalik dengan invers $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$, sehingga pers.(6) diperoleh :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{7}$$

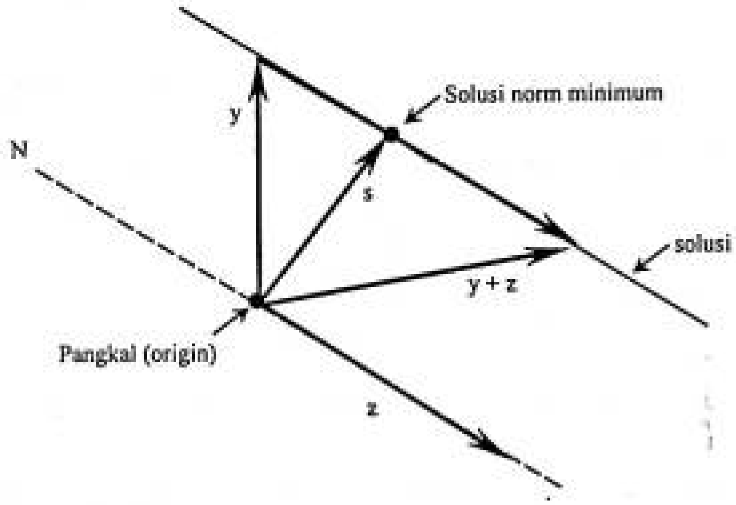
$\mathbf{x}$ adalah solusi tunggal persamaan $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

II.1.2. Sistem Underdetermined

Suatu sistem linear underdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dimana **A** adalah matriks $m \times n$ dengan $n > m$ (lebih banyak peubah daripada persamaannya), memiliki solusi yang tak berhingga. Solusi kuadrat terkecil dari sistem underdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah yang terdekat dari pangkal (origin). Dengan kata lain, **x** yang merupakan solusi dari sistem tersebut mengakibatkan $\|\mathbf{x}\|_2$ sekecil mungkin, atau ekivalen dengan penyelesaian masalah :

$$\min \left\{ \|\mathbf{x}\|_2 : \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \right\}$$

Misal **y** merupakan solusi yang lain dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dan **z** adalah vektor lain di mana $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{Ay} + \mathbf{Az} = \mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ merupakan solusi dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dimana $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$, sebaliknya jika $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, maka $\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ untuk $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Karena $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, maka akibatnya **x** dapat dinyatakan $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, dimana $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ dan $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$. Oleh sebab itu solusi dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mempunyai bentuk $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, dimana $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$. Himpunan semua **z** sedemikian sehingga $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$ dinamakan ruang nol **A**. Misal **N** didenotasikan ruang nol **A** (null space of **A**), solusi dari sistem underdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dapat di tunjukkan pada gambar 2.



Gambar 2. Solusi System Linear Underdetermined

Setiap solusi adalah jumlah vektor **y** dan **z**, dimana **z** berada dalam **N**. Dengan mengamati gambar 2, solusi yang terdekat dengan pangkal (origin) adalah yang tegak lurus terhadap ruang nol. Himpunan semua vektor-vektor yang tegak lurus terhadap ruang nol **A** merupakan kombinasi linear dari baris matriks **A**. Dengan kata lain, vektor-vektor yang tegak lurus terhadap ruang nol **A** mempunyai bentuk persamaan $\mathbf{A}^T\mathbf{t}$, dimana **t** adalah sebarang vektor. Jika **s** didenotasikan solusi kuadrat terkecil (norm minimum) dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, maka $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T\mathbf{t}$ untuk semua **t**.

Substitusi $\mathbf{x} = \mathbf{s} = \mathbf{A}^T\mathbf{t}$ ke dalam persamaan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, diperoleh :

$$\mathbf{AA}^T\mathbf{t} = \mathbf{b}. \qquad (7)$$

Penyelesaian dari pers.(7) di atas, solusi kuadrat terkecil (least squares solution) dari sistem underdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T\mathbf{t}$.

Jadi solusi kuadrat terkecil dari sistem underdetermined $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}. \qquad (8)$$

II.2. PEMROGRAMAN DINAMIK

II.2.1. Konsep Pemrograman Dinamik

Pemrograman Dinamik merupakan suatu pendekatan umum untuk menyelesaikan masalah dari persamaan khusus yang digunakan. Program ini memberikan suatu prosedur sistematika untuk menentukan serangkaian keputusan-keputusan optimal dari suatu masalah.

Pemrograman Dinamik adalah teknik yang dirancang dengan tujuan utama memperbaiki efisiensi perhitungan dari satu persoalan optimisasi.

Ide pokok teknik tersebut adalah memisahkan persoalan menjadi bagian yang mudah dikuasai.

Dalam garis besarnya cara kerja Pemrograman Dinamik itu adalah :

1. Setiap persoalan dipecah menjadi persoalan yang lebih kecil atau sub problem yang disebut stage. Kemudian setiap stage dioptimisasikan menurut alternatifnya masing-masing, sehingga tidak perlu menghitung semua kombinasi pada stage tertentu.
2. Karena optimasi dikerjakan pada setiap stage (sub problem), maka semua kombinasi yang tidak optimal dengan segera dapat dibuang.
3. Setiap stage dikaitkan satu dengan yang lainnya dengan cara khusus, sehingga tidak mungkin mengoptimisasi kombinasi-kombinasi yang tidak layak.

Dalam perumusan Pemrograman Dinamik ketiga hal yang tersebut di atas dinyatakan dengan tiga elemen pokok yaitu :

(1) Stage

Stage adalah bagian persoalan yang mengandung decision variable.

(2) Alternatif (decision variable)

Pada setiap stage terdapat decision variable dan fungsi tujuan yang menentukan besarnya nilai setiap alternatif.

