PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

SKRIPSI

SITTI RAHMAH

H011181311

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada program studi matematika Departeman Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SITTI RAHMAH
H011 18 1311

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JUNI 2022

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 22 Juni 2022

METERAI TEMPEL

Sitti Rahmah
H011181311

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19701231 199802 1 001	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Pada 22 Juni 2022

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Sitti Rahmah
NIM	:	H011181311
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	:	Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si.	( )
Sekretaris	:	Dr. Muhammad Zakir, M. Si.	( )
Anggota	:	Prof. Dr. Jeffry Kusuma.	( )
Anggota	:	Naimah Aris, S.Si. M.Math.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 22 Juni 2022

HALAMAN PENGESAHAN

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

Disusun dan diajukan oleh:

SITTI RAHMAH

H011181311

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 22 Juni 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19701231 199802 1 001	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Ketua Program Studi Matematika

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier".** Sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, dan bimbingan dari pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
4. Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Muhammad Zakir, M. Si. selaku dosen pembimbing pertama yang juga telah menyempatkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun skripsi ini.
6. Prof. Dr. Jeffry Kusuma. Selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam menyusun tugas akhir ini, serta telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program studi Matematika Fakultas MIPA UNHAS
7. Naimah Aris, S.Si. M.Math.selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam menyusun tugas akhir ini, serta

telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program studi Matematika Fakultas MIPA UNHAS.

8. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA UNHAS atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan.
9. Bapak/Ibu pegawai/staff Departemen, fakultas, dan Universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan tugas akhir ini.
10. Kedua Orang Tua, Saudara/I, dan Keluarga saya yang telah memberikan bantuan, doa, nasihat, perhatian serta dukungan material dan moral.
11. Teman-teman LIGHT yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan selalu memberikan semangat selama menyusun tugas akhir ini.
12. Teman-teman sepondok Ogista 03 yang telah memberikan dukungan, perhatian, serta semangat selama menyusun tugas akhir ini.
13. Teman-teman Matematika 2018 yang telah mendukung dan berjuang selama masa perkuliahan.
14. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per-satu.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 22 Juni 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Sitti Rahmah
NIM	: H011181311
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 22 Juni 2022

Yang menyatakan,

Sitti Rahmah

ABSTRAK

Pada tugas akhir ini akan dibahas pembuktian prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier. Prinsip ketidakpastian Heisenberg secara umum menjelaskan tentang ketidakpastian terhadap posisi dan momentum, sedangkan pada prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformai Fourier memiliki ketidakpastian terhadap fungsi dan transformasi Fouriernya. ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa "fungsi dari domain waktu $f(t)$ dan fungsi di domain frekuensinya atau transformasi Fourier dari $f(t)$ yang disimbolkan dengan $\hat{f}(\omega)$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan, jika $f(t)$ terkonsentrasi disekitar suatu titik, maka $\hat{f}(\omega)$ tersebar pada $\mathbb{R}$ dan sebaliknya". Artinya, jika kedua hal tersebut diukur secara bersamaan maka semakin besar suatu nilai fungsi maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, dan sebaliknya. Pada tugas akhir ini, diperoleh bentuk dari prinsip ketidakpastian Heisenberg sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\hat{f}(\omega)|^2d\omega \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^2.$$

Dari persamaaan tersebut akan mencapai minimum di fungsi Gauss.

Kata kunci: **Transformasi Fourier, Prinsip Ketidakpastian Heisenberg, Parseval dan Plancherel.**

Judul : Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier
NIM : H011181311
Nama : Sitti Rahmah
Program Studi : Matematika

ABSTRACT

In this final project, we will discuss the proof of Heisenberg's uncertainty principle on the Fourier transform. Heisenberg's uncertainty principle generally describes the uncertainty of position and momentum, while the Heisenberg uncertainty principle of the Fourier transform has uncertainty about the function and its Fourier transform. Heisenberg's uncertainty states that "a function of the time domain $f(t)$ and a function in its frequency domain or the Fourier transform of $f(t)$ denoted by $f(\omega)$ cannot be well localized simultaneously, if $f(t)$ is concentrated around a point, then $f(\omega)$ is spread over $\mathbb{R}$ and vice versa". That is, if these two things are measured simultaneously, the greater the value of a function, the smaller the value of the Fourier transform, and vice versa. In this final project, the form of Heisenberg's uncertainty principle is obtained as follows:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\hat{f}(\omega)|^2d\omega \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^2.$$

From these equations will reach a minimum in the Gaussian function.

