NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF GRID G_{4n} YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

CAHYUDI GRATIO TANDIRERUNG

H011171311

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF GRID G_{4n} YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

CAHYUDI GRATIO TANDIRERUNG

H011171311

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Cahyudi Gratio Tandirerung
NIM	: H011171311
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK

PADA GRAF GRID G_{4n} YANG DIMODIFIKASI

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 9 Juni 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

E6AJX852965455

Cahyudi Gratio Tandirerung
NIM. H011171311

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF GRID G_{4n} YANG DIMODIFIKASI

Disusun dan diajukan oleh

CAHYUDI GRATIO TANDIRERUNG

H011171311

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal 9 Juni 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 197008807200031002	**NIP. 198505292008121002**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008807200031002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan sebagai persyaratan akademik untuk meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas MAtematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada kedua orang tua, Ayahanda **Axtur Tandirerung** dan Ibunda tersayang **Yestin Rapimawo Poai, S.TR. Keb.** Yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran dan kasih sayang, serta tak henti-hentinya memberikan doa dan dukungan untuk penulis demi keberhasilan penulis menjalani segala proses pendidikan. Ucapan terima kasih juga penulis tujukan kepada kakak dan adik tercinta, **Meys Hartina Tandirerung** dan **Sri Wahyuni Tandirerung** serta seluruh keluarga yang selalu senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.,** selaku pembimbing pertama yang dengan penuh kesabaran membimbing, memberikan pencerahan dan petunjuk kepada penulis dari awal penyususan hingga selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih juga kepada Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.,** selaku anggota tim penguji yang telah memberikan kritik, saran dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.

Penghargaan dan ucapan terima kasih dengan penuh ketulusan juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan Bapak **Dr. Eng Amiruddin, M.Si** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.

2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** , dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku Ketua dan Sekertaris Departemen Matematika FMIPA Unhas atas

ilmu dan nasehat yang telah diberikan kepada penulis. Penulis juga berterima kasih atas dedikasi dosen-dosen pengajar, khususnya **Pak Anwar**, serta staf Departemen atas ilmu dan bantuan yang bermanfaat.

3. Saudara(i) **Matematika 2017**, terkhusus **Indah, Nisa, Defi, Ayu, Uni, Alfian, Fatir, Syaiful, Mamat, Riswan, Kaye, Deniz, Heru, Callu, Iqbal, Abrian, Farah, Teka, Dilla, Indi, Lenny, Akin, Esty, Upi, Itha, Acca, MJ, Rista, Khandy, Wulan, Luthfia, dan Ifah** atas segala bentuk dukungan dan bantuannya selama proses perkuliahan dan penyusunan tugas akhir ini. Terima kasih atas kebersamaan dan ikatan persaudaraan yang telah terjalin dari mahasiswa baru hingga sekarang, kalian semua mantap jiwa.
4. Keluarga besar **Himatika FMIPA Unhas** terkhusus kepada **BE Himatika FMIPA Unhas Periode 2019-2020** atas segala ilmu dan pengalaman organisasi ataupun kepanitiaan yang tentunya penulis tidak akan dapatkan di kelas perkuliahan. Terima kasih pula atas kekeluargaan yang terjalin dari awal bertemu hingga saat ini.
5. Saudara(i) **DISKRIT 2017** atas segala dedikasi serta semangatnya dalam menjalankan roda organisasi dan berbagai pengalaman seru lainnya. Semoga ilmu yang didapatkan dapat diterapkan penulis dalam kehidupan sehari-hari untuk menjadi lebih baik lagi.
6. Keluarga besar **GMKI Cabang Makassar Komisariat FMIPA Unhas** dan **PMKO Filadelfia MIPA_Farmasi Unhas** yang telah menerima penulis sejak mahasiswa baru dan terus membentuk kepribadian penulis, khususnya secara rohani dengan berbagai pelayanan yang ada.
7. Teman-teman **KKN UNHAS gelombang 104** yang telah mewarnai masa-masa KKN penulis ketika mengabdi kepada masyarakat. Terima kasih atas waktu singkat, kebersamaan, dan pengalaman yang sangat berharga bagi penulis.
8. **Jerome Polin Sijabat**, konten kreator dengan konten edukatifnya di sosial media yang selalu memotivasi penulis dalam bidang akademik maupun non-akademik.

9. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas segala bentuk doa, dukungan, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini. Semoga apa yang diberikan, dilipatgandakan oleh Tuhan Yang Maha Esa.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Makassar, 9 Juni 2022

Cahyudi Gratio Tandirerung

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Cahyudi Gratio Tandirerung
NIM	: H011171311
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF GRID G_{4n} YANG DIMODIFIKASI"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar, pada tanggal 9 Juni 2022.

Yang menyatakan,

Cahyudi Gratio Tandirerung

ABSTRAK

Nilai total ketidakteraturan titik dari graf G, dinotasikan dengan $tvs(G)$ merupakan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki suatu pelabelan-k total tidak teratur titik. Pada penelitian ini akan ditentukan nilai total ketidakteraturan pada graf grid G_{4n} yang dimodifikasi, dinotasikan dengan GM_n. Adapun $tvs(GM_n)$ diperoleh dengan menentukan batas bawah dan batas atasnya. Batas bawahnya ditentukan dengan menggunakan teorema yang relevan sedangkan batas atasnya ditentukan dengan pelabelan total tidak teratur titik. Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh $tvs(GM_n) = \left\lceil \frac{4n+3}{6} \right\rceil$, dengan $n \geq 6$ dan n adalah bilangan genap.

Kata kunci: *graf grid, pelabelan total tidak teratur titik, nilai total ketidakteraturan titik*

ABSTRACT

The total vertex irregularity strength of graph G, denoted by $tvs(G)$ is the smallest positive integer k such that G has a vertex irregular total k-labeling. In this research, the total vertex irregularity strength of the modified G_{4n} grid graph, denoted by GM_n will be determined. The $tvs(GM_n)$ is obtained by determining the lower bound and the upper bound. The lower bound is determined by using relevant theorem, while the upper bound is determined by using vertex irregular total labeling. Based on the results of this study, we have $tvs(GM_n) = \left\lceil \frac{4n+3}{6} \right\rceil$, for $n \geq 6$ and n are an even numbers.

Keywords: *grid graph, vertex irregular total labeling, the total vertex irregularity strength*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$V(G)$	: Himpunan titik graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi graf G
$\deg(v)$	: Derajat titik v pada suatu graf
$\delta(G)$	: Derajat titik minimum pada graf G
$\Delta(G)$	: Derajat titik maksimum pada graf G
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
C_n	: Graf lingkaran dengan n titik
G_{4n}	: Graf grid dari hasil kali kartesius P_4 dan P_n
GM_n	: Graf grid G_{4n} yang dimodifikasi
$wt(v)$	: Bobot titik v
$f(v)$	: Pelabelan pada titik v
$f(uv)$	: Pelabelan pada sisi uv
$tvs(G)$	: Nilai total ketidakteraturan titik graf G

BAB 1
PENDAHULUAN

Bab ini berisikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, serta sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian.

1.1. Latar Belakang

Seiring dengan perkembangan zaman, matematika menjadi salah satu ilmu dasar yang dapat dimanfaatkan dalam kehidupan untuk memecahkan masalah. Oleh karena itu, matematika dengan berbagai cabang ilmunya sering digunakan untuk menemukan jawaban terhadap masalah yang dihadapi oleh manusia. Salah satu cabang ilmu yang terdapat dalam matematika adalah teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah tersebut kemudian digambarkan dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan daerah satu dengan daerah lain. Hal inilah yang menjadi konsep awal lahirnya teori graf.

Salah satu topik yang terdapat dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan graf merupakan pemberian nilai dengan bilangan bulat positif pada titik, sisi atau keduanya dari suatu graf sehingga memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi [1]. Salah satu jenis pelabelan total pada graf adalah pelabelan total tidak teratur.