(3) State dari sistem pada setiap stage

State merupakan konsep terpenting dalam pemrograman dinamik. State menunjukkkan kaitan satu stage dengan stage yang lainnya, sedemikian sehingga setiap stage dapat dioptimisasikan secara terpisah, sehingga hasil optimisasi layak untuk seluruh persoalan. Selain itu state memudahkan membuat keputusan optimum bagi stage yang masih tersisa dengan tidak usah mengecek pengaruh keputusan yang akan datang pada keputusan yang dibuat sebelumnya.

II.2.2. Persamaan Rekursif

Stage dan State itu memecah persoalan Pemrograman Dinamik, dipakai sebagai alat perhitungan dalam bentuk persamaan rekursif. Persamaan rekursif memungkinkan untuk mengoptimisasikan setiap stage secara terpisah dan mempertahankan optimisasi kumulatif dari semua stage sebelumnya, sehingga jika stage terakhir sudah diselesaikan maka nilai optimal seluruh persoalan otomatis sudah diperoleh. Penyelesaian persoalan tersebut disebut rekursif karena nilai optimal dari i buah stage sebelumnya secara berurutan, untuk menghasilkan nilai optimal stage ke-i.

II.2.3. Prinsip Bellman

Dalam mengerjakan persoalan optimisasi dalam Pemrograman Dinamik dikenal adanya prinsip Bellman yang bunyinya sebagai berikut :

"Suatu kebijakan optimal mempunyai sifat bahwa berapapun besarnya state awal dan keputusan awal keputusan yang tersisa harus membuat keputusan optimal, terhadap state yang dihasilkan dari keputusan pertama".

BAB III
PENDEKATAN SOLUSI KUADRAT TERKECIL
MELALUI PEMROGRAMAN DINAMIK

III.1. ALGORITMA - αQ

Misalkan ditemukan suatu solusi dari masalah persamaan aljabar linear yang konsisten

$$\mathbf{A}_r \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{c},$$

dimana $\mathbf{A}_r$ adalah suatu matriks $m \times r$ dengan rank r, dimana kolom-kolomnya $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$; $\mathbf{x}^{(r)}$ adalah suatu vektor $r \times 1$ dengan elemen-elemen $x_1, x_2, \ldots, x_r$; dan $\mathbf{c}$ adalah suatu vektor $m \times 1$. Dengan menggunakan pemrograman dinamik, kita dapat menentukan nilai dari $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Misalkan $f_k(\mathbf{c}_k)$ merupakan kuadrat terkecil antara jarak $\mathbf{c}_k$ dan $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i x_i$, dimana $\mathbf{c}_k$ adalah vektor $m \times 1$ dan $k = 1, 2, \ldots, r$. maka pada prinsip optimaliti (principle of optimality) dari Bellman diperoleh hubungan :

$$f_k(\mathbf{c}_k) = \min_{x_k} f_{k-1}(\mathbf{c}_k - \mathbf{a}_k x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

$$f_1(\mathbf{c}_1) = \min_{x_1} (\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1 x_1)^T (\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1 x_1), \tag{2}$$

dimana,

$$\mathbf{c}_r = \mathbf{c} \tag{3a}$$

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1} x_{k+1}^{opt}, \quad k = r-1, r-2, \ldots, 1. \tag{3b}$$

pers.(2) di atas ekivalen dengan :

$$f_1(\mathbf{c}_1) = \min_{x_1}\left(\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_1^T\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1x_1^2\right), \tag{4}$$

untuk kuadrat di x_1, maka keadaan orde pertama untuk meminimumkan nilai x_1, adalah :

$$\partial(\cdot)/\partial x_1 = 2\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1x_1 - 2\mathbf{a}_1^T\mathbf{c}_1 = 0 \tag{5}$$

Akibat dari pers.(4) di atas, diperoleh :

$$x_1^{opt} = \mathbf{a}_1^T\mathbf{c}_1 / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 \neq 0 \tag{6}$$

atau,

$$x_1^{opt} = \mathbf{c}_1^T\mathbf{a}_1 / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 \neq 0 \tag{7}$$

dari persamaan (6) dan (7), maka $\mathbf{a}_1$ bukan merupakan vektor nol.

Subsitusi pers (6) dan (7) ke dalam pers (4), diperoleh :

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{c}_1) &= \mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_1^T(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^T / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1)\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1^T(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^T / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1)\mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_1^T(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^T / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1)\mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{c}_1^T(\mathbf{I} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^T / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1)\mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{c}_1^T\mathbf{Q}_1\mathbf{c}_1, \end{aligned} \tag{8}$$

dimana,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^T / \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1, \tag{9}$$

Diasumsikan bahwa :

$$f_{k-1}(\mathbf{c}_{k-1}) = \mathbf{c}_{k-1}^T\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_{k-1},$$

dimana $\mathbf{Q}_{k-1}$ adalah matriks simetrik $m \times m$. Dari persamaan di atas akan dibuktikan bahwa $f_k(\mathbf{c}_k)$ mempunyai bentuk :

$$f_k(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k$$

dimana $\mathbf{Q}_k$ adalah matriks simetrik $m \times m$, dan $k=1,2,\ldots,r$

Hubungan dari pers.(1) diatas, dapat kita lihat bahwa :

$$f_k(\mathbf{c}_k) = \min_{x_k} f_{k-1}(\mathbf{c}_k - \mathbf{a}_k x_k).$$

$$= \min_{x_k}\left[(\mathbf{c}_k - \mathbf{a}_k x_k)^T \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{c}_k - \mathbf{a}_k x_k)\right]$$

$$= \min_{x_k}\left[\mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k - 2\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k x_k + \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k^2\right] \tag{10}$$

Oleh sebab itu, kondisi orde pertama untuk meminimumkan nilai x_k adalah :

$$\partial[.]/\partial x_k = -2\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k + 2\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k = 0 \tag{11}$$

akibatnya :

$$x_k^{opt} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k, \qquad \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k \neq 0, \tag{12}$$

atau,

$$x_k^{opt} = \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k, \qquad \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k \neq 0. \tag{13}$$

