REPLIKASI FRAKSIONAL DALAM EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^k

Oleh

CITRA HALIM

88 03 019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

1992

REPLIKASI FRAKSIONAL

DALAM

EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^K

OLEH :

CITRA HALIM

88 03 019

Skripsi untuk melengkapi tugas dan

memenuhi syarat untuk memperoleh

gelar sarjana

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1992

REPLIKASI FRAKSIONAL

DALAM

EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^K

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama

(Drs. A. Suhardjono)

Pembimbing Pertama

(Drs. La Podje Talangko)

Pada tanggal : Agustus 1992

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan rendah hati saya datang kepadaNYA, memanjatkan puji dan syukur atas berkat dan petunjuk yang diberikan kepada saya dalam keseharian saya sebagai mahasiswa, dalam mengikuti perkuliahan, dan dalam menghadapi kekecewaan dan kegembiraan bersama sahabat-sahabat saya yang terkasih.,

Dan terutama dalam menghadapi tugas akhir, tantangan yang tidak sedikit dapat saya lalui berkat dorongan, bantuan serta partisipasi dari berbagai pihak yang senantiasa menyertai saya, yang saya yakin adalah Anugrah dariNya.,

Untuk itu saya ingin menyampaikan rasa terima kasih saya serta penghargaan saya yang setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Drs. A. Suhardjono dan Bapak Drs. La Podje Talangko, selaku dosen pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran dan dorongan dalam penyusunan skripsi ini.,
2. Bapak Drs. Alimin Bado,MS, selaku Ketua Jurusan Matematika, F-MIPA, Unhas, yang begitu memperhatikan kami, mahasiswa Matematika dan juga meluangkan waktunya memberikan bimbingan dan dorongan kepada kami.

3. Ibu Prof. Dra. Nurul Muchlisah, MS, selaku penasehat akademik yang telah memberikan pengarahan selama penulis mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika.
4. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika, beserta seluruh dosen dan staf Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin yang amat membantu dalam keseharian saya.
5. Rekan-rekan saya warga Himatika dan seluruh warga KMK-F.MIPA yang senantiasa memberi semangat kepada saya.

Akhirnya semuanya ini saya persembahkan untuk kedua orangtua serta Appo yang terkasih, saudara-saudara saya, Buche, Soan dan Wijoyo yang tersayang.

Juga buat sahabat saya Arief Suparto yang tercinta, pengorbanan dan doa yang diberikan merupakan kekuatan bagi saya untuk menyelesaikan tugas saya sebagai mahasiswa terutama dalam penyusunan tugas akhir ini.

Semoga DIA Yang Maha Kasih membalas semua kebaikan yang telah saya terima dari semua pihak. Amin.

Penulis

" Aku sekali-kali tidak akan membiarkan engkau dan Aku sekali-kali tidak akan meninggalkan engkau " (Ibrani 13:5)

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang Masalah

Ilmu Pengetahuan berawal dari rasa kekaguman manusia akan alam ciptaanNya. Dengan bekal rasa ingin tahu manusia selalu membuat pertanyaan seperti 'mengapa begini', ' bagaimana hal ini bisa terjadi ' dan seterusnya.
Untuk memperoleh jawaban atas pertanyaan-pertanyaan tersebut manusia perlu mengadakan penelitian.

Matematika sebagai salah satu cabang ilmu pengetahuan mempunyai peranan yang sangat penting dalam penelitian. Khususnya cabang ilmu statistik. Karena di dalam melaksanakan penelitian, para peneliti berusaha mencari data, menyajikan, menganalisa kemudian menyimpulkannya .

Jika eksperimen yang dilakukan oleh para peneliti melibatkan k buah faktor masing-masing bertaraf dua, maka eksperimen tersebut dikatakan " *Eksperimen Faktorial* 2^k ".

Seandainya diambil k yang besar, hal ini akan menyebabkan kombinasi perlakuan yang besar pula.
Kita ambil contoh k=8 maka akan terjadi 256 kombinasi perlakuan sehingga memerlukan 256 eksperimen untuk sekali replikasi. Dalam prakteknya eksperimen sebanyak ini tidaklah

ekonomis dan efisien bahkan dalam beberapa hal tidak mungkin dilakukan karena kesulitan mendapatkan responden yang homogen.

1.2 Alasan Memilih Judul

Para *Ahli Matematika* berusaha memecahkan masalah tersebut dengan melakukan " *Replikasi Fraksional* ".

Dengan adanya Replikasi Fraksional ini maka para peneliti dapat mengefisienkan waktu, tenaga dan biaya dalam pelaksanaan penelitian.

Melihat latar belakang tersebut maka penulis merasa tertarik untuk mempelajari dan menuangkan dalam bentuk tulisan dengan judul " REPLIKASI FRAKSIONAL DALAM EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^k". sebagai bahan tugas akhir dan untuk memenuhi persyaratan dalam mencapai gelar sarjana pada jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

I.3. Ruang Lingkup Pembahasan

Para peneliti seringkali berhadapan dengan eksperimen yang menyangkut sejumlah faktor di mana tiap faktor hanya terdiri atas dua buah taraf. Misalnya eksperimen tersebut berurusan dengan dua macam temperatur :

tinggi dan rendah, atau dua buah mesin : lama dan baru atau dua macam musim : hujan dan kemarau, dan lain sebagainya.

Karena seringnya terdapat eksperimen faktorial yang menyangkut sejumlah faktor dengan banyak taraf untuk masing-masing faktor dua buah, maka rancangannya dinamakan Eksperimen Faktorial 2^k. Misalkan ada dua faktor A dan B maka dinamakan Ekperimen Faktorial 2^2. Bila ada tiga buah faktor, A, B dan C dikatakan Eksperimen Faktorial 2^3. Demikian seterusnya untuk 2^4, 2^5 , 2^6 dan 2^k .

Rancangan untuk Eksperimen ini ialah Rancangan Blok Acak Lengkap yaitu rancangan yang menggunakan blok di mana setiap blok mengandung kombinasi perlakuan yang sama untuk keseluruhan eksperimen tetapi kombinasi tersebut bersifat acak. Hal ini akan dibahas dalam Bab III yaitu masalah Replikasi Tunggal untuk Eksperimen Faktorial 2^k, bagaimana kita menyusun Anavanya sampai pada penarikan kesimpulan.

Pada Bab IV membahas inti dari permasalahan yaitu bagaimana cara kita menyusun bagian-bagian yang dapat memudahkan dalam pelaksanaan replikasi yang hanya kita lakukan sebagian saja. Di sini kita akan berkenalan dengan

" *Alias* " yaitu dua atau lebih pengaruh yang mempunyai nilai yang sama.

Beberapa tipe khusus dari Replikasi Fraksional dalam Eksperimen Faktorial 2^k dinamakan rancangan Resolusi. Aplikasi dari Replikasi Fraksional ini akan diberikan dalam bentuk contoh dalam Bab IV .

Bab terakhir yaitu Bab V memuat kesimpulan dari tulisan ini.

BAB II

EKSPERIMEN FAKTORIAL

2.1. Prinsip Dasar Eksperimen Faktorial

Kadang-kadang penelitian dilakukan dengan tujuan untuk membahas 2 atau lebih faktor dan tiap faktor terdiri atas beberapa taraf. Eksperimen yang paling efisien untuk membahas masalah ini adalah *Eksperimen Faktorial*, yaitu eksperimen di mana semua taraf dari setiap faktor dikombinasikan dengan semua taraf tiap faktor lainnya yang terdapat dalam eksperimen tersebut.

Yang dimaksud dengan *faktor* di sini ialah sejenis perlakuan dan sering dilambangkan dengan huruf besar. Sedangkan istilah *taraf* mengacu pada banyaknya atau keadaan tertentu suatu faktor dan sering dilambangkan dengan angka kecil sebagai subskripnya. Namun ada beberapa lambang lain yang kadang juga digunakan, akan dijelaskan kemudian.

Berdasarkan adanya banyak taraf dalam tiap faktor, eksperimen sering diberi nama dengan perkalian antara banyak taraf faktor yang satu dan banyak taraf faktor lainnya.

