199

ANALISIS VARIANSI DUA ARAH DAN PEMBANDING GANDA DAN

SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM

OLEH

ALOWESIUS HERONIMUS

H 121 97 004

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS HASANUDDIN UPT PERPUSTAKAAN

PERPUSTAKAAN UNIV. HASANUDDIN	
Tgl. Terima	05 - 11 - 2003
Asal Dari	Fak. Mipa
Banyaknya	1 (satu) exp
Harga	Hadiah
No. Inventaris	031105 199
No. Klas	17062

PROGRAM STUDI STATISTIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2003

ANALISIS VARIANSI DUA ARAH DAN PEMBANDING GANDA DAN SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM

OLEH
ALOWESIUS HERONIMUS
H 121 97 004

Untuk Melengkapi Tugas-Tugas Dan Memenuhi
Syarat-Syarat Untuk Memperoleh
Gelar Sarjana

PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2003

ANALISIS VARIANSI DUA ARAH DAN PEMBANDING GANDA DAN
SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama

Drs. La Podje Talangko
Nip. 131 650 920

Pembimbing Pertama

Nurdin,S.Si,M.Si
Nip : 132 259 080

Pada Tanggal :

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir ini yang merupakan salah satu syarat untuk meraih gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam proses penyelesaian studi dan tugas ini sedikit hambatan dan rintangan yang penulis alami. Sehubungan dengan hal tersebut penulis telah banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, dengan penuh kerendahan hati menyampaikan terima kasih yang tiada terhingga kepada :

- Ayahanda Yoseph Sama dan Ibunda Yuliana Seran yang dengan kesabaran telah membesarkan dengan penuh kasih sayang, serta memberikan iringan doa restu dalam penyelesaian studi hingga sekarang ini.
- Bapak Drs. La Podje .Talangko, selaku pembimbing utama dan Bapak Nurdin,S.Si,M.Si selaku pembimbing pertama atas segala keikhlasan meluangkan waktunya ditengah kesibukannya guna memberikan arahan, bimbingan, bantuan dan petunjuknya selama menyelesaikan tugas akhir ini.
- Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta staf dan karyawan atas segala bantuan serta fasilitas yang diberikan.
- Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin beserta seluruh staf dosen dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.

- Bapak Drs. Alimin Bado,MS selaku penasehat akademik atas segala perhatian yang diberikan.
- Seluruh keluarga yang telah memberikan bantuan moril maupun material yang sangat berharga sehingga tugas akhir ini dapat dirangkumkan.
- Sahabat-sahabatku : Sahrani, Sandra, Tajuddin, Suleman, Peter, Ibar, Ica, Sherly, Ile, Ummu, dkk atas saran, nasehat dan motivasinya selama penulis menyelesaikan masa perkuliahan sampai selesai.
- Rekan-rekan THS-THM dan Mudika : Abraham, Abong, Odji, Tanu, Yos, Mikael, Mark, Edy, Berty, Sisilia, Ray, Hery(dragon), Dimas, Bota, Ka'Anto, Diego, Lusi, Melda, Mery, dan tak lupa mace Lt.3 yang telah banyak memberikan nasehat.

Akhir kata semoga seluruh budi baik dan perhatian dari berbagai pihak mendapat imbalan dari-Nya. Tiada karya manusia yang sempurna, demikian pula dalam tugas akhir ini yang tidak luput dari berbagai kekurangan oleh sebab itu dengan penuh kerendahan hati penulis mohon saran dan kritik demi perbaikan penulisan mendatang.

Semoga tulisan ini bernilai di sisi Tuhan dan dapat bermanfaat bagi pembaca (Amin).

Makassar, Oktober 2003

Penulis

ABSTRAK

Teknik analisis ragam variansi adalah suatu proses penguraian keragaman total data ke dalam beberapa komponen yang mengukur sumber-sumber keragaman data tersebut. Teknik ini digunakan antara lain untuk menguji hipotesis tentang kesamaan nilai rata-rata beberapa populasi sekaligus. Pengujian didasarkan atas pembanding antara dua komponen dengan menggunakan sebaran F.

Klasifikasi pengamatan berdasarkan satu kriteria disebut ***klasifikasi satu arah*** dan bila klasifikasi didasarkan pada dua kriteria disebut ***klasifikasi dua arah.*** Pada klasifikasi dua arah yaitu penggunaan dua perlakuan secara bersama-sama, misalnya varitas tanaman dan jenis pupuk yang dipakai sering terdapat interaksi antara kedua perlakuan itu. Untuk menguji ada tidaknya interaksi kita melakukan pengukuran berulang kali dibawah kondisi yang sama, kemudian dilakukan pengujian dan memberikan keputusan menerima atau tidak hipotesis H_0.

ABSTRACT

Technique analyze the manner varians is a total decomposition manner process of data into some component measuring the source manner data. This technique is used by for example to test the hypothesis about equality of average value of some population at one blow. Examination based for comparator of between two components by using swampy forest F.

Classification Perception of pursuant to one criterion referred by one-way classification and when classification relied on two criterions referred by klasifikasi two directions. At classification two directions that is use two treatment by together, for example varitas of crop and manure type weared often there are interaction of between second of that treatment. To test there is not it our interaction conduct the measurement repeatedly under same condition, is then conducted by a examination and give the decision accept or hypothesis do not Ho.

DAFTAR ISI

Halaman

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS HASANUDDIN
UPT
PERPUSTAKAAN

BAB I
PENDAHULUAN

I.1. LATAR BELAKANG

Matematika merupakan salah satu dari ilmu dasar yang melahirkan berbagai macam ilmu pengetahuan dan teknologi. Tidak dapat disangkal lagi juga merupakan penyebab terjadinya perubahan-perubahan yang sangat besar dan cepat. Karena semakin kompleksnya informasi, membutuhkan suatu kemampuan untuk menangkap, menganalisa, merangkum dan membahas suatu permasalahan. Disini ilmu-ilmu dasar tidak bisa diabaikan begitu saja. Metematika sebagai salah satu ilmu dasar tentunya memegang peranan penting dalam menunjang pengetahuan.

Secara garis besar ilmu metematika terbagai atas dua bagian yaitu matematika murni dan matematika terapan. Matematika murni mempelajari terapan mengenai aljabar dan analisa, sedangkan matematika terapan mempelajari masalah statistika dan komputer. Di dalam pembahasan pertama dalam makalah ini penulis menguraikan secara sederhana tentang **" Analisis Variansi Dua Arah dan Pembanding Ganda "** kemudian pada pembahasan yang kedua diuraikan tentang **" Sifat Ruang Hasil Kali Dalam "**

I.2. RUANG LINGKUP

Berdasarkan penjelasan diatas maka dalam tulisan ini akan di bahas dua topik dari cabang matematika tersebut yaitu : pada cabang matematika terapan membahas bidang statistika mengenai"**ANALISIS VARIANSI DUA ARAH DAN PEMBANDING GANDA** " yang ditempatkan pada bab II, pada cabang matematika murni membahas mengenai **"SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM** " yang ditempatkan pada bab III.

Demikianlah makalah atau tugas akhir ini dibuat sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

BAB II

ANALISIS VARIANSI DUA ARAH DAN PEMBANDING GANDA

II.1 PENGERTIAN ANALISIS VARIANS

Analisis varians (Anava) yang sering juga disebut sidik ragam adalah suatu metode yang membagi data eksperimen ke dalam beberapa bagian berdasarkan sumber, penyebab, atau faktor. Analisis varians pada dasarnya membagi jumlah kuadrat simpangan $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ kedalam bagian-bagian tertentu, bagian-bagian inilah yang digunakan tes signifikansi data dalam penelitian.