Dengan mensubsitusikan pers.(12) atau (13) ke dalam per.(10) diperoleh :

$$f_k(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k - 2\mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k^{opt} - x_k^{opt}\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k^{opt}$$

$$= \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k - 2\mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1} / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\right)\mathbf{c}_k$$

$$+ \mathbf{c}_k^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\right)\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1} / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\right)\mathbf{c}_k$$

$$= \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_k^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1} / \mathbf{a}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\right)\mathbf{c}_k$$

$$= \mathbf{c}_k^T \left(\mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{Q}_{k-1} / \mathbf{a}_k^T\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k \right)\mathbf{c}_k$$

$$= \mathbf{c}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k \tag{14}$$

dimana

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{Q}_{k-1} / \mathbf{a}_k^T\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{15}$$

Misalkan :

$$\alpha_k = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k, \tag{16}$$

maka persamaan (15) eqivalen dengan :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \alpha_k\alpha_k^T / \alpha_k^T\mathbf{a}_k, \quad \alpha_k^T\alpha_k \neq 0 \quad k = 2, 3, \ldots, r. \tag{17}$$

Didefenisikan $\alpha_1 = \mathbf{a}_1$. Akan ditinjau hubungan antara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ dan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Dari pers.(9), disatu sisi, mengalikan $\mathbf{Q}_1$ dengan sebuah vektor yaitu perkalian dengan sebuah skalar dengan α_1 (katakan $s_1\alpha_1$)

$$\mathbf{Q}_1 s_1\alpha_1 = \left(\mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1\right)s_1\alpha_1$$

$$= s_1\alpha_1 - s_1\left(\alpha_1\alpha_1^T\alpha_1 / \alpha_1^T\mathbf{a}_1\right) = s_1\alpha_1 - s_1\alpha_1 = 0 \tag{18}$$

di lain sisi, mengalikan $\mathbf{Q}_1$ dengan sebuah vektor (katakana $\mathbf{v}_1$) ortogonal terhadap α_1

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{v}_1 = \left(\mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - 0 = \mathbf{v}_1 \tag{19}$$

untuk

$$\alpha_1^T\mathbf{v}_1 = 0. \tag{20}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa sebarang vektor yang dikalikan dengan $\mathbf{Q}_1$ sama dengan komponen dari vektor yang tegak lurus terhadap α_1

$$\alpha_2^T\alpha_1 = \alpha_1^T\alpha_2 = 0. \tag{21}$$

Dengan cara yang sama , pers.(17) dan (9)

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1 - \alpha_2\alpha_2^T / \alpha_2^T\mathbf{a}_2 \ , \tag{22}$$

berikut di satu sisi, mengalikan $\mathbf{Q}_2$ dengan sebuah vektor yaitu perkalian sebuah skalar dengan α_1 (katakan $s_{21}\alpha_1$) atau perkalian skalar dengan α_2 (katakan $s_{22}\alpha_2$)

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_2 s_{21}\alpha_1 &= \left(\mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1 - \alpha_2\alpha_2^T / \alpha_2^T\mathbf{a}_2\right)s_{21}\alpha_1 \\ &= s_{21}\alpha_1 - s_{21}\left(\alpha_1\alpha_1^T\alpha_1 / \alpha_1^T\mathbf{a}_1\right) - 0 \\ &= s_{21}\alpha_1 - s_{21}\alpha_1 = 0,\end{aligned} \tag{23}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_2 s_{22}\alpha_2 &= \left(\mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1 - \alpha_2\alpha_2^T / \alpha_2^T\mathbf{a}_2\right)s_{22}\alpha_2 \\ &= s_{22}\alpha_2 - 0 - s_{22}\left(\alpha_2\alpha_2^T\alpha_2 / \alpha_2^T\mathbf{a}_2\right) \\ &= s_{22}\alpha_2 - s_{22}\alpha_2 = 0;\end{aligned} \tag{24}$$

di lain sisi, mengalikan $\mathbf{Q}_2$ dengan sebuah vektor (katakana $\mathbf{v}_2$) ortogonal dengan α_1 dan α_2

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{v}_2 = \left(\mathbf{I} - \alpha_1\alpha_1^T / \alpha_1^T\mathbf{a}_1 - \alpha_2\alpha_2^T / \alpha_2^T\alpha_2\right)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - 0 - 0 = \mathbf{v}_2 \tag{25}$$

untuk

$$\alpha_1^T\mathbf{v}_2 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \alpha_2^T\mathbf{v}_2 = 0. \tag{26}$$

Jadi dapat di simpulkan bahwa sebarang vektor yang dikalikan dengan $\mathbf{Q}_2$ sama dengan komponen dari vektor yang tegak lurus terhadap α_1 dan α_2. Maka dari itu berdasarkan definisi α_3 yang dipenuhi pers.(16), α_3 adalah komponen $\mathbf{a}_3$ yang tegak lurus terhadap α_1 dan α_2.

$$\alpha_3^T\alpha_1 = \alpha_1^T\alpha_3 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \alpha_3^T\alpha_2 = \alpha_2^T\alpha_3 = 0. \tag{27}$$

Dengan cara ini, dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa α_k merupakan komponen dari $\mathbf{a}_k$ yang ortogonal terhadap $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, dan $k = 1,2,\ldots,r$,

$$\alpha_k^T\alpha_l = 0, \qquad \text{untuk semua } k \neq l. \tag{28}$$

Selanjutnya $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ dan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ membangun ruang vektor yang sama, karena $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ merupakan kombinasi linier dari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ dan sebaliknya.