Misalnya apabila dalam eksperimen terdapat 2 faktor, sebuah faktor terdiri atas 4 taraf dan faktor lainnya terdiri atas 3 taraf, maka diperoleh eksperimen faktorial 4x3 sehingga diperlukan 12 kombinasi perlakuan atau kondisi eksperimen yang berbeda-beda yaitu :

Faktor A terdiri atas : A_1 A_2 A_3 A_4

Faktor B terdiri atas : B_1 B_2 B_3

Kombinasi perlakuan yang terjadi adalah :

$$
\begin{array}{ccc}
A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\
A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\
A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \\
A_4B_1 & A_4B_2 & A_4B_3
\end{array}
$$

Pengamatan adalah bahan mentah para peneliti. Agar statistika dapat diterapkan, pengamatan-pengamatan tersebut haruslah berupa bilangan. Dalam percobaan di bidang pertanian misalnya, maka bilangan-bilangan tersebut mungkin berupa hasil tanaman per petak ; dalam penelitian di bidang kedokteran, mungkin berupa waktu yang diperlukan untuk sembuh kembali melalui beberapa cara pengobatan, dan seterusnya.

Pengaruh suatu faktor tertentu pada taraf tertentu faktor lain disebut Pengaruh Sederhana (simple effects). Rata-rata dari pengaruh-pengaruh sederhana disebut Pengaruh Utama (main effects yang dilambangkan dengan huruf besar faktor tersebut).

Jika pengaruh dari suatu faktor berbeda pada tiap taraf untuk faktor lainnya maka dikatakan bahwa antara faktor-faktor tersebut terjadi Interaksi (interactions dilambangkan dengan faktor-faktor yang berinteraksi).

Untuk memahami defenisi-defenisi tersebut maka akan diberikan sebuah contoh sederhana.

Contoh 2.1.1

Misalkan kita ingin mempelajari pengaruh faktor pemupukan Nitrogen (dinotasikan dengan faktor A) yang terdiri atas 2 taraf, yaitu : 0 kg N/ha (dinotasikan dengan A_1) dan 60 kg N/ha (dinotasikan dengan A_2). Faktor lain yang dicobakan adalah faktor varietas tanaman (faktor B) yang terdiri atas varietas X (dinotasikan dengan B_1) dan varietas Y (dinotasikan dengan B_2). Dengan demikian, kita berhadapan dengan eksperimen faktorial 2x2 , yang berarti ada 4 kombinasi perlakuan yang dicobakan yaitu :

A_1B_1 A_1B_2 A_2B_1 A_2B_2

Data hasil tanaman (dalam unit kwintal/ha) adalah sebagai berikut :

Faktor varietas (B)	Faktor pemupukan (A)		Rata-rata
	A_1	A_2	
B_1	10	40	25
B_2	15	55	35
Rata-rata	12,5	47,5	30

Berdasarkan data pada tabel di atas, kita dapat menghitung besarnya pengaruh sederhana, pengaruh utama dan pengaruh interaksi.

1. Pengaruh Sederhana :

   a. Pengaruh Sederhana faktor A pada taraf B_1 =

      $A_2B_1 - A_1B_1 = 40 - 10 = 30$

      Hal ini berarti pengaruh faktor pemupukan pada varietas X sebesar 30 kw/ha.

b. Pengaruh Sederhana faktor A pada taraf B_2 =

$A_2B_2 - A_1B_2 = 55 - 15 = 40$

Hal ini berarti pengaruh pemupukan pada varietas Y sebesar 40 kw/ha.

c. Pengaruh sederhana faktor B pada taraf A_1 =

$A_1B_2 - A_1B_1 = 15 - 10 = 5$

Berarti pengaruh varietas tanpa pemupukan N sebesar 5 kw/ha.

d. Pengaruh sederhana faktor B pada taraf A_2 =

$A_2B_2 - A_2B_1 = 55 - 40 = 15$

Berarti pengaruh varietas pada pemupukan 60 kg N/ha sebesar 15 kw/h

2. Pengaruh Utama :

a. Pengaruh utama faktor A =

$$A = 1/2 ((A_2B_2 - A_1B_2) + (A_2B_1 - A_1B_1))$$

$$= 1/2 ((55 - 15) + (40 - 10))$$

$$= 1/2 (40 + 30)$$

$$= 1/2 (70)$$

$$= 35$$

Berarti pengaruh faktor pemupukan Nitrogen sebesar 35 kw/ha.

b. Pengaruh Utama faktor B =

$$B = 1/2 ((A_2B_2 - A_2B_1) + (A_1B_2 - A_1B_1)$$

$$= 1/2 ((55 - 40) + (15 - 10))$$

$$= 1/2 (15 + 5) = 10$$

Berarti pengaruh faktor varietas sebesar 10 kw/ha.

3. Pengaruh Interaksi antara pemupukan dan varietas (AB) sebagai berikut :

$$AB = 1/2 ((A_2B_2 - A_1B_2) - (A_2B_1 - A_1B_1))$$

$$= 1/2 ((55 - 15) - (40 - 10))$$

$$= 1/2 (40 - 30)$$

$$= 1/2 (10)$$

$$= 5$$

Pada dasarnya pengaruh interaksi menunjukkan hubungan ketergantungan suatu faktor terhadap taraf tertentu dari faktor lain. Artinya, pengaruh sederhana suatu faktor tergantung pada taraf tertentu dari faktor lain.

Pengaruh interaksi ini perlu dipahami, karena sangat mempengaruhi wawasan kita dalam melakukan pengujian atas eksperimen yang terdiri lebih dari 1 faktor .

2.2 Eksperimen Faktorial 2^k

Bila dalam penelitian dibahas beberapa faktor dengan taraf yang sudah tertentu yaitu 2 untuk setiap faktor maka dikatakan kita bekerja dengan Eksperimen Faktorial 2^k.

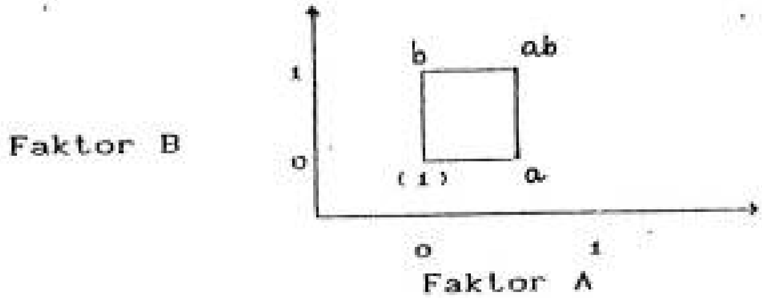
Di mana k adalah banyaknya faktor dalam eksperimen tersebut. Berikut akan dibicarakan Eksperimen Faktorial 2^k yang paling sederhana yaitu Eksperimen Faktorial 2^2.

Dalam eksperimen ini terjadi 4 kombinasi perlakuan yang dapat dilambangkan dengan 4 macam cara yaitu:

Lambang I	Lambang II	Lambang III	Lambang IV
A_0B_0	− −	0 0	(1)
A_1B_0	+ −	1 0	a
A_0B_1	− +	0 1	b
A_1B_1	+ +	1 1	ab

Keempat macam lambang di atas mempunyai makna yang sama. Dan hanya dipakai di dalam eksperimen faktorial 2^k. Lambang-lambang ini dapat dikembangkan untuk Eksperimen Faktorial dengan faktor lebih dari 2. Jadi lambang tersebut misalnya (1) atau A_0B_0 atau − − adalah lambang dari kombinasi perlakuan faktor A dan faktor B pada taraf rendah. Demikian seterusnya. Untuk selanjutnya dalam penulisan skripsi ini akan digunakan lambang IV.

Eksperimen Faktorial 2^2 dapat digambarkan dengan bujursangkar yaitu :



grafik 2.2.1

Sudut-sudut yang terbentuk merupakan gabungan :

(1) taraf rendah faktor A dan taraf rendah faktor B

a taraf tinggi faktor A dan taraf rendah faktor B

b taraf rendah faktor A dan taraf tinggi faktor B

ab taraf tinggi faktor A dan taraf tinggi faktor B

Sesuai dengan definisi lambang dan defenisi dari pengaruh sebuah faktor yang telah dikemukakan di depan, maka secara umum dapat kita nyatakan :,

Pengaruh Utama faktor A adalah : ,

$$A = \frac{1}{2}\,(-(1) + a - b + a\,b)$$

$$2A = -\,(1) + a - b + ab$$

Pengaruh Utama faktor B adalah :

$$B = \frac{1}{2} (-(1) - a + b + ab)$$

$$2B = - (1) - a + b + ab$$

Jumlah koefisien kombinasi perlakuan pada 2A dan 2B = 0 sehingga diperoleh suatu kontras.

Pengaruh interaksi antara A dan B ditentukan sebagai berikut : pada taraf rendah dan tinggi faktor A, pengaruh faktor B masing-masing b-(1) dan ab-a. Antara A dan B akan ada interaksi apabila kedua pengaruh ini berbeda. Pengaruh interaksi antara A dan B didapat dengan jalan mengambil rata-rata dari selisih kedua pengaruh di atas.

