PENENTUAN UKURAN BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT PADA GRAF BUKU TERHADAP GRAF BINTANG ORDE EMPAT

SKRIPSI

ALIF MIFTAHUL JANNAH A.R

H011171307

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2022

PENENTUAN UKURAN BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT PADA GRAF BUKU TERHADAP GRAF BINTANG ORDE EMPAT

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ALIF MIFTAHUL JANNAH A.R

H011171307

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2022

Universitas Hasanuddin

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Alif Miftahul Jannah A.R
NIM	: H011171307
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Penentuan Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit Pada Graf Buku Terhadap Graf Bintang Orde Empat

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 11 Maret 2022

Yang menyatakan,

Alif Miftahul Jannah A.R

NIM. H011171307

ii

Universitas Hasanuddin

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN UKURAN BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT PADA GRAF BUKU TERHADAP GRAF BINTANG ORDE EMPAT

Disusun dan diajukan oleh

ALIF MIFTAHUL JANNAH A.R

H011171307

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 11 Maret 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19680803 199202 1 001**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008807200003 1002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

iii

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit Pada Graf Buku Terhadap Graf Bintang Berorde Empat"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada program studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Salam dan shalawat penulis kirimkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan, bimbingan, dukungan dan motivasi dari bebagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada Ibunda **Erna Mahmud, S.Pd** dan Ayahanda **Drs. Raman, M.Pd** yang telah bekerja keras membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas dukungan dan doa kepada adik-adik **Nurul, Huriah, Putra dan Aura** serta seluruh keluarga. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Pulubuhu, M.A.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu PengetahuanAlam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si**. selaku Ketua Departemen Matematika beserta **Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika** yang senantiasa mendidik dan serta membagikan ilmu dan pengetahuannya kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika. Serta kepada Para **Staf Departemen Matematika** yang telah banyak membantu dalam pengurusan berkas.
3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku pembimbing Utama dan Bapak **Prof. Amir Kamal Amir, M.Sc.** yang telah sabar meluangkan waktu ditengah

kesibukannya dalam memberikan dukungan dan bantuan dalam proses pengerjaan skripsi ini.

4. Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing Akademik yang telah memberikan bantuan, nasihat, saran dan masukan kepada penulis selama masa perkuliahan di Program Studi Matematika.
5. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan **Prof. Eng. Mawardi, M.Sc.** selaku Penguji yang telah memberikan banyak saran dan masukan yang membangun dalam proses penyempurnaan skripsi ini.
6. Terima kasih kepada sahabat 1+1 penulis **Tasya Wiraz** yang telah menjadi teman terbaik serta atas segala bantuan, dukungan, suka-duka, dan waktu yang telah diberikan kepada penulis selama ini.
7. Kepada sahabat-sahabat **Bandar** dan **Geng-bel, Acca, Farah, Nanda, Kade, Khandy, Indi, Cici, Ekur, Firda**, dan **Dhila** yang selama ini telah menemani, mendukung dan mewarnai hari-hari dalam menjalani masa perkuliahan serta menjadi teman terbaik bagi penulis.
8. Kepada sahabat-sahabat **Baga-Baga** dan **Pikors, Fira, Dian, Maryam, Ririn, Imah,** dan **Kiki** yang selama ini telah mendukung dan mewarnai hari-hari dalam menjalani masa perkuliahan serta menjadi teman terbaik bagi penulis.
9. Terima kasih juga penulis persembahkan untuk teman-teman seangkatan **Matematika 2017** atas bantuan, dorongan serta masukan yang membangun selama berjuang menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
10. Keluarga besar **Himatika FMIPA UNHAS** yang telah memberikan banyak sekali ilmu dan pengalaman dalam roda keorganisasian yang tidak bisa penulis dapatkan dibangku kuliah. Terkhusus kepada teman-teman **17iskrit** yang telah berjuang bersama melewati segala keadaan dan juga atas kebersamaannya. Salam **Satukan, Eratkan, Kuatkan.**
11. Kepada **Kim Taehyung, Kim Seokjin, Kim Namjoon, Min Yoongi, Jung Hoseok, Park Jimin, Jeon Jungkook** dan **ARMY** yang telah menemani penulis dalam masa-masa jenuh penulisan skripsi.
12. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, terima kasih atas doa, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. *Special from my heart, I thank to Me for anything*.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis tetap mengharapkan kritikan dan saran yang bersifat membangun demi perbaikan skripsi ini kedepannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan khususnya bagi penulis.

Makassar, 11 Maret 2021

Alif Miftahul Jannah A.R

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Alif Miftahul Jannah A.R
NIM	: H011171307
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penentuan Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit Pada Graf Buku Terhadap Graf Bintang Orde Empat

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 11 Maret 2022

Yang menyatakan,

Alif Miftahul Jannah A.R

ABSTRAK

Misalkan graf G dan H adalah suatu graf sederhana maka ukuran bilangan Ramsey multipartit yaitu $m_j(G,H) = t$. Dimana t adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga sembarang pewarnaan sisi-sisi dengan dua warna pada graf $K_{j\times t}$ selalu memuat subgraf berwarna sama yang isomorfik dengan graf G atau graf H. Dalam skripsi ini dikaji $m_j(G,H)$ dimana G merupakan graf Buku B_n untuk $n \geq 3$ dan H merupakan graf Bintang S_4 dengan $j = \{3,4\}$. Dalam skripsi ini ditunjukkan bahwa $m_3(B_n, S_4) = 4$ untuk $n = 3$ dan $m_3(B_n, S_4) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 4$ serta $m_4(B_n, S_4) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

Kata kunci : Graf, Bilangan Ramsey, Ukuran Bilangan Ramsey, Multipartit, Graf Buku, dan Graf Bintang.

