FORMULASI HUKUM MORTALITAS *MAKEHAM* DAN APLIKASINYA DALAM PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA DWIGUNA MODEL STOKASTIK *COX-INGERSOLL-ROSS*

SKRIPSI

FERNANDO TODING BUA'
H011 18 1013

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2022

FORMULASI HUKUM MORTALITAS *MAKEHAM* DAN APLIKASINYA DALAM PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA DWIGUNA MODEL STOKASTIK *COX-INGERSOLL-ROSS*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

FERNANDO TODING BUA'
H011 18 1013

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2022

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Formulasi Hukum Mortalitas *Makeham* dan Aplikasinya dalam Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dwiguna Model Stokastik *Cox-Ingersoll-Ross*

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 10 Mei 2022

10000
METERAI TEMPEL
D3214AJX836769215

Fernando Toding Bua'

H011181013

FORMULASI HUKUM MORTALITAS *MAKEHAM* DAN APLIKASINYA DALAM PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA DWIGUNA MODEL STOKASTIK *COX-INGERSOLL-ROSS*

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.	**Dr. Amran, S.Si., M.Si.**
NIP. 195707051905032001	**NIP. 197011011998021001**

Pada 10 Mei 2022

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Fernando Toding Bua'
NIM	:	H011181013
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Formulasi Hukum Mortalitas *Makeham* dan Aplikasinya dalam Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dwiguna Model Stokastik *Cox Ingersoll-Ross*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.	( )
Sekretaris	: Dr. Amran, S.Si, M.Si.	( )
Anggota	: Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.	( )
Anggota	: Dr. Firman, S.Si, M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 10 Mei 2022

HALAMAN PENGESAHAN

FORMULASI HUKUM MORTALITAS *MAKEHAM* DAN APLIKASINYA DALAM PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA DWIGUNA MODEL STOKASTIK *COX-INGERSOLL-ROSS*

Disusun dan diajukan oleh:

FERNANDO TODING BUA'

H011181013

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 10 Mei 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.	**Dr. Amran, S.Si., M.Si.**
NIP. 195707051905032001	**NIP. 197011011998021001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains. Saya menyadari bahwa sulit untuk menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A. selaku Rektor Universitas Hasanuddin
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
4. Ibu Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S. selaku Pembimbing Utama yang senantiasa meluangkan waktu dan pikiran dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini
5. Bapak Dr. Amran, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Pertama yang senantiasa meluangkan waktu dan pikiran dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini
6. Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku Penguji yang telah banyak memberi masukan demi tersusunnya skripsi ini yang lebih baik
7. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah banyak memberi masukan dalam penyusunan skripsi ini, dan selaku Penasihat Akademik yang telah membimbing saya selama perkuliahan
8. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan
9. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini

10. Ibu dan adik-adik saya tercinta yang selalu memberi dukungan, motivasi, dan perhatian penuh selama menjalani perkuliahan
11. Keluarga dan kerabat atas dukungannya selama ini
12. Sahabat-sahabat saya Jeki, Jalil, Wandi, Ita, Dion, Egi, dan masih banyak lagi yang telah banyak membantu dalam perkuliahan dan penyusunan skripsi ini
13. Kawan-kawan seperjuangan INTEGRAL 2018 dan MATEMATIKA 2018
14. Keluarga besar Himatika FMIPA Unhas

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu dan kemajuan peradaban.

Makassar, 10 Mei 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Fernando Toding Bua'
NIM	: H011181013
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, meyetetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Formulasi Hukum Mortalitas *Makeham* dan Aplikasinya dalam Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dwiguna Model Stokastik *Cox-Ingersoll-Ross*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database),* merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 10 Mei 2022

Yang menyatakan,

Fernando Toding Bua'

ABSTRAK

Salah satu upaya untuk meminimalisasi masalah keuangan yang disebabkan oleh risiko kematian adalah dengan program asuransi jiwa. Tertanggung asuransi jiwa membayar premi sebagai imbalan untuk pembayaran mendatang dari perusahaan asuransi. Besar premi bergantung pada tingkat suku bunga, peluang kematian, percepatan kematian, *actuarial present value* manfaat, dan anuitas hidup asuransi jiwa. Pada penelitian ini, jenis asuransi jiwa yang digunakan adalah asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian tertanggung (waktu diskrit). Formula peluang kematian, percepatan kematian, *actuarial present value* manfaat, anuitas hidup, dan premi tahunan diturunkan secara detail mengikuti model Hukum Mortalitas *Makeham* dengan asumsi *Standard Ultimate Survival Model*. Nilai-nilai peluang kematian, percepatan kematian, *actuarial present value* manfaat, anuitas hidup, dan premi tahunan dihitung menggunakan pemrograman Python dengan nilai tingkat suku bunga yang diperoleh dari simulasi pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* berdasarkan data tingkat suku bunga acuan Bank Indonesia. Secara umum, simulasi peluang kematian, percepatan kematian, *actuarial present value benefit*, dan besar premi meningkat terhadap usia; dan sebaliknya untuk anuitas hidup.

Kata kunci: *Asuransi Jiwa, Makeham, Cox-Ingersoll-Ross*.

Judul	:	Formulasi Hukum Mortalitas *Makeham* dan Aplikasinya dalam Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dwiguna Model Stokastik *Cox-Ingersoll-Ross*
Nama	:	Fernando Toding Bua’
NIM	:	H011181013
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

One of the efforts to minimize financial problems caused by the risk of death is to use a life insurance program. The life insurance insured pays a premium in exchange for future payments from the insurance company. Life insurance premium value depends on the interest rate, probability of death, the force of mortality, actuarial present value benefit, and life annuity. In this study, the type of life insurance used is endowment life insurance with its benefit paid at the end of the insured's death year (discrete-time). The formula of the probability of death, force of mortality, actuarial present value benefit, life annuity, and annual premiums are derived in detail following the Makeham's Law of Mortality assuming the Standard Ultimate Survival Model. The values of probability of death, force of mortality, actuarial present value benefit, life annuity, and annual premiums are calculated using Python with the value of interest rate obtained from simulated Cox-Ingersoll-Ross stochastic model interest rate movement based on Bank Indonesia's interest rates data. In general, simulation of the probability of death, the force of mortality, actuarial present value benefit, and value of premium increased over age; and vice versa for a life annuity.

Keywords: *Life Insurance, Makeham, Cox-Ingersoll-Ross*.

