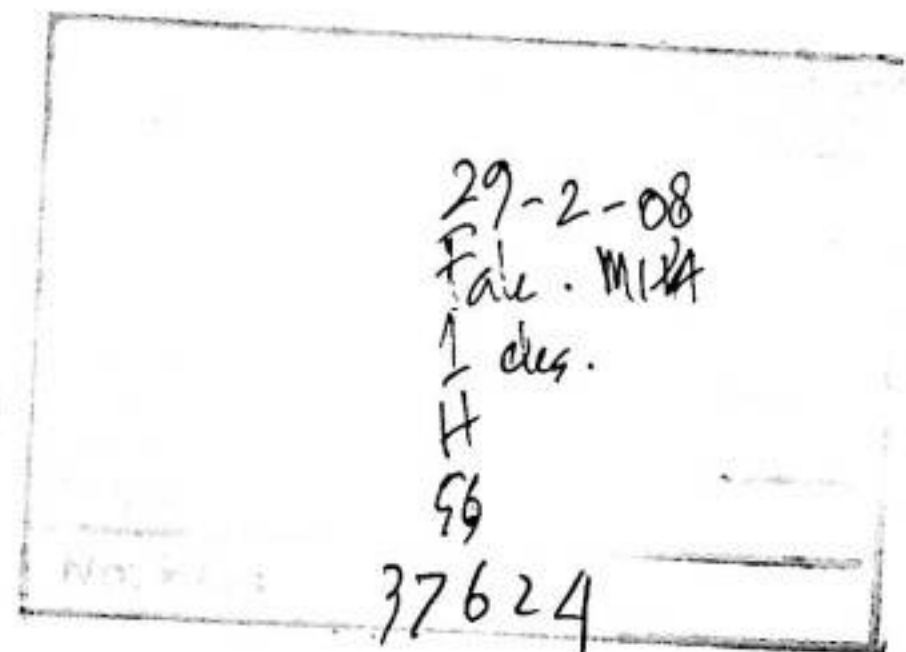


# MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN

## SKRIPSI



**MAHDILLAH**  
**H 111 02 026**



SKR. MPOD  
MAH  
m

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**  
**MAKASSAR**  
**2008**

**MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN  
PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN**

**S K R I P S I**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar**

**Sarjana Sains**

**Pada Jurusan Matematika**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**Universitas Hasanuddin**

**OLEH:**

**MAHDILLAH**

**H 111 02 026**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2008**

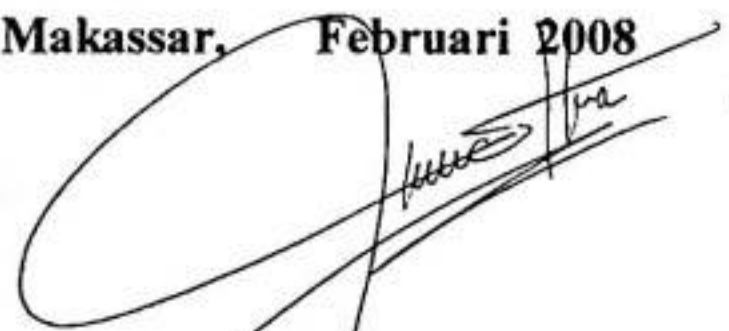
## **LEMBAR KEOTENTIKAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

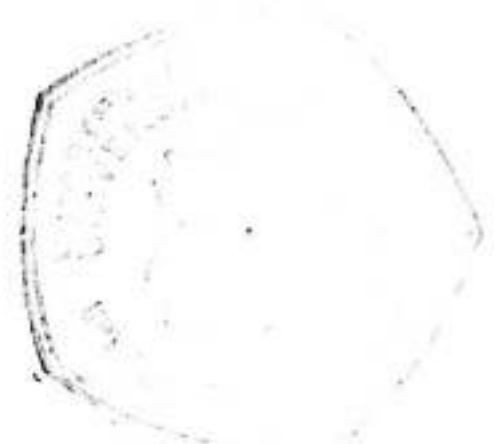
**“MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN  
PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN”**