Dalam bentuk yang paling sederhana , anava ini digunkan untuk menguji signifikansi perbedaan dari dua rata-rata dari sejumlah populasi yang berbeda. Misalnya kita ingin menguji pengaruh dari K perlakuan yang berbeda-beda diterapkan kedalam setiap sampel, yang terdiri dari sebanyak n anggota. Anggota dari setiap sampel itu diambil secara acak. Rata-rata dari k sample kemudian dihitung. Hipotesisi nol menganggap bahwa semua populasi mempunyai rata-rata yang sama. Apabila dari hasil perhitungan dengan memperhatikan kekeliruan baku menunjukkan adanya pengaruh rata-rata perlakuan. Maka kita menolak H0 dan menerima hipotesis alternatip H1.

Eksperimen yang menggunakan satu faktor bebas disebut Sebagai analisis varianasi klasifikasi satu arah. Analisis variansi dapat digunakan dalam menganalisa hasil eksperimen yang melibatkan lebih dari satu faktor. Misalnya suatu eksperimen yang dirancang untuk mempelajari beberapa jenis padi, pupuk, dan interaksinya, serta komponen-komponen kekeliruan yang muncul.

II.2 ANALISIS VARIANSI KLASIFIKASI SATU ARAH

Misalnya sutu eksperimen melibatkan sejumlah k perlakuan. Perlakuan ini berupa metode mengajar terhadap beberapa murid sekolah yang dibagi atas beberapa kelompok.

Setiap perlakuan tersebut diterapkan kepada setiap kelompok yang berlainan, misalnya setiap kelompok mempunyai anggota sebanyak $n_1, n_2, \ldots, n_k$ murid. Jadi jumlah semua murid adalah $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$

Apabila setiap kelompok mempunyai anggota yang sama, maka kita dapat menuliskan sacara umum hasil ujian seperti berikut :

	PERLAKUAN			
No	1	2		k
1	x_{11}	x_{12}	...	X_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	...	X_{2k}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
N	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}

Observasi-observasi tersebut dapat di gambarkan ke dalam bentuk model statistik linier :

$$x_{ij} = \mu + \sigma_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,\dots,k$$
$$j = 1,2,\dots,n$$

x_{ij} = menyatakan hasil ujian murid ke – i pada kelompok ke - j misalnya x_{23} berarti hasil ujian murid ke-2 pada kelompok ke-3.

μ = adalah rata-rata keseluruhan

σ_i = adalah perlakuan ke-i.

ε_{ij} = adalah komponen kesalahan acak hipotesis nol yang akan di uji disini adalah :

Ho = $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$

H1 = tidak semua μ_i sama.

II.2.1 ANALISIS STATISTIK

Di dalam penulisan data digunakan dua indeks, yang pertama adalah mengidentifikasi anggota yang keberapa dari kelompoknya, dan yang kedua adalah untuk mengidentifikasi anggota kelompok yang mana. Misalkan x_{21} berarti anggota yang kedua dari kelompok yang pertama. Secara umum dipakai simbol x_{ij} kalau data ditabulasi dalam kelompok yang berbeda, maka indeks yang pertama menunjukkan baris yang kedua menunjukkan kolom.

Jumlah ukuran dari kelompok dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{i1},\ \sum_{i=2}^{n_2} x_{i2},\ \ldots\ldots, \sum_{i=i}^{n_k} x_{ik}$$

rata-rata dari kelompok dapat dituliskan dengan :

$\bar{x}_{.1}$ adalah rata-rata kelompok pertama

$\bar{x}_{.2}$ adalah rata-rata kelompok kedua, dan seterusnya

$\bar{x}_{.j}$ adalah rata-rata kelompok ke-j

$\bar{x}_{..}$ adalah rata-rata dari seluruh observasi

Jumlah kuadrat total dapat dipecah menjadi dua bagian, masing-masing diakibatkan oleh perlakuan dan sesatan, yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{x}_{..}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..}\right)+\left(x_{ij}-\bar{x}_{i.}\right)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2+2\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(x_{ij}-\bar{x}_{i.})$$

catatan : $2\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(x_{ij}-\bar{x}_{i.})=0$

bukti : $\sum_{j=1}^{n}\ (x_{ij}-\bar{x}_{i.})=x_{i.}-n\bar{x}_{i.}=x_{i.}-x_{i.}=0$

$$\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n}\ (x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2$$

yang dapat ditulis dengan JKT= JKP+JKS dimana masing-masing dapat dijabarkan menjadi :

$$JKT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{(x_{..})^2}{n}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_{i.}^2 - \frac{(x_{..})^2}{n}$$

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS HASANUDDIN
UPT
PERPUSTAKAAN

Sehingga untuk mencari JKS adalah :

JKS = JKT – JKP

Banyak observasi adalah k x n = N, jadi JKT mempunyai (N-1) derajat bebas. JKP mempunyai (N-k) derajat bebas. Jumlah kuadrat rata-rata perlakuan dan sesatan dapat ditulis sebagai berikut :

$$PKR = \frac{JKP}{k-1} \qquad \text{dan} \qquad SKR = \frac{JKS}{N-k}$$

Tampak jelas bahwa suatu pengujian dari hipotesis yang tidak berbeda dalam rata-rata perlakuan dapat di bentuk :

$$F = \frac{PKR}{SKR}$$

Dengan demikian sebagai derah kritis untuk menolak Ho kita ambil kejadian F > Co , dimana Co suatu konstanta yang diperoleh pada table F dengan derajat bebas (k – 1) sebagai pembilang dan (N – 1) sebagai penyebut. Maka uji F untuk hipotesis nol diatas adalah :

Jika Fh > F {(k – 1), (N – k), α } maka Ho : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ ditolak dan menerima

H1 = tidak semua μ sama.

Untuk melakukan uji analisa variansi satu faktor, kita buat tabel analisis variansi sebagai berikut :

Tabel Analisis Variansi Satu Faktor

Sumber Variansi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat rata-rata	F_{hitung}
Perlakuan	K – 1	JKP	PKR= $\dfrac{JKP}{k-1}$	$\dfrac{JKR}{SKR}$
Sisa	N – k	JKS	SKR	
Total	N – 1			

Contoh 1 :

Data berikut merupakan skor yang diperoleh siswa dalam mata pelajaran ekonomi yang orang tuanya berpendapatan rendah, sedang, dan tinggi yang berasal dari daerah perkotaan dan daerah pedasaan.

Penghasilan Orang Tua

Asal Siswa	Rendah		Sedang		Tinggi		$T_{i.}$
Desa	26	14	41	82	36	87	1249
	41	16	26	86	39	99	
	28	29	19	45	59	126	
	92	31	59	37	27	104	
	277		395		577		
Kota	51	35	39	144	42	133	2094
	96	36	104	92	92	124	
	97	28	130	87	156	68	
	22	36	122	64	144	142	
	441		752		901		
$T_{.j}$	718		1147		1478		x..=3343

Dari contoh diatas akan diuji Anava Satu Arah untuk pendapatan orang tua di Desa dan di Kota adalah :

1. Uji Anava Satu Arah untuk di Desa :

Tabel pendapat orang tua di Desa

Pendapatan oramg tua	Rendah	Sedang	Tinggi	Jumlah
X_{i1}	26	41	36	
X_{i2}	14	82	87	
X_{i3}	41	26	39	
X_{i4}	16	88	99	
X_{i5}	28	19	59	
X_{i6}	29	45	126	
X_{i7}	92	59	27	
X_{i8}	31	37	104	
Total = $X_{i.}$	277	395	577	$X_{..} = 1249$
Rata-rata	34,63	49,38	72,13	$\bar{x}_{..} = 52,04$

Uji hipotesis :

1. H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (rata-rata pendapatan orang tua di Desa sama)

   H_1 : H_0 tidak benar.