Title	:	*Formulation of Makeham's Law of Mortality and Its Application in The Calculation of Endowment Life Insurance Premium with The Cox-Ingersoll-Ross Stochastic Model*
Name	:	Fernando Toding Bua'
Student ID	:	H011181013
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

X : Variabel acak usia terjadinya kematian

T : Variabel acak sisa usia kontinu

K : Variabel acak sisa usia diskrit

${}_tq_x$: Peluang seorang berusia x akan meninggal sebelum atau saat usia $x + t$

${}_tp_x$: Peluang seorang berusia x akan bertahan hidup sampai usia $x + t$

q_x : Peluang seorang berusia x akan meninggal sebelum atau saat usia $x + 1$

p_x : Peluang seorang berusia x akan bertahan hidup sampai usia $x + 1$

${}_{t|u}q_x$: Peluang seorang berusia x akan meninggal antara usia $x + t$ dan $x + t + u$

$\mu(x)$: Percepatan kematian seorang berusia x

P_0 : Pokok investasi/modal

PV : *Present value* (nilai sekarang)

FV : *Future value* (nilai masa depan)

$a(t)$: Fungsi akumulasi

$A(t)$: Fungsi jumlah

r : Tingkat suku bunga

v : Faktor diskon

d : Tingkat diskon efektif

b : *Benefit*/manfaat asuransi

z : Nilai sekarang *(present value)* manfaat asuransi

Z : Variabel acak *present value* manfaat asuransi dengan sisa usia T, $Z = z_T$

$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$: *Actuarial present value* asuransi jiwa berjangka n-tahun waktu kontinu

$A^1_{x:\overline{n}|}$: *Actuarial present value* asuransi jiwa berjangka n-tahun waktu diskrit

$\bar{A}_x$: *Actuarial present value* asuransi jiwa seumur hidup waktu kontinu

A_x : *Actuarial present value* asuransi jiwa seumur hidup waktu diskrit

$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$: *Actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna murni n-tahun

$\bar{A}_{x:n\urcorner}$: *Actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna n-tahun waktu kontinu

$A_{x:n\urcorner}$: *Actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna n-tahun waktu diskrit

Υ : Variabel acak *present value* anuitas hidup awal

$\ddot{a}_x$: *Actuarial present value* anuitas hidup awal seumur hidup

$\ddot{a}_{x;n\urcorner}$: *Actuarial present value* anuitas hidup awal berjangka n-tahun

L : Variabel acak nilai sekarang dari total kerugian perusahaan

W_t : Proses Wiener satu dimensi

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Asuransi merupakan perjanjian antara dua pihak atau lebih, di mana pihak penanggung mengikatkan diri pada pihak tertanggung dengan cara menerima premi asuransi. Misalnya dalam risiko kematian. Salah satu upaya untuk meminimalisasi masalah keuangan (finansial) yang disebabkan oleh risiko kematian diperlukan program asuransi jiwa. Asuransi jiwa *(life insurance)* adalah asuransi yang bertujuan menanggung orang terhadap kerugian finansial yang tak terduga karena meninggal atau lanjut usia (Rangkuti & Sunusi, 2020).

Transaksi mendasar dari asuransi jiwa adalah suatu pertukaran; pemegang polis membayar premi sebagai imbalan untuk pembayaran mendatang dari asuransi yang merupakan kontingen kehidupan, yang berarti asuransi bergantung pada kematian atau bertahan hidupnya atau kondisi kesehatan pemegang polis (Dickson dkk., 2009).

Dalam penentuan premi asuransi jiwa diperlukan perhitungan nilai sekarang aktuaria *(actuarial present value)* dari manfaat asuransi *(benefit)* dan anuitas hidup. Dalam perhitungan *actuarial present value* dan anuitas hidup diperlukan perhitungan peluang dan percepatan kematian yang didasarkan pada suatu asumsi mortalitas atau pada suatu tabel mortalitas. Asumsi mortalitas merupakan proyeksi statistika dari kematian-kematian di masa mendatang (Rubin, 2000).

Terdapat beberapa asumsi mortalitas yang telah dikenal dan umum dipakai dalam perhitungan aktuaria, diantaranya; Hukum Mortalitas *Weibull*, Hukum Mortalitas *Gompertz*, dan Hukum Mortalitas *Gompertz-Makeham*. Penelitian ini menerapkan Hukum Mortalitas *Gompertz-Makeham* – juga disebut Hukum Mortalitas *Makeham* – dengan terlebih dulu memformulasikan hukum mortalitas tersebut ke dalam perumusan nilai-nilai aktuaria.

Selain asumsi mortalitas, perhitungan *actuarial present value* juga memerlukan faktor diskon yang diperoleh dengan pertama-tama menetapkan suatu nilai tingkat suku bunga di awal. Umumnya nilai tingkat suku bunga yang ditetapkan sebelum penentuan premi bersifat deterministik, yaitu bersifat pasti atau dapat diprediksi secara pasti. Namun, pada kenyataannya pergerakan tingkat suku bunga tidak dapat diprediksi secara pasti – bergerak secara acak terhadap waktu. Dengan kata lain, pergerakan tingkat suku bunga mengikuti suatu proses acak atau proses stokastik.

Tedapat dua model stokastik pergerakan tingkat suku bunga yang telah dikenal, yaitu model *Vasicek* dan model *Cox-Ingersoll-Ross* (CIR). Penelitian ini menerapkan model *Cox-Ingersoll-Ross* dalam bentuk persamaan diferensial stokastik (PDS) untuk menentukan nilai tingkat suku bunga yang digunakan dalam perhitungan premi dengan pertama-tama mengestimasi parameter model menggunakan data tingkat suku bunga bulanan Bank Indonesia. Model *Cox-Ingersoll-Ross* dipilih karena menjamin pergerakan tingkat suku bunga selalu bernilai positif.

Beberapa jenis asuransi jiwa, diantaranya; Asuransi Jiwa Berjangka, Asuransi Jiwa Seumur Hidup, dan Asuransi Jiwa Dwiguna – tiga jenis ini disebut asuransi jiwa tradisional. Penelitian sebelumnya oleh J. K. Hasibuan telah menggunakan jenis asuransi jiwa berjangka (Hasibuan, 2019). Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan jenis yang terakhir, yaitu asuransi jiwa dwiguna. Asuransi jiwa dwiguna memberikan manfaat sekaligus atas kematian pemegang polis atau pada akhir jangka waktu tertentu, yang mana pun terjadi lebih dulu.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana formulasi Peluang Kematian, Percepatan Kematian, Nilai Sekarang Aktuaria *(Actuarial Present Value Benefit)*, Anuitas Hidup, dan Premi Tahunan Asuransi Jiwa Dwiguna berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*?
2. Bagaimana algoritma pemrograman Python untuk perhitungan premi murni tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian tertanggung menggunakan rata-rata pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*?

