PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF BUNGA MATAHARI YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

IKA INDRIANI RAHAYU

H011171521

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF BUNGA MATAHARI YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

IKA INDRIANI RAHAYU

H011171521

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGELAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Ika Indriani Rahayu
NIM	: H011171521
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulis saya berjudul

Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar,16 Juni 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL 10000 B486AJX704398107

IKA INDRIANI RAHAYU

NIM. H011171521

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF BUNGA MATAHARI YANG DIMODIFIKASI

Disusun dan diajukan oleh

IKA INDRIANI RAHAYU

H011171521

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada tanggal 16 Juni 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan,

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19850529 200812 1 002**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wa Ta'ala,* Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat rahmat, hidayah, kemudahan, dan segala limpahan nikmatnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "**Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi.** Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Bagianda Rasulullah SAW, yang telah mengajarkan kebenaran dan membimbing umat-umatnya ke arah yang benar.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada orang tua penulis, Ayahanda **Zainal Muttaqin**, Ibunda **Nurhayati** yang telah membesarkan dan dengan sabar mendidik, memberi motivasi, solusi, nasehat, serta selalu mendoakan setiap proses penulis dalam mencari imu dengan segala pengorbanan yang telah diberikan yang takkan bisa penulis balas. Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan. **Segenap dosen pengajar dan staf Departemen Matematika** yang telah membekali banyak ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. **Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.

4. **Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
5. **Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. **Bapak** dan **Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis.
7. Terima kasih kepada **Sarti, Kayis, Nanda, Cahyu, Riswan, Dilla, Fira, Eda, Hafsah,** dan **Math17** yang telah memberikan warna selama perkuliahan dan memberi semangat kepada penulis.
8. Spesial untuk sahabat penulis **Uni, Yuni** dan **Defi** atas rasa persaudaraan yang diberikan kepada penulis.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebut satu per satu yang telah mendukung dan membantu sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan pada skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak yang berkepentingan.

Makassar, 16 Juni 2022

Ika Indriani Rahayu

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Ika Indriani Rahayu
NIM	: H011171521
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

"Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 16 Juni 2022

Yang Menyatakan

(Ika Indraini Rahayu)

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ disebut suatu pelabelan-k total ketidakteraturan titik pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V berlaku $wt(x) \neq wt(y)$. Bobot titik x pada pelabelan total merupakan label titik x yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan x, yaitu $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V} f(xu)$. Nilai total ketidakteraturan titik dari graf G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total ketidakteraturan titik.

Pada skripsi ini ditentukan nilai total ketidakteraturan titik graf bunga matahari yang dimodifikasi untuk $n \geq 6$ dimana n adalah bilangan bulat genap. Hasil yang diperoleh sebagai berikut:

$$tvs(MSF_n) = \left\lceil \frac{3n+3}{6} \right\rceil.$$

Kata kunci : Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi, Pelabelan Total Ketidakteraturan Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Titik.

ABSTRACT

Let G be a simple graph. A total labeling $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ is called a vertex irregular total k-labeling of G if for any two different vertices in V then $wt(x) \neq wt(y)$. The weight of a vertex x is the sum of the label of x and the labels of all edges incident with x, i.e:$wt(x) = f(x) + \sum_{u\in V} f(xu)$. The minimum k for which a graph G has a vertex irregular total k-labeling is called the total vertex irregularity strength of G.

This research determines the total vertex irregularity strength of modifies sunflower graph, denoted by MSF_n, for $n \geq 6$ and n is even integers. The result obtained are as follows.

$$tvs(MSF_n) = \left\lceil \frac{3n+3}{6} \right\rceil.$$

Keyword : Modified Sunflower Graph, Vertex Irregular Total k-labeling, Total Vertex Irregularity Strength.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali di halaman
MSF_n	Graf bunga matahari yang dimodifikasi	3
$V(G)$	Himpunan titik graf G	6
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	6
$N_G(v)$	Himpunan tetangga suatu titik graf G	7
$d(v_i)$	Derajat suatu titik v pada graf	7
$\Delta(G)$	Derajat maksimum graf G	8
$\delta(G)$	Derajat minimum graf G	8
P_n	Graf lintasan	9
C_n	Graf siklus	10
W_n	Graf roda	10
SF_n	Graf bunga matahari	11
$wt(v)$	Bobot titik v	12
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v	12
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv	12
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G	14