2. taraf signifikan $\alpha = 0,05$

3. daerah kritis tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel} = F\,(2,23;0,05) = 3,42$

4. perhitungan :

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS HASANUDDIN
UPT
PERPUSTAKAAN

$N = n \times k = 8 \times 3$

$= 24$

$$T = \frac{x_{..}^2}{N} = \frac{(1249)^2}{24} = 65000{,}042$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - T$$

$$= (26)^2 + (14)^2 + (41)^2 + \ldots + (104)^2 - 65000{,}042$$

$= 23660{,}958$

$$JKP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{i.}^2 - T$$

$$= \frac{(277)^2 + (395)^2 + (577)^2}{8} - 65000{,}042$$

$= 5710{,}333$

$JKS = JKT - JKP$

$= 23660{,}958 - 5710{,}333$

$= 17950{,}625$

TABEL ANALISIS VARIANSI SATU ARAH

Sumber varians	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat rata-rata	F_{ratio}
Perlakuan	2	5710,333	2855,167	3,34
Sisa	21	17950,625	854,792	
Total	23	23660,958		

Kesimpulan :

Karena F = 3,34 < 3,42 maka H_0 diterima pada taraf signifikan 5 % atau H_1 ditolak. ini berarti bahwa rata-rata pendapatan orang tua di Desa sama.

2. Uji Anava Satu Arah untuk di Kota :

Tabel pendapatan orang tua di Kota

Pendapatan orang tua	Rendah	Sedang	Tinggi	Jumlah
X_{i1}	51	39	42	
X_{i2}	35	144	133	
X_{i3}	96	104	92	
X_{i4}	36	92	124	
X_{i5}	97	130	156	
X_{i6}	28	87	68	
X_{i7}	22	122	144	
X_{i8}	36	64	142	
Total = $X_{i.}$	441	752	901	$X_{..}$ = 2094
Rata-rata	55,13	94	112,63	$\bar{x}$ = 261,75

Uji hipotesis :

1. H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (rata-rata pendapatan orang tua di Kota sama)

   H_1 : H_0 tidak benar

2. taraf signifikan $\alpha \doteq 0,05$

3. daerah kritis tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ F(2;23;0,05) = 3,42

4. perhitungan :

$N = n \times k = 8 \times 3 = 24$

$$T = \frac{x^2}{N} = \frac{(2094)^2}{24} = 182701{,}5$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - T$$

$$= (51)^2 + (39)^2 + (42)^2 + \ldots + (124)^2 - 182701{,}5$$

$$= 40516{,}5$$

$$JKP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - T$$

$$= \frac{(441)^2 + (752)^2 + (901)^2}{8} - 182701{,}5$$

$$= 13771{,}75$$

$$JKS = JKT - JKP$$

$$= 40516{,}5 - 13771{,}75$$

$$= 26744{,}75$$

TABEL ANALISIS VARIANSI SATUARAH

Sumber varians	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat rata-rat	F_{ratio}
Perlakuan	2	13771,75	6885,875	5,407
Sisa	21	26744,75	1273,559	
Total	23	40516,5		

Kesimpulan :

Karena F = 5,407 > 3,42 maka H_0 di tolak pada taraf signifikan 5 % atau H_1 diterima ini berarti bahwa rata-rata pendapatan orang tua di Kota tidak sama.

II.2.2 PEMBANDING GANDA

Apabila kita telah selesai melakukan analisis variansi ternyata diperoleh kesimpulan Ho ditolak atau H1 diterima, yang berarti tidak semua rata-rata perlakuan sama. Untuk mengetahui yang mana diantara rata-rata itu yang sama dan yang berbeda maka diadakan pengujian lebih lanjut dengan metode pembandingan ganda. Ada beberapa uji statistik dalam pembandingan ganda diantaranya: metode Tukey, metode BNT (Beda nyata terkecil), metode Newman-keuls, metode shceffe, metode Benfferoni dan sebagainya. Namun dalam tulisan ini akan diuraikan tiga metode saja yaitu metode Tukey, metode BNT (Beda Nyata Terkecil) dan metode Student-Newman keuls.

II.2.2.1 Metode Tukey

Tukey mengemukakan prosedur pembandingan ganda adalah berdasarkan pada "statistik studentised range". Dimana prosedur ini mempergunakan q (k , f , α) sebagai daerah kritis untuk semua pasangan perbandingan rata-rata.

Jadi Tukey menerangkan bahwa

Jika $\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right| > T\alpha$

Maka disimpulkan bahwa rata-rata perlakuan ke- i dengan ke- j berbeda

$(\mu_i \neq \mu_j)$, dimana $T\alpha$ diperoleh dari

$$T\alpha = q(k, f, \alpha)S\overline{x_i}$$

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS HASANUDDIN PERPUSTAKAAN

Keterangan :

α = taraf signifikansi

k = adalah banyaknya perlakuan

f =(N – k) adalah derajat bebas sisa

q (k , f , α) dapat di lihat pada table q dan

$S\overline{x_i}$ = adalah kesalahan rata-rata dari setiap perlakuan, yang

diterapkan sebagai : $S\overline{x_i} = \sqrt{\frac{SKR}{n}}$

Catatan :

Uji Tukey hanya dapat dipakai jika banyaknya data dari setiap perlakuan sama.

Contoh 2:

Pada contoh 1 diperoleh Fh > Ft maka Ho ditolak, ini berarti bahwa rata-rata pendapatan orang Tua di Kota tidaka sama. Untuk mengetahui yang mana diantaranya yang berbeda, dapat kita periksa dengan metode Tukey.

Diketahui rata-rata dari setiap perlakuan pada contoh 1 adalah :

$\bar{x}_1 = 55{,}13 \qquad \bar{x}_2 = 94 \qquad \bar{x}_3 = 112{,}63$

q (k , f , α) dimana k= 3 , f = (N – k) = 24 – 3 = 21

dan kita ambil $\alpha = 0{,}05\,\bar{x}$

jadi q (3; 21; 0,05) = 3,58

SKR = 1273,559

Maka $S\bar{x} = \sqrt{\frac{SKR}{n}} = \sqrt{\frac{1273{,}559}{8}} = 12{,}62$

$T\alpha = q(k, f, \alpha) S\bar{x}_i$

$= (3{,}58)(12{,}62)$

$= 45{,}18$

$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| = |55{,}1 - 94| = 38{,}9 < 45{,}18$

$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_3\right| = |55{,}1 - 112{,}63| = 57{,}53 > 45{,}18$

$\left|\bar{x}_2 - \bar{x}_3\right| = |94 - 112{,}63| = 18{,}83 < 45{,}18$

μ_1 *dan* μ_2 tidak berbeda nyata

μ_1 *dan* μ_3 berbeda nyata

μ_2 *dan* μ_3 tidak berbeda nyata

II. 2.2.2 UJI BEDA NYATA TERKECIL (BNT)

Andaikan bahwa dalam suatu analisis varians kita gunakan uji F dimana hipotesis nol, Ho ditolak, kita ingin menguji Ho : $\mu_i = \mu_j$ untuk setiap pasang

$i \neq j$. hal ini dapat dikerjakan dengan uji statistik t. asumsi bahwa pembandingan rata-rata dari dua perlakuan yaitu μ_i *dan* μ_j dianggap berbeda atau signifikansi pada taraf α

Jika $\left|\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.}\right| > BNT$

$$\text{BNT} = \left[t_{\alpha/2},(N-k)\right]\sqrt{2SKR\left(1/n_i + 1/n_j\right)}$$

Ini dipakai jika ukuran sampel tiap perlakuan tidak sama.

Jika ukuran sampel tiap perlakuan sama dipakai :

$$\text{BNT} = \left[t_{\alpha/2},(N-k)\right]\sqrt{\frac{2(SKR)}{n}}$$

Contoh 3 :

Sama halnya dengan contoh untuk uji Tukey.