Keywords: ***Fourier transform, Heisenberg Uncertainty Principle, Parseval and Plancherel.***

Title : Heisenberg's Uncertainty Principle in the Fourier Transform
ID : H011181311
Name : Sitti Rahmah
Study Program : Mathematics

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Transformasi Fourier pertama kali dikenalkan oleh matematikawan dan fisikawan asal Prancis yaitu Josep Fourier (1768-1830). Fourier mendefinisikan transformasi Fourier dari deret Fourier yang berbentuk kompleks (eksponensial Fourier), yaitu fungsi periodik dengan periode mendekati tak berhingga. Transformasi Fourier dapat digunakan dalam pemrosesan sinyal, meliputi analisis sinyal, pengolahan sinyal, serta menguraikan sinyal (domain waktu) menjadi komponen sinusoida (domain frekuensi). Transformasi Fourier memberikan informasi apakah satu sinyal memiliki frekuensi tertentu atau tidak,tetapi transformasi Fourier tidak dapat memberikan informasi dimana letak frekuensi itu terjadi.

Dalam menyederhanakan suatu persoalan analisis, sebagian besar orang melakukan transformasi dengan melihat persoalan akan diselesaikan secara lebih mudah dan sederhana. Salah satu transformasi yang digunakan adalah transformasi Fourier. Transformasi Fourier sudah ada sejak lama yang dikenal sebagai salah satu alat analitik untuk menyelesaikan persoalan dalam berbagai bidang, antara lain bidang elektronika, zat mampat, mekanika struktur, mekanika gelombang, dan mekanika kuantum. Sebelum komputer digit berkembang, transformasi Fourier yang kontinu merupakan transformasi yang banyak dipakai untuk pengelompokan sistem yang sederhana dengan jumlah data yang sedikit, penggunaan transformasi Fourier kontinu dilakukan dengan sangat baik,tetapi jika sistem menjadi semakin kompleks dan jumlah data semakin banyak, maka masalah transformasi Fourier membutuhkan waktu untuk menyelesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan.

Tranformasi Fourier terbagi menjadi dua yaitu transformasi Fourier kontinu dan transformasi Fourier diskrit. Transformasi Fourier kontinu atau biasa juga disingkat sebagai transformasi Fourier adalah sebuah sinyal waktu sebagai hasil penjumlahan beberapa sinyal kontinu, sedangkan transformasi Fourier diskrit adalah model transformasi Fourier yang dikenakan pada fungsi diskrit, dan hasilnya juga diskrit. Salah satu hasil terpenting dalam transformasi Fourier adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg dikemukakan pada tahun 1927 oleh Werner Heisenberg. Prinsip ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa “posisi dan momentum suatu elektron tidak bisa ditentukan dalam waktu yang bersamaan”. Artinya, jika kedua hal tersebut diukur secara bersamaan maka tidak akan diperoleh nilai dari besaran tersebut. Jika dikaitkan dengan aktivitas, maka prinsip dari hukum ini menjelaaskan bahwa dalam suatu waktu kita mngerjakan dua atau lebih pekerjaan maka kita tidak akan mendapatkan hasil yang optimal. Misalnya, seorang dosen sedang mengajar mata kuliah di kelas, pada saat mengajar dosen tersebut mengerjakan laporan penelitiannya, maka kedua pekerjaan tersebut tidak akan meraih hasil yang optimal.

Banyak peneliti yang tertarik untuk mempelajari lebih jauh perkembangan dari formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Pada tahun 1945, Mandelshtam dan Tamm menurunkan hubungan ketidakpastian waktu dan energi yang menyatakan “Suatu keadaan yang hanya ada untuk waktu yang singkat tidak dapat memiliki energi yang pasti.” Ozawa (2005) telah memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg dengan cara melakukan peninjauan terhadap standar deviasi posisi $\sigma(x)$ dan standar deviasi momentum $\sigma(p)$ dari operasi kesalahan pengukuran posisi dan operator gangguan pada momentum. Bahri,dkk (2008) mendefinisikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier quaternion.

Dalam transformasi Fourier, ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa “fungsi dari t $(f(t))$ dan transformasi Fourier dari $f(t)$ yang disimbolkan dengan $(\hat{f}(\omega))$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan, jika $f(t)$ terkonsentrasi disekitar suatu titik, maka $\hat{f}(\omega)$ tersebar pada $\mathbb{R}$ dan sebaliknya”. Artinya, jika kedua hal tersebut diukur secara bersamaan maka semakin besar suatu nilai fungsi maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, dan sebaliknya.

Pada tugas akhir ini, akan dibuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier dengan memanfaatkan sifat-sifat transformasi Fourier. Berdasarkan uraian diatas, maka diangkat tema dalam tugas akhir ini mengenai transformasi Fourier dengan judul **“Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, rumusan masalah yang akan dibahas yaitu bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier.

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah ini yaitu transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya secara detail, teorema Plancherel dan Parseval.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah untuk membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian tugas akhir ini adalah diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier khususnya pada prinsip ketidakpastian Heisenberg.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut.

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang berkaitan dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier yaitu definisi bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, definisi dari ruang Lebesgue, definisi transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya, konvolusi, korelasi serta prinsip ketidakpastian Heisenberg.