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah suatu ilmu yang mendasari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern. Matematika juga dikenal sebagai “Queen Of Science” karena matematika banyak diterapkan dibidang ilmu lainnya. Secara umum, matematika dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

Teori graf merupakan salah satu topik yang dibahas dalam matematika. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Graf adalah pasangan himpunan (V, E), dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong yang disebut dengan titik (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang diilustrasikan pada sebuah gambar.

Topik pelabelan merupakan salah satu topik yang sangat luas pengembangannya. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1963), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Pelabelan sisi dan titik dapat dilakukan dengan berbagai cara, seperti melabelinya dengan bilangan.

Ada beberapa jenis pelabelan pada graf, seperti pelabelan harmonis, pelabelan gracefull, pelabelan refleksif, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan prima dan pelabelan total ketidakteraturan. Salah satu pelabelan yang banyak diteliti yaitu pelabelan total ketidakteraturan. Pada tahun 2007, Bača dkk. telah memperkenalkan dua jenis pelabelan total ketidakteraturan, yaitu pelabelan total ketidakteraturan titik dan pelabelan total ketidakteraturan sisi . Pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf G merupakan suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,k\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda.

Nilai total ketidakteraturan titik dari graf G adalah nilai k terkecil dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tidak teratur titik.

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf. Riskawati telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf sarang lebah yang memperoleh hasil $tvs\big(HC(n)\big) = \left\lceil \frac{6n^2+2}{4} \right\rceil$, untuk $n \geq 2$ [1]. Andi Daniah Pahrany telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *unidentified flying object* yang memperoleh hasil $tvs\big(U_{m,n}\big) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ untuk $3 \leq m \leq 3\,, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ dan $tvs\big(U_{m,n}\big) = \left\lceil \frac{3n+m}{3} \right\rceil untuk\ m > 3\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ [2].

Sitti Adrianti Badawi telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid yang memperoleh hasil $tvs(G_{n^2}) = \left\lceil \frac{n^2+2}{5} \right\rceil$ [3]. Sitti Fatimah telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *splitting* yang memperoleh hasil $tvs\left(Spl\big(K_{1,n}\big)\right) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 3$ [4]. P.Jeyanthi, dkk telah menentukan nilai ketidakteraturan titik dari graf bunga matahari yang memperoleh hasil $tvs(SF_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$ [5]. Riskawati, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* yang memperoleh hasil $tvs\big(sp(m,r,2)\big) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$, untuk $m, r \geq 3$ [6]. Siti Aisyah Nurni'Mah, dkk telah menentukan *on vertex irregular total k-labeling and total vertex irregularity strength of lollipop graphs* memperoleh hasil $tvs\big(L_{m,n}\big) = max\left\{\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{m+n}{m} \right\rceil\right\}$, untuk $m \geq 3\ dan\ n \geq 1$ [7].

Isnaini Rosyida, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik *generalized uniform cactus chain graphs with pendant vertices* yang memperoleh hasil $tvs\big(C_r(C_n^{n-2})\big) = \left\lceil \frac{2(n-2)r+3}{4} \right\rceil$ untuk $n \geq 6$ [8]. ST. Maryam Mahaseng telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}$ yang memperoleh hasil $tvs\big(Wd_{5,m}\big) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil$, untuk $m \geq 2$ [9]. Muhammad Imran, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *generalized prism* memperoleh hasil $tvs(P_n^m) = \left\lceil \frac{mn+3}{5} \right\rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ [10]. Nurdin

Hinding, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *hexagonal cluster* yang memperoleh hasil $tvs\big(HC(n)\big) = \frac{3n^2+1}{2}$ [11].