ABSTRACT

Let graphs G and H are simple graphs then, the size multipartite Ramsey number is d$m_j(G,H) = t$. Where t is the smallest natural number such that any coloring with two colors on the edges graph $K_{j\times t}$ always contains the same color subgraphs which is isomorphic to graph G or graph H. In this thesis discussed $m_j(G,H)$ where G is a book graph B_n for $n \geq 3$ and H is a star graph S_4 with $j = \{3,4\}$. In this thesis it is shown that $m_3(B_n, S_4) = 4$ for $n = 3$ and $m_3(B_n, S_4) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ for $n \geq 4$ also $m_4(B_n, S_4) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

Keywords : Graph, Ramsey Number, On size Ramsey Number, Multipartite, Book Graph, dan Star Graph.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$G(V, E)$	:	Graf yang terdiri dari himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$	:	Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	:	Himpunan sisi dari graf G
$d(v_i)$	:	Derajat titik v_i
$\Delta(G)$	:	Derajat maximum graf G
$\delta(G)$	:	Derajat minimum graf G
$\|V(G)\|$	:	Kardinalitas titik graf G
$\|E(G)\|$	:	Kardinalitas sisi graf G
$\overline{H}$	:	Komplemen dari graf H
$d(u, w)$	:	Jarak antara titik u dan titik w
$Amal(G, e, n)$	:	Amalgamasi sisi dari n graf G dengan e sebagai sisi bersama
C_n	:	Graf siklus dengan n titik
P_n	:	Graf lintasan dengan n titik
K_n	:	Graf lengkap dengan n titik
B_{n_1,n_2}	:	Graf bipartit
$K_{m,n}$	:	Graf bipartit lengkap
$B_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$	:	Graf multipartit dengan j partisi
$K_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$	:	Graf multipartit lengkap dengan j partisi
$K_{j\times t}$	:	Graf multipartit lengkap seimbang dengan j partisi dan t titik tiap partisinya
T_n	:	Graf pohon dengan n titik
S_n	:	Graf Bintang dengan n titik
B_n	:	Graf buku dengan $2n + 2$ titik
$R(G, H)$	:	Bilangan Ramsey untuk graf G dan H
$R(G_1, G_2, \ldots, G_k)$	:	Bilangan Ramsey untuk graf $G_1, G_2, \ldots, G_k$
$m_j(G, H)$	:	Ukuran bilangan Ramsey multipartit Graf G dan H
$E(V_i, V_j)$	:	Himpunan sisi dari partisi V_i ke V_j

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss bernama L. Euler (1736). Salah satu penelitian yang termasuk cabang dalam bidang Graf ialah Teori Bilangan Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikaji oleh Frank Plumpton Ramsey (1930). Teori ini digunakan pada konteks permasalahan dalam mencari prosedur untuk menentukan kebenaran dari suatu formula logika yang diberikan.

Teori Ramsey menjadi sangat terkenal setelah Erdös dan Szekeres (1935) menerapkan teori Ramsey tersebut kedalam teori graf yang kemudian dikenal dengan sebutan bilangan Ramsey klasik dua warna. Namun, seiring berjalannya waktu penelitian ini menjadi sulit sehingga hanya sembilan bilangan eksak untuk Bilangan Ramsey klasik yang ditemukan. Oleh sebab itu beberapa peneliti memperumum konsep tersebut menjadi Bilangan Ramsey Graf Sebarang.

Teorema Ramsey untuk sebarang graf dijabarkan sebagai berikut, untuk sembarang graf $G_1, G_2, \dots, G_k$, terdapat bilangan bulat minimun M_0 sehingga apabila graf lengkap G dengan paling sedikit M_0 titik, semua sisinya diwarnai dengan k warna, maka terdapat subgraf yang isomorfik dengan graf G_i dari G dengan semua sisi berwarna sama untuk suatu i, $1 \leq i \leq k$. Bilangan M_0 ini disebut bilangan Ramsey untuk pasangan graf $G_1, G_2, \dots, G_k$. Jika $k = 2$, maka $R(G_1, G_2)$ disebut bilangan Ramsey graf dua warna dan jika $k > 2$ maka $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ disebut bilangan Ramsey graf multiwarna. Jika untuk setiap i, G_i adalah graf lengkap, maka bilangan $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ disebut bilangan Ramsey klasik. Graf lengkap G dengan paling sedikit M_0 titik bisa kita menyebutnya sebagai graf kuasa. Jika graf kuasa pada bilangan Ramsey graf adalah graf multipartit, maka disebut bilangan Ramsey multipartit (Hasmawati, 2015).

Penelitian mengenai bilangan Ramsey saat ini semakin mengalami perkembangan. Beberapa penelitian terkait mengenai konsep bilangan Ramsey ini yaitu bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey graf, dan bilangan Ramsey minimal.

Bilangan Ramsey minimal ini kemudian mengalami perluasan menjadi ukuran bilangan Ramsey. Salah satu dari perkembangan ukuran bilangan Ramsey ini kemudian diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren (2004) pada penelitiannya mengenai ukuran bilangan Ramsey multipartit pada kombinasi graf lengkap $m_j(K_{p\times q}, K_{n\times l})$.

Dalam penelitian tersebut, Burger dan Vuuren menggabungkan konsep bilangan Ramsey klasik dan ukuran bilangan Ramsey pada kombinasi graf lengkap. Pada tahun 2005, Syafrizal dkk selanjutnya memperumum konsep Burger dan Vuuren dengan menggunakan sebarang dua buah graf G dan H. Dimana Konsep dari ukuran bilangan Ramsey multipartit yaitu misalkan graf G dan H adalah suatu graf sederhana maka ukuran bilangan Ramsey multipartit yaitu $m_j(G,H) = t$. Dimana t adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga sembarang pewarnaan sisi-sisi dengan dua warna pada graf $K_{j\times t}$ selalu memuat subgraf berwarna sama yang isomorfik dengan graf G merah atau graf H biru (Baskoro, dkk., 2020).

