NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF TANGGA SEGITIGA MELINGKAR YANG DIMODIFIKASI DENGAN $4n$ TITIK UNTUK n GANJIL

SKRIPSI

DEFI LESTARI

H011171314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF TANGGA SEGITIGA MELINGKAR YANG DIMODIFIKASI DENGAN $4n$ TITIK UNTUK n GANJIL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

DEFI LESTARI

H011171314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Defi Lestari
NIM	: H011171314
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF TANGGA SEGITIGA MELINGKAR YANG DIMODIFIKASI DENGAN 4*n* TITIK UNTUK *n* GANJIL

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 23 Juni 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

Defi Lestari

NIM. H011171314

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF TANGGA SEGITIGA MELINGKAR YANG DIMODIFIKASI DENGAN $4n$ TITIK UNTUK n GANJIL

Disusun dan diajukan oleh

DEFI LESTARI

H011171314

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal 23 Juni 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Pembimbing Pertama,

Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.
NIP. 19850529 200812 1 002

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, oleh karena kasih karunia serta anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi dengan $4n$ Titik untuk n Ganjil**". Skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan, bimbingan, serta motivasi dari berbagai pihak.

Penulis menyampaikan terima kasih yang tak terhingga kepada Ayahanda almarhum **Marthen L.B** dan Ibunda **Suryani, S.Pd**. untuk segala pengorbanan yang telah dilakukan, kasih sayang yang senantiasa diberikan, juga dengan penuh kesabaran telah membesarkan, mendidik, serta senantiasa mendukung dan mendoakan penulis dalam menjalani proses pendidikan bahkan dalam setiap langkah kehidupan yang dilalui. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada saudara/saudari tercinta, kakanda **Gusnawijaya, S.Pd.,M.M.**, **Sandrino**, dan **Megarianti, S.Kep.,Ns.**, serta adinda **Antonius**, yang juga telah banyak berkorban serta selalu mendukung dan mendoakan penulis sehingga boleh menyelesaikan pendidikan pada tingkat sarjana di Universitas Hasanuddin.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Unhas sekaligus dosen pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muh.Nur, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing pertama, yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan dan memberikan banyak waktu, tenaga, serta pikiran dalam membimbing dan mengarahkan penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
3. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, selaku penasehat akademik sekaligus dosen penguji dan Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**, selaku dosen penguji**,**

yang senantiasa mendukung dan mengarahkan penulis selama menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMIPA Unhas serta memberikan berbagai motivasi, nasihat maupun kritik dan saran yang membangun demi perbaikan dan penyempurnaan skripsi ini.

4. **Segenap dosen pengajar** dan **staf administrasi Departemen Matematika FMIPA Unhas** yang telah memberikan begitu banyak ilmu dan nasihat serta memberi berbagai kemudahan bagi penulis selama menjalani proses perkuliahan di Departemen Matematika FMIPA Unhas.
5. **Kayis, Nisa, Indah, Esty, Cahyu, Riswan, Ifah, Teka, Farah, Harry, Faathir, Alfian,** serta teman-teman **Matematika 2017** yang tidak dapat disebutkan satu per satu untuk segala bantuan dan dukungannya selama menjalani perkuliahan maupun dalam proses penyelesaian skripsi ini.
6. Teman seperjuangan selama kuliah, **Hafsah, Ayu, Fika, Riska, Uni, Sarty, Innah, Mj,** dan **Yuni**. Terima kasih telah menjadi teman terbaik yang senantiasa mendukung, memotivasi, membantu dalam segala hal, serta selalu hadir menemani dalam suka maupun duka selama berkuliah bahkan dalam proses penyelesaian tugas akhir di Universitas Hasanuddin.
7. Keluarga besar **GMKI Cabang Makassar Komisariat FMIPA Unhas** dan **PMKO Filadelfia MIPA_Farmasi Unhas** serta **Christian Science 2017** yang senantiasa mendukung dalam doa.
8. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu per satu, yang telah memberikan bantuan baik secara moril maupun materiil.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki kekurangan dan belum sempurna. Oleh karena itu, segala bentuk kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan pada masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat utamanya dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Makassar, 23 Juni 2022

Defi Lestari

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Defi Lestari

NIM : H011171314

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi dengan $4n$ Titik untuk n Ganjil"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,

Dibuat di Makassar pada tanggal 23 Juni 2022

Yang menyatakan

Defi Lestari

ABSTRAK

Penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada graf secara umum sangat sulit ditemukan karena dipengaruhi oleh pola atau struktur graf yang berbeda-beda. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi, dinotasikan $MCTL_n$, dengan n bilangan bulat positif ganjil dan $n \geq 3$. Penentuan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah ditentukan berdasarkan sifat-sifat graf $MCTL_n$ menggunakan teorema pendukung yang ada. Sedangkan, batas atas ditentukan dengan menunjukkan adanya pelabelan$-k$ total tidak teratur titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi. Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi yaitu $tvs(MCTL_n) = \left\lceil \frac{4n+3}{6} \right\rceil$, dengan $n \geq 3$ dan n bilangan bulat positif ganjil.