Pada penelitian ini akan dibahas tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi. Graf bunga matahari yang dimodifikasi merupakan graf baru yang diperoleh dari graf bunga matahari dengan mengurangi titik tengahnya serta menambahkan titik dan sisi sedemikian sehingga berderajat 3 dan 5. Berdasarkan dengan hasil penelitian sebelumnya, penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi belum tentukan. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk menulis skripsi dengan judul "**Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi**".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun masalah yang dikaji dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi?
2. Bagaimana menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji mengenai pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi dengan notasi MSF_n untuk $n \geq 4$, bilangan bulat genap.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.
2. Untuk menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan memberikan manfaat bagi berbagai pihak yang membutuhkan, diantaranya sebagai berikut:

1. Penelitian ini diharapkan untuk mengetahui pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.
2. Penelitian ini diharapkan sebagai sarana dalam menambah wawasan serta pengetahuan mengenai pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik.
3. Penelitian ini diharapkan sebagai sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjuatnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Bab ini berisi teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini antara lain konsep dasar graf, definisi dan teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total tidak teratur titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.
3. BAB III METODE PENELITIAN

   Bab ini berisi metodelogi penelitian yang membahas mengenai langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.
4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

   Bab ini berisi pembahasan mengenai hasil utama dari tugas akhir, yaitu menentukan nilai ketidakteraturan titik pada graf bunga matahari yang dimodifikasi.

5. BAB V PENUTUP

   Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini ada beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, termonologi graf, serta jenis-jenis graf. Definisi yang digunakan pada bab ini berdasarkan definisi pada buku yang berjudul “Pengantar dan Jenis-jenis Graf” oleh Hasmawati [12].

2.1 Pengertian Graf

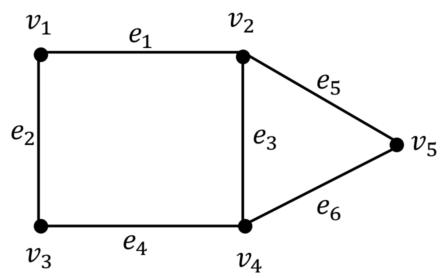
Teori Graf pertama kali ditemukan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Graf adalah pasangan himpunan titik dan sisi yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E), *dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan* E *adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi.*

Himpunan titik pada graf G biasanya dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi biasanya dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya unsur pada $V(G)$ disebut *order* dari G, sedangkan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran atau *size* dari G. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis dengan $e = (u, v)$. Penulisan sisi $e = (u, v)$ dapat ditulis dengan $e = uv$.

Contoh 2.1.1

G:



Gambar 2.1. 1 Graf G

Himpunan titik dan sisi graf G pada Gambar 2.1.1 masing-masing adalah :

$\mathrm{V(G)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_4$, $e_4 = v_3v_4$, $e_5 = v_2v_5$, dan $e_6 = v_4v_5$ sehingga *orde* dan *size* dari graf G adalah 5.

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari suatu graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada tugas akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j dan sisi x terkait (incident) dengan titik v_i, demikian pula untuk v_j.*

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan dengan $N_G(v)$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$N_G(v) = \{u \mid uv \in E(G)\}$$

Banyaknya sisi yang terkait dengan titik disebut derajat titik yang secara formal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.2 *Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan $d(v_i)$, adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$.*

Berikut didefinisikan lintasan dengan menggunakan istilah jalan.