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1, \tag{29}$$

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1, \tag{30}$$

$$\mathbf{a}_2 = \alpha_2 + u_{12}\alpha_1, \tag{31}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{a}_2 - u_{12}\alpha_1 = \mathbf{a}_2 - u_{12}\mathbf{a}_1, \tag{32}$$

$$\mathbf{a}_3 = \alpha_3 + u_{23}\alpha_2 - u_{13}\alpha_1, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \mathbf{a}_3 - u_{23}\alpha_2 - u_{13}\alpha_1 = \mathbf{a}_3 - u_{23}(\mathbf{a}_2 - u_{12}\mathbf{a}_1) - u_{13}\mathbf{a}_1, \\ &= \mathbf{a}_3 - u_{23}\mathbf{a}_2 - (u_{23}u_{12} - u_{13})\mathbf{a}_1,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\vdots$$

dimana u merupakan skalar.

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2r} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

sehingga dari matriks tersebut diperoleh :

$$\alpha_1^T \mathbf{a}_1 = \alpha_1^T \alpha_1, \tag{36}$$

$$\alpha_2^T \mathbf{a}_2 = \alpha_2^T(\alpha_2 + u_{12}\alpha_1) = \alpha_2^T \alpha_2 + 0 = \alpha_2^T \alpha_2, \tag{37}$$

$$\alpha_3^T \mathbf{a}_3 = \alpha_3^T(\alpha_3 + u_{23}\alpha_2 + u_{13}\alpha_1) = \alpha_3^T \alpha_3 + 0 + 0 = \alpha_3^T \alpha_3, \tag{38}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_r^T \mathbf{a}_r = \alpha_r^T(\alpha_r + u_{(r-1)r}\alpha_{r-1} + \cdots + u_{2r}\alpha_2 + u_{1r}\alpha_1) = \alpha_r^T \alpha_r. \tag{39}$$

Subsitusi pers.(36)-(39) ke dalam pers.(17), diperoleh :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \alpha_k \alpha_k^T / \alpha_k^T \alpha_k, \quad \alpha_k^T \alpha_k \neq 0, \quad k = 2, 3, \ldots, r. \tag{40}$$

Didefinisikan $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$, maka pers.(40) berlaku untuk $k = 1,2,\ldots,r$.

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}, \tag{41}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} - \alpha_1 \alpha_1^T / \alpha_1^T \alpha_1, \qquad \alpha_1^T \alpha_1 \neq 0. \tag{42}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I} - \alpha_1 \alpha_1^T / \alpha_1^T \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_2^T / \alpha_2^T \alpha_2, \tag{43a}$$

$$\alpha_1^T \alpha_1 \neq 0 \qquad \text{dan} \qquad \alpha_2^T \alpha_2 \neq 0. \tag{43b}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{I} - \alpha_1 \alpha_1^T / \alpha_1^T \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_2^T / \alpha_2^T \alpha_2 - \cdots - \alpha_r \alpha_r^T / \alpha_r^T \alpha_r, \tag{44a}$$

$$\alpha_1^T \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2^T \alpha_2 \neq 0,\ \ldots,\ \alpha_r^T \alpha_r \neq 0. \tag{44b}$$

Substitusi pers.(36)-(39) ke dalam pers.(6) dan (12) diperoleh :

$$x_1^{opt} = \alpha_1^T \mathbf{c}_1 / \alpha_1^T \alpha_1, \qquad \alpha_1^T \alpha_1 \neq 0, \qquad (45)$$

dan

$$x_k^{opt} = \alpha_k^T \mathbf{c}_k / \alpha_k^T \alpha_k, \qquad \alpha_k^T \alpha_k \neq 0. \qquad (46)$$

Kedua persamaan tersebut merupakan rumus yang disederhanakan untuk skalar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ yang optimal. Karena $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ bebas linear, maka tak satupun dari vektor tersebut merupakan vektor nol.

Dengan asumsikan bahwa sistem

$$\mathbf{A}_r \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{c}$$

maka dari persamaan tersebut terdapat satu dan hanya satu skalar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ yang memenuhi

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_r x_r = \mathbf{c}$$

sehingga, skalar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ diperoleh.

Dalam menentukan solusi dari persamaan :

$$\mathbf{A}_r \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{c}$$

dapat digunakan algoritma-$\alpha\mathbf{Q}$ berikut.

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1, \qquad (47a)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} - \alpha_1 \alpha_1^T / \alpha_1^T \alpha_1, \qquad \alpha_1^T \alpha_1 \neq 0, \qquad (476)$$

$$\alpha_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2, \qquad (48a)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1 - \alpha_2 \alpha_2^T / \alpha_2^T \alpha_2, \qquad \alpha_2^T \alpha_2 \neq 0, \qquad (48b)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_r = \mathbf{Q}_{r-1}\mathbf{a}_r, \tag{49a}$$

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_{r-1} - \alpha_r\alpha_r^T / \alpha_r^T\alpha_r, \quad \alpha_r^T\alpha_r \neq 0, \tag{49b}$$

Skalar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ yang memenuhi persamaan :

$$\mathbf{A}_r\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{c}$$

akan diperoleh :

$$x_r^{opt} = \alpha_r^T\mathbf{c}_r / \alpha_r^T\alpha_r, \qquad \alpha_r^T\alpha_r \neq 0, \tag{50}$$

$$x_{r-1}^{opt} = \alpha_{r-1}^T\left(\mathbf{c} - \mathbf{a}_r x_r^{opt}\right) / \alpha_{r-1}^T\alpha_{r-1}, \qquad \alpha_{r-1}^T\alpha_{r-1} \neq 0, \tag{51}$$

$$\vdots$$

$$x_1^{opt} = \alpha_1^T\left(\mathbf{c} - \sum_{i=2}^{r}\mathbf{a}_i x_i^{opt}\right) \Big/ \alpha_1^T\alpha_1, \qquad \alpha_1^T\alpha_1 \neq 0, \tag{52}$$

III.2. ALGORITMA - β*R*

Misalkan ditemukan suatu solusi panjang terpendek (shortest length solution) dari persamaan aljabar linear yang konsisten :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d};$$

dimana **A** adalah matriks $m \times n$ dengan rank r yang mempunyai kolom pertama r, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ yang bebas linear. **x** adalah suatu vektor $n \times 1$, dan **d** adalah suatu vektor $m \times 1$. Dengan cara lain, skalar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat di temukan sedemikian sehingga diasumsikan bahwa persamaan linear yang konsisten :

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{d}$$

memenuhi, dan $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ adalah minimum.