Konsep pelabelan tidak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Gary Chartrand. Pelabelan tidak teratur pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,\mathrm{k}\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Nilai ketidakteraturan dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan k tidak teratur [2].

Pelabelan total tidak teratur terbagi menjadi dua jenis, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian terhadap pelabelan total tidak teratur titik. Badawi, S. [3] menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid untuk $n \geq 2$, dengan hasil $tvs(G_{n^2}) = \left\lceil \frac{n^2+2}{5} \right\rceil$. Fatimah, S. [4] menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *splitting* $Spl(K_{1,n})$ untuk $n \geq 3$ dengan hasil $tvs(Spl(K_{1,n})) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Harianja, S. F. [5] menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf seri pararel $sp(m, 1,5)$, dengan hasil $tvs(sp(m, 1,5)) = \left\lceil \frac{5m+2}{3} \right\rceil$. Saputri, S. [6] menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf seri pararel $sp(m, 2,4)$, dengan hasil $tvs(sp(m, 2,4)) = \left\lceil \frac{8m+2}{3} \right\rceil$. Nurlindah [7] menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi, dengan hasil $tvs(GD_n) = \left\lceil \frac{2m+3}{6} \right\rceil$.

Nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid telah ditentukan oleh peneliti sebelumnya. Namun, belum dilakukan penelitian tentang graf grid G_{4n}. Graf grid G_{4n} merupakan graf yang memiliki jumlah titik 4 dikali n. Graf grid G_{4n} memiliki titik yang berderajat 2, 3, dan 4. Pada rencana penelitian tugas akhir ini, graf yang akan ditentukan nilai total ketidakteraturan titiknya adalah graf grid G_{4n} yang dimodifikasi. Graf grid G_{4n} yang dimodifikasi merupakan suatu graf dengan penambahan sisi pada titik yang berderajat 2 dan 4, sehingga titiknya menjadi berderajat 3 dan 5. Berdasarkan hal tersebut, yang menjadi rencana judul dari penulis pada penelitian ini adalah **"Nilai Total Ketikteraturan Titik Pada Graf Grid G_{4n} Yang Dimodifikasi".**

1.2 Rumusan Masalah

Adapun yang menjadi rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid G_{4n} yang dimodifikasi?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, batasan modifikasi yang dilakukan pada graf grid G_{4n} adalah hanya menambahkan sisi pada titik yang berderajat 2 dan 4, sehingga menjadi titik berderajat 3 dan 5. Selain itu, penulis hanya membahas pelabelan total tidak teratur titik graf grid G_{4n} yang dimodifikasi, dengan $n \geq 6$ dan n adalah bilangan genap.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid G_{4n} yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1) Memperluas pengetahuan dan pengembangan keilmuan dalam bidang ilmu matematika, secara khusus mengenai perkembangan dari teori graf.
2) Sebagai sarana penulis dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang selama ini menjadi bidang ilmu yang dipelajari.
3) Sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika dibidang teori graf khusunya tentang nilai total ketidakteraturan titik.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini, penulisannya terdiri dari lima bab, yakni sebagai berikut:

1) Bab I Pendahuluan, yakni membahas latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.
2) Bab II Tinjauan Pustaka, yakni membahas secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu berbagai macam definisi dan teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total tidak teratur titik pada graf grid, antara lain pengertian graf, terminologi graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf dan pelabelan total tidak teratur.
3) Bab III Metodologi Penelitian, yakni membahas metode penelitian dan langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid G_{4n} yang dimodifikasi.
4) Bab IV Hasil dan Pembahasan, yakni membahas mengenai hasil utama dari tugas akhir ini yaitu menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid G_{4n} yang dimodifikasi.

5) Bab V Penutup, yakni memuat kesimpulan dari pengerjaan tugas akhir secara keseluruhan serta terdapat saran yang ditujukan bagi peneliti lain agar bisa mengembangkan penelitian ini.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisikan tentang definisi, terminologi, operasi, dan jenis-jenis graf, serta pelabelan graf yang relevan dengan topik penelitian.