Penelitian terkait ukuran bilangan Ramsey multipartit hingga saat ini terus berkembang pesat. Beberapa penelitian yang telah dilakukan terkait konsep ukuran bilangan Ramsey multipartit diantaranya Ukuran bilangan Ramsey multipartit pada kombinasi graf lengkap $m_j(K_{s\times t}, K_{n\times l})$ oleh Burger dan Vuuren (2004). Pada tahun 2007, Syafrizal, dkk. melakukan penelitian untuk sembarang dua buah graf yaitu ukuran bilangan Ramsey multipartit pada kombinasi graf lintasan dan graf sederhana $m_j(P_s, G)$, dimana G berupa W_n, S_n, F_n, dan M_{2n}. Adapula penelitian yang dilakukan Lusiana, dkk., yang berjudul menentukan Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit pada kombinasi graf bintang dan graf siklus $m_j(S_m, C_n)$

Selain itu penelitian ukuran bilangan Ramsey terhadap graf buku juga telah dilakukan dalam suatu penelitian yaitu penentuan ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf lintasan terhadap graf buku $m_j(P_3, B_n)$ oleh Jayawardene dan Ratnayake (2016). Berdasarkan dari hasil penelitian sebelumnya, terlihat bahwa begitu banyak peneliti yang tertarik untuk melakukan penelitian pada kajian ukuran bilangan Ramsey multipartit. Namun belum ada kajian mengenai ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku terhadap graf bintang. Berdasarkan hal tersebut maka akan dilakukan penelitian yang berjudul **“Penentuan Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit pada Graf Buku terhadap Graf Bintang berorde Kecil”**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada skripsi ini, maka penulis merumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana proses menentukan batas atas terbaik ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku terhadap graf bintang berorde kecil.
2. Bagaimana proses menentukan batas bawah terbaik ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku terhadap graf bintang berorde kecil.

1.3. Batasan Masalah

Dimana untuk rencana penelitian ini, diberikan batasan masalah yaitu penelitian hanya mencakup pada ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku segiterhadap graf bintang berorde kecil dalam hal ini orde yaitu ($m_j(B_n, S_4)$) dengan $j = \{3,4\}$ dan $n \geq 3, n \in N$.

1.4. Tujuan Penulisan

Adapula tujuan dari penelitian yang akan dilakukan tersebut yaitu

1. Menentukan batas atas terbaik ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku terhadap graf bintang berorde kecil ($m_j(B_n, S_4)$).
2. Menentukan batas bawah terbaik ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf buku terhadap graf bintang berorde kecil ($m_j(B_n, S_4)$).

1.5. Manfaat Penulisan

Adapula manfaat dari penelitian ini yaitu diharapkan agar skripsi ini dapat memberikan pengetahuan baru dalam teori graf, terkhusus pada kajian bilangan Ramsey dan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain terkait bilangan Ramsey ke depannya.

BAB 2
Tinjauan Pustaka

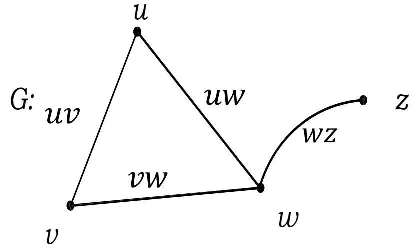
Pada bab ini akan diuraikan mengenai pengertian graf dan unsur-unsur didalamnya, jenis-jenis graf, operasi pada graf yang akan digunakan pada penelitian ini, dan bilangan Ramsey serta ukuran bilangan Ramsey multipartit.

2.1. Graf

Menurut Hasmawati (2020) dalam bukunya yang berjudul Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, graf G didefiniskan sebagai pasangan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit, yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan-pasangan anggota-anggota $V(G)$ disebut sisi (*edge*).

Sedangkan menurut Munir (2010) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik. Dimana dikatakan bahwa V tidak boleh kosong sedangkan E boleh kosong, maka suatu graf memungkin tidak memiliki sisi atau dengan kata lain hanya terdiri paling sedikit satu titik.

Berdasarkan kedua pengertian tersebut maka dapat disimpulkan bahwa graf G adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V disebut himpunan titik yang terdiri dari titik-titik dan tidak kosong, dan E disebut sebagai himpunan sisi yang merupakan himpunan dari pasangan-pasangan dari V. Apabila untuk suatu G terdapat $u, v \in V(G)$ dengan $uv = vu$ dan pada graf tersebut tidak terdapat *loop* maupun sisi parallel, maka graf G disebut graf sederhana.



Gambar 2.1. Graf $\boldsymbol{G}$

Pada gambar 2.1. Menunjukkan sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan $V(G) = \{ u, v, w, z\}$ merupakan titik-titik dari graf yang saling terhubung oleh pasangan sisi $E(G) = \{uv, vw, uw, wz\}$. Sisi-sisi dari Graf G dikatakan bertetangga apabila terkait pada sebuah titik yang sama. Hal ini dapat dilihat pada gambar 2.1 dimana sisi uv bertetangga dengan sisi vw, namun uv tidak bertetangga dengan sisi wz.

Penerapan graf dapat ditemui dalam kehidupan sehari-hari, misalkan pada model jaringan komputer, pengaturan lalu lintas (darat, udara, maupun laut), pembuatan jadwal kereta, pembuatan jadwal mata pelajaran dan sebagainya.

2.2. Unsur dasar Graf

Dalam suatu graf $G(V, E)$ terdiri atas unsur-unsur yang ditemui di dalamnya. Unsur-unsur tersebut akan diuraikan sebagi berikut :

a. Bertetangga (*adjacent*)

Dua buah titik suatu graf G dikatakan bertetangga apabila keduanya terhubung pada sisi yang sama. Begitupula dua buah sisi graf G dikatakan bertetangga apabila keduanya terkait pada satu titik yang sama.

Menurut Hasmawati (2020) dalam bukunya, misalkan G adalah suatu graf. Titik v_i , $v_j \in V(G)$ dan sisi $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa :

1. Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j.
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i. Demikian pula untuk titik v_j.

b. Derajat (*degree*)

Derajat suatu graf adalah banyaknya sisi $E(G)$ yang terkait dengan suatu titik $v_i \in V(G)$. Derajat dari v_i di simbolkan dengan $d(v_i)$.

Derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = max \{d(v): v \in V(G)\}$, sedangkan derajat minimum dari graf G dinotasikan δ(G), yaitu $\delta(G) = min \{d(v): v \in V(G)\}$. Jika $\delta(G) = \Delta(G)$ maka graf G disebut reguler (Hasmawati,2020).

c. Kardinalitas

Banyaknya jumlah anggota pada suatu himpunan disebut kardinalitas. Misalkan S adalah suatu himpunan. Banyaknya anggota S dinotasikan dengan $|S|$ disebut kardinalitas S.