3. Bagaimana hasil perhitungan premi murni tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian tertanggung menggunakan rata-rata pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Asumsi mortalitas yang digunakan dalam penelitian ini adalah asumsi mortalitas berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*.
2. Data yang digunakan adalah data tingkat suku bunga bulanan Bank Indonesia BI *7-Day Repo Rate* periode April 2016 – Agustus 2021.
3. Nilai tingkat suku bunga yang digunakan adalah nilai rata-rata dari pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross*.
4. Permasalahan yang dibahas adalah besar tarif premi murni tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan pada akhir tahun kematian tertanggung.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penelitian ini bertujuan:

1. Merumuskan Peluang Kematian, Percepatan Kematian, *Actuarial Present Value Benefit*, Anuitas Hidup, dan Premi Tahunan Asuransi Jiwa Dwiguna berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*.
2. Membuat algoritma pemrograman Python untuk perhitungan premi murni tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian tertanggung menggunakan rata-rata pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*.
3. Menentukan besar tarif premi murni tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian tertanggung menggunakan rata-rata pergerakan tingkat suku bunga model stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* berdasarkan Hukum Mortalitas *Makeham*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:
    a. Sebagai sarana untuk memperkaya pengetahuan dan wawasan mengenai ilmu matematika khususnya pada implementasinya dalam bidang perasuransian.
    b. Sebagai sarana untuk menambah keterampilan dalam menerapkan teori-teori yang telah diperoleh dalam perkuliahan maupun yang diperoleh dari studi mandiri.
2. Bagi Pembaca:
    a. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman tentang teori-teori dan aplikasi ilmu matematika dalam bidang perasuransian.
    b. Sebagai bahan referensi dalam kajian keilmuan matematika.
3. Bagi Universitas Hasanuddin:
    a. Sebagai pelengkap literatur mengenai matematika asuransi yang dapat dimanfaatkan oleh setiap civitas akademik Universitas Hasanuddin.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Asuransi

2.1.1 Definisi Asuransi

Asuransi merupakan salah satu metode transfer risiko yang sangat umum. Asuransi bertujuan untuk memindahkan risiko individu atau perusahaan kepada perusahaan asuransi. Dalam transaksi asuransi terdapat pertukaran jumlah yang dibayar yaitu tertanggung membayar dalam jumlah relatif kecil kepada penanggung, untuk suatu janji memberi kompensasi yaitu membayar ganti rugi atas kerugian finansial yang terjadi. Perjanjian asuransi dibuat dalam suatu akta yang disebut polis, yang memuat secara rinci kondisi dan persyaratan termasuk hak dan kewajiban yang harus dipenuhi kedua belah pihak (Suryanto, 2019).

Perusahaan asuransi mengumpulkan premi dari pemegang polis dan menginvestasikan premi tersebut untuk pembayaran mendatang manfaat asuransi kepada pemegang polis (tertanggung) (Wilders, 2020).

Sistem asuransi merupakan suatu mekanisme untuk mengurangi dampak kerugian finansial yang diakibatkan oleh kejadian-kejadian acak. Beberapa contoh kejadian-kejadian acak yang dapat menyebabkan kerugian finansial yaitu (Bowers dkk., 1997):

- Kerusakan properti akibat kebakaran atau badai, biasanya dianggap sebagai kejadian acak yang kerugiannya dapat diukur dengan uang.
- Denda yang dijatuhkan oleh pengadilan akibat dari tindakan lalai biasanya dianggap sebagai kejadian acak yang menyebabkan kerugian finansial.
- Penyakit jangka panjang yang menyerang pada waktu yang tak terduga dan mengakibatkan kerugian finansial. Kerugian tersebut karena adanya pengeluaran ekstra untuk biaya perawatan kesehatan dan berkurangnya penghasilan.
- Kematian usia muda yang terjadi ketika komitmen pada keluarga atau bisnis belum terpenuhi. Atau, jika seorang individu bertahan hidup sampai usia lanjut, sumber daya untuk memenuhi biaya hidup mungkin telah habis.

Menurut Undang-Undang RI Nomor 2 Tahun 1992 tentang Usaha Perasuransian, definisi asuransi adalah sebagai berikut:

1. Asuransi atau pertanggungan adalah perjanjian antara dua pihak atau lebih yang pihak penanggung mengikatkan diri kepada tertanggung dengan menerima premi asuransi untuk memberikan penggantian kepada tertanggung karena kerugian, kerusakan atau kehilangan keuntungan yang diharapkan, atau tanggung jawab hukum kepada pihak ketiga yang mungkin akan diderita tertanggung, yang timbul akibat suatu peristiwa yang tidak pasti, atau untuk memberikan suatu pembayaran yang didasarkan atas meninggal atau hidupnya seseorang yang dipertanggungkan.
2. Yang dimaksud "penanggung" dalam definisi ini adalah suatu badan usaha asuransi yang memenuhi ketentuan UU No. 2 Tahun 1992.

2.1.2 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah proteksi terhadap kematian dari suatu individu dalam bentuk pembayaran kepada penerima manfaat, biasanya seorang anggota keluarga, bisnis, atau institusi. Sebagai ganti untuk serangkaian pembayaran premi atau pembayaran premi tunggal, atas kematian tertanggung, nilai nominal (dan cakupan tambahan apa pun yang melekat pada suatu polis), dikurangi pinjaman dan bunga polis yang belum dibayar, dibayarkan kepada penerima manfaat.

Premi adalah tarif yang dikenakan bagi tertanggung, yang mencerminkan ekspektasi kerugian atau risiko tertanggung. Perusahaan asuransi akan menanggung risiko tertanggung dengan imbalan pembayaran premi. (Rubin, 2000).

Asuransi jiwa dengan manfaat (uang pertanggungan) diberikan sesaat setelah kematian tertanggung disebut asuransi jiwa waktu kontinu, dan jika manfaat diberikan pada akhir tahun kematian tertanggung disebut asuransi jiwa waktu diskrit.

Pada praktiknya, kebanyakan kontrak mensyaratkan pembayaran sesaat setelah kematian. Namun, informasi yang tersedia umumnya berasal dari tabel-tabel waktu diskrit, yang membawa pada model-model yang hanya melibatkan satu tahun penuh (Rotar, 2015).

2.1.3 Asuransi Jiwa Dwiguna *(Endowment Life Insurance)*

Asuransi jiwa dwiguna memberikan manfaat atas kematian pemegang polis dalam masa asuransi atau pada akhir jangka waktu/masa asuransi, yang mana pun terjadi lebih dulu. Asuransi jiwa dwiguna adalah gabungan dari asuransi jiwa berjangka, yaitu asuransi yang memberikan manfaat hanya jika tertanggung meninggal dalam jangka waktu asuransi; dan elemen tabungan. Jika pemegang polis meninggal, uang pertanggungan dibayarkan menurut asuransi jiwa berjangka; jika pemegang polis bertahan hidup, uang pertanggungan dibayarkan sebagai suatu deposit yang jatuh tempo (Dickson dkk., 2009).

2.1.4 Fungsi Asuransi Jiwa

Fungsi asuransi jiwa adalah sebagai berikut (Salim, 2007):

1. Tujuan pertanggungan jiwa adalah mengadakan jaminan bagi masyarakat, yaitu mengambil alih semua beban risiko dari tiap-tiap individu. Bilamana ditanggung sendiri akan terlalu berat, maka lebih baik dipindahkan kepada perusahaan asuransi jiwa. Untuk mengambil alih risiko dari masyarakat yang mengikuti asuransi, oleh perusahaan asuransi dipungut suatu pembayaran yang relatif lebih rendah (pembayaran premi).
2. Perusahaan asuransi mempunyai tugas lain jika dilihat dari sudut pembangunan yaitu sebagai lembaga yang mengumpulkan dana *(fund/premium)* dan dana tersebut dapat diinvestasikan dalam lapangan pembangunan ekonomi, seperti: industri-industri, perkebunan, dan lain-lain. Dengan jalan demikian, adanya asuransi bisa untuk membangun perekonomian nasional.
3. Dari sudut pekerjaan, perusahaan asuransi memberikan bantuan kepada publik, dengan memberikan kesempatan kepada pekerja yaitu semua buruh atau pegawai untuk memperoleh *income* guna kelangsungan hidup mereka sehari-hari.