Jadi : $AB = \frac{1}{2} ((1) - a - b + ab)$

atau $2AB = (1) - a - b + ab$

Koefisien-koefisien ini membentuk suatu kontras. Jika ketiga kontras ini dikumpulkan, diperoleh :

$$2A = - (1) + a - b + ab$$

$$2B = - (1) - a + b + ab$$

$$2AB = + (1) - a - b + ab$$

Dan ternyata ketiganya membentuk sistim kontras ortogonal. Untuk melihat adanya sifat ortogonal, agaknya lebih mudah apabila tanda dari kombinasi perlakuan disusun dalam tabel seperti di bawah ini

tabel 2.2.1

Tanda koefisien pengaruh untuk Eksperimen Faktorial 2^k

kombinasi perlakuan	PENGARUH			
	Total	A	B	AB
(1)	+	−	−	+
a	+	+	−	−
b	+	−	+	−
ab	+	+	+	+

Nampak bahwa tanda juga koefisien untuk interaksi AB didapat dengan jalan mengalikan tanda untuk A dengan tanda untuk B. sebenarnya untuk menentukan kontras, termasuk tanda dari berbagai pengaruh bisa didapat dengan jalan menguraikan perkalian bentuk binomial tertentu yaitu :

$$2A = (a-1)\ (b+1)$$

$$2B = (a+1)\ (b-1)$$

$$2AB = (a-1)\ (b-1)$$

Perluasan dari cara ini dapat digunakan untuk Eksperimen Faktorial 2^3. Sesuai dengan defenisi lambang yang digunakan untuk Eksperimen Faktorial 2^2 maka untuk 2^3 dapat ditulis :

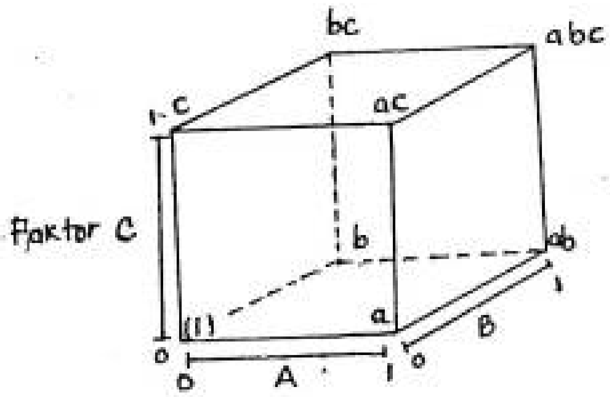
Lambang I	Lambang II	Lambang III	Lambang IV
1. $A_0\ B_0\ C_0$	− − −	0 0 0	(1)
2. $A_1\ B_0\ C_0$	+ − −	1 0 0	a
3. $A_0\ B_1\ C_0$	− + −	0 1 0	b
4. $A_1\ B_1\ C_0$	+ + −	1 1 0	ab

5. A_0 B_0 C_1	− − +	0 0 1	c
6. A_1 B_0 C_1	+ − +	1 0 1	ac
7. A_0 B_1 C_1	− + +	0 1 1	bc
8. A_1 B_1 C_1	+ + +	1 1 1	abc

Dengan menggunakan lambang IV maka 8 kombinasi perlakuan yang terjadi pada eksperimen faktorial 2^3 adalah :

(1) a b ab c ac bc abc

Agar lebih jelas digambarkan sebagai kubus :



gambar 2.2.1

Pengaruh utama faktor A, B dan C maupun pengaruh-pengaruh interaksinya dapat ditentukan sebagai berikut :

Pengaruh utama faktor A adalah rata-rata dari pengaruh-pengaruh sederhananya. Pengaruh faktor A pada :

taraf rendah faktor B dan taraf rendah faktor C = a-(1)

taraf tinggi faktor B dan taraf rendah faktor C = ab-b

taraf rendah faktor B dan taraf tinggi faktor C = ac-c

taraf tinggi faktor B dan taraf tinggi faktor C = abc-bc

Jadi rata-ratanya :

$$A = \frac{a-(1)+ab-b+ac-c+abc-bc}{4}$$

diurutkan $4A = -(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc$

Dapat dilihat pada kubus bahwa hasil di atas merupakan kontras antara keempat kombinasi perlakuan pada sisi kanan di mana faktor A bertaraf tinggi dengan keempat kombinasi perlakuan pada sisi kiri di mana faktor A bertaraf rendah.

Dengan cara yang sama, pengaruh utama faktor B adalah suatu kontras antara keempat kombinasi perlakuan pada sisi depan dengan keempat kombinasi perlakuan pada sisi belakang kubus tersebut di atas. Hasilnya adalah :

$$B = \frac{b+ab+bc+abc-(1)-a-c-ac}{4}$$

diurutkan : $4B = -(1)-a+b+ab-c-ac+bc+abc$,

Dengan cara yang sama diperoleh

$$C = \frac{c+ac+bc+abc-(1)-a-b-ab}{4}$$

$$4C = -(1)-a-b-ab+c+ac+bc+abc,$$

Jika C berada pada taraf rendah, pengaruh dari interaksi AB adalah selisih rata-rata dalam pengaruh A pada kedua taraf dari B yaitu : $\frac{1}{2}$ [(ab-b)-(a-(1))]

Jika C berada pada taraf tinggi, interaksi AB adalah

$$\frac{1}{2} \; [(abc-bc)-(ac-c)]$$

Rata-rata pengaruh AB adalah :

$$AB = \frac{1}{4} \; [\; ab-b-a+1+abc-bc-ac+c \;] \text{ atau}$$

$$4AB = (1)-a-b+ab+c-ac-bc+abc$$

Untuk $4AC = (1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc$

$$4BC = (1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc$$

$$4ABC = -(1)+a+b-ab+c-ac-bc+abc$$

Dari ketujuh pengaruh dalam eksperimen tersebut, ternyata jumlah koefisien kombinasi perlakuan = 0, berarti ketujuh pengaruh tersebut membentuk suatu kontras.

Dengan menggunakan hubungan-hubungan berikut :

$$\begin{aligned}
\text{Total} &= +(1) + a + b + ab + c + ac + bc + abc \\
4A &= -(1) + a - b + ab - c + ac - bc + ab \\
4B &= -(1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc \\
4AB &= +(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc \\
4C &= -(1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc \\
4AC &= +(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc \\
4BC &= +(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc \\
4ABC &= -(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc
\end{aligned}$$

Jika sistim di atas kita perhatikan, nampak bahwa

1. Untuk pengaruh A, B atau C maka koefisien-koefisien kontras yang masing-masing tidak mengandung a, b atau c bertanda negatif sedangkan yang lain mengandung a, b atau c bertanda positif.
2. Koefisien kontras, dan juga tanda untuk pengaruh AB didapat dengan jalan mengalikan koefisien kontras pengaruh A dengan koefisien kontras pengaruh B. Demikian pula koefisien kontras pengaruh AC dan BC masing-masing didapat dengan jalan mengalikan koefisien-koefisien kontras pengaruh A dengan pengaruh C dan pengaruh B dengan pengaruh C.
3. Koefisien kontras pengaruh ABC didapat sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien kontras pengaruh A dengan pengaruh BC atau pengaruh B dengan pengaruh AC atau pengaruh C dengan pengaruh AB.

Penentuan kontras-kontras di atas, akan lebih mudah diingat apabila digunakan perkalian sejumlah bentuk binomial, yakni : $4A = (a-1)\ (b+1)\ (c+1)$

$$4B = (a+1)\ (b-1)\ (c+1)$$

$$4AB = (a-1)\ (b-1)\ (c+1)$$

$$4C = (a+1)\ (b+1)\ (c-1)$$

$$4AC = (a-1)\ (b+1)\ (c-1)$$

$$4BC = (a+1)\ (b-1)\ (c-1)$$

$$4ABC = (a-1)\ (b-1)\ (c-1)$$

Hubungan antara kombinasi perlakuan dan pengaruh yang membentuk kontras ortogonal di atas akan mudah nampak bila disusun dalam tabel berikut :

tabel 2.2.2

kombinasi perlakuan	PENGARUH							
	Total	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Uraian untuk Eksperimen Faktorial 2^2 dan 2^3 dapat diperluas menjadi 2^k, yaitu eksperimen yang menyangkut k buah faktor dengan tiap faktor terdiri atas 2 buah taraf. Jika untuk k=2 akan didapat $2^2 = 4$ kombinasi perlakuan, dengan 2 pengaruh utama dan 1 interaksi 2 faktor, sedangkan untuk k=3 akan didapat $2^3 = 8$ kombinasi perlakuan dengan 3 pengaruh utama, 3 interaksi 2 faktor dan 1 interaksi 3 faktor. Secara umum dapat disimpulkan bahwa untuk

Eksperimen faktorial 2^k akan terdiri atas 2^k kombinasi perlakuan dengan $\binom{k}{1}$ pengaruh utama, $\binom{k}{2}$ interaksi 2 faktor, $\binom{k}{3}$ interaksi 3 faktor, ... $\binom{k}{k}$ = 1 interaksi k faktor.