Kata Kunci: *Nilai Total Ketidakteraturan Titik, Pelabelan$-k$ Total Tidak Teratur Titik, Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi.*

ABSTRACT

The total vertex irregularity strength of graphs in general is very difficult to find because each graph has a different pattern or structure. The aim of this research is to determine the total vertex irregularity strength of modified circular triangular ladder graph, denoted by $MCTL_n$, for $n \geq 3$ and n is odd positive integers. The total vertex irregularity strength of modified circular triangular ladder graph was conducted by determining the greatest lower bound and the least upper bound. The lower bound determined based on the properties of the $MCTL_n$ graph using the existing supporting theorem and to prove the upper bound, it is sufficient to show the existence of a vertex irregular total k −labeling. The result show that the total vertex irregularity strength of $MCTL_n$ graph, for $n \geq 3$ and n is odd positive integers i.e.

$$tvs(MCTL_n) = \left\lceil \frac{4n+3}{6} \right\rceil.$$

Keywords: *Total Vertex Irregularity Strength*, *Vertex Irregular Total k −Labeling*, *Modified Circular Triangular Ladder Graph*.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

PERNYATAAN KEASLIAN ii

LEMBAR PENGESAHAN iii

KATA PENGANTAR iv

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS vi

ABSTRAK vii

ABSTRACT viii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR NOTASI xi

DAFTAR GAMBAR xii

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 3

1.3 Batasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penelitian 3

1.5 Manfaat Penelitian 3

1.6 Sistematika Penulisan 4

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1 Pengertian Graf 5

2.2 Terminologi Graf 6

2.3 Operasi Perkalian Kartesius pada Graf 8

2.4 Jenis-Jenis Graf 9

2.5 Graf Tangga (*Ladder Graph*) 11

2.6 Pelabelan Graf 13

2.7 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik 14

BAB III METODOLOGI PENELITIAN 17

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 18

4.1 Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi 18

4.2 Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi 18

BAB V PENUTUP 63

5.1 Kesimpulan 63

5.2 Saran 63

DAFTAR PUSTAKA 64

DAFTAR NOTASI

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G	2
$MCTL_n$	Graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi	3
$G(V,E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E	5
$V(G)$	Himpunan titik dari graf G	5
$E(G)$	Himpunan sisi dari graf G	5
$u,v \in V(G)$	Suatu titik anggota dari $V(G)$	5
$e = uv$	Suatu sisi anggota dari $E(G)$	5
$p(G)$	Orde atau banyaknya titik pada graf G	5
$q(G)$	Ukuran atau banyaknya sisi pada graf G	5
$N_G(v)$	Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G	6
$d(v_i)$	Derajat suatu titik v_i pada graf G	6
$\delta(G)$	Derajat minimum pada graf G	6
$\Delta(G)$	Derajat maksimum pada graf G	6
Wl_k	Jalan pada graf G dengan panjang k	7
P_n	Graf lintasan	10
C_n	Graf lingkaran	10
K_n	Graf lengkap	11
L_n	Graf tangga	11
TL_n	Graf tangga segitiga	12
CTL_n	Graf tangga segitiga melingkar	13
$wt(v)$	Bobot titik v	13
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v	13
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv	13

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.1 Graf $\boldsymbol{G}$ 6
Gambar 2.2.1 Graf $\boldsymbol{G}$ 7
Gambar 2.2.2 Graf terhubung G dan graf tak terhubung H 8
Gambar 2.3.1 Graf $\boldsymbol{C3}, \boldsymbol{K2}$, dan $\boldsymbol{C3} \times \boldsymbol{K2}$ 9
Gambar 2.4.1 (a) Graf sederhana, (b) multigraf, dan (c) graf palsu (*pseudograph*) 10
Gambar 2.4.2 Graf Lintasan $\boldsymbol{P4}$ 10
Gambar 2.4.3 Graf Lingkaran $\boldsymbol{C4}$ 11
Gambar 2.4.4 Graf Lengkap 11
Gambar 2.5.1 Graf tangga $\boldsymbol{L7}$ 12
Gambar 2.5.2 Graf Tangga Segitiga $\boldsymbol{TL7}$ 12
Gambar 2.5.3 Graf tangga segitiga melingkar $\boldsymbol{CTL7}$ 13
Gambar 2.6.1 Pelabelan total pada graf $\boldsymbol{C6}$ 14
Gambar 2.7.1 Beberapa pelabelan total tidak teratur titik graf tangga segitiga $\boldsymbol{TL8}$ 15
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian 17
Gambar 4.2.1 Pelabelan$-\boldsymbol{3}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL3}$ 20
Gambar 4.2.2 Pelabelan$-\boldsymbol{4}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL5}$ 20
Gambar 4.2.3 Pelabelan$-\boldsymbol{6}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL7}$ 21
Gambar 4.2.4 Pelabelan$-\boldsymbol{7}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL9}$ 21
Gambar 4.2.5 Pelabelan$-\boldsymbol{8}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL11}$ 22
Gambar 4.2.6 Pelabelan$-\boldsymbol{10}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL13}$ .. 22
Gambar 4.2.7 Pelabelan$-\boldsymbol{11}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL15}$ .. 23
Gambar 4.2.8 Pelabelan$-\boldsymbol{12}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL17}$ .. 23
Gambar 4.2.9 Pelabelan$-\boldsymbol{14}$ Total Tidak Teratur Titik Graf $\boldsymbol{MCTL19}$ .. 24
Gambar 4.2.10 Graf $\boldsymbol{MCTL7}$ 57

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika yang pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, dalam karya tulis berjudul "*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*". Leonard Euler memperlihatkan solusi dari masalah 7 buah jembatan yang ada di kota Königsberg (sekarang bernama kota Kaliningrad) melalui pembuktian sederhana yaitu dengan menggambarkan titik untuk mewakili daratan dan sisi untuk mewakili jembatan. Hasil yang diperoleh adalah jembatan tidak dapat dilalui tepat satu kali apabila berawal dan berakhir di daratan yang sama. Walaupun tidak ditulis dalam bahasa graf, tetapi secara teoritis inilah konsep dasar lahirnya teori graf. Teori graf dapat digunakan untuk menyederhanakan berbagai persoalan dengan merepresentasikannya melalui suatu gambar yaitu menggambarkan titik untuk mewakili objek sedangkan hubungan antara objeknya digambarkan dengan garis yang biasa disebut sisi.