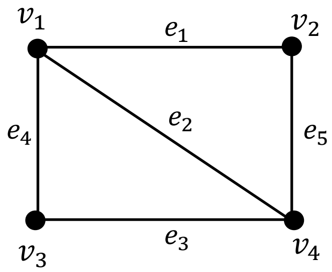
2.1 Pengertian Graf

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi, dengan himpunan sisi diperoleh dari himpunan titiknya. Pengaitan titik–titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan menjadi sebuah gambar sehingga membentuk suatu graf. Secara formal definisi graf dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 *Graf G adalah pasangan himpunan (V,E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi* [8].

Himpunan titik graf G biasanya dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Suatu sisi e di $E(G)$ yang merupakan pasangan tidak terurut dari titik u dan v di $V(G)$ dapat dinyatakan dengan $e = \{u, v\}$. Namun dalam penulisan selanjutnya, sisi $e = \{u, v\}$ hanya akan ditulis $e = uv$.

Adapun contoh graf G beserta himpunan titik dan sisinya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Graf G.

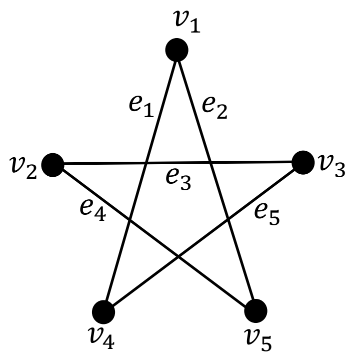
Pada Gambar 2.1, himpunan titik dan sisi graf G adalah $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_4$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_1v_3$ dan $e_5 = v_2v_4$.

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf, terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada pembahasan tugas akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Jika $e = uv$ adalah sisi dari suatu graf G, maka u dan v dikatakan titik-titik bertetangga (adjacent vertices), dan e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan v. Selanjutnya, jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda di G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi bertetangga (adjacent edges)* [2].

Adapun contoh graf G beserta pasangan titik dan sisi yang bertetangga dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.2.1 Graf G.

Pada Gambar 2.2.1, graf G memiliki beberapa pasangan titik dan sisi yang bertetangga. Titik v_1 dengan v_4 adalah titik-titik yang bertetangga karena terdapat sisi e_1 yang terkait dengan $v_1$dan v_4, demikian juga titik v_1 dengan v_5, titik v_2 dengan v_3, titik v_2 dengan v_5, dan titik v_3 dengan v_4. Sisi e_1 dengan e_2 adalah sisi-sisi yang bertetangga karena masing-masing terkait dengan satu titik yang sama yaitu v_1, demikian juga sisi e_1 dengan e_5, sisi e_2 dengan e_4, sisi e_3 dengan e_4, dan sisi e_3 dengan e_5.

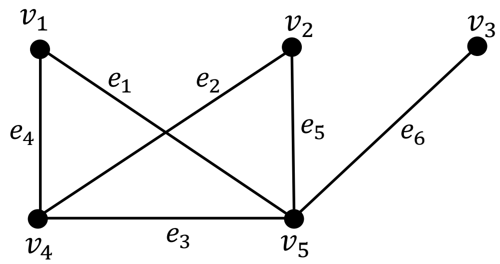
Definisi 2.2.2 *Banyaknya anggota $V(G)$ dari suatu graf G disebut order, sedangkan banyaknya anggota $E(G)$ dari suatu graf G disebut ukuran (size)* [2].

Definisi 2.2.3 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan $v \in V(G)$. Derajat (degree) dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v, dinotasikan dengan deg(v). Untuk derajat terkecil dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ sedangkan derajat terbesar dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$* [2].

Definisi 2.2.4 *Lintasan dari titik v_0 ke titik v_n pada graf G dinotasikan dengan lintasan $v_0 - v_n$, adalah suatu barisan selang-seling antar titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}e_n, v_n$, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, untuk $i = 1,2, \dots, n$ merupakan sisi dari graf* [2].

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (closed path), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (open path).

Adapun contoh graf G beserta order, ukuran, derajat, dan lintasanya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.2.2 Graf G.