Dimana :

SKR =1273,559 , ambil $\alpha = 5\,\%$, n= 8 k= 3 dan N= 24

$$\text{BNT} = \left[t_{\alpha/2},(N-k)\right]\sqrt{\frac{2(SKR)}{n}}$$

$$= \left(t_{\frac{0,05}{2}},20\right) = 2,080$$

$$= 2.080\sqrt{\frac{2(1273,559)}{8}} = 37,11$$

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| = |55,1 - 94| = 38,9 > 37,11$$

$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_3\right| = |94 - 112,63| = 17,63 < 37,11$

$\left|\bar{x}_2 - \bar{x}_3\right| = |55,1 - 112,63| = 57,53 > 37,11$

kesimpulan :

μ_1 *dan* μ_2 berbeda nyata

μ_1 *dan* μ_3 berbeda nyata

μ_2 *dan* μ_3 tidak berbeda nyata

II.2.2.3 UJI STUDENT NEWMAN KEULS

Uji ini disumbangkan oleh tiga orang yaitu : STUDENT, NEWMAN, dan KEULS, tetapi uji ini juga dikenal dengan nama Newman Keuls atau singkatnya Metode Keuls. Uji ini tidak sekonservatif dengan uji Tukey, pada uji ini menggunakan daerah ganda. Namun demikian uji ini dapat pula dijadikan sebagai petunjuk prosedur hasil, sehingga sulit untuk menggambarkan laju kesalahannya.

Nilai rata-rata dari setiap perlakuan kita urutkan seperti: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_t$ dimana $\bar{x}_1$ adalah nilai rata-rata yang paling kecil dan $\bar{x}_t$ adalah nilai rata-rata yang terbesar. Prosedur uji Student Newman Keuls ini dimulai dengan membandingkan nilai rata-rata yang maksimum dengan minimum. Jika daerahnya tidak signifikan (tidak nyata), maka uji ini tidak perlu dilanjutkan, dengan semua rata-rata dinyatakan homogen. Jika perbedaannya dinyatakan signifikan (nyata), maka disimpulkan bahwa $\mu_1 \neq \mu_t$ dan uji ini dilanjutkan dengan menguji $\bar{x}_1$ vs $\bar{x}_{(t-1)}$ dan $\bar{x}_2$ vs $\bar{x}_{(t-1)}$ dengan menggunakan suatu kriteria pengujian t – 1 nilai rata-rata pada setiap tahap, jika perbedaannya tidak signifikan maka prosedur ini dihentikan dan daerah itu dinyatakan homogen, jika signifikan maka pengujian dilanjutkan.

Pada prosedur ini kita menentukan berapa nilai kritis yaitu:

$W_p = q(p, f, \alpha) S_{\bar{x}}$ p = t, dimana t = 1, 2, ... , n

UPT PERPUSTAKAAN

q(p,f,α) dapat dilihat pada tabel distribusi Studentited Range, dimana p adalah banyaknya perlakuan, dan f adalah derajat bebas sisa, sedangkan $S_{\bar{x}}$ dihitung dengan rumus :

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{SKR}{2}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

ini dipakai jika banyaknya data tiap perlakuan tidak sama, sedangkan untuk banyaknya data tiap perlakuan sama dipakai:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{SKR}{n}}$$

Contoh : 4

Kita kembali meninjau contoh 1 diketahui rata-rata tiap perlakuan pada contoh 1

Setelah diurutkan sebagai berikut :

$\bar{x}_1 = 55{,}1$ $\quad\bar{x}_2 = 94$ $\quad\bar{x}_3 = 112{,}63$

t = 3 SKR = 1273,559 n = 8

karena banyaknya data tiap perlakuan sama maka dipakai

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{SKR}{n}} = \sqrt{\frac{1273{,}559}{8}} = 12{,}62$$

p = 3 , 2 f = 21 $\alpha = 0{,}05$

w_3 = q (3; 21; 0,05) 12,62 = 3,58 x 12,62 = 45,18

w_2 = q (2; 21; 0,05) 12,62 = 2,95 x 12,62 =37,29

$\bar{x}_1 \; vs \; \bar{x}_3$ = 55,1 vs 112,63 = 57,53 > 45,18

$\bar{x}_2$ vs $\bar{x}_3$ = 94 vs 112,62 = 18,63 < 37,29

$\bar{x}_1$ vs $\bar{x}_2$ = 55,1 vs 94 = 38,9 > 37,29 *

II. 3 ANALISIS VARIANSI KLASIFIKASI DUA ARAH

Eksperimen faktorial yang paling sederhana adalah suatu analisis yang hanya meliputi dua faktor, misalnya dua faktor tersebut adalah terdiri dari a kategori untuk faktor A dan terdiri dari b kategori untuk faktor B. faktor tersebut kita susun dalam rancangan faktorial. Ini berarti eksperimen memurut ab kombinasi perlakuan. Setiap eksperimen ada n ulangan. Misalkan X_{ijk} menyatakan suatu observasi pada kategori ke-*i* faktor A, kategori ke-*j* faktor B dan ke-*k* ulangan. Adapun susunan data hasil eksperimen dapat dituliskan sebagai berikut :

Tabel : Analisis Variansi Dua Arah

B A	1	2	. . .	B	T_{ij}
1	x_{111} , x_{112} , x_{11n}	x_{121} , x_{122} , x_{12n}	. . .	x_{1b1} , x_{1b2} , x_{1bn}	$T_{1.}$
	T_{11}	T_{12}	. . .	T_{1b}	
2	x_{211} , x_{212} , x_{21n}	x_{221} , x_{222} , x_{22n}	. . . . . .	x_{2b1} , x_{2b2} , x_{2bn}	$T_{1.}$
	T_{21}	T_{22}	. . .	T_{2b}	
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
A	x_{111} , x_{112} , x_{12n}	x_{121} , x_{122} , x_{12n}	. . . . . .	x_{1b1} , x_{1b2} , $x_{ai.n}$	$T_{1.}$
	T_{a1}	T_{a2}	. . .	T_{ab}	
$T_{.j}$	$T_{.1}$	$T_{.2}$	. . .	$T_{.b}$	$T_{...}$

Observasi tersebut dapat digambarkan kedalam modei statistik linear :

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad = \begin{Bmatrix} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{Bmatrix}$$

Dimana masing-masing adalah :

μ adalah pengaruh rata-rata keseluruhan

α_i adalah pengaruh kategori ke-i faktor A

β_j adalah pengaruh kategori ke-j faktor B

γ_{ij} adalah pengaruh interaksi antara α_i dan β_j

ε_{ijk} adalah komponen kesalahan acak

selanjutnya kita melakukan tes hipotesis berikut :

$H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_i = 0$

$H_B : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_j = 0$

$H_{AB} : \gamma_{ij} = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, a$ dan $j = 1, 2, \ldots, b$

Hipotesis H_A menyatakan tidak ada pengaruh faktor A

Hipotesis H_B menyatakan tidak ada pengaruh faktor B

Misalkan $T_{i.}$ menyatakan total semua observasi kategori ke-i faktor A, $T_{.j}$ menyatakan total semua observasi kategori ke-j faktor B, T_{ij} menyatakan total semua observasi kategori ke-i faktor A dan kategori ke-j faktor B (dalam ke-ij sel), dan $T_{..}$ menyatakan total semua observasi. Didefinisikan $\bar{x}_{i..}$ adalah rata-rata observasi ke-i faktor A, $\bar{x}_{.j}$ adalah rata-rata observasi ke-j faktor B. $\bar{x}_{ij}$ adalah rata-rata observasi ke-ij sel. $\bar{x}_{..}$ adalah rata-rata observasi keseluruhan, yang masing-masing dapat ditulis sebagai berikut :

$$T_{i.} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \qquad \bar{x}_{i..} = \frac{T_{i.}}{bn} \quad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$T_{i.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \qquad \bar{x}_{.j.} = \frac{T.j}{an} \quad j = 1, 2, \ldots, b$$