2.2 Model Survival

Suatu model survival secara sederhana merupakan suatu distribusi peluang untuk tipe variabel acak tertentu. Misalkan X menotasikan variabel acak kontinu untuk usia seseorang pada saat mengalami kematian. Diasumsikan bahwa seseorang lahir pada usia 0, jadi domain dari variabel acak X adalah $X > 0$. Variabel acak X disebut variabel acak usia kematian. Misalkan pula T menotasikan variabel acak kontinu untuk panjang waktu dari usia 0 sampai terjadinya kematian. Variabel acak T disebut variabel acak sisa usia. Jika kematian terjadi tepat saat usia x, maka jelas bahwa $X = x$ dan $T = x$ (Cunningham dkk., 2006).

2.2.1 Distribusi Survival

Fungsi distribusi kumulatif variabel acak usia kematian X adalah (Cunningham dkk., 2006)

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), \tag{2.1}$$

untuk $x \geq 0$, dimana $F_X(0) = 0$. Fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ menyatakan peluang bahwa kematian akan terjadi sebelum atau saat usia x untuk seseorang yang baru lahir (berusia 0). Dalam notasi aktuaria dituliskan

$${}_xq_0 = F_X(x) = \Pr(X \leq x). \tag{2.2}$$

Fungsi distribusi survival untuk variabel acak X dinotasikan dengan $S_X(x)$ dan didefinisikan dengan

$$S_X(x) = \Pr(X > x) = 1 - F_X(x), \tag{2.3}$$

untuk $x \geq 0$. Karena $F_X(0) = 0$, maka $S_X(0) = 1$. Fungsi distribusi survival $S_X(x)$ menyatakan peluang bahwa usia terjadinya kematian melebihi x atau, dengan kata lain, peluang seseorang yang baru lahir akan bertahan hidup *(survive)* sampai usia x, dalam notasi aktuaria dituliskan (Cunningham dkk., 2006)

$${}_xp_0 = S_X(x) = \Pr(X > x). \tag{2.4}$$

2.2.2 Peluang Kematian

Peluang bahwa seseorang yang baru lahir akan meninggal antara usia x dan z, $x < z$, adalah (Gerber, 1997):

$$\Pr(x < X \leq z) = F_X(z) - F_X(x), \tag{2.5}$$

atau

$$\Pr(x < X \leq z) = S_X(x) - S_X(z). \tag{2.6}$$

Peluang bersyarat bahwa seseorang yang baru lahir akan meninggal antara usia x dan z, dengan syarat bertahan hidup sampai usia x adalah (Bowers dkk., 1997)

$$\Pr(x < X \leq z \,|X > x) = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}, \tag{2.7}$$

atau

$$\Pr(x < X \leq z \,|X > x) = \frac{S_X(x) - S_X(z)}{S_X(x)}. \tag{2.8}$$

Pandang seorang berusia x tahun, dinotasikan (x), dengan sisa usia $T(x) = X - x$. Peluang bahwa seseorang berusia x, (x), akan meninggal dalam t tahun, dinotasikan ${}_tq_x$, adalah

$${}_tq_x = \Pr(T \leq t), \tag{2.9}$$

untuk $t \geq 0$. Demikian pula

$${}_tp_x = 1 - \Pr(T \leq t) = \Pr(T > t) = 1 - {}_tq_x \tag{2.10}$$

menotasikan peluang (x) akan bertahan hidup paling sedikit sampai t tahun (Gerber, 1997).

Jika $t = 1$, prefiks pada Persamaan (2.9) dan Persamaan (2.10) dapat dihilangkan, menjadi

$$q_x = \Pr(T \leq 1),$$

dan

$$p_x = \Pr(T > 1).$$

Terdapat simbol khusus untuk peristiwa yang lebih umum bahwa (x) akan bertahan hidup selama t tahun and meninggal dalam u tahun berikutnya, atau (x) akan meninggal antara usia $x + t$ dan $x + t + u$, yaitu

$$ {}_{t|u}q_x = \Pr(t < T < t + u), $$

yang mengakibatkan

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x, \tag{2.11} $$

atau

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x, \tag{2.12} $$

dimana jika $u = 1$, prefiks u tidak perlu dituliskan.

Lebih lanjut, Persamaan (2.9), Persamaan (2.10), dan Persamaan (2.11) dapat dituliskan sebagai berikut (Bowers dkk., 1997):

$$ {}_{t}p_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_{x}p_0}, $$

atau

$$ {}_{t}p_x = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}, \tag{2.13} $$

untuk peluang bertahan hidup; dan

$$ {}_{t}q_x = 1 - \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}, \tag{2.14} $$

untuk peluang meninggal; serta

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{S_X(x+t) - S_X(x+t+u)}{S_X(x)}, $$

atau

$$ {}_{t|u}q_x = \left[\frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}\right]\left[\frac{S_X(x+t) - S_X(x+t+u)}{S_X(x+t)}\right], $$

yang mengakibatkan

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x\ {}_uq_{x+t}. \tag{2.15} $$

Didefinisikan variabel acak waktu sisa hidup diskrit dari (x) yaitu jumlah tahun yang dilalui oleh (x) sebelum meninggal, dinotasikan $K(x)$, dan memenuhi (Bowers dkk., 1997)

$$ \Pr(K = k) = \Pr(k \le T < k + 1), $$

atau

$$ \Pr(K = k) = \Pr(k < T \le k + 1), $$

yang mengakibatkan

$$ \Pr(K = k) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x, $$

atau

$$ \Pr(K = k) = {}_kp_x\ q_{x+k}. \tag{2.16} $$

2.2.3 Percepatan Kematian

Misalkan $f_X(x)$ menotasikan fungsi kepadatan peluang variabel acak usia kematian X dari fungsi distribusi $F_X(x)$, yaitu $f_X(x) = F'_X(x)$. Untuk setiap usia x, fungsi kepadatan peluang bersyarat dari X pada tepat usia x, disimbolkan $\mu(x)$, adalah

$$ \mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}, \tag{2.17} $$

atau

$$ \mu(x) = -\frac{S'_X(x)}{S_X(x)}. \tag{2.18} $$

Dalam ilmu aktuaria dan demografi, $\mu(x)$ disebut percepatan kematian *(force of mortality)*.

Misalkan $F_T(t)$ dan $f_T(t)$ menotasikan fungsi distribusi kumulatif dan fungsi kepadatan peluang dari variabel acak sisa usia T, dimana $F_T(t) = {}_tq_x$, maka (Bowers dkk., 1997)

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_tq_x \\
&= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}\right] \\
&= \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}\left[-\frac{S'_X(x+t)}{S_X(x+t)}\right],
\end{aligned}
$$

diperoleh

$$f_T(t) = {}_tp_x\, \mu(x+t), \qquad t \geq 0. \tag{2.19}$$

2.3 Teori Suku Bunga

Mungkin, transaksi finansial paling umum adalah investasi dari sejumlah tertentu uang pada suatu tingkat suku bunga spesifik. Seseorang dapat mendepositkan (menyetorkan) uang dalam sebuah rekening tabungan dengan harapan mendapatkan bunga dari jumlah yang didepositkan. Sebaliknya, bank mengadakan pinjaman dengan harapan dibayar bunga disamping pelunasan pokok pinjaman. Istilah pokok merujuk pada nilai dari pinjaman/deposit ketika transaksi dibuat.