Pada Gambar 2.2.2, graf G berorder 5 dan berukuran 6, dengan derajat disetiap titiknya adalah:

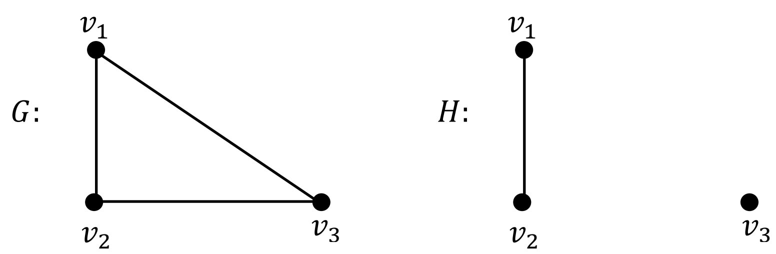
$\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 1$, $\deg(v_4) = 3$, dan $\deg(v_5) = 4$.

Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 4$.

Pada Gambar 2.2.2 yang merupakan lintasan terbuka adalah $v_1 - v_4 - v_5 - v_3$, karena berawal dan berakhir pada titik yang berbeda. Sedangkan $v_1 - v_5 - v_2 - v_4 - v_1$ merupakan lintasan tertutup karena berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Definisi 2.2.5 *Misalkan G adalah suatu graf dan u,v* $\in V(G)$. *Graf G disebut graf terhubung (connected), jika setiap dua titik yang berbeda di G terdapat suatu lintasan dari u ke v* [2].

Adapun contoh graf terhubung dan tak terhu*b*ung dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 4.2.3 Graf Terhubung dan Tak Terhubung.

Pada Gambar 2.2.3 menunjukkan G adalah graf terhubung karena setiap dua titik yang berbeda dari G terdapat lintasan. Sedangkan H adalah graf tak terhubung karena terdapat dua titik berbeda yang tidak memiliki lintasan yaitu titik v_1 dengan v_3 dan titik v_2 dengan v_3.

2.3 Perkalian Kartesius

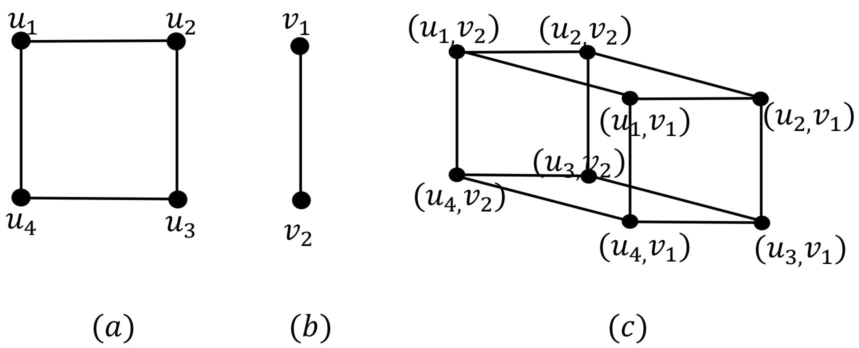
Secara formal, definisi perkalian kartesius dari graf dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.3 *Perkalian kartesius dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf yang dinotasikan dengan* $G = G_1 \times G_2$ *dan mempunyai titik* $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$*, dua titik* (u_1, u_2) *dan* (v_1, v_2) *di graf* G *bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:*

1. $u_1 = v_1$ *dan* $u_2, v_2 \in E(G_2)$

2. $u_2 = v_2$ *dan* $u_1, v_1 \in E(G_1)$ [2].

Misalkan diberikan graf C_4 dan P_2. Perkalian kartesius dari graf C_4 dan P_2 akan menghasilkan suatu graf $C_4 \times P_2$, seperti pada gambar berikut:



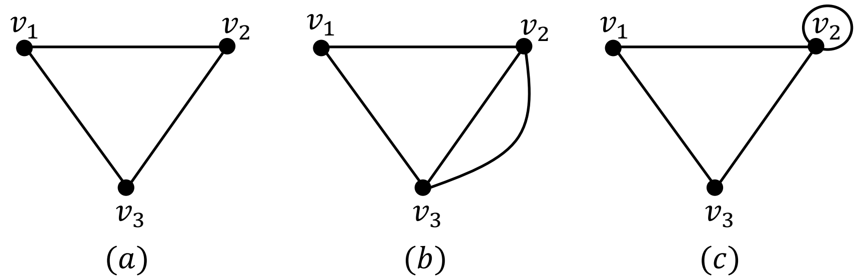
Gambar 5.3 (a) Graf C_4, (b) Graf P_2, dan (c) Graf $C_4 \times P_2$.