BAB III : METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini membahas tentang jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV : HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan dari diagram alur penelitian dan hasil yang diperoleh berdasarkan rumusan masalah.

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil dan pembahasan serta saran untuk penelitian ke depannya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah-istilah sebagai teori pendukung atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, terlebih dahulu akan di bahas tentang bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, ruang lebesgue untuk transformasi Fourier dan prinsip ketidakpastian heisenberg. Selanjutnya, akan di bahas teori pendukung yaitu transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, konvolusi serta prinsip ketidakpastian Heisenberg.

2.1 Bilangan Kompleks dan Sifat-sifatnya

Pada subbab ini akan disajikan definisi bilangan kompleks, konjugat dan teorema pendukung lainnya.

2.1.1 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah gabungan dari bilangan real dan bilangan imajiner membentuk satu bilangan baru yang dinotasikan dengan z.

Definisi.2.1.1

Jika $z = x + iy$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka $x = Re\{z\}$ merupakan bagian riil dari z dan $y = Im\{z\}$ merupakan bagian imajiner dari z . $Re\{z\}$ dan $Im\{z\}$ merupakan bilangan riil.

2.1.2 Konjugat Kompleks

Bilangan kompleks z memiliki sekawan atau biasa juga disebut dengan konjugat yaitu kawan dari bilangan kampleks z yang disimbolkan $\bar{z}$.

Definisi 2.1.2

Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$, maka bilangan kompleks

$$\bar{z} = x - iy$$

Disebut sebagai konjugat dari bilangan z.

Teorema 2.1.1(sifat-sifat nilai mutlak)

Jika z, z_1dan z_2 bilangan kompleks, dimana $z = x + iy$ maka berlaku

1) $|z| = \overline{|z|}$
2) $|z|^2 = z\bar{z}$

bukti dapat dilihat di kadir (2016) halaman 19

Teorema berikut akan digunakan dalam menyelesaikan contoh di BAB IV

Teorema 2.1.2

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tunggal yang berorientasi positif c kecuali di titik-titik singular yang berhingga banyaknya didalam c maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt = 2\pi i \sum Res[f, z_0], \tag{2.1}$$

di mana $Res[f, z_0]$ adalah residu dari f dalam z_0, dimana z_0 adalah kutub berorde n, sehingga

$$Res[f, z_0] = \lim_{t \to z_0} \frac{1}{(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(t - z_0)^n f(t)]. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1.3

Jika A dan B himpunan bagian tak kosong $\mathbb{R}$ dan memenuhi $a \le b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$ maka

$$supA \le \inf B$$

akan mencapai minimum.

2.2 Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Pendefinisan $L^p(\mathbb{R})$ dibagi menjadi dua bagian, yaitu untuk $1 \le p < \infty$ dan $p = \infty$. Namun, pada subbab ini, akan didefinisikan ruang $L^p(\mathbb{R})$ hanya untuk $1 \le p < \infty$.

Definisi 2.2.1 (Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$)

Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan p pada $\mathbb{R}$ ($L^p(\mathbb{R})$),dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan sebagai

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty \right\} \tag{2.3}$$

maka norm dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

2.2.1 Fungsi di $\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})$ dan $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$

Misalkan f terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ yang beranggotakan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \|f\|_1 < \infty\}.$$

Ruang L^1 dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt. \tag{2.5}$$

Untuk $p = 2$, ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \|f\|_2 < \infty\}.$$

di mana

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Untuk $p = \infty$ norm dari $L^\infty(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_\infty = ess\ sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product $(.,.)$ dengan aturan jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g(t)} dt. \tag{2.7}$$

Dan normnya dinyatakan dengan

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{2.8}$$

2.2.2 Turunan Dan Integral

a) Turunan

- Berikut merupakan definsi dari turunan fungsi

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

- Berikut merupakan sifat dari turunan fungsi

$$y = uv, \text{ maka } y' = u'v + uv'$$

$$t\frac{d}{dt}\left[f(t)\overline{f(t)}\right] = \frac{d}{dt}f(t)t\overline{f(t)} + tf(t)\frac{d}{dt}\overline{f(t)},$$

Bukti:

Misalkan $F(t) = f(t)\overline{f(t)}$ maka dengan menggunakan definisi limit,

$tF'(t)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tF(t+h) - tF(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tf(t+h)\overline{f(t+h)} - tf(t)\overline{f(t)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tf(t+h)\overline{f(t+h)} - tf(t+h)\overline{f(t)} + tf(t+h)\overline{f(t)} - tf(t)\overline{f(t)}}{h}$$

dengan menggunakan sifat limit $\lim_{h \to 0} a \lim_{h \to 0} \frac{b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a.b}{h}$ diperoleh,

$$tF'(t) = \lim_{h \to 0} tf(t+h) \lim_{h \to 0} \frac{\overline{f(t+h)} - \overline{f(t)}}{h} + t\overline{f(t)} \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= tf(t)\overline{f'(t)} + t\overline{f(t)}f'(t)$$

$$= tf(t)\frac{d}{dt}\overline{f(t)} + t\overline{f(t)}\frac{d}{dt}f(t). \qquad (2.9)$$

b) Integral

- Integral tak wajar

Berikut merupakan definisi umum dari integral tak wajar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(t)\,dt$$

$$\int_{0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} f(t)\,dt.$$

- Integral parsial

Berikut merupakan definisi umum dari integral parsial,

$$\int_a^b u\,dv = [u.v]\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} - \int_a^b v du.$$

2.3 Transformasi Fourier

Pada subbab ini akan disajikan definisi transformasi Fourier, inversnya dan sifat-sifatnya.

2.3.1 Transformasi Fourier Kontinu

Transformasi Fourier merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier. Transformasi Fourier adalah suatu model tranformasi yang memindahkan domain waktu menjadi domain frekuensi. Transformasi Fourier kontinu biasanya disingkat dengan transformasi Fourier.

Sebelum membahas definisi transformasi Fourier kita lihat teorema Fubini berikut.

Teorema 2.3.1 (Fubini)

Jika f kontinu pada segiempat $R = [a, b] \times [c, d]$, maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy. \quad (2.10)$$

Definisi 2.3.1 (Transformasi Fourier)

Diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi dalam interval $(-\infty, \infty)$ atau bilangan real dengan sifat,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty\,, \quad (2.11)$$

maka $\hat{f}(\omega)$ dengan

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad (2.12)$$

$\hat{f}(\omega)$ disebut transformasi Fourier $\hat{f}$ pada $-\infty < \omega < \infty$ dan $i = \sqrt{-1}$ merupakan satuan imajiner dan faktor perkalian dari $e^{-i\omega t}$ disebut karnel dari transformasi Fourier. Karena $e^{i\omega t} = cos\,\omega t + isin\,\omega t$ maka persamaan (2.12) diatas dapat ditulis kembali menjadi

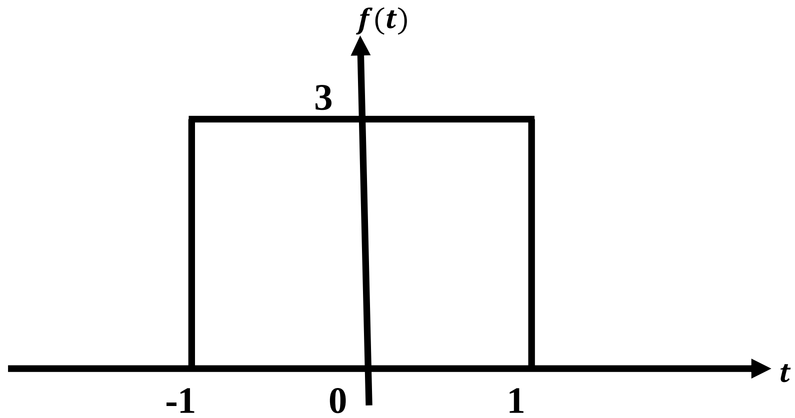
$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\omega t - i\sin\omega t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ padat di $L^2(\mathbb{R})$ definisi transformasi Fourier dapat diperluas ke $L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 2.1 :

Diketahui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ sebagai berikut (lihat Gambar 2.1)



Gambar 2.1 Grafik Fungsi $f(t)$.

Maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah: (lihat Gambar 2.2)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{1}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= 0 + \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt + 0$$

$$= \int_{-1}^{1} 3e^{-i\omega t}dt$$

$$= 3\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt$$

$$= -\frac{3}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{3}{i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

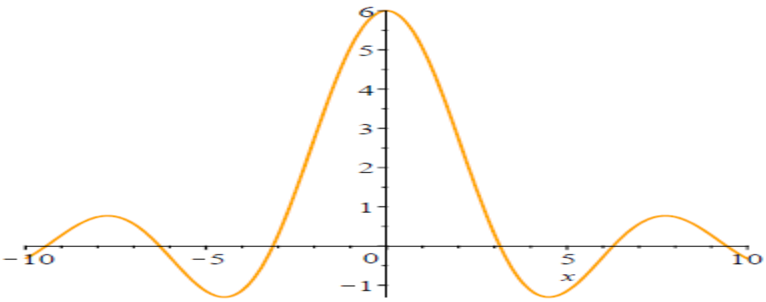
Catatan:

$e^{-i\omega} = \cos\omega - i\sin\omega$

$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ —

$e^{-i\omega} - e^{i\omega} = -2\sin\omega$

$$= \frac{6}{\omega} \sin \omega$$



Gambar 2.2 Grafik transformasi Fourier dari Contoh 2.1

Contoh 2.2 : Diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, seperti pada Gambar 2.3 dimana,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & jika\ t \geq 0 \\ 0, & \text{jika t} < 0 \end{cases}$$

maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt$$

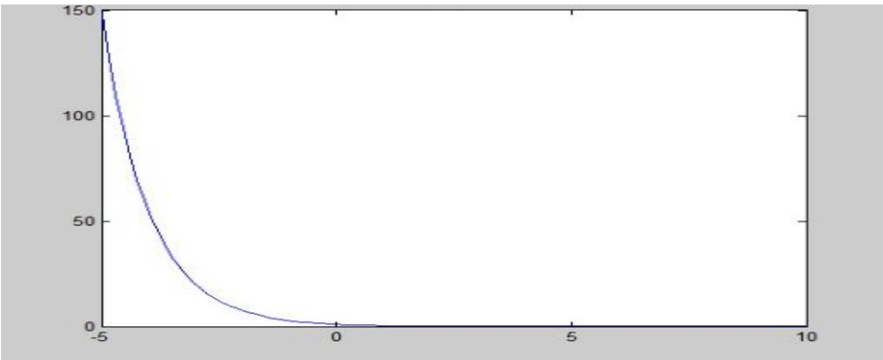
$$= -\frac{1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t} \Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{1+i\omega} e^{-\infty} - (-\frac{1}{1+i\omega} e^{0})$$

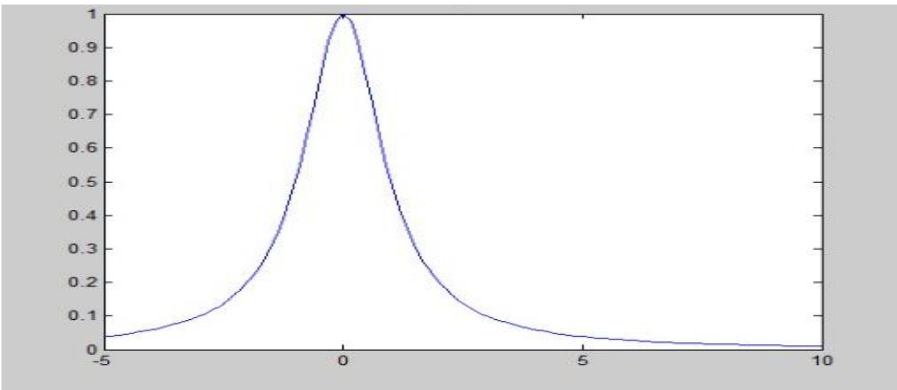
$$= 0 + \frac{1}{1+i\omega} 1$$

$$= \frac{1}{1+i\omega}.$$

seperti ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.3 Grafik fungsi pada Contoh 2.2.



Gambar 2.4 Grafik transformasi Fourier dari Contoh 2.2.

Contoh 2.3 (Transformasi Fourier Gauss).

Misalkan diberikan fungsi Gauss dapat dilihat pada Gambar 2.5 dimana,

$$f(t) = e^{-\alpha t^2} \text{ , } \forall\, \alpha > 0$$

maka transformasi Fourier adalah

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \tag{2.13}$$

Bukti:

Dari sifat integral fungsi Gauss $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, dengan $\alpha > 0$ maka diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diketahui $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ maka diperoleh,

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t^2+i\frac{\omega}{\alpha}t)}dt\,.$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna, maka diperoleh

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left((t^2+i\frac{\omega}{\alpha}t+\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t^2+\frac{i\omega}{\alpha}t+\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right)+\alpha\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t^2+\frac{i\omega}{\alpha}t+\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right)-\alpha\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)}dt.$$

Jadi,

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}dt.$$

Karena $e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ adalah sebuah konstanta, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} dt.$$

Misalkan $u = t + \frac{i\omega}{2\alpha}$, $du = dt$, maka

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}du\,.$$

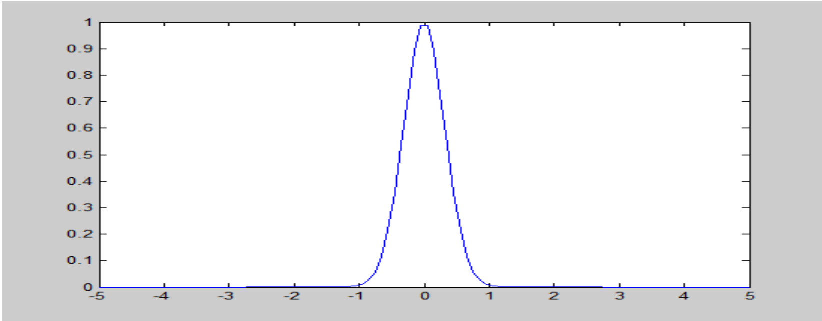
Karena $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, maka