Pada setiap kasus, bunga dibayarkan sebagai kompensasi atas penggunaan dana selama periode transaksi. Deposit atau pinjaman awal disebut pokok dan total jumlah yang dibayarkan kembali setelah suatu periode waktu disebut jumlah terakumulasi. Selisih antara jumlah terakumulasi dan deposit awal adalah jumlah bunga.

Asumsikan suatu jumlah P_0 didepositkan dan akan dihitung nilai deposit tersebut pada suatu waktu di masa depan. Jumlah awal biasanya disebut pokok atau nilai sekarang *(Present Value)*, sementara nilai pada suatu waktu kemudian disebut jumlah terakumulasi atau nilai masa depan *(Future Value)*. Selisih antara jumlah terakumulasi dan pokok adalah bunga yang diperoleh (atau dibayarkan – bergantung pada sudut pandang mana yang diambil) pada transaksi (Wilders, 2020);

$$I = FV - PV,$$

dengan I adalah jumlah bunga, FV dan PV adalah *future value* dan *present value*.

2.3.1 Fungsi Akumulasi dan Fungsi Jumlah

Teori suku bunga umumnya dimulai dengan konsep fungsi akumulasi, disimbolkan $a(t)$, yang menyatakan nilai terakumulasi pada waktu $t \geq 0$ dari satu unit uang yang diinvestasikan pada waktu $t = 0$ (Cunningham dkk., 2006).

Andaikan diinvestasikan 1 (satu) unit pokok. Didefinisikan fungsi akumulasi $a(t)$ sebagai jumlah terakumulasi (FV) dari 1 unit setelah t tahun. Fungsi akumulasi selalu diasumsikan mempunyai tiga sifat:

1. $a(0) = 1$
2. $a(t)$ adalah fungsi naik
3. $a(t)$ adalah fungsi kontinu dan terturunkan.

Jika pokok deposit adalah $PV = P_0$ unit – daripada hanya 1 unit – fungsi akumulasi dinyatakan oleh fungsi jumlah (Wilders, 2020):

$$A(t) = P_0 a(t). \tag{2.20}$$

Jika deposit awal (pokok) dinotasikan dengan PV dan jumlah terakumulasi dengan FV, Persamaan (2.20) dapat ditulis:

$$FV = PV\ a(t). \tag{2.21}$$

2.3.2 Tingkat Suku Bunga Efektif

Ukuran pertama-tama dari suku bunga adalah tingkat suku bunga efektif dan dinotasikan dengan r. Tingkat suku bunga efektif adalah sejumlah uang dimana satu unit yang diinvestasikan di awal suatu periode akan menghasilkan bayaran selama periode tersebut, dimana bunga dibayarkan di akhir periode. Tingkat suku bunga efektif dapat dituliskan (Kellison, 1991)

$$r = a(1) - a(0),$$

atau

$$a(1) = 1 + r. \tag{2.22}$$

2.3.3 Suku Bunga Tunggal

Misalkan suatu investasi dari satu unit sedemikian sehingga jumlah bunga yang dihasilkan selama setiap periode adalah konstan. Nilai terakumulasi dari modal sebesar P_0 pada akhir periode pertama adalah $P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$, pada akhir periode kedua adalah $P_0 + P_0 r + P_0 r = P_0(1 + 2r)$, dan seterusnya. Dengan demikian, secara umum diperoleh

$$A(t) = P_0(1 + rt), \tag{2.23}$$

dengan $A(t)$ meyatakan jumlah terakumulasi saat $t \geq 0$. Pertambahan bunga menurut pola pada Persamaan (2.23) disebut bunga tunggal (Rangkuti & Sunusi, 2020).

2.3.4 Suku Bunga Majemuk

Bunga tunggal mempunyai sifat bahwa bunga tidak diivestasikan kembali untuk mendapatkan bunga tambahan. Pada suku bunga majemuk, diasumsikan bahwa bunga yang diperoleh secara otomatis diinvestasikan kembali (Kellison, 1991).

Pada suku bunga majemuk dengan modal sebesar P_0, jumlah terakumulasi $A(t)$ dinyatakan

$$A(t) = P_0(1 + r)^t, \tag{2.24}$$

dengan $t \geq 0$ (Rangkuti & Sunusi, 2020).

2.3.5 Faktor Diskon

Faktor diskon berkaitan dengan bagaimana cara investor berusaha memastikan bahwa dana yang disimpan akan cukup untuk menutupi serangkaian kewajiban di masa depan. Bank umumnya mengharuskan pemegang kredit untuk berkontribusi pada rekening untuk menyediakan dana untuk pembayaran pajak properti.

Dimulai dengan perhitungan hubungan antara *present value* dan *future value* dari deposit tunggal selama satu tahun. Akan ditentukan jumlah PV yang cukup untuk mengakumulasikan jumlah FV di akhir tahun. Dalam satu periode, suatu deposit dari PV akan diakumulasikan ke $PV(1+r)$. Diinginkan agar $PV(1+r) = FV$ dan dengan demikian $PV = FV\left(\frac{1}{1+r}\right)$. Bentuk $\left(\frac{1}{1+r}\right)$ disebut faktor diskon dan disimbolkan dengan v, yaitu (Wilders, 2020)

$$v = \frac{1}{1+r}. \tag{2.25}$$

2.3.6 Tingkat Diskon Efektif

Dalam beberapa kasus, bunga dibayarkan di awal pinjaman, daripada di akhir. Ini mengurangi resiko bawaan (kadang disebut eksposur) dari pinjaman. Berikut dua skenario pinjaman:

- \$500 dipinjamkan selama satu tahun dengan tingkat suku bunga efektif 6%. Pada akhir tahun pinjaman, peminjam membayar kepada pemberi pinjaman \$530.
- \$500 dipinjamkan selama satu tahun, namun peminjam membayarkan bunga di awal pinjaman. Peminjam menerima \$470 dan harus membayar \$500 di akhir tahun pinjaman.

Pada kedua kasus, bunga yang dibayarkan sebesar \$30. Namun, pada kasus kedua bunga dibayarkan untuk pinjaman yang hanya sebesar \$470. Kasus kedua merupakan contoh dari perhitungan bunga sebagai diskon dan disebut mempunyai tingkat diskon efektif sebesar 6%.

Tingkat diskon efektif adalah ukuran bunga yang dibayarkan pada awal periode. Simbol untuk tingkat diskon adalah d. Tingkat diskon menghitung suatu jumlah yang dibayarkan di awal namun berdasarkan pada jumlah pada akhir periode (Wilders, 2020).