2.4 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yang digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.4.1 *Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda (multiple edges) dan gelang (loop)* [2].

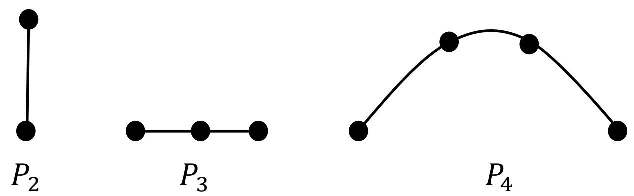
Adapun contoh graf sederhana dan tak sederhana dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 6.4.1 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, dan (c) Graf tak sederhana.

Definisi 2.4.2 *Graf lintasan (path) memiliki* n *titik dan* $n - 1$ *sisi dengan* $n \geq 2$, *dinotasikan dengan* P_n *adalah graf dengan barisan titik* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *dan* $v_i v_{i+1} \in (P_n), i = 1,2, \dots, n-1$ *dan* $v_i \neq v_j$ *untuk* $i \neq j$ [9].

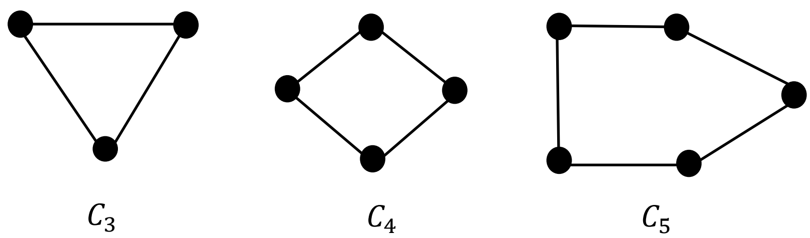
Adapun contoh graf lintasan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 7.4.2 Graf Lintasan.

Definisi 2.4.3 *Graf lingkaran (cycle) memiliki* n *titik dan* n *sisi dengan* $n \geq 3$, *dinotasikan dengan* C_n *adalah graf terhubung yang dibentuk dari lintasan tertutup yakni berawal dan berakhir pada titik yang sama, dengan setiap titiknya berderajat* 2 *dan masing-masing titiknya dilalui tepat satu kali* [9].

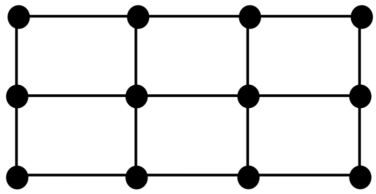
Adapun contoh graf siklus dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 8.4.3 Graf Lingkaran.

Definisi 2.4.4 *Graf grid merupakan graf yang diperoleh dari hasil kali kartesius graf lintasan* $P_{n1} \times P_{n2}$ [3].

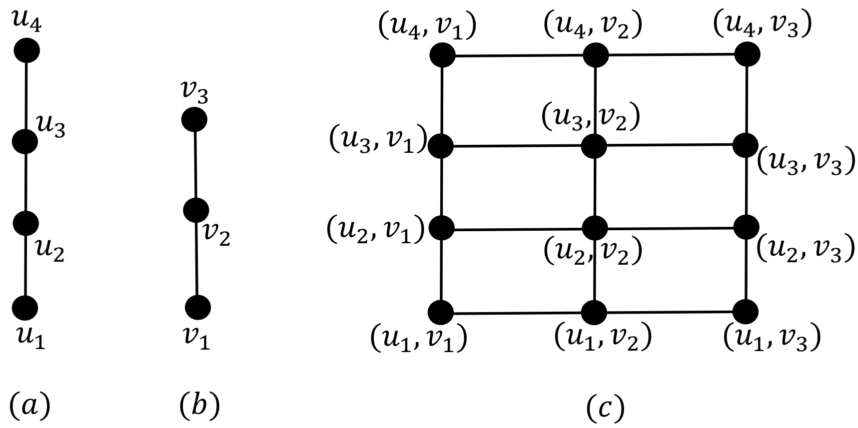
Adapun contoh graf grid dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 9.4.4 Graf Grid.