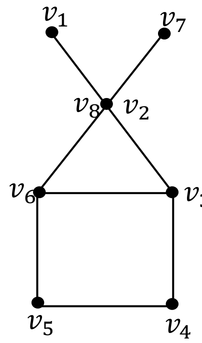
Definisi 2.2.3 *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{e_i, e_i = v_i v_j$ untuk suatu $i, j\}$. Jalan Wl_k pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi :$v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 0,1,2, \ldots, k-1$. Jadi panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \ldots, k\}$, maka W disebut lintasan.*

Dua buah titik dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan yang melalui keduanya. Adapun graf terhubung didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.4 *Graf G disebut graf terhubung apabila setiap dua titik pada graf tersebut termuat pada suatu lintasan.*

Contoh 2.2.1

G :



Gambar 2.2. 1 Graf G

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada Gambar 2.2.1 adalah

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_3v_6, v_6v_2, v_2v_7\}$$

Berdasarkan graf G pada gambar 2.2.1 diperoleh :

i. Titik v_1 dengan titik v_2 bertetangga, sedangkan titik v_1 dengan v_5 tidak bertetangga.

ii. Sisi v_1v_2 terkait dengan titik v_1 dan v_2, sedangkan sisi v_1v_2 tidak terkait dengan titik v_3 dan titik v_4.

iii. Derajat dari setiap titik graf G pada gambar 2.2.1 $\deg(v_1) = \deg(v_7) = 1$, $\deg(v_3) = \deg(v_6) = 3$, $\deg(v_4) = \deg(v_5) = 2$, $\deg(v_2) = \deg(v_8) = 4$. Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 4$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 1$.

iv. Salah satu jalan graf G pada gambar 2.2.1 adalah $W \coloneqq$ $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5, v_5v_6, v_6, v_6v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_6,$ $v_6, v_6v_2, v_2, v_2v_7, v_7$. Panjang jalan W adalah 10.

v. Lintasan pada graf G adalah v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

1.3 Jenis-jenis Graf

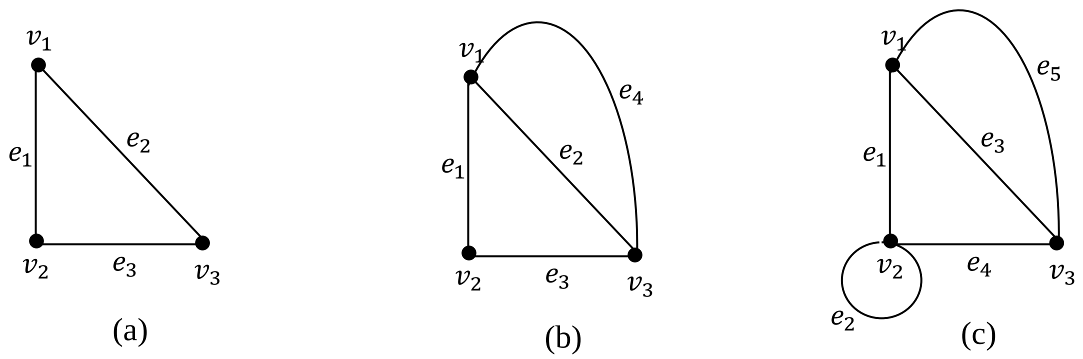
Berdasarkan graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus pada setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

Jenis graf yang pertama adalah graf sederhana dengan definisi sebagai berikut :

Definisi 2.3.1 *Graf sederhana G adalah pasangan* $V(G), E(G)$, *dimana* $V(G)$ *adalah himpunan diskrit berhingga dan tak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan* $E(G)$ *adalah himpunan pasangan-pasangan yang tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota* $V(G)$ *yang disebut sisi (edge).*

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung sisi ganda (*multiple* edges) dan gelang (*loop*). Sisi ganda (*multiple edges*) merupakan sisi yang menghubungakan pasangan titik yang sama, sedangkan gelang (*loop*) merupakan sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Contoh 2.3.1

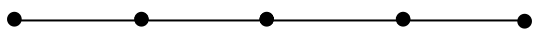


Gambar 2.3. 1 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana

Jenis graf yang kedua merupakan graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n. Secara formal graf lintasan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.2 *Misalkan* $P_n : v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ *adalah lintasan berorde* n *dengan panjang* $n-1$.