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \qquad \bar{x}_{ij.} = \frac{T_{ij}}{n} \quad i = 1, 2, \ldots, a \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, b$$

$$T_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \qquad \bar{x}_{..} = \frac{T_{..}}{bn} \quad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$J = 1, 2, \ldots, b$$

$$K = 1, 2, \ldots, n$$

Jumlah kudrat total dapat kita tulis sebagai berikut :

$$JKT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{k} (X_{ijk} - \bar{x}_{...})^2$$

Selanjutnya jumlah kuadrat total tersebut dapat dipecah menjadi empat bagian, yang masing-masing diakibatkan oleh faktor A, faktor B, interaksi AB, dan sesatan acak yang dituliskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{k}(X_{ijk}-\bar{x}_{...})^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})+(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})+(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{...}-\bar{x}_{.j.}+\bar{x}_{...})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right]^2$$

$$= bn\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})^2 \quad + an\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{.j.}+\bar{x}_{...})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$$

jadi JKT = JKA + JKB + JKAB + JKS

yang masing-masing dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$JKT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ijk}-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}^2 - \frac{T_{..}^2}{abn}$$

$$JKA = bn\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2 = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}T_{i.}^2 - \frac{T_{..}^2}{abn}$$

$$JKB = an\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})^2 = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b}T_{.j}^2 - \frac{T_{..}^2}{abn}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}T_{ij}^2$$

Dan JKAB = JKT – JKA – JKB – JKS

JKA mengukur variansi rata-rata sampel faktor A terhadap rata-rata sampel seluruhnya. JKB mengukur variansi rata-rata sampel faktor B terhadap rata-rata sampel seluruhnya. JKAB mengukur variansi rata-rata sampel interaksi terhadap rata-

rata sampel seluruhnya. JKS mengukur variansi observasi x_{ijk} dari masing-masing rata-rata sampel seluruhnya. Selanjutnya kita defenisikan kuadrat rata-rata yang berkaitan dengan masing-masing jumlah kuadrat sebagai berikut :

$AKR = \dfrac{JKA}{a-1}$ adalah kuadrat rata-rata faktor A

$BKR = \dfrac{JKB}{b-1}$ adalah kuadrat rata-rata faktor B

$ABKR = \dfrac{JKAB}{(a-1)(b-1)}$ adalah kuadrat rata-rata sesatan

Jika masing-masing terdapat pengaruh perlakuan maka AKR, BKR, ABKR, akan bernilai besar dan SKR, sehingga jika kita bentuk :

$$F_A = \frac{AKR}{SKR}$$

Apabila H_A tidak benar maka F_A akan cenderung bernilai besar, sehingga kita menolak H_A pada taraf α, ini berarti $F_h > F_t$ .dimana F_t dapat dilihat pada tabel distribusi F dengan derajat bebas pembilang = (a – 1) dan derajat bebas penyebut = ab(n – 1).

Dengan penjelasan yang sama, uji untuk H_B dan H_{AB} pada taraf α adalah :

Menolak H_B jika $F_B = \dfrac{BKR}{SKR} > F\{(b-1); ab(n-1); \alpha\}$ dan menolak H_{AB} jika F_{AB}

$= \dfrac{ABKR}{SKR} > F\{(b-1); ab(n-1); \alpha\}$.

Kita ringkaskan hasil uji analisis variansi dua arah kedalam tabel sebagai berikut :

Tabel Analisis Variansi Klasifikasi Dua Arah

Sumber variansi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat rata-rata	F. ratio
Peubah A	a-1	JKA	AKR	F_A
Peubah B	b-k	JKB	BKR	F_B
Interaksi	(a-1)(b-!)	JKAB	ABKR	F_{AB}
Sisa	ab(n-1)	JKS	SKR	
Total	N – 1	JKT		

Contoh 6

Data berikut merupakan skor yang diperoleh siswa dalam mata pelajaran ekonomi yang orang tuanya berpendapatan rendah, sedang, dan tinggi yang berasal dari daerah perkotaan dan daerah pedasaan.

Penghasilan Orang Tua

Asal Siswa	Rendah		Sedang		Tinggi		$T_{i.}$
Desa	26	14	41	82	36	87	1249
	41	16	26	86	39	99	
	28	29	19	45	59	126	
	92	31	59	37	27	104	
	277		395		577		
Kota	51	35	39	144	42	133	2094
	96	36	104	92	92	124	
	97	28	130	87	156	68	
	22	36	122	64	144	142	
	441		752		901		
$T_{.j}$	718		1147		1478		x.. = 3343

Uji Anava Dua arah untuk pendapatan orang tua di Desa dan di Kota :

Uji hipotesis :

H_A : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

H_B : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

taraf signifikan $\alpha = 0,05$

perhitungan :

$$JKT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - \frac{T_{..}^2}{abn}$$

$$= (26)^2 + (41)^2 + \ldots + (68)^2 + (142)^2 - \frac{(3343)^2}{48}$$

$$= 77.024,97917$$

$$JKA = \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{a} T_{i.}^2 - \frac{T_{..}^2}{ab_n}$$

$$= \frac{(1249)^2 + (2094)^2}{24} - \frac{(3343)^2}{48} = 14.875,52083$$

$$JKB = \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{b} T_{.j}^2 - \frac{T_{..}^2}{abn}$$

$$= \frac{(718)^2 + (1147)^2 + (1478)^2}{16} - \frac{(3343)^2}{48} = 18150,04167$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} T_{ij}^2$$

$$= 309851 - \frac{(277)^2 + (395)^2 + (577)^2 + (441)^2 \ldots + (901)^2}{8} = 42.667,375$$

$$JKAB = JKT - JKA - JKB - JKS$$

$$= 77024,979 - 14875,520 - 18150,041 - 42667,375 = 1332,042$$

TABEL ANALISIS VARIANSI

Sumber variansi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kudrat rata-rata	F- ratio
Variansi A	1	14875,521	14875,521	14,64
Variansi B	2	18150,042	9075,021	8,93
Interaksi	2	1332,042	666,021	0,166
Sisa	42	42667,375	1051,890	
Total	47	77024,980		

F(0,05;1;42) = 4,07 F(0,05;1;42) = 7,27

F(0,05;2;42) = 3,22 F(0,01;2;42) = 5,15

Kesimpulan yang kita dapatkan adalah :

1. Tidak terdapat signifikansi yang mengatakan adanya interaksi kedua faktor dalam eksperimen.
2. Terdapat pengaruh yang signifikansi antara siswa yang berasal dari kota dan yang berasal dari desa.
3. Terdapat perbedaan yang signifikansi pada taraf 0,05 yang berarti terdapat pengaruh yang sangat menyakinkan antara orang tua siswa yang berpenghasilan tinggi, sedang, dan rendah

BAB III

SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM

3.1 Ruang vektor

Banyak kuantitas fisis seperti luas, panjang, massa dan tempereratur, dapat dijelaskan secara lengkap apabila besaran kuantitas tersebut telah diberikan. Kualitas seperti ini kita namakan skalar. Kuantitas fisis lainnya, kita namakan vektor, penjelasannya tidak begitu lengkap sehingga baik besarannya maupun arahnya dapat dispesifikasikan. Sebagia contoh angin yang bergerak pada umumnya digambarkan dengan memberikan kecepatan dan arahnya, katakanlah mendekati 20 mil/jam. Kecepatan dan arah angin tersebut secara bersamaan membentuk kuntitas vektor yang kita namakan perambatan angin. Contoh lain dari vektor adalah gaya dan pergeseran.

Vektor dapat dinyatakan secara geometris sebagai segmen-segmen garis terarah atau panah-panah, arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menyatakan besar vektor. Ekor panah dinyatakan titik awal (initial point) dari vektor dan ujung vektor panah dinamakan titik terminal (terminal point). Bila membahas vektor, maka kita akan menyatakan bilangan sebagai skalar.