Salah satu pokok bahasan yang cukup populer dalam teori graf adalah pelabelan graf. Sejarah perkembangan pelabelan graf dimulai pada pertengahan tahun 1960-an, dipelopori oleh makalah yang dipublikasikan Alexander Rosa tahun 1967. Rosa mengidentifikasi tiga jenis pelabelan yang disebut α-*labeling*, β-*labeling*, dan ρ-*labeling*. Selanjutnya, β-*labeling* diberi nama "pelabelan *graceful*" oleh Solomon W. Golomb pada tahun 1972 yang kemudian dipopulerkan oleh Martin Gardner [1]. Pelabelan graf adalah pemetaan elemen-elemen graf (yakni titik dan sisi) ke suatu bilangan, biasanya bilangan bulat positif. Pelabelan graf berdasarkan domainnya, yakni pelabelan titik jika domainnya himpunan titik, pelabelan sisi jika domainnya himpunan sisi, serta pelabelan total jika domainnya himpunan titik dan himpunan sisi [2]. Dalam kurun waktu 50 tahun terakhir, sekitar 3.000-an makalah atau *paper* dengan lebih dari 200 teknik pelabelan graf telah dipelajari. Beberapa diantaranya telah dirangkum dalam jurnal berjudul "*A Dynamic Survey of Graph Labeling*", salah satunya yakni pelabelan total tidak teratur [3].

Pada tahun 1988, Chartrand dkk, memperkenalkan pelabelan tidak teratur (*irregular labeling*) dan nilai ketidakteraturan (*irregularity strength*) suatu graf. Terinspirasi dari konsep nilai ketidakteraturan dan berbagai macam pelabelan total lainnya, Bača dkk., memperkenalkan dua parameter baru yaitu nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik graf. Selanjutnya, pelabelan total tidak teratur diklasifikasikan menjadi pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik [2].

Pelabelan total tidak teratur titik pada suatu graf didefinisikan sebagai pemetaan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,\dots,k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Bobot yang dimaksud adalah penjumlahan label titik dan label sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut. Adapun nilai total ketidakteraturan titik suatu graf G (*total vertex irregularity strength of graph*), dinotasikan dengan *tvs(G)*, yaitu suatu bilangan bulat positif terkecil *k*, sedemikian sehingga fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi dari suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,\dots k\}$ menghasilkan bobot yang berbeda pada setiap titiknya [4].

Penelitian terkait pelabelan total tidak teratur titik telah banyak dilakukan, beberapa diantaranya adalah sebagai berikut. Badawi, telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid G_{n^2} untuk $n \geq 2$ [5]. Mahaseng, telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}, m \geq 2$ [6]. Nurlindah, telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf dodecahedral yang dimodifikasi GD_n [7].

Walaupun penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf telah banyak dilakukan, namun nilai total ketidakteraturan titik pada sebarang graf secara umum sangat sulit ditemukan. Hal ini dikarenakan setiap graf memiliki pola atau struktur yang berbeda. Pola atau struktur ini sangat berpengaruh dalam pemberian label untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titiknya [8]. Sehingga, penelitian ini masih terbuka untuk graf-graf lainnya yang belum diteliti. Selanjutnya, beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga dan graf yang berhubungan dengan graf tangga, yakni Ahmad dkk., telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga dan graf tangga diagonal [9]. Rajasingh & Annamma, juga telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga melingkar CL_n, dengan $n \geq 12$ [10]. Namun, belum ditentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi. Karena itu, dengan menggunakan pelabelan yang sama, maka dalam penelitian ini akan ditentukan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi yang dinotasikan dengan $MCTL_n$ untuk n ganjil. Sehingga, yang menjadi judul penelitian ini adalah "Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Tangga Segitiga Melingkar yang Dimodifikasi dengan $4n$ Titik untuk n Ganjil".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana cara menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi?
2. Bagaimana cara menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga segitiga yang dimodifikasi?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi $MCTL_n$, dengan $n \geq 3$ dan n adalah bilangan bulat positif ganjil.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yaitu:

1. Untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang graf khususnya pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik.
2. Sebagai referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait nilai total ketidakteraturan suatu graf.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Bab ini memuat teori dan konsep dasar graf yang disajikan secara singkat yaitu terkait definisi, terminologi, operasi, jenis-jenis graf, dan pelabelan graf yang relevan dengan topik penelitian yaitu pelabelan total tidak teratur titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi.

3. BAB III METODOLOGI PENELITIAN

   Bab ini memuat metode penelitian yang dilakukan serta tahapan-tahapan dalam melaksanakan penelitian ini.

4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

   Bab ini berisi uraian hasil dan pembahasan tentang nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi.

5. BAB V PENUTUP

   Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian yang telah didapatkan serta saran bagi peneliti lain untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang beberapa teori dan konsep dasar graf meliputi definisi, terminologi, operasi, dan jenis-jenis graf serta pelabelan graf yang relevan dengan topik penelitian yaitu terkait nilai total ketidakteraturan titik pada graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi.

Definisi dan terminologi (istilah) graf yang digunakan dalam penelitian ini dikutip dari buku yang berjudul "Pengantar dan Jenis-jenis Graf" [11].