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Februari 2008



**MAHDILLAH**  
NIM : H 111 02 026



**MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN  
PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN**

**Disetujui Oleh :**

**Pembimbing Utama**

**Drs. Budi Nurwahyu, MS**  
**Nip : 131 414 010**

**Pembimbing pertama**

**Kasbawati, S.Si, M.Si**  
**Nip : 132 303 724**

**Pada tanggal : Februari 2008**

Pada hari ini, Rabu tanggal 27 Februari 2008, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

**MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN  
PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN**

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Februari 2008

**Panitia Ujian Skripsi**

**Tanda Tangan**

1. Ketua : Drs. Raupong, M.Si.

(.....)

2. Sekretaris : Dra. Nur Erawati, M.Si.

(.....)

3. Anggota : Amran, S.Si, M.Si.

(.....)

4. Anggota : Drs. Budi Nurwahyu, M.S

(.....)

5. Anggota : Kasbawati, S.Si, M.Si.

(.....)

## KATA PENGANTAR



Alhamdulillah rabbil alamin. Puji syukur senantiasa kita panjatkan kehadiran *Allah SWT* atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, sebagai salah satu prasyarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin. Tak lupa pula salam dan salawat kita lantunkan kepada nabi besar *Muhammad SAW* (sebaik-baik panutan dan idola bagi umat manusia), sebagai pembawa risalah dan kebenaran sejati yang senantiasa menjadi pedoman dan panutan dalam kehidupan kita.

Penulis sadar sepenuhnya, bahwa dalam penyusunan skripsi ini penulis banyak mendapatkan bantuan baik moril maupun materil, untuk itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang tidak terhingga kepada *Ayahanda tercinta Alm. Mahjuddin dan Ibunda tercinta Maryam Usmat* yang telah melahirkanku, mangasihiku dan kuhormati serta iringan doa-doanya demi keberhasilan pendidikan penulis. Juga untuk saudara-saudaraku .. *Luv U all..*

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu, M.S** dan Ibu **Kasbawati, S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang penuh kesabaran, kesungguhan dan kebaikan hatinya telah banyak memberikan petunjuk



serta bimbingan sehingga kesulitan penulis dapat teratasi dan akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

2. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA, dan Bapak **A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si** selaku Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA, serta para Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Ibu **Jusmawati M, S.Si, M.Si** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya selama perkuliahan.
4. Bapak **Drs. Raupong, M.Si**, bapak **Amran, S.Si, M.Si** dan ibu **Dra Nur Erawati, M.Si** selaku penguji yang selalu bersedia meluangkan waktunya.
6. My best friend all of man on 2002: **Alim, Accunk, Cuttank, Lumas, Lumba, Acha, Ikrar, Juki, Didin, Heri, Philip, Ical, Wahid, Amin.**  
Thanks for All, semuanya begitu indah dengan kalian
7. My friend all of woman on 2002 yang saya tidak bisa sebutkan satu-satu.
8. Seluruh teman-teman yang ada di jurusan matematika FMIPA UNHAS.
10. Rekan- rekan di Masjid : **Arie'S, Ari'M, Rama, Wanda, Callink, Iccank, Agus** yang memberikan dorongan untuk selesai.

Semoga segenap bantuan dan partisipasinya bernilai ibadah dan mendapat pahala yang setimpal di sisi Allah SWT. Akhirnya semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Makassar, Januari 2008

Penulis

## ABSTRAK

Penyakit DBD merupakan penyakit yang sampai saat ini masih menjadi endemik di Indonesia. Dalam tulisan ini, kita mencoba melakukan pendekatan deterministik untuk memodelkan penyebaran virus penyakit tersebut dan melakukan pengendalian terhadap vektornya secara konstan. Analisis kualitatif dilakukan dengan mencari nilai  $R_0$  dari model tersebut dan parameter-parameter yang dapat dikontrol agar endemik tidak terjadi. Simulasi numerik juga dilakukan dengan menggunakan data yang ada dan menginterpretasikan hasil simulasi yang diperoleh.