Andaikan suatu pinjaman sebesar 1 dengan tingkat suku bunga efektif r dan dibandingkan dengan pinjaman yang sama dengan tingkat diskon efektif d. Pada setiap kasus, perhitungan tingkat bunga sebagai rasio dari jumlah bunga yang dibayarkan (r atau d) untuk jumlah pokok. Pada kasus pertama, pokok sebesar 1, sedangkan pada kasus kedua $1 - d$. Diperoleh hubungan fundamental antara tingkat suku bunga r dan tingkat diskon d,

$$\frac{r}{1} = \frac{d}{1 - d},$$

mengakibatkan

$$d = \frac{r}{1 + r}. \tag{2.26}$$

Karena $v = \frac{1}{1+r}$ dan $r = \frac{1-v}{v}$, maka (Wilders, 2020)

$$d = r\frac{1}{1 + r},$$

atau

$$d = \frac{1 - v}{v}v,$$

atau

$$v = 1 - d. \tag{2.27}$$

2.4 Nilai Sekarang Aktuaria *(Actuarial Present Value)*

Jumlah dan waktu pembayaran manfaat asuransi jiwa bergantung pada panjang interval dari penerbitan asuransi sampai pada kematian tertanggung/pemegang polis. Model dikembangkan dengan suatu fungsi manfaat b_t, dan suatu fungsi diskon v_t. Pada model, v_t adalah faktor diskon dari waktu pembayaran manfaat kembali ke waktu penerbitan polis, dan t adalah panjang interval dari penerbitan polis ke kematian pemegang polis. Didefinisikan fungsi nilai sekarang *(present value)* z_t (Bowers dkk., 1997),

$$z_t = b_t v_t. \tag{2.28}$$

Waktu yang berlalu dari penerbitan polis ke kematian tertanggung adalah variabel acak waktu sisa hidup *(future-lifetime)* tertanggung, $T = T(x)$. Dengan demikian, *present value*, pada saat penerbitan polis, dari pembayaran manfaat adalah variabel acak z_T, disimbolkan Z, yang mendasari model asuransi dengan persamaan

$$Z = b_T v_T. \tag{2.29}$$

Untuk kasus asuransi jiwa diskrit (yaitu manfaat dibayarkan pada akhir tahun kematian), fungsi manfaat b_{k+1} dan fungsi diskon v_{k+1} masing-masing adalah jumlah manfaat yang dibayarkan dan faktor diskon dari waktu pembayaran manfaat ke waktu diterbitkannya polis ketika waktu sisa hidup diskrit tertanggung adalah k, yaitu, ketika tertanggung meninggal dalam $k+1$ tahun asuransi. Nilai sekarang, saat penerbitan polis, dari pembayaran manfaat adalah

$$z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1}. \tag{2.30}$$

Diukur dari waktu penerbitan polis, tahun kematian asuransi adalah 1 ditambah variabel waktu sisa hidup diskrit *(curtate-future-lifetime)*, K. Dengan demikian nilai sekarang dari variabel acak waktu sisa hidup diskrit adalah z_{K+1}, disimbolkan Z.

Ekspektasi dari variabel acak nilai sekarang, Z, disebut *actuarial present value* (nilai sekarang aktuaria) dari asuransi. Simbol untuk *actuarial present value* dari pembayaran satu unit manfaat asuransi adalah A (Bowers dkk., 1997).

2.4.1 *Actuarial Present Value* Asuransi Jiwa Berjangka

Asuransi jiwa berjangka n-tahun memberikan pembayaran manfaat hanya jika tertanggung meninggal dalam jangka n-tahun dari diterbitkannya asuransi. Jika satu unit manfaat dibayarkan sesaat setelah kematian tertanggung (x), maka

$$b_t = \begin{cases} 1, & t \le n \\ 0, & t > n \end{cases},$$

dan

$$v_t = v^t, \qquad t \ge 0,$$

serta

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n \end{cases}.$$

Actuarial present value untuk asuransi jiwa berjangka n-tahun dengan manfaat dibayarkan sesaat setelah tertanggung (x) meninggal dunia (asuransi jiwa kontinu), $E[Z]$, disimbokan dengan $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$. Nilai $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ dapat dihitung dengan menerima Z sebagai fungsi dari T sehingga $E[Z] = E[z_T]$. Kemudian dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang dari T diperoleh (Bowers dkk., 1997),

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[Z],$$

atau

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[z_T],$$

yang mengakibatkan

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n z_t f_T(t)\, dt,$$

atau

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \; {}_tp_x \, \mu(x+t) \; dt. \tag{2.31}$$

Untuk asuransi jiwa berjangka n-tahun dengan pembayaran manfaat dilakukan pada akhir tahun kematian (asuransi jiwa diskrit), jika diberikan satu unit jumlah manfaat pada akhir tahun kematian, maka

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & k \text{ lainnya} \end{cases}, \tag{2.32}$$

dan

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \tag{2.33}$$

serta

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & K \text{ lainnya} \end{cases}. \tag{2.34}$$

Actuarial present value untuk asuransi jiwa berjangka diskrit adalah (Bowers dkk., 1997)

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z],$$

atau

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[z_{K+1}], \tag{2.35}$$

yang mengakibatkan

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k}p_x\ q_{x+k}. \tag{2.36}$$

2.4.2 *Actuarial Present Value* Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Asuransi jiwa seumur hidup menyediakan suatu pembayaran mengikuti kematian tertanggung pada waktu kapan pun di masa depan. Jika pembayaran adalah satu unit jumlah manfaat pada saat kematian tertanggung (x), maka (Bowers dkk.,1997)

$$b_t = 1, \qquad t \geq 0,$$

dan

$$v_t = v^t, \qquad t \geq 0,$$

serta

$$Z = v^T, \qquad T \geq 0.$$

Actuarial present value asuransi jiwa seumur hidup kontinu yaitu

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^{\infty} v^t\ {}_{t}p_x\ \mu(x+t)\ dt. \tag{2.37}$$

Untuk asuransi jiwa seumur hidup diskrit yang diterbitkan untuk tertanggung (x), model dapat diperoleh dengan membiarkan $n \to \infty$ pada model asuransi jiwa berjangka n-tahun. Sehingga, *actuarial present value* asuransi jiwa seumur hidup diskrit yaitu (Bowers dkk., 1997)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{2.38}$$

2.4.3 *Actuarial Present Value* Asuransi Jiwa Dwiguna

Asuransi jiwa dwiguna murni n-tahun menyediakan suatu pembayaran di akhir n-tahun jika dan hanya jika tertanggung bertahan hidup paling tidak n tahun dari waktu penerbitan polis. Jika jumlah pembayaran adalah satu unit, maka (Bowers dkk., 1997)

$$b_t = \begin{cases} 0, & t \leq n \\ 1, & t > n, \end{cases} \tag{2.39}$$

dan

$$v_t = v^n, \qquad t \geq 0, \tag{2.40}$$

serta

$$Z = \begin{cases} 0, & T \leq n \\ v^n, & T > n, \end{cases} \tag{2.41}$$

dengan *actuarial present value*

$$A_{x:\overset{\;1}{\overline{n|}}} = E[Z] = v^n\, {}_np_x. \tag{2.42}$$

Asuransi jiwa dwiguna n-tahun menyediakan sejumlah pembayaran mengikuti kematian tertanggung atau pun atas bertahan hidupnya tertanggung sampai akhir jangka n-tahun, yang mana pun terjadi pertama. Jika satu unit manfaat asuransi dibayarkan sesaat setelah kematian, maka (Bowers dkk., 1997)

$$b_t = 1, \qquad t \geq 0, \tag{2.43}$$

dan

$$v_t = \begin{cases} v^t, & t \leq n \\ v^n, & t > n, \end{cases} \tag{2.44}$$

serta

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ v^n, & T > n. \end{cases} \tag{2.45}$$