Jika $p(G) \in V(G)$ maka kardinalitas dari himpunan titik G yaitu $|V(G)|$, dan Jika $q(G) \in V(G)$ maka kardinalitas dari himpunan sisi G yaitu $|E(G)|$ (Hasmawati,2020).

d. Subgraf dan komplemen subgraf

Misalkan $G(V,E)$ merupakan suatu graf yang terdiri dari $V(G)$ dan $E(G)$. Graf $H = (V(H), E(H))$ disebut subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Subgraf dari G ditulis sebagai $H \subseteq G$.

Subgraf F adalah komplemen dari subgraf H jika $F(V,E) \subseteq G(V,E)$ sedemikian sehingga sisi $E(F) = E(G) - E(H)$ dan $V(F)$ merupakan titik-titik yang berkaitan dengan sisi $E(F)$. Komplemen dari H biasanya dinotasikan sebagai H' atau $\overline{H}$.

e. Isomorfik

Dua buah graf, katakanlah graf G dan H dikatakan isomorfik apabila terdapat pemetaan satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$ begitupula $E(G)$ dan $E(H)$.

Suatu pemetaan satu-satu dari $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ dikatakan *isomorphisme* dari G ke H apabila memenuhi untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\theta(u), \theta(v) \in E(H)$. Dua graf G dan H dikatakan *isomorf*, jika ada *isomorphisme* antara G dan H (Hasmawati,2020).

Dengan kata lain, dua buah graf dengan bentuk berbeda dapat dikatakan isomorfik apabila memenuhi syarat yaitu :

1. Terdapat pemetaan satu-satu titik di G dan H, sedemikian sehingga $|V(G)| = |V(H)|$.
2. Sisi-sisi yang bertetangga di G juga harus bertetangga di H.
3. Memiliki derajat yang sama untuk tiap titiknya.

4. Matriks ketetanggan (*adjacency*) graf G dan graf H sama, sedemikian sehingga $M(G) = M(H)$.

f. Titik Setara

Misalkan u dan v merupakan titik-titik pada graf G. Dua buah titik pada suatu graf dikatakan setara apabila,

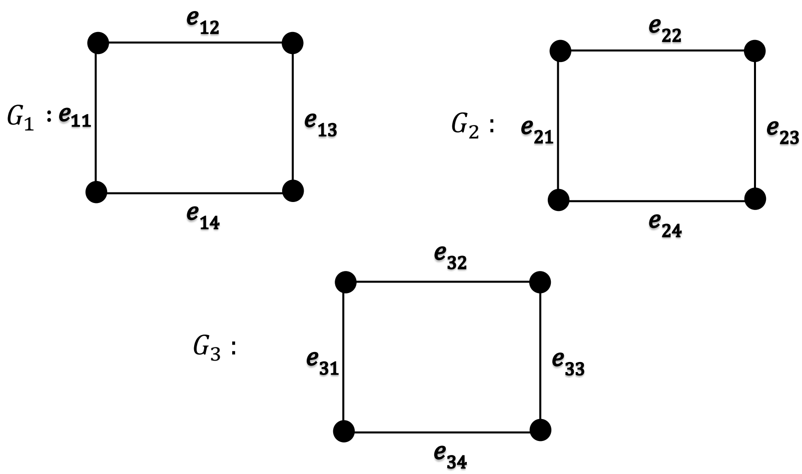
1. Untuk suatu titik $w \in V(G), w \neq u$ dan $w \neq v$ maka $d(u,w) = d(v,w)$.
2. Untuk setiap titik $s \in V(G)\backslash\{u,v\}$, terdpat titik c sedemikian sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$ (Daming, 2020)

2.3. Operasi Amalgamasi Graf

Dalam teori graf juga terdapat beberapa jenis operasi terhadap dua atau lebih graf. Salah satu jenis pengoperasian graf yaitu operasi amalgamasi yang terdiri dari amalgamasi titik dan amalgamasi sisi. Amalgamasi sisi dinotasikan dengan $Amal(G, e, n)$.

Definisi.2.3.1 Misalkan terdapat graf sembarang $G_i, i = 1,2, \dots n$ dengan $E(G_i) = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ij}\}$. Amalgamasi sisi G_i artinya mengabungkan suatu sisi G_i dengan $e_{1j} = e_{2j} = \cdots = e_{nj}$ untuk suatu $j \in N$ menjadi sisi pusat (Hasmawati,2013).

Contoh :



Gambar 2.2. Graf $\boldsymbol{G_1 = C_4^1; G_2 = C_4^2; G_3 = C_4^3}$

Maka operasi amalgamasi sisi pada graf C_4 sebagai berikut,

$$C_4^1 = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{11}\}$$

$$C_4^2 = \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{11}\}$$
$$C_4^3 = \{e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{34}, e_{11}\}$$

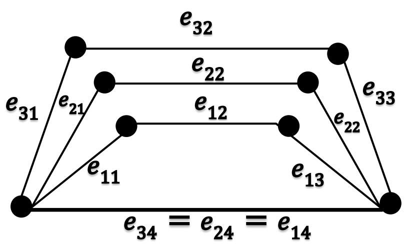
Maka

$$Amal(C_4, e, 3) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14,} e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{34}\}$$

Dimana $e_{14} = e_{24} = e_{34}$ sebagai sisi pusat

Sedemikian sehingga diperoleh graf baru yaitu

G :



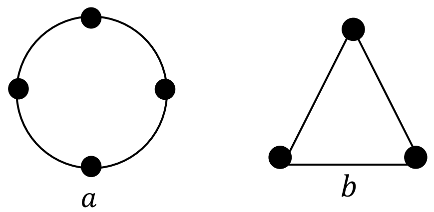
Gambar 2.3. Graf hasil Amalgamasi sisi $\boldsymbol{Amal(C_4, e, 3)}$

2.4. Jenis-jenis graf

Pesatnya perkembangan kajian mengenai graf, maka semakin banyak pula ditemukan jenis-jenis graf lainnya selain graf sederhana. Pada subbab ini beberapa jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini diantaranya yaitu graf siklus, graf lengkap, graf bipartit, graf multipartit, graf bintang, dan graf buku.