Secara umum apabila dalam tiap sel kombinasi perlakuan terjadi replikasi sebanyak r kali maka, hubungan ini dapat ditentukan dari :

$$r\,2^{k-1}\ A = (a-1)\ (b+1)\ (c+1)\ (d+1)\ \ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ B = (a+1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d+1)\ \ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ C = (a+1)\ (b+1)\ (c-1)\ (d+1)\ \ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ AB = (a-1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d+1)\ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ AC = (a-1)\ (b+1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ ABC = (a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ ABD = (a-1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d-1)\ldots$$
$$r\,2^{k-1}\ ABCD = (a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d-1)\ldots$$

.
.
.

dan seterusnya.

Dengan singkat, hubungan di atas dapat ditulis sebagai

$$\text{Kontras} = r.2^{k-1}(\text{ pengaruh }) = (a\pm1)(b\pm1)(c\pm1)\ldots$$

Agar kombinasi perlakuan urutannya benar maka dianjurkan agar cara menyusunnya dilakukan sebagai berikut :

(1)	d	e	de	
a	ad	ae	ade	
b	bd	be	bde	
ab	abd	abe	abde	
c	cd	ce	cde	dst
ac	acd	ace	acde	
bc	bcd	bce	bcde	
abc	abcd	abce	abcde	

BAB III

REPLIKASI TUNGGAL EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^K

3.1 Pemblokan

Pemblokan adalah suatu teknik yang digunakan orang untuk memperbaiki ketepatan sebuah eksperimen.
Sebuah blok adalah sebagian dari materi eksperimen yang sifatnya lebih homogen dari keseluruhan materi eksperimen.

Dapat juga dikatakan bahwa pemblokan ialah pengalokasian unit-unit eksperimen dalam blok-blok sedemikian hingga unit-unit eksperimen yang berada di dalam masing-masing blok-blok tersebut lebih homogen dibandingkan dengan blok-blok yang ada. Adanya blok-blok ini akan memberikan pembatasan dari pengacakan secara keseluruhan dari unit-unit eksperimen.

3.2 Rancangan Blok Acak Lengkap

Jika kita ingin bekerja dengan pemblokan maka rancangan yang kita gunakan adalah Rancangan Blok Acak Lengkap (RBAL). Karena secara umum RBAL ini mempunyai sifat :

1. Unit-unit eksperimen dikelompokkan ke dalam blok sedemikian hingga unit-unit eksperimen secara relatif bersifat homogen dan banyak unit eksperimen di dalam sebuah blok sama dengan banyak perlakuan yang sedang diselidiki.
2. Perlakuan dikenakan secara acak kepada unit-unit eksperimen di dalam tiap blok.

Untuk keperluan analisis RBAL diambil model linier yang berbentuk :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

di mana $i = 1,2,\ldots,b$ (banyak blok)

$j = 1,2,\ldots,p$ (banyak perlakuan)

Y_{ij} = variabel yang diukur

μ = pengaruh rata-rata (umum)

α_i = pengaruh blok ke-i

β_j = pengaruh perlakuan ke-j

ε_{ij} = pengaruh unit eksperimen dalam blok ke-i karena perlakuan ke-j

Dengan asumsi bahwa $\sum_{i=1}^{b} \alpha_i = 0$ dan $\varepsilon_{ij} \sim DNI(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Hasil pengamatan untuk RBAL dapat dilihat pada tabel berikut.

tabel 3.2.1

Blok	Perlakuan 1	2	. . .	p	jumlah	Rata-rata
1	Y_{11}	Y_{12}	. . .	Y_{1p}	$J_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	. . .	Y_{2p}	$J_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
:	:	:		:	:	:
b	Y_{b1}	Y_{b2}	. . .	Y_{bp}	$J_{b.}$	$\bar{Y}_{b.}$
jumlah	$J_{.1}$	$J_{.2}$	. . .	$J_{.p}$	$J_{..}$	—
Rata-rata	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$	. . .	$\bar{Y}_{.p}$	—	$\bar{Y}_{..}$

di mana : $j = 1,2,\ldots,p$ dan $i = 1,2,\ldots,b$ maka

$J_{.j}$ menyatakan jumlah hasil pengamatan perlakuan ke j .

$J_{i.}$ menyatakan jumlah pengamatan dalam blok ke i .

$\bar{Y}_{.j}$ menyatakan rata-rata pengamatan untuk perlakuan ke j .

$\bar{Y}_{i.}$ menyatakan rata-rata pengamatan dalam blok ke i .

$\bar{Y}_{..}$ menyatakan rata-rata dari seluruh hasil pengamatan.

Untuk menyusun daftar Anava diperlukan jumlah kuadrat berbagai sumber variasi, yaitu :

$\Sigma\, Y^2$ menyatakan jumlah total hasil pengamatan

JK_R yaitu jumlah kuadrat rata-rata

JK_B yaitu jumlah kuadrat dalam blok

JK_P yaitu jumlah kuadrat dalam perlakuan

JK_S yaitu jumlah kuadrat sisa

di mana :

$$\sum Y^2 = \sum_{i=1} \sum_{j=1} Y^2_{ij}$$

$$JK_R = J^2_{..}/bp \qquad JK_B = \sum_{i=1}^{b} (J^2_{i.} / p) - JK_R$$

$$JK_P = \sum_{j=1}^{p} (J^2_{.j} / b) - JK_R$$

$$JK_S = \sum Y^2 - JK_R - JK_B - JK_P$$

Untuk Rata Kuadrat (RK) dihitung dengan cara :

$$RK = JK / dk$$

dilambangkan dengan tanda ' (aksen), misalnya untuk Rata Kuadrat Rata-rata simbolnya R' dan seterusnya.

Dengan demikian tabel Anavanya sebagai berikut :

tabel 3.2.2

S.V	dk	JK	RK	F
Rata-rata	1	R	R'	-
Blok	b-1	B	B'	F_1
Perlakuan	p-1	P	P'	F_2
Kekeliruan	(b-1)(p-1)	S	S'	
Jumlah	bp	Σy^2		

Hipotesis untuk model ini dengan asumsi $\Sigma \beta_j = 0$ adalah

$$H : \beta_j = 0 \text{ untuk } j = 1, 2, \ldots, p$$

yang berarti tidak terdapat perbedaan mengenai rata-rata efek setiap perlakuan yang dapat diuji dengan menggunakan statistik $F_2 = P' / S'$. Hipotesis H ditolak jika F_2 lebih besar daripada $F_{\alpha(v_1,v_2)}$ yang diperoleh dari daftar distribusi F dengan dk pembilang v_1 = (p - 1) dan dk penyebut v_2 = (b -1)(p - 1) dan taraf sifnifikan α (0,01 atau 0,05). Untuk taraf 1 % sering dipakai tanda ** dan untuk taraf 5 % dipakai tanda *.

Jika Ho kita tolak berarti terdapat perbedaan dalam perlakuan.

3.3 Rancangan Blok Acak Lengkap dalam Eksperimen Faktorial 2^k

Di dalam Eksperimen Faktorial kita memakai RBAL untuk keperluan analisa statistiknya. Telah dijelaskan bahwa kita memperoleh kontras dengan cara yang mudah diingat yaitu:

$$\text{Kontras} = r.2^{k-1} (\text{ pengaruh }) = (a\pm1)(b\pm1)(c\pm1)\ldots$$

Untuk menghitung JK nya juga akan kita pergunakan kontras-kontras tersebut. Secara umum dapat ditulis :

$$JK_{(\text{ pengaruh })} = \frac{(\text{kontras})^2}{r.2^k}$$

dimana r adalah banyaknya replikasi yang dilakukan.

Di dalam Eksperimen Faktorial, semua unit eksperimen terlibat dalam pengukuran baik pengaruh utama maupun interaksinya.

$$JK_A = \frac{[(a-1)\ (b+1)\ (c+1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_B = \frac{[(a+1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_C = \frac{[(a+1)\ (b+1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{AB} = \frac{[(a-1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{AC} = \frac{[(a-1)\ (b+1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{BC} = \frac{[(a+1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{ABC} = \frac{[(a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d+1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{ABD} = \frac{[(a-1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d-1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

$$JK_{BCD} = \frac{[(a+1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d-1)\ldots\ ]^2}{r.2^k}$$

dan seterusnya.