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\quad,$$

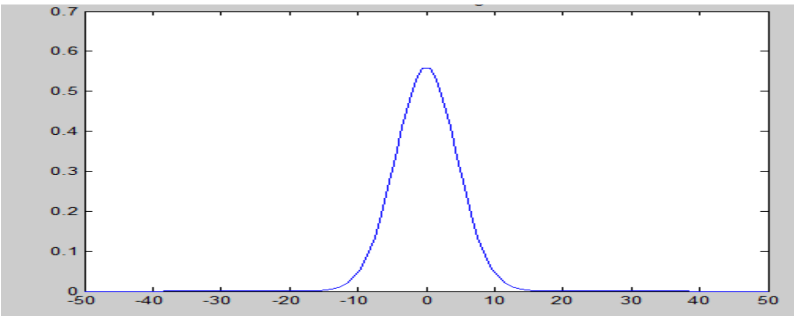
sehingga diperoleh transformasi Fourier dari $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ adalah

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Seperti ditunjukka pada Gambar 2.6 untuk $\alpha = 10$.



Gambar 2.5. Grafik fungsi Gauss dengan $\alpha = 5$



Gambar 2.6. Grafik transformasi Fourier dari fungsi Gauss dengan $\alpha = 10$

Definisi 2.3.2 (Invers Transformasi Fourier)

Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (2.14)$$

2.3.2 Sifat-sifat Transformasi Fourier Kontinu

Untuk membahas sifat-sifat transformasi Fourier akan digunakan notasi

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$$

dengan $\mathcal{F}$ menyatakan transformasi Fourier dari $f(t)$. Operasi Fourier $\mathcal{F}$ dianggap sebagai domain dan rangenya merupakan ruang fungsi bernilai kompleks yang terdefinisi pada bilangan real. Input dari $\mathcal{F}$ adalah sebuah fungsi $f(t)$ dan menghasilkan output berupa fungsi lain $\hat{f}(\omega)$.

Teorema 2.3.2 (Sifat Penjumlahan).

Jika f dan $g \in L^1(\mathbb{R})$, maka berlaku

$$\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega).$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\,\{f(t) + g(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + g(t)]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt} \\ &= \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega). \end{aligned}$$

Teorema 2.3.3 (Sifat Linear).

Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan α, β adalah dua konstanta kompleks, maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t)(\omega) + \beta g(t)\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega).$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f(t)(\omega) + \beta g(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))\, e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t)\, e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(t)\, e^{-i\omega t}dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}dt \\ &= \alpha\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega). \end{aligned}$$

Teorema 2.3.4 (Sifat Translasi).

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$f_0(t) = f(t - t_0),$$

maka diperoleh

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\{f_0\}(\omega).$$

Bukti:

Transformasi Fourier dari $f(t - t_0)$ didefinisikan oleh:

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}\, \mathrm{dt}.$$

Dengan mensubtitusi $s = t - t_0$ maka $dt = ds$ dan $t = t_0 + s$ sehingga diperoleh:

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_0+s)}\mathrm{ds}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega s}\mathrm{ds}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}_0}\mathcal{F}\{f_0\}(\omega).$$

Teorema 2.3.5. (Sifat Modulasi)

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f = e^{iat}f(t)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f\}(\omega - a)$.

Bukti:

Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it(a-\omega)}dt$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega - a),$$

Dimana $\mathcal{F}\{f\}(\omega - a)$ disebut *Frequency shift.*

Teorema 2.3.6. (Sifat Skala).

Misalkan diberikan fungsi $f, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, dan misal $f(t) = f(at)$ maka

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{a}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Bukti:

Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt.$$

Misal, $t = at$, sehingga $t = \frac{x}{a}$ dan $dt = \frac{dx}{a}$ maka diperoleh

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(\frac{x}{a})}\frac{dx}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{i\omega x}{a}}\frac{dx}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{i\omega x}{a}}dx$$

$$= \frac{1}{a}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Teorema 2.3.7.

Misalkan $\in L^1(\mathbb{R})$, dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f(t) = f(-t)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$.

Bukti:

Dari definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)(-t)}dt$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(-\omega).$$

Dalam hal ini $f(-\omega)$ disebut sebagai *time reversal* dan $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$ yaitu *frequency reversal.*

Teorema 2.3.8 (Konjugat).

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka,

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\omega)}.$$

Bukti:

Sesuai dengan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{i(-\omega)t}dt$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)}\ \overline{e^{-i(-\omega)t}}dt.$$

Berdasarkan sifat konjugat $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$, diperoleh

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}dt}$$

$$= \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\omega)}.$$

2.4 Konvolusi untuk Transformasi Fourier

Konvolusi adalah operasi matematika pada dua fungsi yang menghasilkan fungsi ketiga yang menyatakan bagaimana bentuk yang satu dimodifikasi oleh yang lain. Operasi konvolusi merupakan pengganti operasi perkalian yang berpasangan dengan transformasi Fourier. Operasi konvolusi ini akan digunakan untuk membuktikan teorema plancharel pada bagian berikutnya.