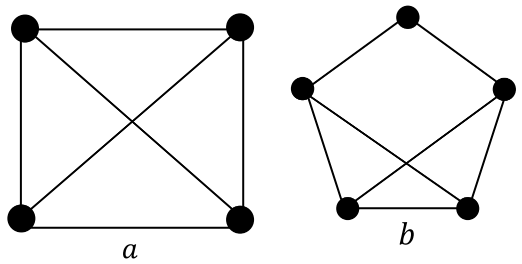
Definisi 2.4.1 Graf siklus dinotasikan C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati, 2020).

Dengan kata lain titik terakhir pada graf C_n bertetangga dengan titik pertama C_n.



Gambar 2.4. (a) graf siklus $\boldsymbol{C_4}$ (b) graf siklus $\boldsymbol{C_3}$

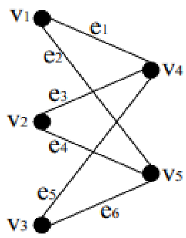
Definisi 2.4.2 Graf lengkap K_n adalah graf yang terdiri atas n titik dengan setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap memiliki ciri khusus yaitu reguler dengan derajat $n - 1$. Graf lengkap K_n biasa ditulis $(n - 1)$-reguler (Hasmawati,2020).



Gambar 2.5**.** (a) graf lengkap $\boldsymbol{K_4}$ (b) bukan graf lengkap

Definisi 2.4.3 Apabila $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam dua partisi, V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi $e = uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_1$ dan $v \in V_2$ maka graf G disebut graf bipartit. Graf bipartit dinotasikan dengan B_{n_1,n_2} jika $V(G) = V_1 \cup V_2$ dan $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ (Hasmawati,2020).

Dengan kata lain setiap pasang titik pada tiap partisi graf bipartit tidak bertetangga. Apabila tiap titik dalam satu partisi bertetangga dengan setiap titik pada partisi lainnya maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$, apabila $V\left(K_{m,n}\right) = V_1 \cup V_2$ dan $|V_1| = m, |V_2| = n$.

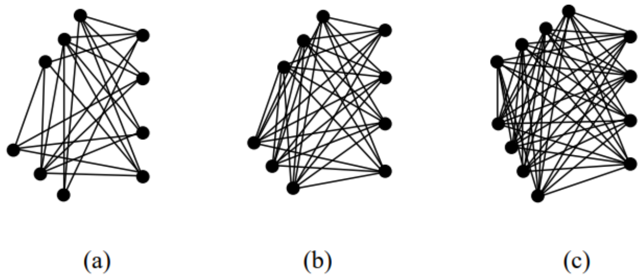


Gambar 2.6. Graf bipartit $\boldsymbol{K_{3,2}}$

Suatu graf jika terdiri dari j partisi dengan $j \geq 3, |V_i| = n_i$ maka graf itu disebut graf multipartit.

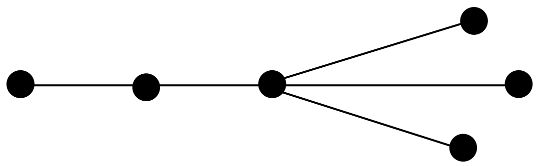
Definisi 2.4.4 Graf multipartit dinotasikan dengan $B_{n_1,n_2,\dots,n_j}$ adalah graf yang dengan titik $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam j partisi $V_1, V_2, \dots, V_j$ sedemikian sehingga setiap sisi $e = uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_i$ dan $v \in V_k$ untuk $i, k \in \{1,2, \dots, j\}$ (Hasmawati,2020).

Pada graf multipartit juga dikenal istilah graf multipartit lengkap. Dimana graf multipartit disebut multipartit lengkap apabila setiap titik pada suatu partisi saling bertetangga dengan titik ditiap partisi lainnya. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$. Apabila $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_i| = t$ untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,j, t \in \mathbb{R}$ maka disebut graf multipartit lengkap seimbang, dinotasikan dengan $K_{j\times t}$.



Gambar 2.7. (a) graf multipartit $\boldsymbol{B_{3,3,4}}$ (b) graf multipartit $\boldsymbol{K_{3,3,4}}$ (c) graf multipartit $\boldsymbol{K_{3\times 4}}$

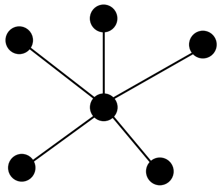
Definisi 2.4.5 Graf pohon T_n adalah graf yang tidak memuat siklus dan merupakan graf terhubung berorde n. Titik-titik berderajat satu pada pohon di sebut daun, sedangkan titik-titik yang berderajat lebih dari satu disebut titik internal (Hasmawati, 2020).



Gambar 2.8. Graf Pohon $\boldsymbol{T_6}$

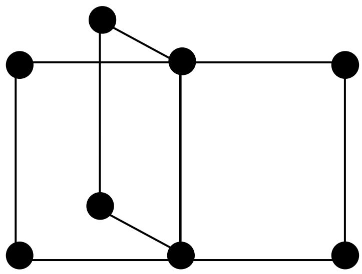
Definisi 2.4.6 Graf Bintang adalah graf pohon berorde n yang memiliki $n-1$ titik berderajat satu dan satu titik berderajat $n-1$ yang disebut pusat (Isnaini, 2012).

Graf bintang dinotasikan sebagai S_n, dimana graf ini bisa juga didefiniskan sebagai graf hasil operasi penjumlahan antara graf K_1 dan Graf $\overline{K}_{n-1}$. Graf bintang disebut sebagai graf pohon sebab tidak memuat siklus.



Gambar 2.9. Graf bintang $\boldsymbol{S_6}$

Definisi 2.9. Graf Buku segidinotasikan dengan B_n adalah graf hasil amalgamasi sisi graf siklus (*cycle*) berorde empat. Dengan kata lain $B_n = Amal(C_4, e, n)$ (Mahmudah,2014).