**Kata kunci :**  $R_0$ , Endemik



## ABSTRACT

Dengue fever disease is one of syndrome which till now at rest becomes endemic in Indonesia. In this paper, we trying to perform deterministic approach to make model dissemination virus infection and perform vector controller is constantly. Qualitative analyze doing to find  $R_0$  value from that model and parameters what can controlled so that endemic have not happened. Numeric simulation performed with use data and to interpretation simulation result which we got it.

**Key word :**  $R_0$  , Endemic

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>LEMBAR KEOTENTIKAN</b>	
<b>LEMBAR PENGESAHAN PEMBIMBING</b>	
<b>LEMBAR PENGESAHAN PENGUJI</b>	
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRAK.....</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>iv</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>v</b>
<b>DAFTAR LAMBANG .....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>viii</b>
<b>BAB I     PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
A. Latar Belakang .....	1
B. Rumusan Masalah .....	2
C. Batasan Masalah .....	5
D. Tujuan Penulisan .....	6
<b>BAB II     TINJAUAN PUSTAKA.....</b>	<b>7</b>
A. Model Dasar Epidemiologi .....	7
B. Angka Basic Reproduction Ratio .....	11
<b>BAB III    TEORI PENDUKUNG .....</b>	<b>13</b>
A. Jenis-Jenis Titik Kesetimbangan.....	13

	B. Defenisi Kestabilan .....	18
	C. Kestabilan Sistem Linear .....	19
	D. Kestabilan Sistem Non Linear.....	20
<b>BAB IV</b>	<b>MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE</b>	
	<b>DENGAN PENGENDALIAN VEKTOR SECARA</b>	
	<b>KONSTAN .....</b>	<b>23</b>
	A. Model Penyebaran Virus Dengue dengan	
	Pengendalian Vektor secara Konstan.....	23
	B. Menentukan Titik Keseimbangan .....	25
	C. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik	
	Keseimbangan .....	26
	D. Analisis Simulasi Numerik.....	31
<b>BAB V</b>	<b>PENUTUP .....</b>	<b>39</b>
	A. Kesimpulan .....	39
	B. Saran.....	40

## **DAFTAR PUSTAKA**

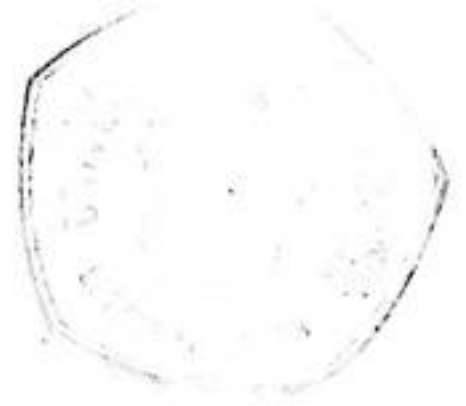
## **LAMPIRAN**

## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
$\alpha$	Alfa
$\xi$	Xi
$\delta$	Delta
$\lambda$	Lamda
$\varepsilon$	Epsilon
$\rightarrow$	Mendekati/menuju
$\partial$	Do
$\infty$	Tak hingga
$\leq$	Lebih kecil atau sama
$\geq$	Lebih besar atau sama
$\gamma$	Gamma
$\mu$	Mu
$\theta$	Theta
$\tau$	Tau
$\beta$	Beta
$\delta$	Delta
$\omega$	Omega

## DAFTAR GAMBAR

- Gambar 1.** Diagram kompartemen model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan ..... 3
- Gambar 2.** Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$  ..... 32
- Gambar 3.** Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$  ..... 34
- Gambar 4.** Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$  ..... 36
- Gambar 5.** Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$  ..... 38



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### A. Latar Belakang

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) atau Dengue Haemorrhagic Fever (DHF) merupakan penyakit umum yang sering terjadi di daerah tropis.