Definisi 2.4.1 Konvolusi

Diberikan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, konvolusi dari fungsi f dan g ditulis sebagai $f * g$ yang didefinisikan sebagai

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)dx\,. \tag{2.15}$$

Sifat-sifat konvolusi sebagai berikut:

1) Komutatif

$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$

Bukti:

Berdasarkan definisi konvolusi pada persamaan (2.15) diperoleh

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)dx$$

Misalkan $u = t - x, x = t - u, du = -dx, dx = -du$. Maka ,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u)(-du)$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f(t-u)\, g(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, f(t-u)du.$$

Karena u merupakan variable *dummy*,u dapat diganti dengan x. Sehingga

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(t-x)dx = (g * f)(x).$$

Jadi, $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

2) Linieritas

$$f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha(f * g_1)(t) + \beta(f * g_2)(t) \text{ dan}$$
$$(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha(\alpha g_1 * f)(t) + \beta(g_2 * f)(t)$$

Bukti:

- **Kasus I**

Sesuai dengan definisi konvolusi pada persamaan (2.15) diperoleh

$$f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\alpha g_1 + \beta g_2)(t - x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\alpha g_1(t - x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta g_2(t - x)\,dx.$$

Karena α dan β merupakan konstanta, maka

$$f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g_1(t - x)dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_2(t - x)\,dx$$
$$= \alpha(f * g_1)(t) + \beta(f * g_2)(t).$$

Jadi**,** $f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha(f * g_1)(t) + \beta(f * g_2)(t)$.

- **Kasus II**

Sesuai dengan definisi konvolusi pada persamaan (2.15) diperoleh

$$(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha g_1 + \beta g_2)(x) f\,(t - x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha g_1(x) f\,(t - x) + \beta g_2(x) f(t - x))dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha g_1(x)\,f(t - x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g_2(x) f(t - x)\,dx.$$

Karena α dan β merupakan konstanta, maka

$$(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,f(t - x)dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f(t - x)\,dx$$
$$= \alpha(g_1 * f)(t) + \beta(g_2 * f)(t).$$

Jadi, $(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha(g_1 * f)(t) + \beta(g_2 * f)(t)$.

3) Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(t) = f(t-k)$,maka

$$(f * \tau_k f)(t) = \tau_k (f * f)(t).$$

Bukti:

Berdasarkan definisi konvolusi pada persamaan (2.15) diperoleh

$$(f * \tau_k f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tau_k f(t-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(t-x-k)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f((t-k)-x)\, dx$$

$$= (f * f)(t-k)$$

$$= \tau_k (f * f)(t).$$

4) Konvolusi terhadap Delta

$$(f * \delta)(t) = f(t).$$

Bukti:

Berdasarkan definisi konvolusi pada persamaan (2.15) maka

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(t-x) dx.$$

Perhatikan bahwa $\delta(t-x) = 0$, kecuali jika $x = t$ sehingga diperoleh

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-t) dx.$$

Misalkan $u = x - t$ maka $x = u + t$ sehingga $dx = du$ diperoleh

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+t)\, \delta(u) du\, .$$

Dari sifat fungsi Dirac delta diperoleh $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t) dt = f(0)$ sehingga menjadi

$$(f * \delta)(t) = f(t)\, .$$

Teorema 2.4.1

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. maka transformasi Fourier dari $f * g$ ditulis sebagai

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.16}$$

Bukti:

Dari definisi trasformasi Fourier pada persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t - x) dx e^{-i\omega t} dt,$$

Misalkan $v = t - x, t = v + x \leftrightarrow dt = dv$. Sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(v) dx e^{-i\omega(v+x)} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v} dv$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega).$$ ■

Teorema berikut menjelaskan mengenai transformasi Fourier dari konvolusi dari fungsi real atau kompleks.

Teorema 2.4.2

Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Maka transformasi Fourier dari $f.g$ dituliskan sebagai

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.17}$$

Bukti:

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dengan $\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$ dan $\mathcal{F}\{g\} = \hat{g}$. Dari definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12), maka $\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}\mathrm{dt}$. Selanjutnya berdasarkan invers transformasi Fourier (2.14) maka f dan g dapat dituliskan menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)e^{ivt}dv \tag{2.18}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)e^{izt}dz. \tag{2.19}$$

Dari definisi transformasi Fourier dari persamaan (2.12) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt}.$$

Dengan mensubtitusi masuk hasil dari persamaan (2.18) dan (2.19) maka

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)e^{ivt}dv\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)e^{izt}dz\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt}.$$

Karena $1/2\pi$ merupakan konstanta, maka

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v+z-\omega)t}dt\right)\mathrm{dz}\right)\mathrm{dv}. \tag{2.20}$$