Dengan menggunakan pemrograman dinamik, masalah tersebut di atas dapat diselesaikan.

Misalkan $g_k(\mathbf{d}_k)$ merupakan nilai dari $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_r^2$ dengan skalar $x_1, x_2, ..., x_k$ yang optimal ;

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + ... + \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{d}$$

adalah persamaan aljabar linear yang konsisten; **d** adalah vektor $m\times 1$; dan $k = r, r+1, \ldots, n$.

Optimal pada scalar $x_1, x_2, ..., x_k$, mengakibatkan nilai $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2$ minimum. Sehingga dengan prinsip optimaliti (principle of optimality) bellman diperoleh :

$$g_k(\mathbf{d}_k) = \min_{x_k}\{x_k^2 + g_{k-1}(\mathbf{d}_k - \mathbf{a}_k x_k)\}, \qquad k = r+1, r+2, ..., n, \tag{53}$$

dimana

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1} x_{k+1}, \qquad k = n-1, n-2, ..., r, \tag{54a}$$

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}. \tag{54b}$$

Pada pers.(53), k dimulai dari $r+1$ karena dari persamaan tersebut terdapat

satu dan hanya satu skalar $x_1, x_2, ..., x_r$ yang memenuhi

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + ... + \mathbf{a}_r x_r = \mathbf{d}_r;$$

oleh sebab itu, dari uraian di atas, kita tidak dapat memilih sembarang skalar $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dimana $k \le r$.

Misalkan $\mathbf{A}_r$ adalah matriks $m \times r$ dimana kolom-kolomnya adalah $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, dan $\mathbf{x}^{(r)}$ adalah vektor $r \times 1$ dengan elemen $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Karena $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ bebas linear, dan matriks $\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r$ dengan rank r yang berukuran $r \times r$; maka terdapat invers $\left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1}$. Sehingga solusi tunggal dari persamaan :

$$\mathbf{A}_r \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{d}_r \tag{54c}$$

adalah :

$$\mathbf{x}^{(r)} = \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \mathbf{A}_r^T \mathbf{d}_r. \tag{55}$$

Akibat dari definisi di atas diperoleh :

$$\begin{aligned} g_r(\mathbf{d}_r) &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = \mathbf{x}^{(r)T} \mathbf{x}^{(r)} \\ &= \mathbf{d}_r^T \mathbf{A}_r \left[\left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1}\right]^T \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \mathbf{A}_r^T \mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{d}_r^T \mathbf{A}_r \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \mathbf{A}_r^T \mathbf{d}_r. \end{aligned} \tag{56}$$

Didenotasikan :

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{A}_r \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r\right)^{-1} \mathbf{A}_r^T. \tag{57}$$

maka

$$g_r(\mathbf{d}_r) = \mathbf{d}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{d}_r, \tag{58}$$

dimana $\mathbf{R}_r$ adalah matriks simetrik $m \times m$.

Diasumsikan bahwa :

$$g_{k-1}(\mathbf{d}_{k-1}) = \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{d}_{k-1},$$

dimana $\mathbf{R}_{k-1}$ adalah matriks simetrik $m \times m$. Akan dibuktikan bahwa $g_k(\mathbf{d}_k)$ mempunyai bentuk :

$$g_k(\mathbf{d}_k) = \mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{d}_k,$$

dimana $\mathbf{R}_k$ adalah matriks simetrik dan $k = r+1, r+2, \ldots, n$.

Hubungan dari pers.(27) di atas, untuk $k = r+1, r+2, \ldots, n$ dapat dilihat bahwa :

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{d}_k) &= \min_{x_k}\{x_k^2 + g_{k-1}(\mathbf{d}_k - \mathbf{a}_k x_k)\}, \\ &= \min_{x_k}\{x_k^2 + (\mathbf{d}_k - \mathbf{a}_k x_k)^T \mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{d}_k - \mathbf{a}_k x_k) \\ &= \min_{x_k}\{x_k^2 + \mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k - 2\mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k + \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k^2 \\ &= \min_{x_k}\{(1 + \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k) x_k^2 + \mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k - 2\mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k x_k\}. \end{aligned} \tag{59}$$

Oleh sebab itu orde pertama untuk meminimumkan nilai x_k adalah :

$$\partial\{\}/\partial x_k = 2(1 + \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k) x_k - 2\mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k = 0, \tag{60}$$

sehingga dari persamaan di atas diperoleh :

$$x_k^{opt} = \mathbf{d}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k / (1 + \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k), \tag{61}$$

atau,

$$x_k^{opt} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k / (1 + \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k). \tag{62}$$

Dengan mensubsitusi pers.(61) atau (62) ke dalam pers.(59) diperoleh :

$$g_k(\mathbf{d}_k) = (1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)[x_k^{opt}]^2 - 2\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k x_k^{opt} + \mathbf{d}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k$$

$$= (1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)[\mathbf{d}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k /(1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)^2]$$
$$- 2\mathbf{d}_k^T[\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1} /(1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)]\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k$$

$$= \mathbf{d}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_k^T[\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1} /(1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)]\mathbf{d}_k$$

$$= \mathbf{d}_k^T[\mathbf{R}_{k-1} - \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1} /(1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k)]\mathbf{d}_k$$

$$= \mathbf{d}_k^T\mathbf{R}_k\mathbf{d}_k, \tag{63}$$

dimana

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k-1} - \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1} /(1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k), \quad k = r+1, r+2, \ldots, n.$$

$$1+\mathbf{a}_k^T\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k \neq 0, \tag{64}$$