Sejak ditemukan di Manila tahun 1953, penyakit demam berdarah dengue kemudian menyebar ke Thailand dan Vietnam dan selanjutnya pada dekade enam puluhan mulai menyebar ke Asia Tenggara, antara lain Singapura, Malaysia, Srilangka dan Indonesia. Sampai saat ini, penyakit (DBD) yang merupakan penyakit viral yang ditularkan oleh vektor nyamuk, masih menjadi masalah kesehatan masyarakat yang serius di Indonesia (Noer M, Rosmanida, Subagyo Y, 2002).

Penyakit demam berdarah ini ditularkan oleh nyamuk terutama *Aedes aegypti*, yang banyak ditemukan di daerah perkotaan dimana nyamuk ini hidup dan berkembang biak di sekitar rumah. Peningkatan penderita demam berdarah dengue yang mencolok terjadi pada awal dan akhir musim hujan. Hal ini karena pada waktu-waktu tersebut tempat-tempat perindukan nyamuk terbentuk karena tertampungnya air hujan. Akibatnya terjadi peningkatan populasi nyamuk *Aedes aegypti* yang merupakan vektor penyakit demam berdarah dengue tersebut.

Sampai saat ini, ada empat jenis virus yang telah diidentifikasi yaitu tipe I, II, III dan IV. Virus ini kemungkinan muncul akibat pengaruh

musim/alam serta perilaku manusia (individu). Penularan DBD oleh satu jenis virus menjadikan tubuh manusia akan memproduksi imun tetap terhadap jenis virus tersebut, tetapi imun tersebut hanya merupakan imun sementara untuk jenis virus yang lain. Di sisi lain, nyamuk yang berperan sebagai vektor akan tetap membawa virus tersebut sampai mati (Niken L, Ponidi, Djati K, 2005)