Dari invers transformasi pada persamaan (2.14) dan misalkan $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = 1$, maka

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-i\omega t}d\omega = \delta(t),$$

atau $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,d\omega = \delta(t)$. Ini berarti

$$\delta(v+z-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(v+z-\omega)t}\,dt,$$

sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v+z-\omega)t}dt = 2\,\pi\delta(v+z-\omega).$$

Subtitusi hasil diatas kepersamaan (2.20) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\big(2\pi\delta(v+z-\omega)\big)\mathrm{dz}\right)\mathrm{dv}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)2\pi\delta(v+z-\omega)\,dzdv.$$

Karena 2π adalah konstanta, maka

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\delta(v+z-\omega)\, dzdv.$$

Perhatikan $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\delta(v+z-\omega)\, dz$, dari sifat konvolusi terhadap delta diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\delta(v+z-\omega)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\delta(v-\omega+z)dz = \hat{g}(v-\omega).$$

Karena v dan ω adalah *variable dummy*, maka $\hat{g}(v-\omega) = \hat{g}(\omega - v)$.

Jadi diperoleh

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\, \hat{g}(\omega - v)dv.$$

Dari definisi konvolusi pada persamaan (2.15) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\omega),$$

atau

$$\mathcal{F}\{f.g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega).$$

2.5 Korelasi Pada Transformasi Fourier

Korelasi adalah salah satu metode untuk mengukur kesamaan antara dua kelompok data. Korelasi ini merupakan kesatauan dari konvolusi

Definisi 2.5.1 (Korelasi).

Korelasi antara fungsi f dan g dinotasikan oleh $(f \circ g)$ didefinisikan:

$$(f \circ g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(x+t)dt. \tag{2.21}$$

Teorema 2.5.1

Jika $(f \circ g)$ menyatakan korelasi dari f dan g maka transformasi Fourier dari korelasinya adalah

$$\mathcal{F}\{f \circ g\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(\omega)}\mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.22}$$

Bukti:

Dari definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.12) dan korelasi pada persamaan (2.21) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f \circ g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ g)(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(x+t) dt \right) e^{-i\omega x} dx.$$

Misalkan $v = x + t, x = v - t \leftrightarrow dx = dv$ sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\{f \circ g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(v) dt\, e^{-i\omega(v-t)} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(v) e^{-i\omega v} e^{i\omega t} dt \right) dv.$$

Karena $g(v)$ dan $e^{-i\omega v}$ konstanta terhadap t maka,

$$\mathcal{F}\{f \circ g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt \right) g(v) e^{-i\omega v} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv.$$

Dengan menggunakan sifat konjugat maka $e^{i\omega t} = \overline{e^{-\imath\omega t}}$

$$\mathcal{F}\{f \circ g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-\imath\omega t}} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv$$

$$= \overline{\mathcal{F}\{f\}(\omega)}\mathcal{F}\{g\}(\omega).$$

2.6 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Werner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan, karena semakin akurat momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya. Sebaliknya, semakin akurat penentuan posisinya, maka semakin tidak akurat penentuan momentumnya. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg adalah nama yang diberikan untuk prinsip yang memberikan batas bawah (bukan nol) untuk dua keadaan yang mencirikan suatu keadaan sistem.

Berikut merupakan persamaan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg secara umum

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}. \tag{2.23}$$

Pada persamaan (2.23) menyatakan bahwa hasil kali ketidakpastian posisi suatu benda Δx dan ketidakpastian komponen momentum dalam arah x yaitu Δp akan lebih besar atau sama dengan $^h/_{4\pi}$ dimana h adalah konstatnta planck. Kita tidak mungkin menentukan secara bersamaan posisi dan momentum suatu benda. Jika diatur agar Δx kecil yang bersesuaian dengan panjang gelombang yang sempit, maka Δp akan menjadi besar. Sebaliknya, jika Δp direduksi dengan suatu cara tertentu, maka panjang gelombangnya akan melebar dan Δx menjadi besar.

Dalam keadaan lain persamaan umum prinsip ketidakpastian Heisenberg dapat dimodifikasi menjadi prinsip ketidakpastan Heisenberg pada Transformasi Fourier, dimana Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier. Perumusan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier menjelaskan tentang "fungsi dari t $(f(t))$ dan transformasi Fourier dari $f(t)$ yang disimbolkan dengan $(\hat{f}(\omega))$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan, jika $f(t)$ terkonsentrasi disekitar suatu titik, maka $\hat{f}(\omega)$ tersebar pada $\mathbb{R}$ dan sebaliknya". Artinya, jika kedua hal tersebut diukur secara bersamaan maka semakin besar suatu nilai fungsi maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, dan semakin besar suatu nilai transformasi Fouriernya maka akan semakin kecil nilai fungsinya.