Jika dibuat blok untuk memudahkan perhitungan maka akan diperoleh bahwa $JK_{blok} = JK_{\text{interaksi tingkat tinggi}}$ bila kita membaurkan blok dengan interaksi tingkat tingginya. Pembuatan blok ini ialah untuk mengumpulkan unit eksperimen yang homogen dengan hipotesa bahwa pengaruh blok tidak ada. Jikalau uji hipotesa menyatakan signifikan berarti Ho kita ditolak, menyatakan bahwa blok yang dibuat terdapat perbedaan perlakuan.

3.4 Replikasi Tunggal Eksperimen Faktorial 2^k

Banyak keadaan yang menyebabkan tidak memungkinkan untuk melakukan eksperimen dengan beberapa replikasi atau melakukan eksperimen faktorial selengkapnya sekaligus. Keterbatasan sumber yang ingin diteliti, kadang hanya memungkinkan kita melaksanakan replikasi tunggal (r=1). Pengujian pengaruh-pengaruh utama dan pengaruh interaksi dapat dilaksanakan jika kita menggabungkan interaksi tingkat tinggi menjadi sumber variasi sesatan (galat atau kekeliruan) dengan asumsi bahwa interaksi tingkat tinggi kita boleh abaikan. Ambil contoh eksperimen faktorial 2^4, datanya dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

tabel 3.4.1

	A_0				A_1			
	B_0		B_1		B_0		B_1	
	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	45	68	48	80	71	60	65	65
D_1	43	75	45	70	100	86	104	96

Eksperimen ini kita susun dalam 2 blok dengan membaurkan interaksi tingkat tinggi dengan blok yaitu interaksi ABCD.

Blok yang terjadi adalah :

Blok I		Blok II	
(1)	= 45	a	= 71
ab	= 65	b	= 48
bc	= 80	d	= 43
ac	= 60	abc	= 65
cd	= 75	acd	= 86
ad	= 100	c	= 68
abcd	= 96	bcd	= 70
bd	= 45	abd	= 104
jumlah	= 566	jumlah	= 555

Cara memperoleh Blok I dan Blok II adalah dengan menggunakan konsep pembauran.

Ambil interaksi ABCD baur dengan blok yang mengakibatkan bentuk linier sebagai berikut :

$$L = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \qquad (1)$$

Bentuk ini diperoleh dari bentuk umum kombinasi linier :

$$L = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_k x_k \qquad (2)$$

Dengan ketentuan :

x_i = 0 jika faktor i bertaraf rendah

= 1 jika faktor i bertaraf tinggi

l_i = 0 jika faktor i tidak dibaurkan

1 jika faktor i dibaurkan

Nilai L yang diperoleh diubah ke bentuk modulus 2, sehingga diperoleh nilai L = 0 atau L = 1.

Bentuk (1) di atas diperoleh karena $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$

Untuk memperoleh 2 blok kita kumpulkan nilai L=0 dalam satu blok sedangkan blok lainnya adalah L yang bernilai 1.

$$
\begin{aligned}
(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \;;\; L = 0 \\
a &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \;;\; L = 1 \\
b &= 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \;;\; L = 1 \\
ab &= 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
c &= 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \;;\; L = 1 \\
ac &= 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
bc &= 0 + 1 + 1 + 0 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
abc &= 1 + 1 + 1 + 0 = 3 \;;\; L = 1 \ (\text{mod}.2) \\
d &= 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \;;\; L = 1 \\
ad &= 1 + 0 + 0 + 1 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
bd &= 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
abd &= 1 + 1 + 0 + 1 = 3 \;;\; L = 1 \ (\text{mod}.2) \\
cd &= 0 + 0 + 1 + 1 = 2 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2) \\
acd &= 1 + 0 + 1 + 1 = 3 \;;\; L = 1 \ (\text{mod}.2) \\
bcd &= 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \;;\; L = 1 \ (\text{mod}.2) \\
abcd &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \;;\; L = 0 \ (\text{mod}.2)
\end{aligned}
$$

Perhitungan JK dilakukan dengan menggunakan data yang ada sebagai berikut :

$$JK_A = \frac{[(a-1)\ (b+1)\ (c+1)\ (d+1)]^2}{1.2^4}$$

$$= \frac{[(ab-b+a-1)\ (cd+d+c+1)]^2}{16}$$

$$= \frac{[(abcd-bcd+acd-cd+abd-bd+ad-d+abc-bc+ac-c+ab-b+a-1)]^2}{16}$$

$$= \frac{[(96-70+86-75+104-45+100-43+65-80+60-68+65-48+71-45)]^2}{16}$$

$$= (\ 1/16\ )\ (\ 173\ )^2$$

$$= 1870,5625$$

$$JK_B = (\ 1/16\ )\ [(a+1)\ (b-1)\ (c+1)\ (d+1)]^2$$

$$= (\ 1/16\ )\ (\ 625\ )^2 = 39,0625$$

$$JK_C = (\ 1/16\ )\ [(a+1)\ (b+1)\ (c-1)\ (d+1)]^2$$

$$= (\ 1/16\ )\ (\ 6241\ )^2 = 390,0625$$

$$JK_D = (\ 1/16\ )\ (\ 13689\ )^2 = 855,5625$$

$$JK_{AB} = (\ 1/16\ )\ (\ 1\ )^2 = 0,0625$$

$$JK_{AC} = (\ 1/16\ )\ (\ 21025\ )^2 = 1314,0625$$

$$JK_{AD} = (\ 1/16\ )\ (\ 17689\ )^2 = 1105,5625$$

$$JK_{BC} = (\ 1/16\ )\ (\ 361\ )^2 = 22,5625$$

$JK_{BD} = (1/16)(9)^2 = 0,5625$

$JK_{CD} = (1/16)(81)^2 = 5,0625$

$JK_{ABCD} = (1/16)(121)^2 = 7,5625$

$$JK_{blok} = \frac{(566)^2 + (555)^2}{8} - \frac{(1121)^2}{16} = 7,5625$$

$JK_{ABCD} = JK_{blok}$, interaksi 3 faktor kita masukkan pada sumber variasi kekeliruan , karena kita bekerja dengan replikasi tunggal, tabel Anavanya dapat dilihat sebagai berikut :

tabel 3.4.2

sumber variasi	dk	JK	RK	F
Blok (ABCD)	1	7,5625		
A	1	1870,5625	1870,5625	62,22**
B	1	39,0625	39,0625	1,30
C	1	390,0625	390,0625	12,98*
D	1	855,5625	855,5625	28,46**
AB	1	0,0625	0,0625	<1
AC	1	1314,0625	1314,0625	43,71**
AD	1	1105,5625	1105,5625	36,78**
BC	1	22,5625	22,5625	<1
BD	1	0,5625	0,5625	<1
CD	1	5,0625	5,0625	<1
Sisa(ABC+ABD+ACD + BCD)	4	120,2500	30,0625	
Total	15	5730,9375		

$F_{1\%\,(1,4)} = 21,20$ $\qquad$ $F_{5\%\,(1,4)} = 7,71$

Kesimpulan yang dapat diambil dari tabel di atas ialah: Pengaruh faktor A signifikan karena $F_H > F_t$ untuk taraf 1% diberi tanda **, berarti ada beda perlakuan antara A_o dengan A_1. Untuk faktor B hipotesa kita terima bahwa $B_o = B_1$ perlakuan yang diberikan tidak mempunyai pengaruh.

Untuk faktor C, hipotesa kita tolak karena untuk taraf 5% ternyata signifikan. Sama halnya dengan faktor D diberi tanda **, berarti terdapat dengan nyata beda perlakuan antara taraf rendah dan taraf tinggi faktor tersebut. Kemudian untuk pengaruh interaksi yang beda nyata adalah interaksi AC dan interaksi AD.

BAB IV

REPLIKASI FRAKSIONAL DALAM EKSPERIMEN FAKTORIAL 2^k

4.1 Replikasi $\frac{1}{2}$ bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^k

Jika dalam suatu situasi tidak semua eksperimen dari kombinasi perlakuan dapat dikerjakan maka dikatakan kita bekerja dengan replikasi fraksional yaitu hanya melaksanakan sebagian saja dari replikasi penuh.

Misalkan diambil Eksperimen Faktorial 2^3 , replikasi yang dapat dilaksanakan hanya $\frac{1}{2}$ bagian saja dari seluruh kombinasi perlakuan, berarti hanya 4 kombinasi perlakuan saja yang dilaksanakan. Rancangannya dinamakan rancangan faktorial 2^{3-1}.

Perhatikan tabel yang memuat tanda pengaruh ke-8 kombinasi perlakuan. Dikumpulkan interaksi ABC yang bertanda positif, yaitu perlakuan a, b, c dan abc.