Gambar 2.10. Graf buku segi$\boldsymbol{B_3}$

2.5. Bilangan Ramsey Graf dan Ukuran Bilangan Ramsey Multipartit

Teori bilangan Ramsey pertama kali dikaji oleh Frank Plumpton Ramsey (1930). Teori Ramsey dalam Graf sendiri menjadi terkenal setelah sebuah penelitian mengenai *Bilangan Ramsey Dua Warna Dalam Teori Graf* yang dilakukan oleh Erdös dan Szekeres pada tahun 1935. Dalam penelitiannya, Erdös dan Szekeres membahas mengenai bilangan Ramsey klasik dengan pewarnaan dua warna. Yang kemudian diperumum menjadi Bilangan Ramsey Graf Sebarang.

Definisi 2.5.1 Diberikan dua buah graf G dan H sebarang, bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika semua sisi diwarnai dengan dua warna pada graf F dengan n titik, maka akan memenuhi sifat berikut: F memuat graf G atau memuat graf H (Hasmawati, 2015).

Kemudian seiring berkembangnya waktu penelitian mengenai bilangan Ramsey graf juga semakin berkembang. Salah satu perkembangan bilangan Ramsey graf ialah ukuran bilangan Ramsey, yang kemudian pada tahun 2004 Burger and Vuuren memperkenalkan kajian mengenai ukuran bilangan Ramsey multipartit.

Definisi 2.5.2 Misalkan graf G dan H adalah suatu graf sederhana dengan j adalah bilangan asli dan $j \geq 2$, maka ukuran bilangan Ramsey multipartit yaitu $m_j(G,H) = t$. Dimana t adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga sembarang pewarnaan sisi-sisi graf $K_{j\times t}$ dengan dua warna (merah dan biru) selalu memuat subgraf berwarna sama yang isomorfik dengan graf G atau graf H (Jayawardene, 2016).

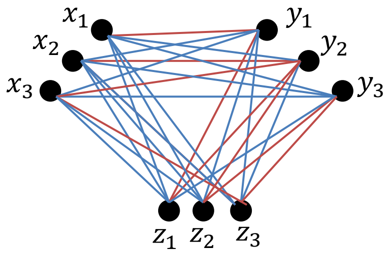
Contoh 1 :

Berikut diberikan contoh mengenai penentuan ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf P_5 dan graf S_7 dimana bilangan Ramseynya yaitu tiga, atau dapat ditulis $m_3(P_5, S_7) = 3$.

Pertama akan dibuktikan bahwa $m_3(P_5, S_7) \leq 3$, artinya untuk sembarang pewarnaan dengan dua warna merah dan biru pada graf multipartit $K_{3\times 3}$ sedemikian sehingga memuat subgraf merah yang isomorfik dengan P_5 atau memuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_7.

Bukti :

Pertama akan diberi label untuk titik-titik pada graf $K_{3\times 3}$ yang memiliki tiga partisi himpunan titik $V_i, i = \{1,2,3\}$ yaitu $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, z_3\}$. Apabila sisi-sisi $K_{3\times 3}$ telah diwarnai dengan merah atau biru, kemudian subgraf warna merah dinotasikan F_1 dan subgraf warna biru dinotasikan F_2, maka $K_{3\times 3} = F_1 \oplus F_2 = F$. Asumsikan graf F yang sisi-sisinya telah diwarnai merah dan biru tidak memuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_7. Berdasarkan asumsi maka graf $K_{3\times 3}$ paling banyak memuat 5 sisi biru untuk tiap sisinya. Ambil sembarang dua titik katakanlah $x \in V_1$ dan $y \in V_2$ sebagai titik awal dan akhir graf P_5 yang berderajat satu yang saling terkait dengan 3 titik berderajar dua oleh sisi merah membentuk P_5. Salah satu dari subgraf merah yang isomorfik dengan P_5 yaitu $E(P_5) = \{x_1y_1, y_1z_1, z_1y_2, y_2z_2\}$.



Gambar 2.11. Graf $\boldsymbol{K_{3\times 3}}$ yang mengandung subgraf $\boldsymbol{P_5}$.

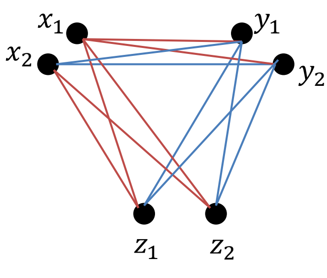
Berdasarkan pembuktian tersebut maka terbukti bahwa

$$m_3(P_4, S_5) \leq 3 \quad \dots(1)$$

Langkah selanjutnya ialah membuktikan bahwa $m_3(P_5, S_7) \geq 3$. Artinya terdapat pewarnaan pada sisi-sisi graf $K_{3\times(3-1)}$ dengan warna merah dan biru sedemikian sehingga tidak memuat subgraf merah yang isomorfik dengan P_5 dan tidak memuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_7.

Bukti :

Diketahui bahwa $|S_7| = 7$ dan $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 2$, jelas bahwa tidak termuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_7 pada pewarnaan graf $K_{3\times 2}$ sebab $|S_7| > |K_{3\times 2}|$ dimana paling banyak pewarnaan biru hanya mengandung graf $K_{1,4}$. Hal ini juga berlaku untuk pewarnaan merah pada graf $K_{3\times 2}$, dimana tidak memuat subgraf P_5 dengan mewarnai merah sisi graf $K_{3\times 2}$ sehingga paling banyak hanya memuat subgraf P_4. Pewarnaan graf $K_{3\times 2}$ dapat dilihat sebagai berikut



Gambar 2.12. Graf $\boldsymbol{K_{3\times 2}}$ yang tidak memuat subgraf $\boldsymbol{P_5}$ dan subgraf $\boldsymbol{S_7}$

Oleh karena itu jelas bahwa haruslah $m_3(P_4, S_5) > 2$ atau

$$m_3(P_4, S_5) \geq 3 \quad \dots(2)$$

Dari kedua pertidaksamaan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa $m_3(P_4, S_5) = 3$

Contoh 2 :

Berikut diberikan contoh mengenai penentuan ukuran bilangan Ramsey multipartit pada graf B_3 dan graf S_4 dimana bilangan Ramseynya yaitu tiga, atau dapat ditulis $m_3(B_3, S_4) = 4$.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $m_3(B_3, S_4) \leq 4$, artinya mewarnai secara sembarang sisi-sisi graf multipartit $K_{3\times 4}$ dengan dua warna merah dan biru sedemikian sehingga memuat subgraf merah pada graf $K_{3\times 4}$ yang isomorfik dengan graf B_3 atau subgraf biru pada graf $K_{3\times 4}$ yang isomorfik dengan graf S_4.