2.1 Pengertian Graf

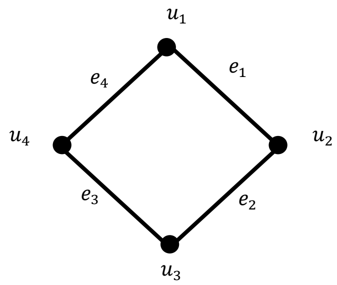
Secara sederhana, graf didefinisikan sebagai himpunan titik yang terhubung oleh garis/sisi. Jadi, elemen-elemen dalam graf adalah titik dan sisi. Secara formal, definisi graf adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.*

Secara matematis, Definisi 2.1.1 dituliskan sebagai berikut. Misalkan G adalah notasi dari graf (V, E) dengan $V = V(G)$ dan $E = E(G)$ sehingga $G = (V(G), E(G))$. $V(G) = \{u: u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ dengan (u, v) disebut sisi. Untuk penyederhanaan, sisi (u, v) hanya ditulis uv.

Suatu graf dengan n titik digambarkan dengan bulatan kecil, biasanya dilabeli dengan huruf kecil seperti $a, b, c, \cdots$ atau $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$, maupun dengan satu bilangan asli yang berbeda dari himpunan $\{1,2,3, \cdots, n\}$. Adapun sisi graf berupa garis yang menghubungkan dua titik atau lebih pada graf tersebut dan dinyatakan dengan pasangan uv atau simbol $e_1, e_2, \cdots$. Dengan kata lain, $e = uv$. Berdasarkan definisi sebelumnya, himpunan titik graf dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari graf G dan dinotasikan dengan $p(G)$ atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari graf G dan dinotasikan dengan $q(G)$ atau $|E(G)|$.

Contoh 2.1.1:



Gambar 2.1.1 Graf *G*

Berdasarkan Gambar 2.1.1, himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dengan $e_1 = u_1u_2$, $e_2 = u_2u_3$, $e_3 = u_3u_4$, dan $e_4 = u_1u_4$. Maka, orde dan ukuran dari graf G masing-masing adalah 4.

2.2 Terminologi Graf

Terdapat banyak terminologi (istilah) yang digunakan dalam teori graf. Berikut beberapa terminologi graf yang berkaitan dengan penelitian ini.

Hubungan antara dua titik, antara dua sisi, serta antara titik dan sisi pada graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 *Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $e \in E(G)$. Jika $e = v_iv_j$, maka dikatakan bahwa:*

1. *Titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j.*
2. *Sisi e terkait (incident) dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j.*

Misalkan sisi graf G adalah e_1, e_2, e_3 dan titiknya v. Sisi-sisi tersebut bertetangga apabila e_1, e_2, dan e_3 terkait dengan titik v.

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G, dinotasikan $N_G(v)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}.$$

Derajat suatu titik dalam graf ditentukan oleh banyaknya sisi yang terkait dengan titik tersebut. Adapun definisi derajat titik adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.2 *Derajat suatu titik v_i dalam graf G yang dinotasikan dengan $d(v_i)$ adalah banyaknya sisi $e \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Derajat minimum dari suatu graf G, dinotasikan $\delta(G) =$ min $\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G, dinotasikan $\Delta(G) =$ max $\{d(v): v \in V(G)\}$.*

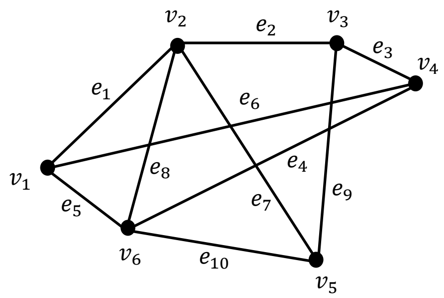
Lintasan yaitu suatu jalan yang titiknya tidak berulang. Secara matematis, lintasan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, \cdots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_i; e_i = v_i v_j$ untuk suatu $i, j\}$. Jalan Wl_k pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi :*

$$v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, e_{k-1}, v_k \text{ dengan } e_i = v_i v_{i+1}, i = 0,1,2, \cdots, k-1.$$

Jadi, panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \cdots, k\}$, maka W disebut lintasan.

Contoh 2.2.1:



Gambar 2.2.1 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.2.1,

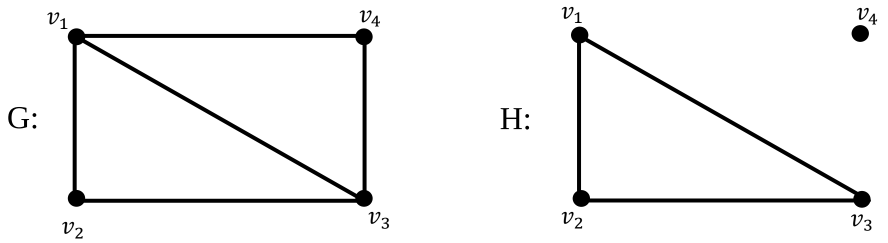
1. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_4, dan v_6. Titik v_1 dan titik v_2 dikatakan bertetangga karena terkait oleh sisi e_1, dengan kata lain, $e_1 = v_1 v_2$. Titik v_1 dan titik v_4 bertetangga karena terkait oleh sisi e_6, dengan kata lain, $e_6 = v_1 v_4$. Titik v_1 dan titik v_6 bertetangga karena terkait oleh sisi e_5, dengan kata lain, $e_5 = v_1 v_6$. Namun, titik v_2 dan v_4 tidak bertetangga karena tidak ada sisi yang mengaitkan keduanya.
2. Sisi $e_1 = v_1 v_2$, terkait dengan titik v_1, begitu pula dengan titik v_2. Namun, sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3, v_4, v_5, dan v_6.
3. Sisi e_1, e_5, dan e_6 bertetangga karena terkait dengan titik yang sama yaitu v_1.
4. Derajat setiap titiknya adalah $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = 3$, $d(v_2) = d(v_6) = 4$. Derajat maksimumnya adalah $\Delta(G) = 4$ sedangkan derajat minimumnya adalah $\delta(G) = 3$.