Asuransi jiwa dwiguna n-tahun dapat dipandang sebagai kombinasi dari asuransi jiwa berjangka n-tahun dan dwiguna murni n-tahun – masing-masing dengan satu unit jumlah manfaat. Misalkan Z_1, Z_2, dan Z_3 menotasikan masing-masing *present value* variabel acak dari asuransi jiwa berjangka, dwiguna murni, dan dwiguna, dengan manfaat kematian dibayarkan sesaat setelah kematian tertanggung, yaitu

$$Z_1 = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n, \end{cases}$$

dan

$$Z_2 = \begin{cases} 0, & T \leq n \\ v^n, & T > n, \end{cases}$$

serta

$$Z_3 = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Oleh karena itu

$$Z_3 = Z_1 + Z_2,$$

dan dengan mengambil ekspektasi kedua ruas,

$$E[Z_3] = E[Z_1] + E[Z_2],$$

diperoleh *actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna n-tahun

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}},$$

atau

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \; dt + v^n \, {}_np_x. \tag{2.46}$$

Persamaan (2.46) adalah *actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna untuk waktu kontinu.

Selanjutnya, *actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna n-tahun untuk waktu diskrit (Bowers dkk., 1997),

dengan

$$b_{k+1} = 1, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{2.47}$$

dan

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, & k = n, n+1, \dots \end{cases}, \tag{2.48}$$

serta

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, & K = n, n+1, \dots \end{cases}, \tag{2.49}$$

adalah

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{2.50}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.36) dan Persamaan (2.42) ke Persamaan (2.50) diperoleh *actuarial present value* asuransi jiwa dwiguna untuk waktu diskrit,

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} + v^n \, {}_np_x. \tag{2.51}$$

2.5 Anuitas Hidup

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan atas interval waktu yang telah disepakati. Jika anuitas terdiri dari pembayaran yang pasti akan dilakukan untuk jangka waktu tertentu, disebut anuitas pasti (Cunningham dkk., 2006).

Anuitas hidup terdiri atas rangkaian pembayaran yang dilakukan ketika penerima manfaat masih hidup. Dengan demikian, anuitas hidup dapat direpresentasikan sebagai suatu anuitas pasti dengan jangka waktu bergantung pada waktu sisa hidup (Gerber, 1997).

Anuitas terbagi menjadi dua yaitu anuitas awal dan anuitas akhir. Anuitas awal *(annuity-due)* adalah anuitas yang pembayaran unitnya dilakukan setiap awal periode pembayaran. Anuitas akhir *(immediate annuity)* adalah anuitas yang pembayaran unitnya dilakukan di setiap akhir periode pembayaran (Cunningham dkk., 2006).

2.5.1 Anuitas Hidup Awal Seumur Hidup

Pandang suatu anuitas yang membayarkan sejumlah satu unit pada awal tiap tahun dimana anuitan (x) masih bertahan hidup. Dalam nomenklatur disebut anuitas hidup awal seumur hidup. Nilai sekarang untuk anuitas hidup awal seumur hidup dinyatakan oleh variabel acak Υ dengan (Bowers dkk., 1997)

$$\Upsilon = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \tag{2.52}$$

dimana K adalah variabel acak waktu sisa hidup diskrit dari (x).

Pandang $\ddot{a}_x$, nilai sekarang aktuaria dari anuitas hidup

$$\ddot{a}_x = E[\Upsilon],$$

atau

$$\ddot{a}_x = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right],$$

yang mengakibatkan

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} Pr(K = k)\,,$$

atau

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\ .$$

Dengan penjumlahan parsial, diperoleh anuitas hidup awal seumur hidup (Bowers dkk., 1997),

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x,$$

atau

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x\ . \tag{2.53}$$

2.5.2 Anuitas Hidup Awal Berjangka

Nilai sekarang variabel acak dari anuitas hidup awal berjangka n-tahun adalah (Bowers dkk., 1997)

$$\Upsilon = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}\ , & K \geq n, \end{cases} \tag{2.54}$$

dan dengan nilai sekarang aktuaria

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[\Upsilon],$$

atau

$$\ddot{a}_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_kp_x\ q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x\ .$$

Dengan penjumlahan parsial, diperoleh anuitas hidup awal berjangka,

$$\ddot{a}_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_kp_x\ . \tag{2.55}$$

2.6 Premi Asuransi Jiwa

Polis asuransi jiwa dapat melibatkan premi tunggal, yang harus dibayar pada awal kontrak, atau serangkaian premi reguler yang harus dibayar asalkan pemegang polis masih bertahan hidup, dapat juga dengan tanggal akhir yang tetap. Pada kontrak tradisional, premi reguler secara umum merupakan tingkat jumlah keseluruhan jangka kontrak; pada kontrak yang lebih modern, premi boleh jadi merupakan variabel, pada kebijaksanaan pemegang polis untuk produk-produk investasi seperti asuransi yang terkait ekuitas, atau pada kebijaksanaan asuransi untuk tipe-tipe tertentu dari asuransi jiwa.

Ciri penting dari semua premi adalah bahwa premi dibayarkan pada awal periode. Andaikan seorang pemegang polis melakukan kontrak untuk membayar premi tahunan selama 10 tahun kontrak asuransi. Premi tersebut akan dibayarkan pada awal kontrak, dan kemudian pada setiap awal tahun yang kemudian asalkan pemegang polis masih hidup (Dickson dkk., 2009).

Pandang suatu portofolio risiko. Nilai sekarang dari pembayaran masa depan oleh perusahaan dinotasikan Z, dan nilai sekarang dari total premi untuk dibayarkan dinotasikan Υ_P. Subskrip P mengindikasikan bahwa nilai sekarang yang terakhir bergantung pada tarif premi. Tarif premi terlibat secara implisit dalam Υ_P. Nilai sekarang dari total kerugian perusahaan adalah

$$L_P = Z - \Upsilon_P. \qquad (2.56)$$

Salah satu prinsip gagasan premi adalah prinsip ekuivalensi. Prinsip ekuivalensi diperlukan agar kerugian sama dengan nol pada rata-rata, dituliskan

$$E[L_P] = 0, \qquad (2.57)$$

mengimplikasikan

$$E[Z] = E[\Upsilon_P]. \qquad (2.58)$$

Premi yang berdasarkan prinsip ekuivalensi disebut premi manfaat *(benefit premium)* atau premi murni *(net premium)*.