Misalkan :

$$\beta_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{a}_k, \qquad k = r+1, r+2, \ldots, n, \tag{65}$$

sehingga pers.(64) ekivalen dengan :

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k-1} - \beta_k\beta_k^T /(1+\mathbf{a}_k^T\beta_k), \qquad k = r+1, r+2, \ldots, n \tag{66}$$

Dengan mensubsitusi pers.(65) ke dalam pers.(61) atau (62), diperoleh :

$$x_k^{opt} = \mathbf{d}_k^T\beta_k /(1+\mathbf{a}_k^T\beta_k), \tag{67}$$

atau ,

$$x_k^{opt} = \beta_k^T\mathbf{d}_k /(1+\mathbf{a}_k^T\beta_k), \tag{68}$$

dimana

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}, \tag{69a}$$

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}x_{k+1}^{opt}, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, r. \tag{69b}$$

oleh sebab itu, pers.(57) dan (66), $\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_{r+1}, \ldots, \mathbf{R}_n$ dapat diperoleh. Nilai optimal $\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{x}_{r+2}, \ldots, \mathbf{x}_n$ dapat ditentukan melalui pers.(55) dan pers.(67) atau (68).

Dari uraian di atas, dalam menentukan solusi dari persamaan aljabar linier

$$\mathbf{Ax=d}$$

kita dapat menggunakan algoritma-$\beta\mathbf{R}$ berikut :

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{A}_r(\mathbf{A}_r^T\mathbf{A}_r)^{-1}(\mathbf{A}_r^T\mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{A}_r^T, \tag{70}$$

$$\beta_{r+1} = \mathbf{R}_r\mathbf{a}_{r+1}, \tag{71a}$$

$$\mathbf{R}_{r+1} = \mathbf{R}_r - \beta_{r+1}\beta_{r+1}^T/(1+\mathbf{a}_{r+1}^T\beta_{r+1}), \tag{71b}$$

$$\beta_{r+2} = \mathbf{R}_{r+1}\mathbf{a}_{r+2}, \tag{72a}$$

$$\mathbf{R}_{r+2} = \mathbf{R}_{r+1} - \beta_{r+2}\beta_{r+2}^T/(1+\mathbf{a}_{r+2}^T\beta_{r+2}), \tag{72b}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \mathbf{R}_{n-1}\mathbf{a}_n, \tag{73a}$$

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} - \beta_n\beta_n^T/(1+\mathbf{a}_n^T\beta_n), \tag{73b}$$

sehingga skalar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang optimal diperoleh :

$$x_n^{opt} = \beta_n^T\mathbf{d}/\left(1+\mathbf{a}_n^T\beta_n\right) \tag{74}$$

$$x_{n-1}^{opt} = \beta_{n-1}^T\left(\mathbf{d}-\mathbf{a}_n x_n^{opt}\right)/\left(1+\mathbf{a}_{n-1}^T\beta_{n-1}\right) \tag{75}$$

$$\vdots$$

$$x_{r+1}^{opt} = \beta_{r+1}^T\left(\mathbf{d}-\sum_{i=r+2}^{n}\mathbf{a}_i x_i^{opt}\right)\Big/\left(1+\mathbf{a}_{r+1}^T\beta_{r+1}\right) \tag{76}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{opt} \\ x_2^{opt} \\ \vdots \\ x_r^{opt} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_r^T\mathbf{A}_r\right)^{-1}\mathbf{A}_r^T\left(\mathbf{d}-\sum_{i=r+1}^{n}\mathbf{a}_i x_i^{opt}\right). \tag{77}$$

BAB IV
PERLUASAN ALGORITMA αQ DAN βR

IV.1 PROSEDUR - $\alpha Q \beta R$

Misalkan ditemukan solusi panjang terpendek (shortest length) dari masalah kuadrat terkecil :

$$\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b}$$

dimana **A** adalah matriks $m \times n$ dengan rank r, kolom pertama r $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ adalah bebas linear; **x** adalah sebuah vektor $n \times 1$ dengan elemen $x_1, x_2, \ldots, x_n$; dan **b** adalah sebuah vektor $m \times 1$.

Algoritma $\alpha\mathbf{Q}$ dan $\beta\mathbf{R}$ akan diperluas dan digunakan dalam prosedur ini.

Mengingat bahwa, dengan menggunakan algoritma-$\alpha\mathbf{Q}$, akan diperoleh α_k, komponen kolom ke-k dari matriks $\mathbf{A}_r$ tegak lurus terhadap $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ dan $k = 1,2,\ldots,r$. Dari hal tersebut di atas, dapat ditunjukkan bahwa komponen **b** tegak lurus terhadap vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ yang diperoleh dari :

$$\alpha_{r+1} = \mathbf{Q}_r \mathbf{b}\,. \qquad (78)$$

Karena **A** adalah augmented matriks $\mathbf{A}_r$ yang telah dijelaskan pada bagian III.2 , dan penambahan kolom $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \ldots, \mathbf{a}_n$ dalam matriks **A**, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, dari pernyataan tersebut maka α_{r+1} merupakan komponen **b** yang tegak lurus terhadap kolom-kolom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Atau kemungkinan lainnya, $\mathbf{b} - \alpha_{r+1}$ adalah komponen **b** yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Oleh sebab itu,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \mathbf{b} - \alpha_{r+1}$$

adalah persamaan aljabar linear yang konsisten.