5. Salah satu jalan pada graf G tersebut adalah $:= v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_6, e_8, v_2, e_7, v_5, e_9, v_3, e_3, v_4, e_6, v_1, e_5, v_6$. Panjang jalan W adalah 10.
6. Lintasan graf tersebut salah satunya adalah v_1, v_2, v_3, v_4, v_6.

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat keduanya. Jika setiap pasang titik suatu graf adalah terhubung, maka graf tersebut adalah graf terhubung. Secara formal, definisi graf terhubung diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.4 *Misalkan G adalah graf sederhana. Graf G dikatakan graf terhubung apabila setiap dua titik pada graf G termuat pada suatu lintasan. Sebaliknya, disebut graf tak terhubung jika dua titik pada graf G tidak termuat dalam lintasan manapun.*

Contoh 2.2.2:



Gambar 2.2.2 Graf terhubung G dan graf tak terhubung H

2.3 Operasi Perkalian Kartesius pada Graf

Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Perkalian kartesius (*Cartesian product*), dinotasikan $A \times B$, adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Pasangan $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$ [11].

Perkalian kartesius dapat dituliskan menjadi:

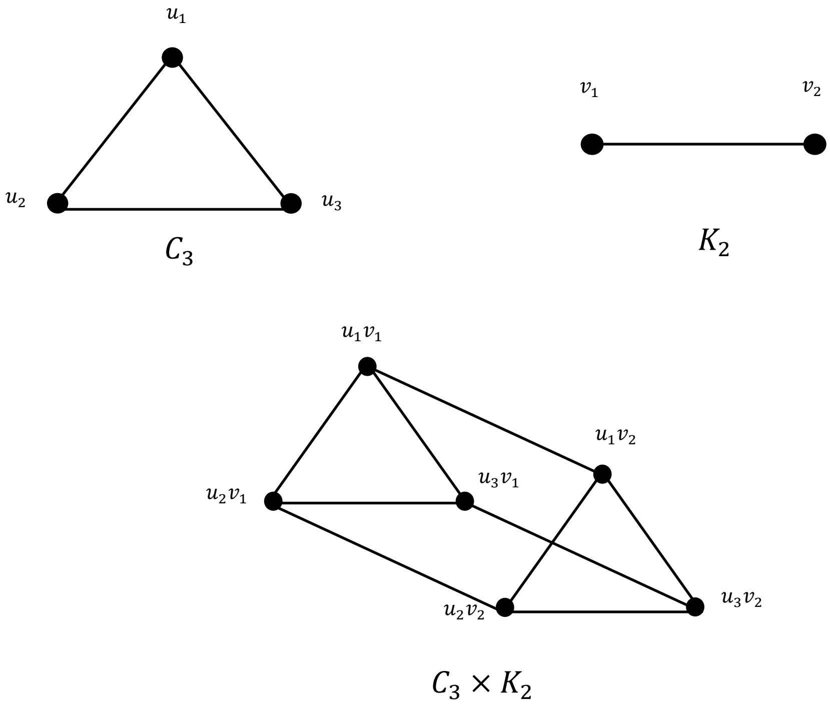
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A\ dan\ b \in B\}$$

Berikut diberikan definisi dari perkalian kartesius suatu graf yang dikutip dari [12].

Definisi 2.3.1 *Perkalian kartesius dari dua graf G dan H, dinotasikan $G \times H$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dengan dua titik*

(u_1, u_2) *dan* (v_1, v_2) *bertetangga jika dan hanya jika* $u_1 = v_1$ *dan* $u_2v_2 \in E(H)$ *atau* $u_2 = v_2$ *dan* $u_1v_1 \in E(G)$.

Contoh 2.3.1:



Gambar 2.3.1 Graf C_3, K_2, dan $C_3 \times K_2$

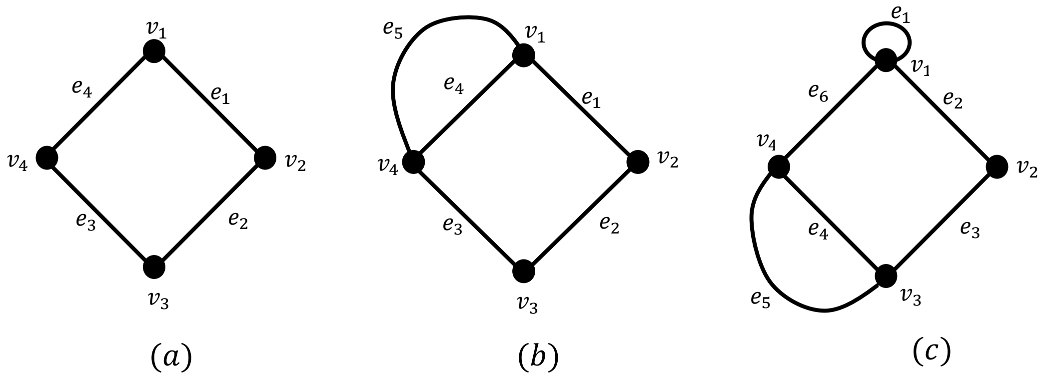
2.4 Jenis-Jenis Graf

Graf diklasifikasikan kedalam beberapa kategori berdasarkan syarat atau kondisi tertentu, seperti jumlah titik, keberadaan *loop* dan sisi ganda, serta orientasi arah pada sisi. Adapun graf yang dibahas pada subbab ini hanyalah jenis graf yang terkait dengan penelitian.