Bukti :

Diketahui bahwa graf $K_{3\times 4}$ merupakan graf multipartit yang himpunan titiknya terdiri dari tiga partisi $V_i, i \in \{1,2,3\}$ dengan tepat 4 titik untuk tiap partisi, dimana semua titik-titik pada tiap partisi setara.

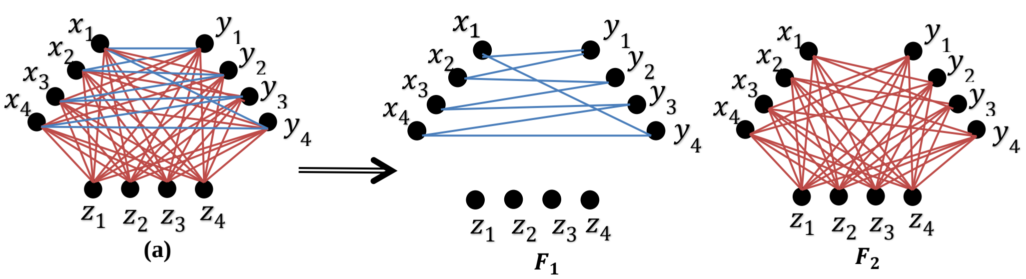
Mengingat $m_3(B_3, S_4) = m_3(S_4, B_3)$, maka diasumsikan graf$F = K_{3\times 4}$ yang sisi-sisinya telah diwarnai merah dan biru tidak memuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_4. Diketahui bahwa derajat tertinggi dari graf S_4 yaitu $\Delta(\mathrm{S}_4) = 3$ maka berdasarkan asumsi, titik-titik pada graf $\mathrm{K}_{3\times 4}$ paling banyak memuat dua sisi biru untuk setiap titiknya. Karena $\Delta(K_{3\times 4}) = 8$, maka setiap titik pada graf $K_{3\times 4}$ terkait dengan paling sedikit 6 sisi merah.

Diketahui pula bahwa $\Delta(B_3) = 4$ dengan $B_3 = Amal\ (C_4, e, 3)$, dimana e merupakan sisi bersama yang terkait dengan dua titik berderajat 4 dari dua partisi yang berbeda. Titik-titik yang terkait dengan titik berderajat 4 pada suatu partisi tersebut masing-masing haruslah saling bertetangga dengan titik-titik yang terkait dengan titik berderajat 4 pada partisi lainnya. Karena$|B_3| = 8$ dan $|K_{3\times 4}| = 12$ dengan paling banyak 2 sisi biru pada tiap titiknya maka dapat diperoleh tiga siklus C_4 dengan sisi e sebagai sisi bersama membentuk lembaran buku.

Pertama karena titik-titik pada tiap partisi setara maka untuk setiap i ambil sembarang $x_i \in V_1$, yang kemudian dikaitkan dengan maksimal dua sisi biru ke titik $y_i \in V_2$ atau $z_i \in V_3$, untuk $i \in \{1,2,3,4\}$. Selanjutnya urutkan titik-titik pada $K_{3\times4}$ sehingga setiap titik di V_1 dan V_2 memuat paling banyak dua sisi biru dengan rincian sebagai berikut $\{(x_1, y_1), (y_1, x_2), (x_2 y_2), (y_2, x_3), (x_3, y_3), (y_3, x_4), (x_4, y_4), (y_4, x_1)\}$ yang tak lain merupakan graf C_8. Kemudian akan ditunjukkan subgraf merah yang isomorfik dengan B_3.

Pilih sisi merah katakanlah sisi $(x_i z_j)$ sebagai sisi bersama graf buku B_3 untuk suatu $i, j \in \{1,2,3,4\}$. Perhatikan titik $\{x_i, y_{(k+1) mod\ 4}, x_{(i+3) mod\ 4}, z_j\}$ untuk suatu $i, j, k \in \{1,2,3,4\}, i = k$ yang secara berturut-turut saling terkait dengan sisi merah membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar pertama B_3.

Selanjutnya perhatikan titik $\{x_i, y_{(k+2) mod\ 4}, x_{(i+1) mod\ 4}, z_j\}$ yang secara berturut-turut saling terkait dengan sisi merah membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar kedua B_3. Terakhir perhatikan titik $\{x_i, z_{(j+3) mod\ 4}, y_k, z_j\}$ yang secara berturut-turut saling terkait dengan sisi merah membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar ketiga B_3. Dapat dilihat dari ketiga siklus C_4 yang terbentuk memiliki sisi merah $(x_i z_j)$ sebagai sisi bersama, maka dapat terbentuk graf B_3. Pewarnaan graf $K_{3\times4}$ dapat dilihat pada gambar 2.13.

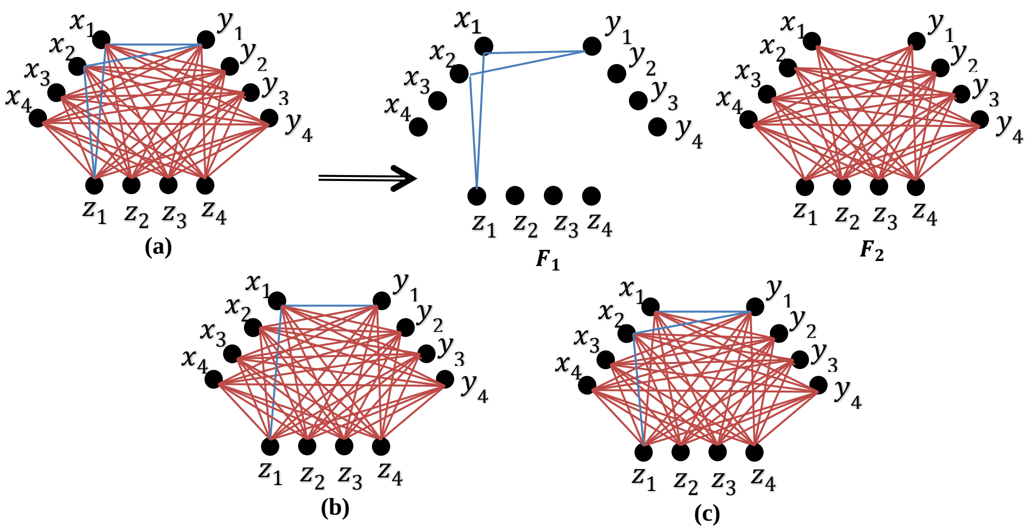


Gambar 2. 13. Pewarnaan graf $\boldsymbol{K_{3\times4}}$ yang memuat subgraf $\boldsymbol{B_3}$.