Masalah menentukan solusi dari system persamaan

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} - \alpha_{r+1}$$

dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma-αQ dan βR

Dalam prosedur ini, untuk menentukan solusi terpendek (shortest solution) dari masalah kuadrat terkecil (least-squares problem) $\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b}$ adalah dengan cara sebagai berikut :

(i) Menghitung $\alpha_1, \mathbf{Q}_1, \ldots, \alpha_r, \mathbf{Q}_r$ pada pers.(47)-(49)

(ii) Menghitung α_{r+1}, pada pers.(78)

(iii) Menghitung $\mathbf{R}_r, \beta_{r+1}, \mathbf{R}_{r+1}, \ldots, \beta_{n-1}, \mathbf{R}_{n-1}, \beta_n$ pada pers.(70)-(73).

(iv) Menghitung skalar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, yaitu :

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{b} - \alpha_{r-1}, \tag{79a}$$

$$x_n^{opt} = \beta_n^T \mathbf{b}_n / \left(1 + \mathbf{a}_n^T \beta_n\right), \tag{79b}$$

$$\mathbf{b}_{n-1} = \mathbf{b}_n - \mathbf{a}_n x_n^{opt}, \tag{80a}$$

$$x_{n-1}^{opt} = \beta_{n-1}^T \mathbf{b}_{n-1} / \left(1 + \mathbf{a}_{n-1}^T \beta_{n-1}\right), \tag{80b}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_{r+1} = \mathbf{b}_{r+2} - \mathbf{a}_{r+2} x_{r+2}^{opt}, \tag{81a}$$

$$x_{r+1}^{opt} = \beta_{r+1}^T \mathbf{b}_{r+1} / \left(1 + \mathbf{a}_{r+1}^T \mathbf{b}_{r+1}\right), \tag{81b}$$

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{b}_{r+1} - \mathbf{a}_{r+1} x_{r+1}^{opt}, \tag{82a}$$

$$x_r^{opt} = \alpha_r^T \mathbf{b}_r / \alpha_r^T \alpha_r, \qquad \alpha_r^T \alpha_r \neq 0 \tag{82b}$$

$$\mathbf{b}_{r-1} = \mathbf{b}_r - \mathbf{a}_r x_r^{opt} \tag{83a}$$

$$x_{r-1}^{opt} = \alpha_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1} / \alpha_{r-1}^T \alpha_{r-1} \qquad \alpha_{r-1}^T \alpha_{r-1} \neq 0 \tag{83b}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 x_2^{opt}, \tag{84a}$$

$$x_1^{opt} = \alpha_1^T \mathbf{b}_1 / \alpha_1^T \alpha_1, \qquad \alpha_1^T \alpha_1 \neq 0. \tag{84b}$$

IV.2 CONTOH PENGGUNAAN DALAM PROSEDUR-$\alpha\mathbf{Q}\beta\mathbf{R}$:

Misal akan ditentukan vector **x** terpendek

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

sedemikian sehingga $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ minimum, dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks **A** mempunyai rank r = 2. Dua kolom pertama dari matriks tersebut adalah bebas linear, dan dua kolom berikutnya merupakan kombinasi linear dari dua kolom pertama matriks.

Didenotasikan vektor-vektor kolom dari matriks **A**

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Misal

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalam menyelesaikan masakah kuadrat terkecil tersebut, akan digunakan prosedur-αQβR

(i) Menghitung α_1, $\mathbf{Q}_1, \alpha_2, \mathbf{Q}_2$ dari pers.(47)-(49)

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{85}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} - \alpha_1 \alpha_1^T / \alpha_1^T \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{86}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{87}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1 - \alpha_2 \alpha_2^T / \alpha_2^T \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{88}$$

(ii) Menghitung α_3 dari persamaan (78)

$$\alpha_3 = \mathbf{Q}_2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{89}$$

(iii) Menghitung $\mathbf{R}_2$, β_3, $\mathbf{R}_3$, β_4 dari persamaan (70)-(73)

$$\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{90}$$

Invers dari matriks di atas adalah :

$$(\mathbf{A}_2^T\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \tag{91}$$

Oleh karena itu,

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2)^{-1}(\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{A}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{92}$$

$$\beta_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{93}$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 - \beta_3\beta_3^T/(1+\mathbf{a}_3^T\beta_3) = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{94}$$

$$\beta_4 = \mathbf{R}_3\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{95}$$

(iv) Menghitung scalar x_4, x_3, x_2, x_1 dari pers.(79)-(84)

$$\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} - \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{96}$$

$$x_4^{opt} = \beta_4^T \mathbf{b}_4 /(1 + \mathbf{a}_4^T \beta_4) = -4/11, \tag{97}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_4 - x_4^{opt} \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 30/11 \\ 8/11 \\ 8/11 \end{bmatrix}, \tag{98}$$

$$x_3^{opt} = \beta_3^T \mathbf{b}_3 /(1 + \mathbf{a}_3^T \beta_3) = 10/11, \tag{99}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - x_3^{opt} \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 10/11 \\ -2/11 \\ -2/11 \end{bmatrix}, \tag{100}$$

$$x_2^{opt} = \alpha_2^T \mathbf{b}_2 / \alpha_2^T \alpha_2 = -2/11, \tag{101}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 - x_2^{opt} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 12/11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{102}$$

$$x_1^{opt} = \alpha_1^T \mathbf{b}_1 / \alpha_1^T \alpha_1 = 12/11. \tag{103}$$

Jadi solusi dari masalah kuadrat terkecil tersebut adalah :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/11 \\ -2/11 \\ 10/11 \\ -4/11 \end{bmatrix}.$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

V.1 KESIMPULAN

Misalkan **Ax=b**, dimana :

A berukuran $m \times n$ dengan rank r , $r<n$

x berukuran $n \times 1$

b berukuran $m \times 1$

Untuk menentukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang optimal dapat dilakukan dengan tiga algoritma :

a. Algoritma αQ

Digunakan untuk menentukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_r$ yang optimal denga syarat $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ minimum.

b. Algoritma βR

Digunakan untuk menetukan nilai $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ yang optimal dengan syarat $\sum_{i=1}^{n} x_i$ minimum.

c. Prosedur $\alpha Q \beta R$ yang merupakan gabungan diantara kedua algoritma di atas.