Jika kita melihat gambar :

A (3.1)a (3.1)b

(gambar 3.1)

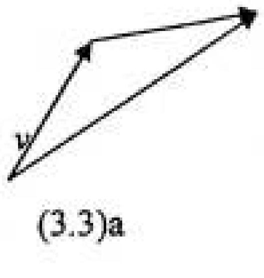
Pada gambar 3.1a titik awal vektor v adalah A dan titik terminalnya adalah B, maka dituliskan :

$$V = \overline{AB}$$

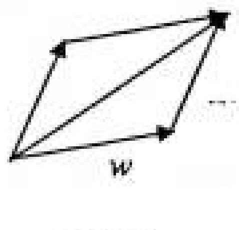
Vektor-vektor yang mempunyai panjang dan arah yang sama, seperti vektor-vektor yang diberikan pada gambar 3.1b dinamakan ekivalen karena kita menginginkan sebuah vektor yang ditentukan oleh panjang dan arahnya maka vektor-vektor ekivalen dianggap sebagai sama walaupun vektor-vektor tersebut mungkin diletakkan pada kedudukan yang berbeda-beda. Jika v dan w ekivalen maka kita tiliskan :

$$v = w$$

Jika v dan w sembarang dua vektor tepatkan vektor w sehinggga titik awalnya berimpit dengan titik terminal v. Vektor $v + w$ dinyatakan oleh panah dan titik awal v terhadap titik terminal w (gambar 3.2a).



(3.3)a



(3.3)b

(Gambar 3.3)

Dalam gambar 3.3 b kita telah membemtuk dua jumlah yakni $v + w$ dan $w + v$. jelaslah bahwa :

$$v + w = w + v$$

Dan bahwa jumlah tersebut berimpit dengan diagonal jajaran genjang yang ditentukan oleh $v + w$. Bila vektor-vektor ini dilokasikan sehingga vektor-vektor tersebut mempunyai titik awal yang sama.

Vektor yang panjangnya nol dinamakan vektor nol (zero vektor) dan dinyatakan dengan $\bar{0}$. kita defenisikan :

$$\bar{0} + v = v + \bar{0} = v$$

Untuk tiap-tiap vektor v karena tidak ada arah alami untuk vektor nol, kita akan sepakat bahwa vektor nol tersebut ditetapkan mempunyai sebarang arah yang akan memudahkan pemecahan untuk soal yang sedang ditinjau. Jika v adalah sebarang vektor tidak nol, maka adalah negatif v, didefenisikan sebagai vektor yang mempunyai besaran sama seperti v , tetapi diarahkan berlawanan dengan v.

Vektor mempunyai sifat :

$$v + (-v) = 0$$

Jika v adalah vektor tidak nol dan k bilangan riil tidak nol (skalar), maka hasil kali kv didefenisihkan sebagai vektor yang panjangnya satu kilo kali panjang v dan arahnya sama seperti arah v jika $k>0$ dan berlawanan dengan arah v, jika $k< 0$. kita tuliskan sebagai berikut :

$$Kv = 0, k = 0 \text{ atau } v = 0$$

Defenisih 3.1.1 :

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka tupelo n terorde (ordered n tupel) adalah sebuah urutan n bilangan riil (a_1, a_2 , ... a_n). himpunan semua tupelo n terorde dan tupel terorde dan bukannya tupelo -2- terorde dan tupelo -3- terorde. Bila n =1, setiap tupel -n- terorde terdiri dari satu bilangan riil sehingga R^1 dapat ditinjau sebagai himpunan bilangan riil . Kita biasanya menuliskan R dan bukan R^1 untuk himpunan ini.

Defenisi 3.1.2 :

Jika $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n , maka hasil kali dalam Euclidis (*Euclidean inner product*) u.v kita defenisihkan dengan :

$$u.v = u_1v_1 - u_2v_2 - \dots - u_nv_n$$

Teorema 3.1.1

Jika u.v dan w adalah vektor pada R^n dan k adalah sebarang skalar maka :

a. $u.v = v.u$

b. $(u + v)\, w = u.w + v.w$

c. $(ku)v = k(u.v)$

d. $v.v \geq 0$. selanjutnya $v.v = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$

Bukti :

(a) misalkan : $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ maka

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

$$= v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n$$

$$= v.u$$

(b) misalkan : $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$$(u + v)\,w = (u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)\,(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

$$= (u_1 + v_1)\,w_1 + (u_2 + v_2)\,w_2 + \ldots + (u_n + v_n)\,w_n$$

$$= (u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n)$$

$$= u.w + v.w$$

(c) $(ku)v = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \ldots + (ku_n)v_n$

$$= k(u_1v_1) + k(u_2v_2) + \ldots + k(u_nv_n)$$

$$= k\,(u.v)$$

(d) $v.v = v_1^2 + \ldots + v_n^2 \geq 0$, selanjutnya kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$v_1 = v_2 = 0$, yakni jika dan hanya jika $v = 0$.

Contoh :

Teorema 1 membolehkan kita melakukan perhitungan dengan hasil kali dalam Euclidis yang sangat miirp dengan cara kita melakukan perhitungan hasil kali ilmu hitung biasa. Misalnya :

$$(3u + 2v)\,(4u + v) = (3u)\,(4u + v) + (2u)\,(4u + v)$$

$$= (3u)\,(4u) + (3u)\,(v) + (2v)\,(4u) + (2v)\,(v)$$

$$= 12(u.u) + 3(u.v) + 8(v.u) + 2(v.v)$$

$$= 12(u.u) + 11(u.v) + 2(v.v)$$

Berdasarkan analogi dengan rumus-rumus yang telah kita kenal baik R^2 atau R^3 kita defenisikan norma Euclidis (panjang Euclidis) vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pada R^n menurut :

$$\|u\| = (u.u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$$

demikian juga, jarak Euclidis diantara titik $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan titik $v = (v_1, v_2, ... v_n$) pada R^n didefenisihkan oleh :

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh :

Jika $u = (1, 3, -2, 7)$ dan $v = (0, 7, 2, 2)$ maka :

$$\|u\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

dan

$$d(u.v) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

Defenisi 3.1.3 :

Misalnya u sebarang himpunan benda yang dua operasinya kita defenisikan yakni penambahan dan perlakian dengan skalar (bilangan riil). Penambahan tersebut kita pahami untuk mengasosiasikan sebuah aturan dengan setiap pasang bendan u dan v dalam V yang mengandung elemen $u + v$ yang kita namakan jumlah u dan v; dengan perlakian skalar kita artikan aturan untuk mengasosiasikannya baik untuk setiap skalar k maupun setiap benda u pada V yang mengandung elemen ku, yang dinamakan perlakian skalar (skalar multiple) u oleh k. jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua benda u, v, w, pada V dan oleh semua skalar k dan l, maka kita namakan V sebuah ruang vektor (vektor space) dan benda-benda pada V kita namakan vektor :

(1). Jika u dan v adalah benda-benda pada V maka $u + v$ berada di V

(2). $u + v = v + u$

(3). $u + (v + w) = (u + v) + w$

(4). Ada sebuah benda 0 si V sehingga $0 + u = u + 0$ untuk semua u di V

(5). Untuk setiap u di V ada sebuah benda $-u$ di V yang kita namakan negatif u sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$

(6). Jika k adalah sebarang skalar dan u adalah sebarang benda di V, maka ku berada di V

(7). $k(u + v) = ku + kv$

(8). $(k + l)u = ku + lu$

(9). $k(lu) = (kl)u$

(10). $lu = u$

Aksioma-aksioma tersebut akan dipilih dengan mengabstrakkan sifat-sifat yang paling penting dari vektor-vektor pada R^n secara otomatis akan memenuhi aksioma-aksioma ini.jadi konsep baru kita mengenai sebuah vektor akan mencakup vektor kita yang lama dan juga akan mencakup banyak macam vektor baru.