Graf grid biasanya juga disebut sebagai graf persegi panjang karena tampilannya yang berbentuk seperti persegi panjang. Berdasarkan Definisi 2.3 dan karena $V(P_{n1}) = n1$, $V(P_{n2}) = n2$, maka jumlah titik pada graf grid $G = P_{n1} \times P_{n2}$ adalah $n1$ dikali $n2$. Misalkan untuk graf grid $G = P_4 \times P_3$, jumlah titiknya adalah 4 dikali 3, yaitu 12. Graf grid $G = \mathrm{P}_4 \times \mathrm{P}_\mathrm{n}$ mempunyai jumlah titik 4 dikali n, dinotasikan dengan $\mathrm{G}_{4\mathrm{n}}$. Graf grid $\mathrm{G}_{4\mathrm{n}}$ mempunyai derajat 2, 3, dan 4.

Misalkan diberikan graf lintasan P_4 dan P_3, maka graf grid $G_{4(3)}$ diperoleh dari hasil kali kartesius graf lintasan P_4 dan P_3 yang dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 10.4.5 (a) Graf P_4, (b) graf P_3, dan (c) Graf grid $G_{4(3).}$

Pada penelitian tugas akhir ini, penulis akan melakukan pelabelan pada graf grid G_{4n}. Akan tetapi, graf tersebut akan dimodifikasi terlebih dahulu, yakni dengan menambahkan sisi pada titiknya yang berderajat 2 dan 4, sedemikian sehingga titiknya menjadi berderajat 3 dan 5. Secara formal, graf grid G_{4n} yang dimodifikasi akan didefinisikan di bab 4.

2.5 Pelabelan Graf

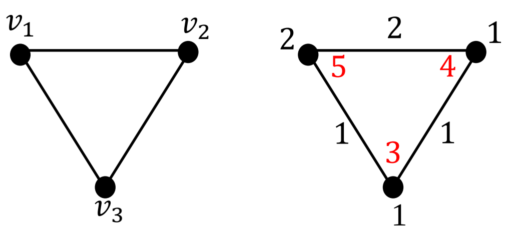
Salah satu pembahasan yang terus berkembang dalam teori graf adalah pelabelan graf. Berikut diberikan definisi yang berhubungan dengan pelabelan graf.

Definisi 2.5.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan setiap elemen graf G ke suatu himpunan bilangan bulat positif* [3].

Pelabelan graf dengan domain fungsinya adalah himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), sedangkan jika domain fungsinya adalah himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*). Adapun jika domain fungsinya adalah himpunan titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labelling*). Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan graf disebut himpunan label.

Definisi 2.5.2 *Bobot titik v pada pelabelan total f adalah label titik v yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu $wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in V} f(uv)$* [3].

Adapun contoh pelabelan total dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 11.5 Pelabelan total pada graf lingkaran C_3.

Pada Gambar 2.5 menunjukkan graf lingkaran C_3 yang setiap titik dan sisinya telah dilabeli dengan bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total.