Dalam hal ini ABC dinamakan *pembangkit* (*generator*) dari replikasi fraksional. Elemen identitas I selalu bertanda positif, jadi I = ABC.

Secara umum rancangan $\frac{1}{2}$ bagian dari Eksperimen Faktorial 2^k disebut rancangan faktorial 2^{k-1}.

Untuk menghitung pengaruh utama maupun pengaruh interaksinya perhatikan tabel 4.1.1.

Taksiran untuk pengaruh utama A, B dan C sebagai berikut:

$$l_A = \frac{1}{2} (a - b - c + abc)$$
$$l_B = \frac{1}{2} (-a + b - c + abc)$$
$$l_C = \frac{1}{2} (-a - b + c + abc)$$

Demikian pula halnya untuk taksiran pengaruh interaksi 2 faktor yaitu :

$$l_{BC} = \frac{1}{2} (a - b - c + abc)$$
$$l_{AC} = \frac{1}{2} (-a + b - c + abc)$$
$$l_{AB} = \frac{1}{2} (-a - b + c + abc)$$

tabel 4.1.1

Tanda pengaruh untuk rancangan 2^3

kombinasi perlakuan	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
c	+	−	−	+	+	−	−	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	−	+	−	−	−
ac	+	+	−	+	−	+	−	−
bc	+	−	+	+	−	−	+	−
(1)	+	−	−	−	+	+	+	−

Ternyata terlihat bahwa pengaruh A = BC, B = AC dan C = AB. Kenyataan ini mengatakan bahwa sulit membedakan kedua pengaruh yaitu A dengan BC, B dengan AC dan C dengan AB. Dua atau lebih pengaruh utama atau pengaruh interaksi yang mempunyai nilai yang sama disebut *ALIAS* satu dengan yang lain.

Jadi A adalah *Alias* BC, juga B dan C masing-masing ber*alias* dengan AC dan AB. Alias dari suatu pengaruh dapat diperoleh dengan menggandakan suatu pengaruh dengan identitas I memakai *relasi modulus 2.*

$$A = A.I = A.ABC = A^2BC = BC$$

$$B = B.I = B.ABC = AB^2C = AC$$

$$C = C.I = C.ABC = ABC^2 = AB$$

$$1_A \longrightarrow A + BC,\ 1_B \longrightarrow B + AC \text{ dan } 1_C \longrightarrow C + AB$$

Artinya apabila taksiran A dihitung yaitu 1_A maka nilai yang terhitung juga adalah BC. Berarti menghitung kontras dari pengaruhnya yakni dengan menjumlah pengaruh A dan BC. Demikian pula dengan pengaruh B + AC dan pengaruh C + AB. Untuk rancangan yang eksperimennya dilakukan dengan metode replikasi fraksional, adanya alias-alias ini harus diperiksa dan yakin bahwa alias-alias tersebut tidak terdapat secara bersamaan dalam sebuah bagian. Bagian yang terjadi adalah :

Bagian I : $\boxed{(1) \quad ab \quad bc \quad ac}$

Bagian II : $\boxed{a \quad b \quad c \quad abc}$

Pengambilan I = + ABC dinamakan Bagian Utama (Principal Fraction). Perhatikan tabel 4.1.1 pada bagian bawah, pengaruh ABC bertanda negatif (-) semuanya, ab berlambang + + - , ac berlambang + - +, bc berlambang - + + sedangkan (1) lambangnya - - -, terlihat bahwa rancangan fraksional tersebut mempunyai relasi penentu I = - ABC .

Menghitung taksiran pengaruh utamanya sebagai berikut :

$$1'_A \longrightarrow A - BC$$

$$1'_B \longrightarrow B - AC$$

$$1'_C \longrightarrow C - AB$$

(lambang ' pada 1_i di mana i = A, B, AB, C dan seterusnya untuk membedakan dengan menaksir pengaruh-pengaruh pada pengambilan kontras penentu I = + ABC.). Atau dengan kata lain alias yang terjadi adalah :

$A = -BC$; $B = -AC$; $C = -AB$

Kedua bagian yang terjadi berasal dari sumber yang sama berarti gabungan dari $\frac{1}{2}$ bagian akan menyusun sebuah rancangan 2^3 yang lengkap. Pengambilan I mempunyai harga yang sama kecuali tanda, akan tetapi dalam pengujian untuk JK hasilnya akan sama karena dikuadratkan.

Perhatikan taksiran untuk pengaruh-pengaruhnya:

$$l_A = A + BC \quad \text{dan} \quad l'_A = A - BC$$

dijumlah : $(1/2)\ (\ l_A + l'_A\ ) = (1/2)\ (\ A + BC + A - BC\ ) = A$

dan : $(1/2)\ (\ l_A - l'_A\ ) = (1/2)\ (\ A + BC - A + BC\ ) = BC$

Jadi ketiga pasang taksiran pengaruh yang terjadi adalah seperti tabel di bawah ini :

tabel 4.1.2

i	$(1/2)(\ l_i + l'_i\ )$	$(1/2)(\ l_i - l'_i\ )$
A	A	BC
B	B	AC
C	C	AB

Cara ini dapat dikembangkan untuk replikasi $\frac{1}{2}$ bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^k dengan mengambil bagian utama I = ABC...K. Pembentukan rancangan 2^{k-1} dapat pula dikerjakan dengan lebih dahulu menyusun kombinasi perlakuan 2^{k-1} lengkap kemudian menambah faktor ke k dengan memberi tanda + atau - sesuai dengan tanda pada interaksi tingkat tertinggi ABC...(K - 1) lihat tabel 4.1.3 .

Oleh sebab itu rancangan faktorial 2^{3-1} dapat pula disusun dengan terlebih dahulu menuliskan rancangan faktorial 2^2 selengkapnya kemudian menggantikan faktor C dengan pengaruh interaksi AB atau alternatif lain yaitu -AB.

tabel 4.1.3

Faktorial 2^2		Fak. 2^{3-1}, I = ABC			Fak. 2^{3-1}, I =-ABC		
A	B	A	B	C=AB	A	B	C=-AB
-	-	-	-	+	-	-	-
+	-	+	-	-	+	-	+
-	+	-	+	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+	+	-

4.2 Replikasi $\frac{1}{4}$ bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^k

Secara umum lambang untuk rancangan replikasi $\frac{1}{4}$ bagian dituliskan rancangan 2^{k-2}. Untuk k yang besar maka perlu memperkecil bagian yang terjadi agar kombinasi perlakuan yang harus dilaksanakan juga dapat diperkecil. Untuk rancangan ini diperlukan 2 pembangkit. Jika P dan Q adalah pembangkit yang dipilih maka I=P dan I=Q disebut *pembangkit relasi (generating relations)*.

Bagian yang terjadi ada 4 di mana pilihan pembangkitnya yaitu P dan -P serta Q dn -Q. Dalam *Principal Fraction* dipilih P dan Q yang positif. Relasi penentu selengkapnya dapat dituliskan sebagai berikut :I = P = Q = PQ. Alias dari berbagai pengaruh diperoleh dengan pergandaan pengaruh tersebut dengan P, Q dan PQ menggunakan relasi modulus 2. Jadi setiap pengaruh mempunyai 3 alias.

Ambil contoh rancangan faktorial 2^{6-2}. Pilih I=ABCE sebagai P dan I=ACDF sebagai Q, keduanya merupakan pembangkit relasinya. (pemilihan ini boleh dilakukan sesuka hati). Maka PQ= ABCE.ACDF = A^2BC^2DEF = BDEF. Selengkapnya ditulis : I = ABCE = ACDF = BDEF.

Untuk melaksanakan Eksperimen Faktorial 2^6 selengkapnya dengan replikasi = 1 diperlukan 64 kombinasi perlakuan. Agar pelaksanaan penelitian dapatlebih efisien maka dipergunakan rancangan $\frac{1}{4}$ bagian. Dengan demikian kita hanya perlu melaksanakan 16 kombinasi perlakuan atau eksperimen saja.

Untuk itu dibentuk 4 bagian. Karena adanya alias-alias maka secara acak dapat diambil 1 bagian saja untuk dikerjakan (sesuai dengan tujuan dari penelitian tersebut).