Berdasarkan keberadaan *loop* dan sisi ganda, graf dibedakan menjadi dua yakni graf sederhana dan graf tak sederhana. *Loop* adalah sisi graf yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sedangkan, disebut sisi ganda (*multiple edges*) apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Graf dengan sisi ganda disebut multigraf (*multigraph*) sedangkan graf dengan sisi ganda dan *loop* disebut graf palsu (*pseudograph*). Kedua jenis graf ini merupakan jenis graf tak sederhana. Sedangkan, graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi ganda. Definisi graf sederhana dikutip dari [11] diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 *Graf sederhana G yaitu pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex) dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge).*

Contoh 2.4.1:



Gambar 2.4.1 (a) Graf sederhana, (b) multigraf, dan (c) graf palsu (*pseudograph*)

Graf lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari tepat satu lintasan dengan n titik dan $n-1$ sisi. Graf lintasan memiliki dua titik yang berderajat satu sedangkan titik lainnya berderajat dua. Berikut definisi graf lintasan dikutip dari [13].

Definisi 2.4.2 *Graf lintasan dengan n titik, dinotasikan P_n untuk $n \geq 2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{v_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i = 1,2,\cdots,n-1\}$.*

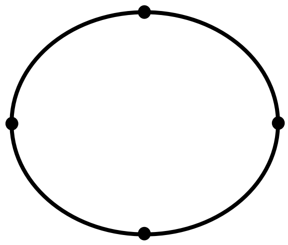
Contoh 2.4.2:

Gambar 2.4.2 Graf Lintasan P_4

Graf lingkaran adalah graf terhubung dengan n titik yang terdiri atas tepat satu siklus dengan panjang n. Secara formal, graf lingkaran yang dikutip dari [11] didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.3 *Misalkan $P_n : v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Graf lingkaran dengan panjang n, dinotasikan C_n untuk $n \geq 3$, adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n, v_1\}$.*

Contoh 2.4.3:

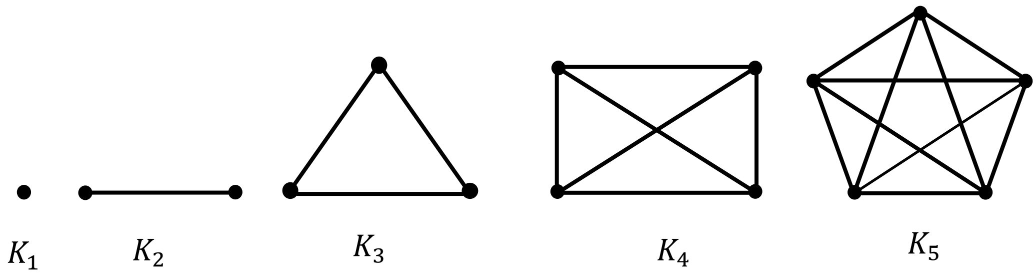


Gambar 2.4.3 Graf Lingkaran C_4

Graf lengkap dengan n titik adalah suatu graf sederhana yang memiliki ciri-ciri khusus yaitu setiap titiknya memiliki derajat yang sama. Berikut definisi graf lengkap yang dikutip dari [14].

Definisi 2.4.4 *Graf lengkap dengan n titik, dinotasikan K_n, adalah graf yang setiap dua titiknya bertetangga. Setiap titik pada graf lengkap memiliki derajat yang sama yaitu $n-1$.*

Contoh 2.4.4:



Gambar 2.4.4 Graf Lengkap

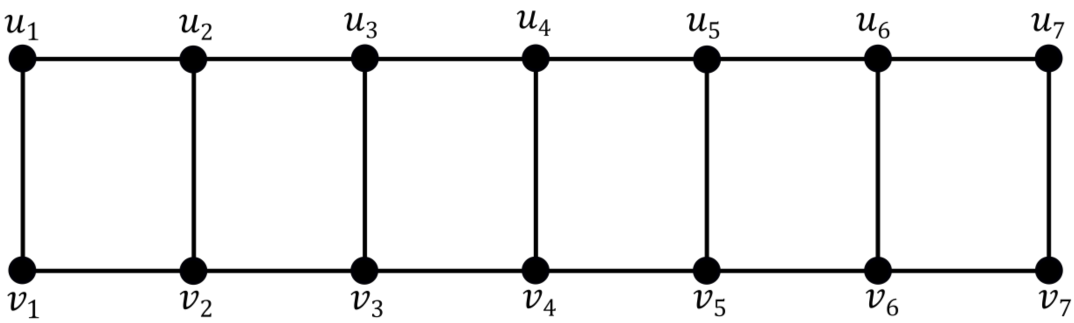
2.5 Graf Tangga (*Ladder Graph*)

Pada subbab ini membahas tentang definisi graf tangga dan beberapa graf yang berhubungan dengan graf tangga yaitu graf tangga segitiga dan graf tangga segitiga melingkar. Adapun definisi graf tangga dan graf tangga segitiga dikutip dari [15].