Fungsi pelabelan titik pada graf siklus C_3:

$$f(v_1) = 2 \, , \; f(v_2) = 1 \, , f(v_3) = 1.$$

Fungsi pelabelan sisi pada graf siklus C_3:

$$f(v_1v_2) = 2 \, , f(v_1v_3) = 1 \; \, , f(v_2v_3) = 1 \, .$$

Bobot titik-titiknya adalah sebagai berikut:

$$wt(v_1) = \; f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3) = 2 + 2 + 1 = 5,$$

$$wt(v_2) = \; f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 2 + 1 = 4,$$

$$wt(v_3) = \; f(v_3) + f(v_1v_3) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

2.6 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

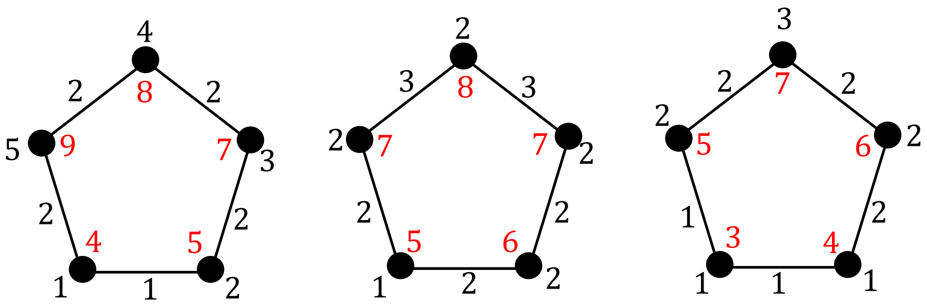
Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai pelabelan total tidak teratur titik, nilai total ketidakteraturan titik, dan teorema yang akan digunakan pada topik penelitian.

Definisi 2.6.1 *Misalkan* $G(V,E)$ *adalah graf sederhana. Pelabelan total* $f: V \cup E \to \{1,2,3,\ldots,k\}$ *disebut suatu pelabelan-*k *total tidak teratur titik (total vertex irregular* k*-labeling) pada graf* G *jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada* V *berlaku* $wt(x) \neq wt(y)$, *dengan*

$$wt(x) = f(x) + \sum_{xu \in V} f(xu) \text{ [3].}$$

Definisi 2.6.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari graf* G, *dinotasikan dengan* $tvs(G)$, *adalah bilangan bulat positif terkecil* k *sedemikian sehingga* G *mempunyai suatu pelabelan-*k *total tidak teratur titik* [3].

Adapun contoh sederhana cara menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada suatu graf dapat dilihat pada gambar berikut:



(a) (b) (c)

Gambar 12.6 Beberapa pelabelan total pada graf lingkaran C_5.

Gambar 2.6 menunjukkan beberapa pelabelan total pada graf lingkaran C_5. Pada bagian (a) merupakan pelabelan-5 total tidak teratur titik dan bagian (c) merupakan pelabelan-3 total tidak teratur titik karena masing-masing memiliki bobot titik yang berbeda. Sedangkan pada bagian (b) bukan merupakan pelabelan-2 total tidak teratur titik karena terdapat bobot titik yang sama, yaitu 7. Akibatnya, diperoleh bilangan bulat positif tekecil k pada graf lingkaran C_5 adalah 3, sehingga berdasarkan Definisi 2.6.2, maka nilai total ketidakteraturan titik pada graf lingkaran C_5 adalah 3 atau dapat ditulis $tvs(C_5) = 3$.

Batas bawah nilai total ketidakteraturan titik dari graf G dikembangkan oleh Bača, M. dkk. menggunakan fungsi ceiling yang kemudian dituliskan menjadi suatu teorema. Adapun definisi fungsi ceiling [10] dan terorema Bača, M. dkk. [11] dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.6.3 *Fungsi ceiling, dinotasikan dengan* $\lceil x \rceil$*, jika untuk setiap* $x \in \mathbb{R}$ *maka berlaku:*

$$\lceil x \rceil = min\{p \in \mathbb{Z} | p \geq x\}.$$

Teorema 2.6 *Misalkan sebuah graf* $G(V,E)$ *berorder* n*, dengan* $\delta(G)$ *adalah derajat minimum dan* $\Delta(G)$ *adalah derajat maksimum, maka berlaku:*

$$tvs(G) \geq \left\lceil \frac{(n+\delta(G))}{(\Delta(G)+1)} \right\rceil.$$

Pada penelitian ini, Teorema 2.6 akan digunakan dalam menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik, sedangkan untuk batas atas nilai total ketidakteraturan titik akan ditentukan dengan menggunakan pelabelan total tidak teratur titik.