Teorema 3.1.2 :

Misalkan V adalah sebuah ruang vektor, u sebuah vektor pada V dan k sebuah skalar, maka :

(a). $0u = 0$

(b). $k\bar{0} = \bar{0}$

(c). $(-1)\, u = -u$

(d). jika $ku = 0$, maka $k = 0$ atau $u = 0$

bukti :

(a). Kita dapat menuliskan :

$$0u + u0 = (0 + 0)u$$

$$= 0u$$

menurut aksioma (5) maka vektor $0u$ adalah bilangan negetif, yakni $-0u$. dengan menambahkan bilangan negatif ini pada kedua ruas di atas maka akan menghasiikan :

$$[\, 0u + 0u \,] + (-0u) = 0u + (-0u)$$

atau

$$0u + [\, 0u + (-0u)] = 0u + (-0u) \qquad \text{(aksioma 3)}$$

boleh juga

$$0u + 0 = 0 \qquad \text{(aksioma 5)}$$

atau bahkan

$$0u = 0 \qquad \text{(aksioma 4)}$$

(b). kita dapat menuliskan

$$k\bar{0} = k\,(\bar{0} + \bar{0}) \qquad \text{(aksioma 4)}$$

$$= k\bar{0} + k\bar{0} \qquad \text{(aksioma 7)}$$

dengan menggunakan aksioma 5 maka :

didefenisikan sebagai hasil kali dalam pada R^n : hal ini dinamakan hasil kali dalam Euclidis yang diboboti dengan bobot $w_1, w_2, \dots w_n$

Contoh :

Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adalah vektor-vektor pada R^2 . buktikan bahwa hasil kali dalam Euclidis yang diboboti :

$$< u, v > = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

dapat dipenuhi ketiga aksioma hasil kali dalam tersebut

Pemecahan :

- Untuk semua $v \in V$ berlaku :

$$< v,v > = 3v_1v_1 + 2v_2v_2$$
$$= 3v_1^2 + 2v_2^2$$

karena merupakan bilangan riil maka $<v,v> = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$

selanjutnya $<v,v> = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$. jika $v_1 = v_2 = 0$ maka

$<v,v> = 3.0 + 2.0 = 0$ (bukti kiri). Demikian juga karena

$<v,v> = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ hanya akan berlaku $v_1 = v_2 = 0$ (bukti kanan)

- Selanjutnya bahwa jika u dan v dipertukarkan dalam persamaan ini maka ruas kanan selebihnya akan sama sehingga

$$<u,v> = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$
$$= 3v_1u_1 + 2v_2u_2$$
$$= <v,u>$$
$$= <v,u>$$

- Untuk semua $u, v \in V$ dan $r, s \in C$

  Jika $w = (w_1, w_2)$

  $<ru + sv, w> = 3\ (ru_1 + sv_1)w_1 + 2\ (ru_2 + sv_2)w_2$

  $= 3\ ru_1\ w_1 + 3sv_1\ w_1 + 2ru_2\ w_2 + 2sv_2\ w_2$

  $= (3ru_1\ w_1 - 2ru_2\ w_2) + (3sv_1\ w_1 + 2sv_2\ w_2)$

  $= r\ (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + s\ (3v_1w_1 + 2v_2w_2)$

  $= r < u,w > + s < v,w >$

Contoh :

Misalkan C^2 ruang vektor atas C, didefenisihkan :

$<,> : C^2 \, x \, C^2 \rightarrow <u,v> = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2$

Buktikan bahwa defenisi diatas adalah ruang hasil kali dalam.

Pemacahan :

$< u,v > = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2$

1. Akan ditunjukkan untuk semua $v \in V$ berlaku :

   $<v,v> \geq 0$

   Misalkan : $v = (v_1, v_2)$

   Dimana : $v_1 = a + b_i$, $v_2 = c + d_i$

   $\bar{v}_1 = a - b$, $\bar{v}_2 = c - d_i$

   $< v,v > = v_1 \bar{v}_1 + v_2 \bar{v}_2$

   $= (a + b_i)\ (a - b_i) + (c + d_i)\ (c - d_i)$

   $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$

selanjutnya

jika $<v,v> = 0$ akan dibuktikan $v = 0$

yakni $<v,v> = v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 = 0$

$(a + b_i)(a - b_i) + (c + d_i)(c - d_i) = 0$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$

karena merupakan bilangan riil dan setiap bilangan riil jika dikuadratkan

paling sedikit 0 maka $v = 0$. jadi $v = 0$ (bukti kanan)

diketahui $v = 0$ akibatnya $v_1 = 0 = v_2$ akan dibuktikan $<v,v> = 0$

$$\begin{aligned} <v,v> &= v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 \\ &= 0\,\bar{v}_1 + 0\,\bar{v}_2 \\ &= 0 \text{ (bukti ruas kiri)} \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1:

Misalkan u, v dan $w \in V$ ruang vektor atas R, dan k sebarang skalar maka :

a. $<\bar{0},v> = <v,\bar{0}>$

b. $<u,v + w> = <u,v> + <u,w>$

c. $<u,kv> = k<u,v>$

Bukti :

a. misalkan $\bar{0} = (0,0)$ dan $v = (v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} <\bar{0},v> &= 0.v_1 + 0.v_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$= <v, \bar{0}>$

b. $<u, v + w> = <v + w, u>$ (dengan kesimetrian)

$= <v,u> + <w,u>$ (dengan penambahan)

$= <u,v> + <u,w>$ (dengan kesimetrian)

c. $<u , kv> = <kv,u>$

$= k< v, u >$

$= k< u , v >$

Contoh :

Misalkan $u =(u_1 , u_2)$ dan $v = (v_1 , v_2)$ adalah vektor-vektor pada R^2. buktikan bahwa hasil kali dalam Euclidis yang diboboti :

$$<u,v> = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Dapat memenuhi sifat-sifat teorema.

Pemecahan :

(a). misal : $\bar{0} = (0,0)$

$v = (v_1,v_2)$

$<\bar{0} ,v> = 3.0.v_1 + 2.0.v_2$

$= 0 + 0$

$= 0$

$= <v, \bar{0} >$

(b). jika $w = (w_1,w_2)$

$$< u, v + w > = 3u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2)$$

$$= (3u_1v_1 + 2u_2v_2) + (3u_1w_1 + 2u_2w_2)$$

$$= < u,v > + < u,w >$$

(c). $< u,kv > = 3u_1(kv_1) + 2u_2(kv_2)$

$$= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2)$$

$$= k < u,v >$$

3.3 Panjang dan Sudut di Ruang Hasil Kali Dalam

Dalam bagian ini kita akan mengembangkan pemahaman mengenai panjang, jarak dan sudut di ruang hasil kali dalam yang umum. Panjang vektor dapat kita tulis dalam ruas-ruas hasil kali dalam titik sebagai berikut :

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = (u.u)^{1/2}$$

Defenisi 3.3.1 :

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka norma (panjang) vektor u untuk tiap $u \in V$ adalah :

$$\|u\| = < u,u >^{1/2}$$

Teorema 3.3.1 :

Jika u, $v \in V$ adalah ruang hasil kali dalam atas lapangan C, dan k adalah sebarang skalar maka :

1. $\|u\| \geq 0$ dan $\|u\| = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$

2. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$, untuk semua $r \in C$, $u \in V$

3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Bukti :

1. akan dibuktikan $\|u\| \geq 0$

$$\|u\| = < u,u >^{1/2} = \sqrt{u.u}$$

$$= \sqrt{u^2}$$

$$\geq 0$$

dan $\|u\| = < u,u >^{1/2} = 0$ hanya akan berlaku jika $v = 0$, jadi $u = 0$ (bukti kanan)

jika $u = 0$ maka $\|u\| = < u,u >^{1/2}$

$= <0.0>^{1/2}$

$= 0$

jadi $\|u\| = 0$ (bukti kiri)

2. $\|ku\| = <ku.ku>^{1/2}$

$= \sqrt{ku.ku}$

$= |k|\sqrt{u.u}$

$= |k|\ (u.u)^{1/2}$

$= |k|\|u\|$

jadi $\|ku\| = |k|\ \|u\|$

3. $\|u+v\|^2 = < u + v,\ u + v >$

$= <u,u> + <u,v> + <v,u> + <v,v>$

$= <u,u> + 2<u,v> + <v,v>$

$\leq <u,u> + 2<u,v> + <v,v>$

$\leq <u,u> + 2\|u\|\ \|v\| + \|v\|^2$

jadi $\|u+v\|^2 \leq (\|u\|\|v\|)^2$. Dengan mengambil akar-akarnya maka :

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Contoh :

Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah ruang vektor R^3. buktikan bahwa vektor tersebut memenuhi ketiga teorema .