Graf tangga dengan $2n$ titik dan $n + 2(n-1)$ sisi yaitu suatu graf yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 *Graf tangga L_n didefinisikan sebagai $L_n = P_n \times K_2$ dengan P_n adalah graf lintasan yang mempunyai titik sebanyak n, $\times$ adalah notasi dari perkalian kartesius, dan K_2 adalah graf lengkap dengan 2-titik.*

Contoh 2.5.1:

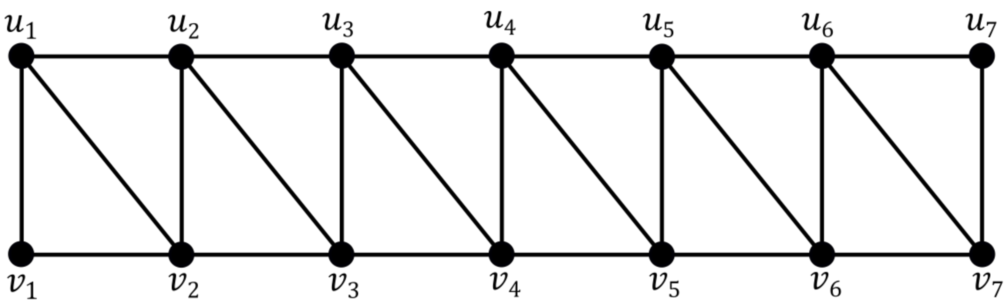


Gambar 2.5.1 Graf tangga L_7

Graf tangga segitiga atau *triangular ladder graph* adalah graf yang diperoleh dari graf tangga yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.2 *Graf tangga segitiga, dinotasikan $TL_n, n \geq 2$ adalah graf yang diperoleh dari L_n dengan menambahkan sisi $u_i v_{i+1}$, $i = 1,2, \dots, n-1$. Titik dari L_n adalah u_i dan v_i dengan $i = \{1,2, \dots, n\}$.*

Contoh 2.5.2:

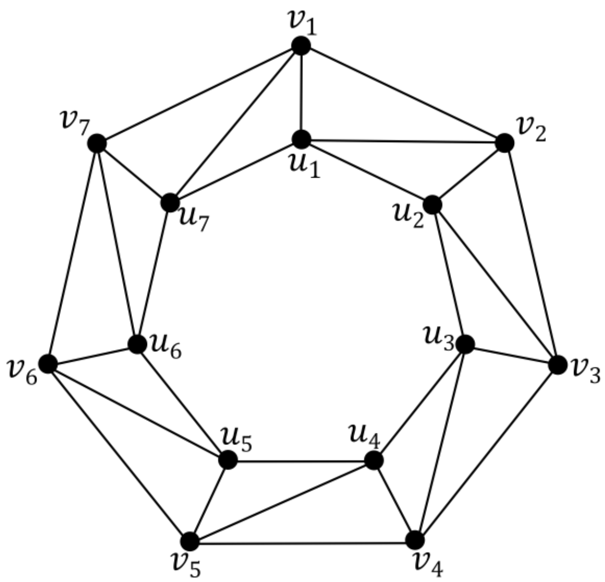


Gambar 2.5.2 Graf Tangga Segitiga TL_7

Bagian dari graf tangga lainnya adalah graf tangga segitiga melingkar atau *circular triangular ladder graph* yang didefinisikan dalam Definisi 2.5.3 berikut.

Definisi 2.5.3 *Misalkan graf tangga segitiga dengan himpunan titik $V(TL_n) = \{u_i, v_i | i = 1,2, \dots, n\}$. Graf tangga segitiga melingkar berorde n, dinotasikan CTL_n, adalah graf yang diperoleh dari graf tangga segitiga dengan menambahkan sisi $v_1 v_n$, $u_1 u_n$, dan $u_n v_1$* [16].

Contoh 2.5.3:



Gambar 2.5.3 Graf tangga segitiga melingkar CTL_7

2.6 Pelabelan Graf

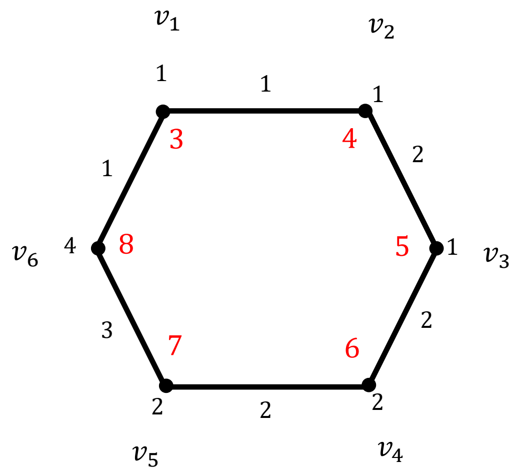
Pelabelan graf adalah pemberian bilangan, biasanya bilangan bulat positif, ke titik atau sisi berdasarkan suatu syarat atau kondisi tertentu. Adapun definisi pelabelan graf menurut Wallis (2001) dikutip dari [17] adalah sebagai berikut.

Definisi 2.6.1 *Pelabelan graf G adalah pemetaan himpunan elemen-elemen pada graf (titik dan sisi) ke suatu himpunan bilangan, umumnya bilangan bulat positif atau bilangan non-negatif, yang disebut label.*

Berdasarkan domainnya, pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*) jika domainnya himpunan titik, pelabelan sisi (*edge labeling*) jika domainnya himpunan sisi, dan disebut pelabelan total (*total labeling*) jika domainnya himpunan titik dan himpunan sisi.

Definisi 2.6.2 *Bobot (weight) titik v pada pelabelan total adalah label titik v ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v yaitu* $wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ [6].