Contoh 2.3.2



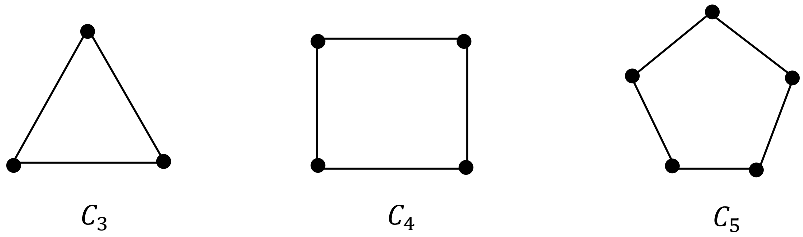
P_5

Gambar 2.3. 1 Graf lintasan

Graf siklus adalah graf yang terdiri dari satu siklus yang dinotasikan dengan C_n. Secara formal graf siklus didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.3 *Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.*

Contoh 2.3.3

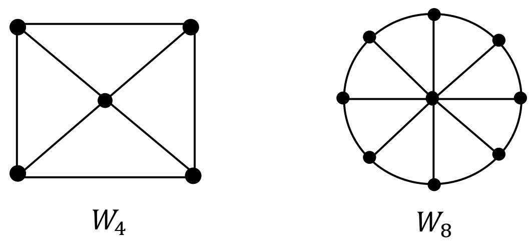


Gambar 2.3. 2 Graf siklus

Secara formal graf roda didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.4 *Graf roda (Wheel) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n.*

Contoh 2.3.4

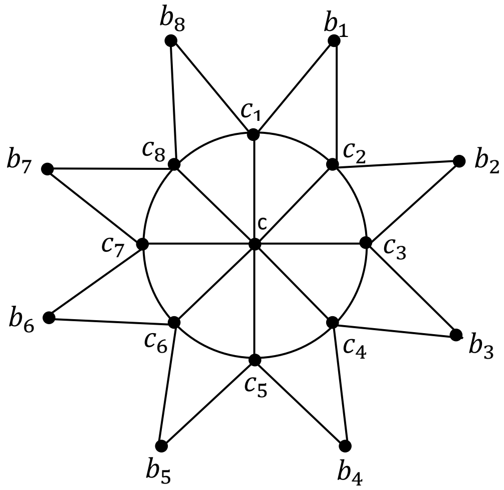


Gambar 2.3. 3 Graf roda

Secara formal graf bunga matahari didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.5 *Misalkan W_n adalah graf roda dengan titik pusat c. Siklus pada W_n berorde n dengan label:$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$. Graf bunga matahari dapat diperoleh dengan menambahkan n titik disebut:$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ sedemikian sehingga b_i bertetangga dengan c_i dan c_{i+1} untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.*

Contoh 2.3.5



Gambar 2.3. 4 Graf bunga matahari $\boldsymbol{SF_8}$

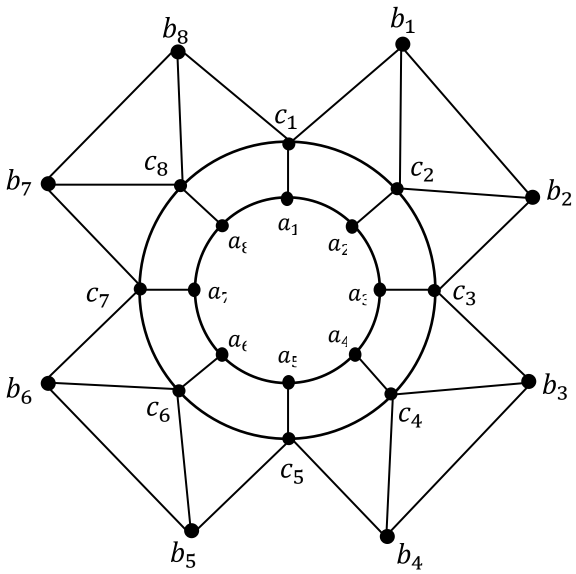
Graf bunga matahari atau biasa disebut dengan graf *Sunflower* adalah satu graf yang serupa dengan graf roda, perbedaannya terdapat pada graf bunga matahari *(sunflower graph)* yang memiliki titik tambahan yang bertetangga dengan dua titik pada graf roda untuk masing-masing titik tambahan. Graf bunga matahari (*sunflower graph*) dinotasikan dengan SF_n yang titik-titiknya terdiri dari 3 macam, yaitu n titik berderajat lima, n titik berderajat dua, dan 1 titik berderajat n. Titik yang berderajat n disebut titik pusat.