Pandang suatu kontrak dengan *present value* (nilai sekarang) dari pembayaran manfaat dinotasikan Z. Misalkan Υ adalah *present value* dari anuitas premi (total premi) dalam kasus dimana premi-premi dibayarkan dengan tarif satuan. Maka, jika

P adalah tingkat tarif premi dari kontrak, nilai sekarang dari total premi adalah $\Upsilon_P = P\Upsilon$. Sehingga (Rotar, 2015),

$$L_P = Z - P\Upsilon, \tag{2.59}$$

dan syarat $E[L_P] = 0$ yang berarti $0 = E[Z] - PE[\Upsilon]$, atau

$$P = \frac{E[Z]}{E[\Upsilon]}. \tag{2.60}$$

2.7 Distribusi *Gompertz-Makeham*

Distribusi *Gompertz* dan *Gompertz-Makeham* merupakan dua model matematika klasik yang merepresentasikan fungsi survival. Fungsi distribusi kumulatif *(Cumulative Distribution Function) Gompertz-Makeham* yaitu (Jodra, 2009)

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)}, \tag{2.61}$$

dengan $x > 0$, dan $\lambda, \alpha, \beta > 0$.

Distribusi *Gompertz-Makeham* – disebut juga Distribusi *Makeham* – merupakan pengembangan dari Distribusi *Gompertz* dengan penambahan konstanta λ. Parameter α dan β dapat diinterpretasikan sebagai inisial mortalitas dan koefisien eksponensial dari peningkatan mortalitas (tingkat penuaan). Parameter λ merepresentasikan risiko kematian dari semua penyebab yang tidak bergantung pada usia seperti kecelakaan dan infeksi akut (Jodra, 2009).

Parameter $\lambda, \alpha,$ dan β dapat diasumsikan menggunakan *Standard Ultimate Survival Model*, yaitu (Dickson dkk., 2009):

$$\lambda = 0{,}00022, \tag{2.62}$$

dan

$$\alpha = 2{,}7 \times 10^{-6}, \tag{2.63}$$

serta

$$\beta = \ln 1{,}124. \tag{2.64}$$

Dalam beberapa literatur parameter $\lambda, \alpha,$ dan β ditulis $A, B,$ dan $\ln c$.

2.8 Model Stokastik *Cox-Ingersoll-Ross*

Proses stokastik *Cox-Ingersoll-Ross* adalah proses stokastik tingkat suku bunga r_t yang memenuhi persamaan diferensial stokastik berikut (Cox dkk., 1985),

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{2.65}$$

dengan W_t merupakan proses *Wiener* satu dimensi; $\kappa, \theta,$ dan σ konstanta, $\kappa, \theta > 0$ dan $\sigma^2 > 0$.

Proses *Wiener* adalah proses stokastik $\{W_t\}_{t\geq 0}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut (Szabados, 1994):

1. $W_0 = 0$;
2. untuk setiap $0 \leq s < t, W_t - W_s$ berdistribusi acak normal dengan rata-rata 0 dan varians 1; dan
3. untuk setiap $0 \leq s < t \leq u < v$, kenaikan $W_t - W_s$ dan $W_v - W_u$ merupakan variabel acak independen.

Pada model *Cox-Ingersoll-Ross*, pergerakan acak tingkat suku bunga ditarik secara elastis ke pusat atau nilai jangka panjang, θ. Fenomena tertariknya pergerakan tingkat suku bunga ke nilai rata-rata jangka panjang terhadap waktu dikenal sebagai *mean reversion*. Ketika r_t tinggi, *mean reversion* cenderung ke arah negatif; ketika r_t rendah, *mean reversion* cenderung ke arah positif (Hull, 2018).

2.8.1 Estimasi Parameter *Cox-Ingersoll-Ross*

Parameter κ, θ, dan σ pada Persamaan (2.65) selanjutnya akan diestimasi menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) *Estimation* sebagai berikut (Kladivko, 2007):

Diskritisasi Persamaan (2.65), diperoleh

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \kappa(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t, \tag{2.66}$$

dimana $\varepsilon_t \sim N(0, \Delta t)$, lebih presisi, ε_t merupakan *white noise* pada proses. Untuk menerapkan OLS, Persamaan (2.66) diubah menjadi

$$\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{\kappa\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} - \kappa\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t. \tag{2.67}$$

Dengan meminimalkan fungsi objektif *OLS* pada Persamaan (2.67), diperoleh

$$\left(\hat{\kappa}, \hat{\theta}\right) = \arg\min \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} - \frac{\kappa\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} + \kappa\sqrt{r_t}\Delta t\right)^2,$$

dengan penyelesaian sebagai berikut,

$$\hat{\kappa} = \frac{N^2 - 2N + 1 + R_2R_3 - R_1R_3 - (N-1)R_4}{(N^2 - 2N + 1 - R_1R_3)\Delta t}, \tag{2.68}$$

dan

$$\hat{\theta} = \frac{(N-1)R_2 - R_4R_1}{N^2 - 2N + 1 + R_2R_3 - R_1R_3 - (N-1)R_4}, \tag{2.69}$$

dengan $R_1 = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i}$, $R_2 = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}}$, $R_3 = \sum_{i-1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}}$, dan $R_4 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}$.

Estimasi parameter difusi $\hat{\sigma}$ merupakan standar deviasi dari residual, yaitu

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{r_{t_i}}} + \hat{\kappa}\sqrt{r_{t_i}}\right)^2}. \tag{2.70}$$

2.8.2 Skema Numerik *Euler-Maruyama*

Skema numerik *Euler-Maruyama* merupakan salah satu metode numerik untuk mengaproksimasi solusi dari persamaan diferensial stokastik. Skema numerik *Euler-Maruyama* untuk Persamaan (2.65) dengan diskritisasi waktu

$$0 = t_0 < t_1 = \Delta t < t_2 = 2\Delta t < \cdots < t_{i-1} = (i-1)\Delta t < t_i = i\Delta t < \cdots < t_N = N\Delta t,$$

adalah sebagai berikut (Arevalo dkk., 2016):

$$r(t_i) \approx r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + \kappa\left(\theta - r_{t_{i-1}}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{r_{t_{i-1}}}\{W_i - W_{i-1}\}, \tag{2.71}$$

dimana $1 \leq i \leq N$, dan

$$W_i - W_{i-1} = W(t_i) - W(t_i - 1)$$

atau

$$W_i - W_{i-1} = W(i\Delta t) - W\big((i-1)\Delta t\big) \sim N(0, \Delta t),$$

sebagaimana diketahui bahwa kenaikan pada gerak *Brownian* (proses Wiener) berdistribusi Normal *(Gaussian)* dengan rata-rata *(mean)* nol dan standar deviasi $\sqrt{\Delta t}$. Dengan menggunakan representasi pada simulasi kenaikan gerak *Brownian* berikut,

$$W_i - W_{i-1} = \sqrt{\Delta t}\eta_i, \qquad \eta_i \sim N(0,1), \tag{2.72}$$

skema pada Persamaan (2.71) dapat ditulis

$$r(t_i) \approx r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + \kappa\big(\theta - r_{t_{i-1}}\big)\Delta t + \sigma\eta_i\sqrt{r_{t_{i-1}}}\sqrt{\Delta t}\,, \tag{2.73}$$

dengan $\eta_i \sim N(0,1)$ dan $1 \leq i \leq N$.