Kedua setiap partisi memuat maksimal dua sisi biru sehingga terdapat i untuk suatu titik $x_i \in V_1$, yang kemudian dikaitkan dengan satu sisi biru ke $y_k \in V_2$ dan ke $z_j \in V_3$ untuk $i, j, k \in \{1,2,3,4\}$ maka dapat diperoleh sisi biru $\{(x_i y_k) \wedge (x_i z_j)\}$ dan atau terdapat i untuk suatu titik $x_i \in V_1$, yang kemudian dikaitkan dengan satu sisi biru ke $z_j \in V_3$ dan satu sisi biru ke titik $y_k \in V_2$ yang kemudian dikaitkan dengan ke $x_{(i+1) mod\ 4} \in V_1$, maka dapat diperoleh sisi biru $\{(x_i y_k) \wedge \left(y_k y_{(i+1) mod\ 4}\right) \wedge (x_i z_j)\}$ untuk $i, j, k \in \{1,2,3,4\}$. Maka jelas tidak termuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_4.

Misalkan diambil sembarang sisi merah katakanlah sisi $(x_{(i+3) mod\ 4} y_{(k+3) mod\ 4})$ sebagai sisi bersama graf buku B_3 untuk suatu $i, k \in \{1,2,3,4\}$, perhatikan titik $\{x_{(i+3) mod\ 4}, y_k, x_{(i+2) mod\ 4}, y_{(k+3) mod\ 4}\}$ yang secara berturut-turut saling terhubung dengan sisi merah menghubungkan dua partisi V_1 dan V_2 membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar pertama B_3.

Selanjutnya perhatikan titik $\{x_{(i+3) mod\ 4}, y_{(k+1) mod\ 4}, z_j, y_{(k+3) mod\ 4}\}$ yang secara berturut-turut saling terhubung dengan sisi merah membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar kedua B_3. Terakhir perhatikan titik $\{x_{(i+3) mod\ 4}, z_{(j+3) mod\ 4}, x_i, y_{(k+3) mod\ 4}\}$ yang secara berturut-turut saling terhubung dengan sisi merah membentuk siklus C_4, siklus ini dapat diambil sebagai lembar ketiga B_3. Dapat dilihat dari ketiga siklus C_4 yang terbentuk memiliki sisi $(x_{(i+3) mod\ 4} y_{(k+3) mod\ 4})$ sebagai sisi bersama, maka dapat terbentuk graf B_3. Pewarnaan graf $K_{3\times 4}$ dapat dilihat pada gambar 2.14.

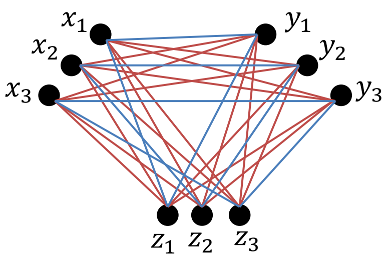


Gambar 2.14. Graf $\boldsymbol{K_{3\times 4}}$ yang memuat subgraf $\boldsymbol{B_3}$.

Berdasarkan pewarnaan tersebut, maka jelas bahwa pewarnaan secara sembarang dengan dua warna pada sisi-sisi graf $K_{3\times 4}$ memuat subgraf merah pada graf $K_{3\times 4}$ yang isomorfik dengan graf B_3 atau memuat subgraf biru pada graf $K_{3\times 4}$ yang isomorfik dengan graf S_4, akibatnya

$$m_3(B_3, S_4) \leq 4 \qquad \text{... (1)}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $m_3(B_3, S_4) \geq 4$, artinya terdapat pewarnaan merah dan biru pada sisi-sisi graf multipartit $K_{3\times 3}$ sedemikian sehingga tidak memuat subgraf merah pada graf $K_{3\times 3}$ yang isomorfik dengan graf B_3 dan tidak memuat subgraf biru pada graf $K_{3\times 3}$ yang isomorfik dengan graf S_4. Proses pewarnaan pada graf $K_{3\times 3}$ dapat dilihat sebagai berikut,



Gambar 2.15. Graf $K_{3\times 3}$ yang tidak memuat subgraf B_3 dan subgraf S_4.

Diketahui bahwa $V(K_{3\times 3}) = \{V_1, V_2, V_3\}$ dengan $|V_i| = 3, i = \{1,2,3\}$ sedemikian sehingga $|V(K_{3\times 3})| = 9$. Jika semua titik pada graf $K_{3\times 3}$ memuat tepat 2 sisi biru pada setiap titiknya, maka jelas tidak termuat subgraf biru yang isomorfik dengan S_4. Karena tiap titik tepat memuat 2 sisi biru maka diperoleh 4 sisi merah pada setiap titiknya. Perhatikan bahwa graf B_3 merupakan amalgamasi dari tiga graf siklus C_4. Jelas bahwa graf $K_{3\times 3}$ tidak memuat graf B_3 sebab pada proses pewarnaan hanya terbentuk $amal\ (C_4, e, 2)$.

Berdasarkan pewarnaan tersebut, maka terbukti bahwa terdapat pewarnaan dua warna pada sisi-sisi graf $K_{3\times 3}$ yang tidak memuat subgraf merah yang isomorfik dengan graf B_3 dan tidak memuat subgraf biru yang isomorfik dengan graf S_4, akibatnya haruslah $m_3(B_3, S_4) > 3$ atau dapat dituliskan

$$m_3(B_3, S_4) \geq 4 \qquad \text{... (2)}$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) maka dapat disimpulkan bahwa

$$m_3(B_3, S_4) = 4$$