Prosedure tersebut digunakan untuk menetukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang optimal dengan syarat $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ minimum dan $\sum_{i=1}^{n} x_i$ sekecil mungkin.

V.2 SARAN

Dalam penulisan ini, hanya dibahas mengenai pendekatan solusi panjang terpendek dari masalah kuadrat terkecil

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \cong \mathbf{b},$$

melalui pemrograman dinamik, dimana **A** adalah matriks $m \times n$ dengan rank r. Untuk pengembangan selanjutnya, sebaiknya diperluas dengan menemukan solusi dari masalah tersebut dengan matriks koefisiennya (matriks **A**) dengan rank tidak diketahui.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., (1987). *Elementary Linear Algebra*, Anton textbooks.inc.

[2] Arga, W. Ir., (1985). *Dinamik dan Integer Programming,* BPFE, Yogyakarta.

[3] Berman, A., and Plemmons, J. R., (1979). *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*, Academic Press, New York San Francisco London.

[4] Cullen, G. C., (1993). *Aljabar Linear dengan Penerapannya*, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[5] Cullen, G. C., (1994). *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, PWS Publishing Company, Boston.

[6] Distefano, N., (1974). *Nonlinear Proccesses in Engineering,* Academic Press New York and London.

[7] Hager, W. W., (1988). *Applied Numerical Linear Algebra,* Prentice Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] Kalaba, R., Xu, R., and Feng, W., *Solving Shortest Length Least-Squares Problem via Dynamic Programming,* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 85, No. 3, pp. 613-632, 1995.

Lampiran

```
with (linalg):
 y := proc(matA,matB) local i, r, akecil, baris, colom, Q, ident, beta, alpha, rbesar, b,
xopt, Ar, X;
 colom := coldim(matA);
 baris := rowdim(matA);
 ident := array(identity,1..baris, 1..baris);
 r := rank(matA);
 print('Rank'=r);
 akecil := array(1..colom):
 rbesar := array(1..colom):
 alpha := array(1..colom):
 beta := array(1..colom):
 b := array(1..colom):
 Q := array(0..colom):
 xopt := array(1..colom):
  for i from 1 to colom do
   akecil[i] := submatrix(matA,1..baris,i..i);
   akecil[i] := evalm(akecil[i]);
  od;
 Ar := (submatrix(matA,1..baris,1..r));
 print('A[r]'=evalm(Ar));
 Q[0] := ident;
 print('Q[0]'= evalm(Q[0]));
  for i from 1 to r do
    alpha[i] := evalm(Q[i-1]&*akecil[i]);
    print(alpha[i]=evalm(alpha[i]));
    Q[i] := evalm(Q[i-1] -
(alpha[i]&*transpose(alpha[i]))/innerprod(transpose(alpha[i]),alpha[i])[1,1]);
    print(Q[i]=evalm(Q[i]));
  od;
 alpha[r+1] := evalm(Q[r] &* matB);
 print(alpha[r+1]=evalm(alpha[r+1]));
 rbesar[r] := evalm(Ar &* inverse(transpose(Ar) &* Ar) &*inverse(transpose(Ar) &*
Ar) &* transpose(Ar));
 print(R[r]=evalm(rbesar[r]));
  for i from r+1 to colom do
    beta[i]:= evalm(rbesar[i-1] &* akecil[i]);
    print(beta[i]=evalm(beta[i]));
    rbesar[i] := evalm( rbesar[i-1]-
(beta[i]&*transpose(beta[i]))/(1+innerprod(transpose(akecil[i]),beta[i])[1,1]));
```

```
    print(R[i]=evalm(rbesar[i]));
  od;
 b[colom] := evalm(matB - alpha[r+1]);
 print(Bkcl[colom]=evalm(b[colom]));
 xopt[colom] := evalm(transpose(beta[colom]) &*
b[colom]/(1+innerprod(transpose(akecil[colom]),beta[colom])[1,1]))[1,1];
 print(Xopt[colom]=eval(xopt[colom]));
  for i from colom-1 to r+1 by -1 do
    b[i] := evalm(b[i+1] - akecil[i+1] * xopt[i+1]);
    print(Bkcl[i]=evalm(b[i]));
    xopt[i] := evalm(transpose(beta[i]) &* b[i]
/(1+innerprod(transpose(akecil[i]),beta[i])[1,1]))[1,1];
 print(Xopt[i]=eval(xopt[i]));
  od;
 for i from r to 1 by -1 do
    b[i] := evalm(b[i+1] - akecil[i+1] * xopt[i+1]);
    print(Bkcl[i]=evalm(b[i]));
    xopt[i] := evalm(transpose(alpha[i]) &*    b[i]/innerprod(transpose(alpha[i]),
alpha[i])[1,1])[1,1];
    print(Xopt[i]=eval(xopt[i]));
 od;
 X = convert(xopt,matrix);
 end;
```

```
> A := matrix(3,4,[1,1,2,2,0,1,1,2,0,1,1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B := matrix(3,1,[2,-1,1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> y(A,B);
```

$$Rank = 2$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\beta_4 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} \frac{6}{11} & \frac{-7}{22} & \frac{-7}{22} \\ \frac{-7}{22} & \frac{5}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{-7}{22} & \frac{5}{22} & \frac{5}{22} \end{bmatrix}$$

$$Bkcl_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Xopt_4 = \frac{-4}{11}$$

$$Bkcl_3 = \begin{bmatrix} \frac{30}{11} \\ \frac{8}{11} \\ \frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

$$Xopt_3 = \frac{10}{11}$$

$$Bkcl_2 = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} \\ \frac{-2}{11} \\ \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

$$Xopt_2 = \frac{-2}{11}$$

$$Bkcl_1 = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Xopt_1 = \frac{12}{11}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{-2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ \frac{-4}{11} \end{bmatrix}$$

>