Pemecahan :

1. $u = (u_1, u_2, u_3)$

   akan dibuktikan $\|u\| \geq 0$

   $\|u\| = < u,u >^{1/2}$

   $= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$

   $= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

   ≥ 0

   jadi $\|u\| \geq 0$

   dan

   $\|u\| = < u,u >^{1/2}$

   $= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

   $= 0$ hanyakan berlaku jika $u = 0$

   jadi $u = 0$ (bukti kanan)

   jika $u = 0$ maka $\|u\| = < u,u >^{1/2}$

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$= 0$$

jadi $\|u\| = 0$ (bukti kiri)

2. $\|ku\| = \|k(u_1, u_2, u_3)\|$

$$= \|(ku_1, ku_2, ku_3)\|$$

$$= ((ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2)^{1/2}$$

$$= (k^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2))^{1/2}$$

$$= |k| \, (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$$

$$= |k| \, \|u\|$$

jadi $\|ku\| = |k| \, \|u\|$

DEPARTEMEN UNIVERSITAS HAS UPT PERPUSTA

3. $\|u+v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$

$$= ((u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2)$$

$$= (u_1u_1 + 2u_1v_1 + v_1v_1 + u_2u_2 + 2u_2v_2 + v_2v_2 + u_3u_3 + 2u_3v_3 + v_3v_3)$$

$$= (u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3)$$

$$= \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$\leq \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

jadi $\|u+v\|^2 \leq \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$. Dengan mengambil akar-akarnya maka :

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Selanjutnya kita akan membahas mengenai jarak ruang hasil kali dalam.

Defenisi 3.3.2

Jika V adalah ruang hasil kali dalam maka jarak $d(u,v)$ antara dua vektor u dan $v \in V$ adalah :

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

$$= \langle u\text{-}v,\ u\text{-}v\rangle^{1/2}$$

Teorema 3.3.2 :

Jika u dan $v \in V$ adalah ruang hasil kali dalam atas lapangan C maka :

1. $d(u,v) \geq 0$ dan $d(u,v) = 0$ jika hanya jika $u = v$
2. $d(u,v) = d(v,u)$ (simetri)
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Bukti :

1. $d(u,v) = \|u - v\|$

$$= \langle u\text{-}v,\ u\text{-}v\rangle^{1/2}$$

$$= \sqrt{(u-v).(u-v)}$$

$$= \sqrt{(u-v)^2}$$

$$\geq 0$$

jadi $d(u,v) \geq 0$

dan

$d(u,v) = <u-v, u-v>^{1/2}$

$= \sqrt{(u-v).(u-v)}$

$= \sqrt{(u-v)^2}$

$= 0$ sehingga $u - v = 0$ atau $u = v$

jadi $u = v$ maka $d(u,v) = <u-v, u-v>^{1/2}$

$= <v-v, v-v>^{1/2}$

$= <0,0>^{1/2}$

$= 0$

jadi $d(u,v) = 0$

2. $d(u,v) = \|u-v\|$

$= \|v-u\|$

$= d(v,u)$

jadi $d(u,v) = d(v,u)$

3. $d(u,v) = \|u + w - w + v\|$

$= \|u - w + w - v\|$

$\leq \|u-w\| + \|w-v\|$

$= d(u,w) + d(w,v)$

jadi $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Contoh :

Dari contoh sebelumnya Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ akan dibuktikan memenuhi ketiga teorema.

Penyelasaian :

1. $d(u,v) = \|u - v\|$

$= \langle u-v, u-v \rangle^{1/2}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$

≥ 0

jadi $d(u,v) \geq 0$

dan

$\underline{d}(u,v) = \|u - v\|$

$= \langle u-v, u-v \rangle^{1/2}$

$= 0$ hanya akan berlaku jika $u = v$ jadi $u = v$

jika $u = v$ maka $d(u,v) = \langle u-v, u-v \rangle^{1/2}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$

$= \sqrt{(v_1 - v_1)^2 + (v_2 - v_2)^2 + (v_3 - v_3)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$

$= 0$

jadi $d(u,v) = 0$

2. $d(u,v) = \|u-v\|$

$= <u\text{-}v,\ u\text{-}v>^{1/2}$

$= \sqrt{(u_1-v_i)^2 \div (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2}$

$= \sqrt{(v_1-u_1)^2 - (v_2-u_2)^2 - (v_3-u_3)^2}$

$= \|v-u\|$

$= d(v,u)$

jadi $d(u,v) = d(v,u)$

3. Misalkan $w = (w_1, w_3, w_3)$

$d(u,v) = \|(u_1,u_2,u_3)+(w_1,w_2,w_3)-(w_1,w_2,w_3)-(v_1,v_2,v_3)\|$

$= \|(u_1,u_2,u_3)-(w_1,w_2,w_3)\div(w_1,w_2,w_3)-(v_1,v_2,v_3)\|$

$\le \|(u_1,u_2,u_3)-(w_1,w_2,w_3)+(w_1,w_2,w_3)-(v_1,v_2,v_3)\|$

$= \|u-w\|+\|w-v\|$

$= d(u,w) + d(w,v)$

jadi $d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v)$

KESIMPULAN

1. Pada pengujian Anava satu arah untuk pendapatan orang tua di Desa tidak terdapat pengaruh yang sangat menonjol karena rata- rata pendapatan orang tua di Desa sama.
2. sedangkan pada pengujian Anava satu arah untuk pendapatan orang tua di Kota terdapat pengaruh yang sangat menonjol karena rata-rata pendapatan orang tua di Kota tidak sama. Dengan menggunakan metode Tukey, maka dapat disimpulkan bahwa pendapatan yang paling berbeda nyata yaitu yang berpenghasilan rendah dan berpenghasilan tinggi.
3. Pada pengujian Anava dua arah untuk pendapatan orang tua di Desa dan di Kota terdapat perbedaan yang signifikan pada taraf $\alpha = 0,05$ yang berarti bahwa terdapat pengaruh yang sangat menyakinkan antara pendapatan orang tua di Desa dan di Kota.

DAFTAR PUSTAKA

1. Achmad Ariton. Aljabar Linear. Penerbit ITB, Bandung 1985.
2. Howard Anton, "Aljabar Linear Elementer", 5th Edition, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1988.
3. Hadley, G. "Aljabar Linear:., Penerbit Erlangga, Jakarta 1983.
4. Montgomery , C.D. ," Design and Analisys of Eksperiments " , 2nd edition, John Wiley dan Sons, New York.
5. Steel , Robert G.D. dan Torrie, James H. ," Princip and Prosedur Statistika ", 2nd editon, penerbit P.T. Gramedia, Jakarta, 1985
6. Sudjana , 1992 ," Metode Statistika ", penerbit Tarsito Bandung.