Pada penelitian ini, penulis akan melakukan pelabelan pada graf bunga matahari yang dimodifikasi, secara formal graf bunga matahari yang dimodifikasi didefinisikan sebagai berikut.

Untuk mendefinisikan graf bunga matahari yang dimodifikasi pada bagian ini digunakan graf bunga matahari SF_n dengan titik pusat c yang memiliki himpunan titik $V(SF_n) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n,$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dan himpunan sisi $E(SF_n) = \{c_1c_2, c_2c_3, \ldots, c_nc_1, b_1c_1, b_2c_2, \ldots, b_nc_n, b_1c_2, b_2c_3, \ldots, b_nc_1\}$.

Definisi 2.3.6 Graf bunga matahari yang dimodifikasi dengan notasi MSF_n *untuk* $n \geq 4$, n *bilangan bulat genap merupakan graf yang diperoleh dari graf bunga matahari* SF_n *dengan menghilangkan titik pusat* c, *menambah graf lingkaran* $Cn\colon \{a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1\}$ *sedemikian sehingga* a_ic_i *suatu sisi untuk setiap* $i = 1,2,3, \ldots, n$ *dan menambahkan sisi* b_ib_{i+1} *untuk setiap* i *ganjil.*

Contoh 2.3.6



Gambar 2.3. 5 Graf bunga matahari yang dimodifikasi

1.4 Pelabelan Graf

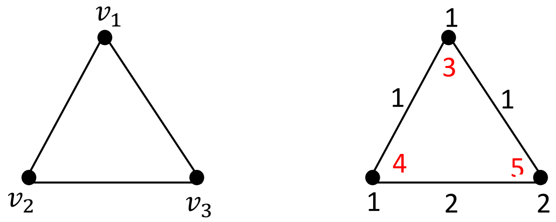
Dalam subbab ini, akan dibahas mengenai definisi pelabelan graf dan bobot dari graf.

Definisi 2.4.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan positif.*[3]

Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi tiga, yaitu jika domain dari fungsi pelabelan adalah himpunan sisi, maka disebut dengan pelabelan sisi (*edge labeling)*. Jika domain dari fungsi pelabelan adalah himpunan titik, maka disebut dengan pelabelan titik (*vertex labeling)*, sedangkan jika domain fungsi pelabelan adalah himpunan titik dan sisi, maka disebut dengan pelabelan total (*total labeling*).

Definisi 2.4.2 *Bobot titik v pada pelabelan total adalah label titik v yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu* $wt(v) = f(v) + \sum_{u \in V} f(uv)$. [3]

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4. 1 Pelabelan total pada graf siklus $\boldsymbol{C_3}$

Gambar 2.4.1 merupakan graf C_3 dengan $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(C_3) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$ yang masing-masing titik dan sisi dilabeli dengan bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total. Misal f adalah pelabean total pada graf siklus C_3 maka pelabelan titik dan pelabelan sisinya adalah

$$f(v_1) = 1 \qquad f(v_1v_2) = 1$$

$$f(v_2) = 1 \qquad f(v_1v_3) = 1$$

$$f(v_3) = 2 \qquad f(v_2v_3) = 2$$

Sehingga bobot titik v_1, v_2 dan v_3 adalah

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_1v_3) + f(v_2v_3) = 2 + 1 + 2 = 5$$