Berikut tabel Alias Replikasi $\frac{1}{4}$ bagian dari Eksperimen Faktorial 2^6 dengan pembangkit : I = ABCE = ACDF = BDEF

tabel 4.2.1

Pengaruh	A L I A S		
I	ABCE	ACDF	BDEF
A	BCE	CDF	ABDEF
B	ACE	ABCDF	DEF
C	ABE	ADF	BCDEF
D	ACF	BEF	ABCDE
E	ABC	BDF	ACDEF
F	ACD	BDE	ABCEF
AB	CE	BCDF	ADEF
AC	BE	DF	ABCDEF
AD	CF	BCDE	ABEF
AE	BC	CDEF	ABDF
AF	CD	BCEF	ABDE
BD	EF	ACDE	ABCF
BF	DE	ABCD	ACEF
ABF	CEF	BCD	ADE
CDE	ABD	AEF	CBF

Bagian-bagian yang terbentuk dari alias-alias tersebut di atas ialah :

Bagian I

I	D	AC	BD
A	E	AD	BF
B	F	AE	ABF
C	AB	AF	CDE

Bagian II

ABCE	ACD	EF
BCE	CE	DE
ACE	BE	CEF
ABE	CF	ABD
ACF	BC	
ABC	CD	

Bagian III

ACDF	BDE	ACDE
CDF	BCDF	ABCD
ABCDF	DF	BCD
ADF	BCDE	AEF
BEF	CDEF	
BDF	BCEF	

Bagian IV

BDEF	ABCDEF
ABDEF	ABEF
DEF	ABDF
BCDEF	ABDE
ABCDE	ABCF
ACDEF	ACEF
ABCEF	ADE
ADEF	CBF

tabel 4.2.2

Anava Replikasi 1/4 bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^6

sumber variasi	dk	
Pengaruh Utama A	1	
B	1	
⋮	⋮	= 6
F	1	
Interaksi 2 faktor		
AB = CE	1	
AC = BE = DF	1	
AD = CF	1	
AE = BC	1	= 7
AF = CD	1	
BD = EF	1	
BF = DE	1	
Interaksi 3 faktor		
ABF = CEF = BCD = ADE	1	= 2
CDE = ABD = AEF = CBF	1	
J U M L A H	15	

4.3 Replikasi Fraksional dalam Eksperimen Faktorial 2^k

Secara umum rancangan untuk replikasi fraksional ini dilambangkan dengan 2^{k-p} atau rancangan $1/(2^p)$ bagian dari faktorial 2^k. Setiap pengaruh mempunyai 2^{p-1} alias, dengan pembangkit p yang saling bebas dan mempunyai interaksi umum $2^p - p - 1$.

Alias-alias tersebut diperoleh dengan mengalikan setiap pengaruh dengan relasi penentu dengan memakai relasi modulus 2.

Untuk k yang cukup besar, diasumsikan interaksi tingkat tinggi (interaksi 3 faktor atau lebih) diabaikan dan dimasukkan dalam sumber kekeliruan atau error.

Akan terjadi 2^p bagian yang sesuai dengan pembangkitnya. Untuk menguji pengaruhnya, pilih bagian yang sesuai.

Rancangan ini dapat dihitung dengan rumus umum :

$$\text{Pengaruh } (l_i) = \frac{2 \text{ (kontras)}}{2^{k-p}}$$

$$\text{Kontras} = (l_i \cdot 2^{k-p-1})$$

$$JK_{(AB \ldots K)} = \frac{(\text{kontras})^2}{2^{k-p}}$$

Ada beberapa rancangan faktorial 2^{k-p} yang mempunyai tipe khusus dan dinamakan rancangan Resolusi R jika tidak ada p pengaruh faktor yang menjadi alias dari pengaruh lain paling kurang R - p faktor.

Kita melambangkan dengan angka Romawi sebagai subskripnya pada rancangan faktorial tersebut.

Tipe-tipe tersebut adalah sebagai berikut :

1. Rancangan Resolusi III yaitu rancangan dengan pengaruh utama tidak mempunyai alias pengaruh utama lainnya, tetapi mempunyai alias interaksi 2 faktor dan interaksi 2 faktor mempunyai alias yang sama.

   Contoh : rancangan 2^{3-1}_{III} dengan I = ABC

2. Rancangan Resolusi IV yaitu rancangan dengan pengaruhutama tidak mempunyai alias pengaruh utama lainnya juga interaksi 2 faktor, tetapi interaksi 2 faktor mempunyai alias satu sama lain.

   Contoh : rancangan 2^{4-1}_{IV} dengan I = ABCD

3. Rancangan Resolusi V yaitu rancangan dengan pengaruh utama tidak mempunyai alias dengan pengaruh utama lainnya juga interaksi 2 faktor tidak mempunyai alias dengan interaksi 2 faktor lainnya, tetapi interaksi 2 faktor beralias dengan interaksi 3 faktor.

   Contoh : rancangan 2^{5-1}_{V} dengan I = ABCDE

Rancangan fraksional 2^{k-p} dapat dipilih sesuai dengan kebutuhan kita, untuk tabel di bawah ini memberikan sejumlah pilihan.

tabel 4.3.1

Rancangan faktorial fraksional 2^{k-p}

jumlah k faktor	bagian	jumlah eks.	pembangkit rancangan
3	2^{3-1}_{III}	4	$A = \pm BC$
4	2^{4-1}_{IV}	8	$D = \pm ABC$
5	2^{5-1}_{V}	16	$E = \pm ABCD$
	2^{5-2}_{III}	8	$D = \pm AB$ $E = \pm AC$
6	2^{6-1}_{VI}	32	$F = \pm ABCDE$
	2^{6-2}_{IV}	16	$E = \pm ABC$ $F = \pm BCD$
	2^{6-3}_{III}	8	$D = \pm AB$ $E = \pm AC$ $F = \pm BC$
7	2^{7-1}_{VII}	64	$G = \pm ABCDEF$

lanjutan

7	2^{7-2}_{IV}	32	$F = \pm ABCD$
			$G = \pm ABDE$
	2^{7-3}_{IV}	16	$E = \pm ABC$
			$F = \pm BCD$
			$G = \pm ACD$
	2^{7-4}_{III}	8	$D = \pm AB$
			$E = \pm AC$
			$F = \pm BC$
			$G = \pm ABC$
8	2^{8-2}_{V}	64	$G = \pm ABCD$
			$H = \pm ABEF$
	2^{8-3}_{IV}	32	$F = \pm ABC$
			$G = \pm ABD$
			$H = \pm BCDE$
	2^{8-4}_{IV}	16	$E = \pm BCD$
			$F = \pm ACD$
			$G = \pm ABC$
			$H = \pm ABD$

Contoh rancangan faktorial 2^{5-1}

Untuk replikasi penuh rancangan ini, diperlukan 32 eksperimen atau kombinasi perlakuan. Tetapi untuk replikasi fraksionalnya dapat dikerjakan $\frac{1}{2}$ bagian dari seluruhnya. Jadi hanya 16 eksperimen saja yang dikerjakan.

Pertama-tama dipilih I = ABCDE (yang bertanda positif)akan terbentuk 2 bagian sebagai berikut :

I	ABCDE
A	BCDE
B	ACDE
C	ABDE
D	ABCE
E	ABCD
AB	CDE
AC	BDE
AD	BCE
AE	BCD
BC	ADE
BD	ACE
BE	ACD
CD	ABE
CE	ABD
DE	ABC

Nampak bahwa kedua bagian saling beralias. Jadi alias dari DE adalah ABC, oleh karena itu jika pengaruh DE dihitung maka hasil yang diperoleh juga merupakan pengaruh ABC dan seterusnya.

Perhatikan tabel berikut :

tabel 4.3.1

A	B	C	D	E	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE	
−	−	−	−	+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	56
+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	53
−	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	63
+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	65
−	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	53
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	55
−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	67
+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	61
−	−	−	+	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	69
+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	45
−	+	−	+	+	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	78
+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	93
−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	49
+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	+	+	−	−	60
−	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−	95
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	82