Contoh 2.6.1:



Gambar 2.6.1 Pelabelan total pada graf C_6

Misal f adalah pelabelan total pada C_6 maka pelabelan titiknya adalah

$f(v_1) = 1,\quad f(v_2) = 1,\quad f(v_3) = 1,$

$f(v_4) = 2,\quad f(v_5) = 2,\quad f(v_6) = 4.$

Adapun pelabelan sisinya yaitu

$f(v_1v_2) = 1,\quad f(v_1v_6) = 1,\quad f(v_2v_3) = 2,$

$f(v_3v_4) = 2,\quad f(v_4v_5) = 2,\quad f(v_5v_6) = 3.$

Sehingga, diperoleh bobot titiknya sebagai berikut.

$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_6) = 1 + 1 + 1 = 3,$

$wt(v_2) = f(v_1v_2) + f(v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 2 = 4,$

$wt(v_3) = f(v_2v_3) + f(v_3) + f(v_3v_4) = 2 + 1 + 2 = 5,$

$wt(v_4) = f(v_3v_4) + f(v_4) + f(v_4v_5) = 2 + 2 + 2 = 6,$

$wt(v_5) = f(v_4v_5) + f(v_5) + f(v_5v_6) = 2 + 2 + 3 = 7,$

$wt(v_6) = f(v_5v_6) + f(v_6) + f(v_1v_6) = 3 + 4 + 1 = 8.$

2.7 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

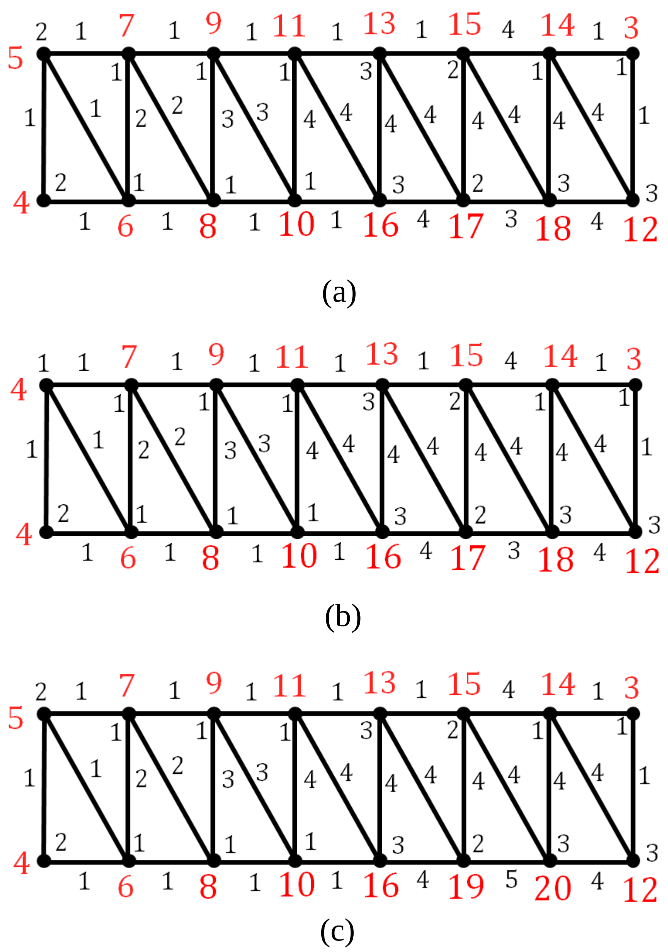
Bača dkk. (2007), dikutip dari [4], memberikan definisi pelabelan total tidak teratur titik, nilai total ketidakteraturan titik, serta sebuah teorema batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik dari suatu graf G sebagai berikut.

Definisi 2.7.1 *Misalkan* $G = (V(G), E(G))$ *adalah graf sederhana. Suatu pelabelan* $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ *disebut pelabelan*$-k$ *total tidak teratur titik pada graf* G *jika untuk setiap* $u, v \in V(G)$ *dan* $u \neq v$, *berlaku* $wt(u) \neq wt(v)$ *dengan*

$$wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv).$$

Definisi 2.7.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari graf* G, *dinotasikan* $tvs(G)$, *adalah bilangan bulat positif terkecil* k *sedemikian sehingga* G *mempunyai pelabelan*$-k$ *total tidak teratur titik.*

Contoh 2.7.1:



Gambar 2.7.1 Beberapa pelabelan total tidak teratur titik graf tangga segitiga TL_8

Sumber:[9], telah diolah kembali.

Berdasarkan Gambar 2.7.1 diperoleh:

1. Gambar 2.7.1 (a) merupakan pelabelan-4 total ketidakteraturan titik pada TL_8.
2. Gambar 2.7.1 (b) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf TL_8 karena terdapat dua titik dengan bobot yang sama yaitu 4.
3. Gambar 2.7.1 (c) merupakan pelabelan-5 total ketidakteraturan titik pada graf TL_8.

Namun, graf TL_8 tidak mempunyai pelabelan-1, pelabelan-2 dan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik, sehingga k terkecil yang diperoleh adalah 4. Oleh karena itu, nilai total ketidakteraturan titik pada graf TL_8 adalah 4. Dengan kata lain, $tvs(TL_8) = 4$.

Batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik suatu graf G diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.7.1 *Misalkan G adalah sebuah graf (p,q), di mana p adalah banyaknya titik, dengan derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$, maka berlaku*

$$\left\lceil \frac{(p+\delta)}{(\Delta+1)} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1.$$