1.5 Pelabelan Total Tidak Teratut Titik

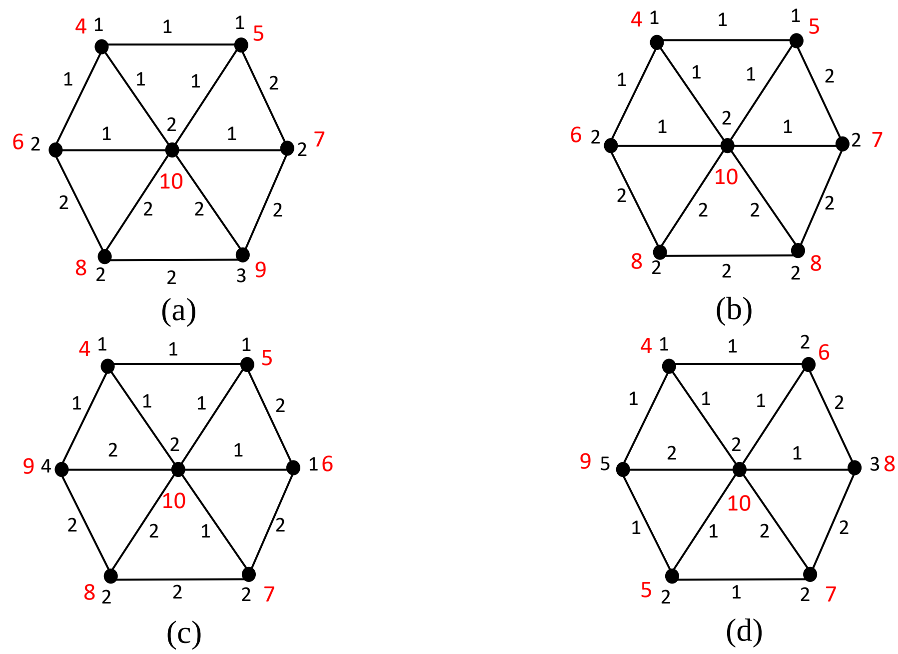
Dalam subbab ini, akan dibahas mengenai definisi pelabelan total tidak teratur, nilai total ketidakteraturan titik serta teorema yang dapat digunakan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf.

Definisi 2.5.1 *Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ disebut suatu pelabelan-k total tidak teratur titik (total vertex irregular k-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V berlaku $wt(x) \neq wt(y)$, dimana $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V} f(xu)$.* [9]

Nilai total ketidakteraturan titik adalah nilai k terkecil, dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tidak teratur titik. Secara formal nilai total ketidakteraturan titik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik, yang dinotasikan dengan tvs(G).* [9]

Contoh 2.5.1



Gambar 2.5. 1 Beberapa pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf roda $\boldsymbol{W_6}$

Gambar 2.5.1 (a) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik pada graf W_6. Gambar 2.5.1 (b) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik karena terdapat dua titik dengan bobot yang sama yaitu 8. Gambar 2.5.1 (c) merupakan pelabelan-4 total ketidakteraturan titik pada graf W_6. Dan gambar 2.5.1 (d) merupakan pelabelan-5 total ketidakteraturan titik graf W_6. Namun graf W_6 tidak mempunyai pelabelan-1 total ketidakteraturan titik, sehingga diperoleh k terkecil yaitu 3. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan titik pada graf W_6 adalah 3 atau dapat ditulis $tvs(W_6) = 3$.

Nilai total ketidakteraturan titik pada graf G telah dikembangkan oleh Bača dkk. [13] menjadi suatu Teorema yang dituliskan sebagai berikut.

Teorema 2.5.1 *Misalkan sebuah graf* $G(V,E)$ *dengan* n *adalah banyaknya titik,*$\delta(G)$ *adalah derajat minimum, dan* $\Delta(G)$ *adalah derajat maksimum, maka berlaku :*

$$\left\lceil\frac{(n+\delta(G))}{(\Delta(G)+1)}\right\rceil \leq tvs(G) \leq n+\Delta(G)-2\delta(G)+1.$$

Teorema 2.5.1 dapat digunakan untuk menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik serta pemberian label pada titik dan sisi untuk menentukan batas atas nilai total ketidakterturan titik.