Taksiran dari pengaruh utama dan pengaruh 2 faktor

$l_A = -2,0$ $\quad l_{AB} = 1,5$ $\quad l_{BD} = 10,75$

$l_B = 20,5$ $\quad l_{AC} = 0,5$ $\quad l_{BE} = 1,25$

$l_C = 0,0$ $\quad l_{AD} = -0,75$ $\quad l_{CD} = 0,25$

$l_D = 12,25$ $\quad l_{AE} = 1,25$ $\quad l_{CE} = 2,25$

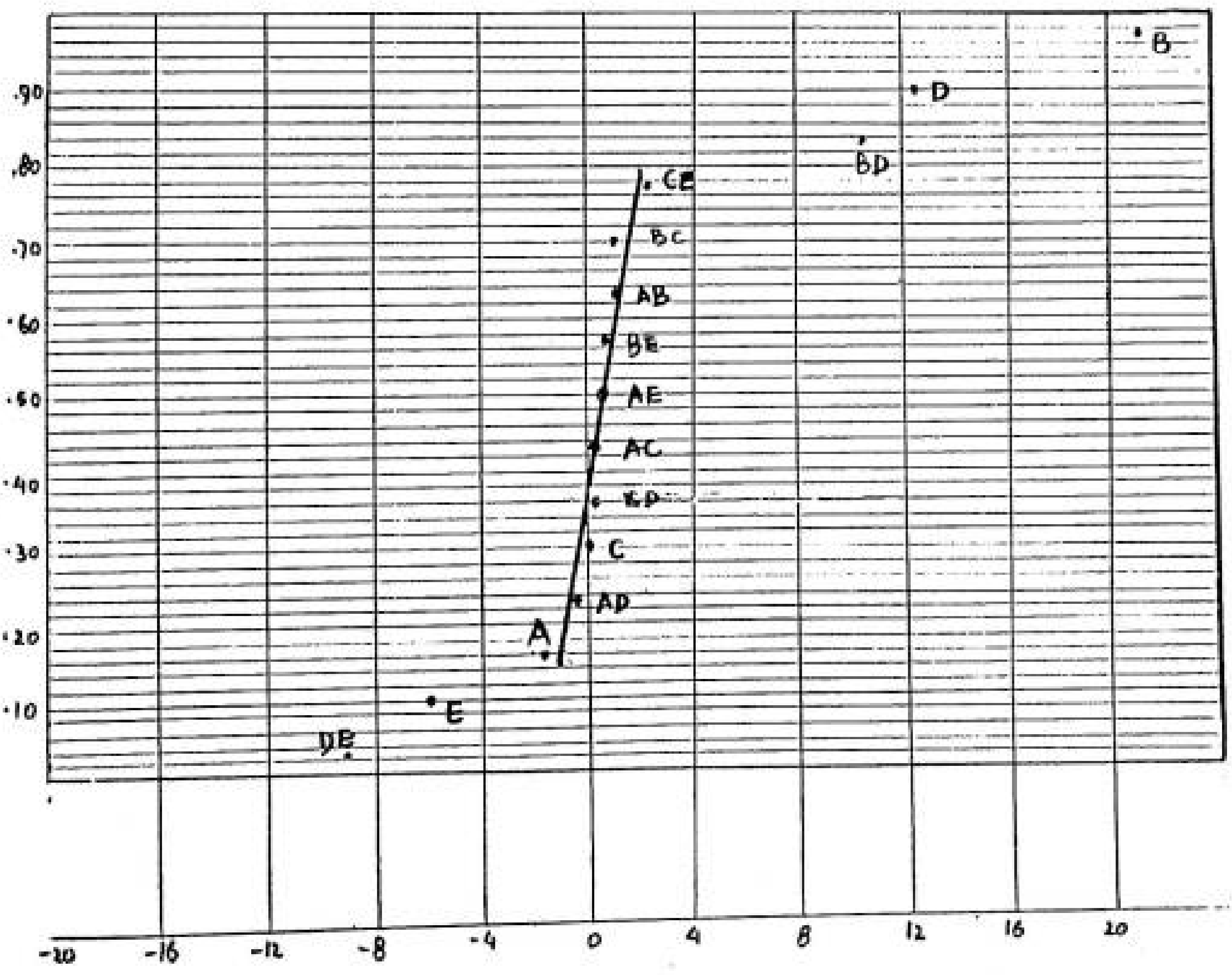
$l_E = -6,25$ $\quad l_{BC} = 1,5$ $\quad l_{DE} = -9,50$

Karena dalam bagian yang dikerjakan tidak terdapat interaksi 3 faktor atau lebih yang dapat dijadikan sumber kekeliruan maka oleh *Daniel* (1959) ditemukan suatu cara sederhana untuk mengatasi masalah ini yakni menggunakan kertas peluang normal.

Pengaruh yang diabaikan akan berdistribusi normal dengan rata-rata = 0 dan variansi σ^2 dan cenderung ada disekitar garis lurus, tetapi pengaruh yang signifikan akan mempunyai rata-rata yang tidak nol dan tidak berada pada garis lurus.

Perhatikan gambar di bawah ini :

gambar 4.3.1



Gambar tersebut di atas diperoleh dengan cara mengurutkan hasil perhitungan taksiran pengaruh-pengaruh yang telah dihitung .

tabel 4.3.2

Urutan (j)	Pengaruh	Taksiran	(j-0,5)/15
15	B	20,5 **	0,9667
14	D	12,25**	0.9000
13	BD	10,75**	0,8333
12	CE	2,25	0,7667
11	BC	1,50	0,7000
10	AB	1,50	0,6333
9	BE	1,25	0,5667
8	AE	1,25	0,5000
7	AC	0,50	0,4333
6	CD	0,25	0,3667
5	C	0,00	0,3000
4	AD	-0,75	0,2333
3	A	-2,00	0,1667
2	E	-6,25**	0,1000
1	DE	-9,50**	0,0333

Gambar 4.3.1 dan tabel 4.3.2 memperlihatkan bahwa pengaruh yang signifikan adalah pengaruh B, D, BD, E dan pengaruh DE. Hasil yang diperoleh ini dapat dibuktikan dengan melaksanakan replikasi penuh terhadap Eksperimen Faktorial 2^5 .

Contoh Rancangan Faktorial 2^5

Dari data hasil penelitian di mana 5 faktor yang bertaraf 2 akan diuji pengaruh utama dan pengaruh interaksinya, secara keseluruhan data yang diperoleh ada 32. Karena terdapat 32 kombinasi perlakuan jika replikasi penuh dilaksanakan. Datanya sebagai berikut :

(1) = 61	d = 69	e = 56	de = 44
a = 53	ad = 61	ae = 63	ade = 45
b = 63	bd = 94	be = 70	bde = 78
ab = 61	abd = 93	abe = 65	abde = .77
c = 53	cd = 66	ce = 59	cde = 49
ac = 56	acd = 60	ace = 55	acde = 42
bc = 54	bcd = 95	bce = 67	bcde = 81
abc = 61	abcd = 98	abce = 65	abcde = 82

Untuk keperluan Anavanya maka JK untuk masing-masing pengaruh akan dihitung dengan menggunakan rumus umumnya.

Tabel 4.3.3

Anava Rancangan Faktorial 2^5

sumber variasi	dk	JK	RK	F
A	1	0,059	0,059	1,51
B	1	11,883	11,883	304,69 **
C	1	0,012	0,012	0,30
D	1	3,611	3,611	92,58
E	1	1,221	1,221	31,30
AB	1	0,059	0,059	1,51
AC	1	0,017	0,017	0,43
AD	1	0,024	0,024	0,61
AE	1	0,001	0,001	0,025
BC	1	0,024	0,024	0,61
BD	1	5,486	5,486	140,67 **
BE	1	0,125	0,125	3,21
CD	1	0,141	0,141	3,62
CE	1	0,024	0,024	0,61
DE	1	3,781	3,781	96,95 **
Sisa	16	0,633	0,039	
Total	31	27,101		

Dari tabel diperoleh :

$$F_{1\,\%\,(\,1,16\,)} = 8,53$$

$$F_{5\,\%\,(\,1,16\,)} = 4,49$$

Faktor yang signifikan adalah B, D, E dan interaksi BD, DE. Hasil ini membuktikan bahwa dengan menggunakan replikasi fraksional dapat mengefisienkan waktu, tenaga dan biaya dari suatu penelitian.

BAB V

KESIMPULAN

1. Replikasi $\frac{1}{2}$ bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^k mempunyai sebuah pembangkit atau generator yang sama dengan elemen identitas I.

2. Alias dari suatu pengaruh dapat diperoleh dengan menggandakan suatu pengaruh dengan identitas I memakai relasi modulus 2.

3. Replikasi $\frac{1}{4}$ bagian dalam Eksperimen Faktorial 2^k dalam rancangannya memerlukan 2 pembangkit yang disebut pembangkit relasi yaitu I = P = Q = PQ.

4. Secara umum rancangan untuk Replikasi Fraksional dilambangkan dengan 2^{k-p} atau rancangan $\frac{1}{2^p}$ bagian dari Eksperimen Faktorial 2^k dan setiap pengaruh mempunyai 2^{p-1} alias.

DAFTAR PUSTAKA

1. Box, George E.P and Paul William, G.H, An Introduction to Design Data Analysis and Model Building, John Wiley & Sons, New York.
2. Cohran, W.G. and Cox, G. M. , Experimental Design, John Wiley & Sons, Inc, 1953.
3. John, Peter W. M. , Statistical Design and Analysis of Experiments, the Macmillan Company, New York, 1971.
4. Montgomery, D. C. , Design and Analysis of Experiments, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1984.
5. Sudjana, Disain dan Analisis Eksperimen, Penerbit Tarsito, Bandung, 1985.