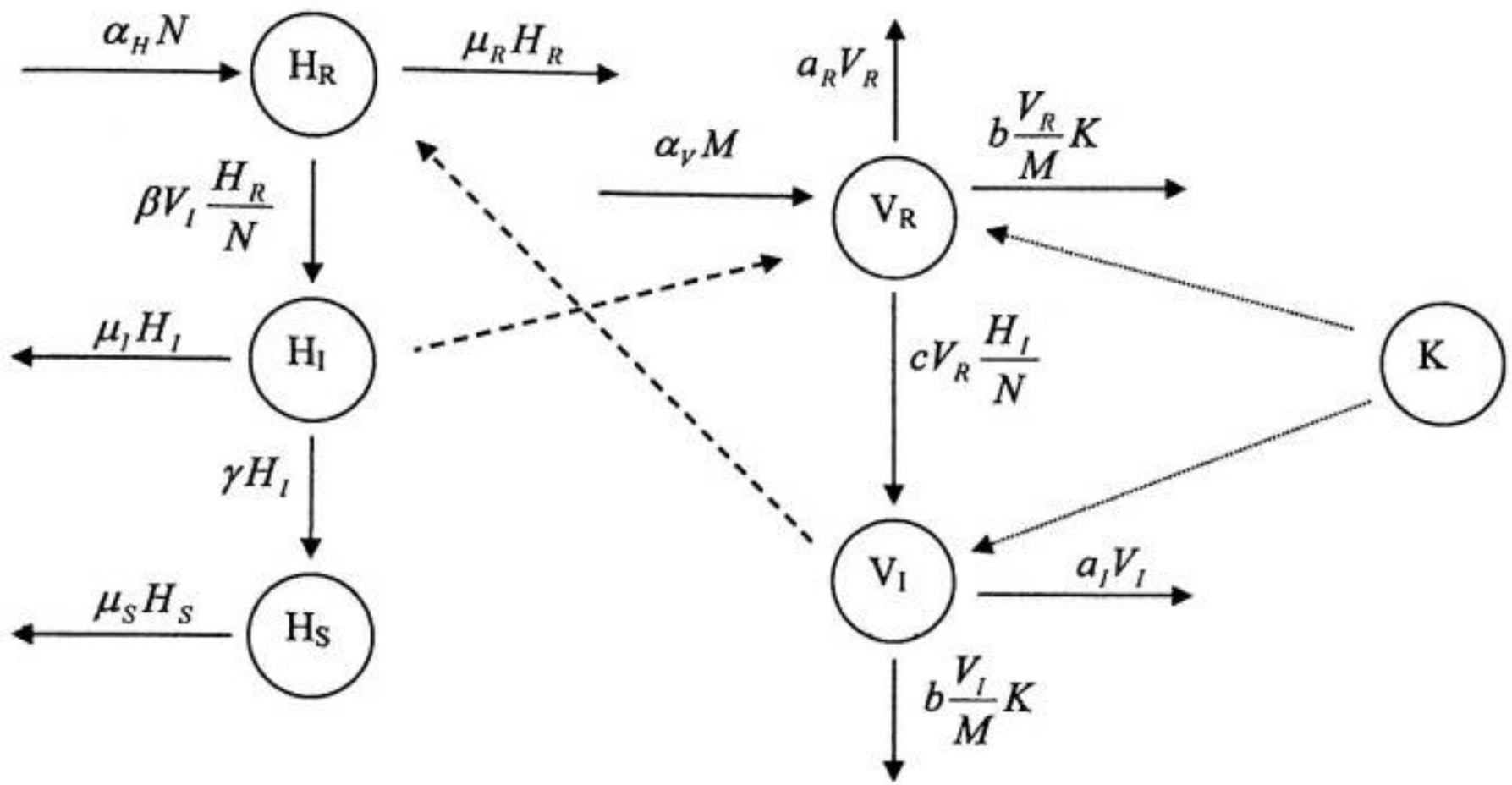
Meskipun telah banyak penelitian yang berkaitan dengan penyakit DBD namun penyakit ini masih selalu ada sepanjang tahun, terutama di musim pengujan. Banyak usaha yang dilakukan untuk mencegah maupun memberantas penyakit tersebut, satu diantaranya adalah penanggulangan dengan cara pemberantasan sarang nyamuk (PSN).

Berangkat dari uraian di atas, penulis mencoba untuk mempelajari, memodelkan dan menganalisis model penyebaran virus penyakit Demam Berdarah Dengue yang dituangkan dalam bentuk tulisan dengan judul

**“Model Penyebaran Virus Dengue dengan Pengendalian Vektor  
Secara Konstan”**

**B. Rumusan Masalah**

Model penyebaran virus Dengue pada manusia yang berperan sebagai host dan nyamuk yang berperan sebagai vektor, dapat digambarkan dalam bentuk diagram kompartemen yang dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Ket:  $\longrightarrow$  Arah masuk merupakan penambahan jumlah populasi  
 $\longleftarrow$  Arah keluar merupakan pengurangan jumlah populasi  
 $\dashrightarrow$  Menunjukkan perpindahan aliran virus  
 $\cdots \rightarrow$  Menunjukkan dilakukannya pengendalian pada populasi tersebut

Gambar 1. Diagram kompartemen model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan.

Secara matematika, diagram tersebut dapat ditulis dalam bentuk sistem

persamaan differensial:

$$\frac{dH_R}{dt} = \alpha_H N - \beta V_I \frac{H_R}{N} - \mu_R H_R$$

$$\frac{dH_I}{dt} = \beta V_I \frac{H_R}{N} - (\mu_I + \gamma) H_I$$

$$\frac{dH_S}{dt} = \gamma H_I - \mu_S H_S$$

$$\frac{dV_R}{dt} = \alpha_V M - b \frac{V_R}{M} K - c V_R \frac{H_I}{N} - a_R V_R$$

$$\frac{dV_I}{dt} = c V_R \frac{H_I}{N} - a_I V_I - b \frac{V_I}{M} K$$



Dimana:

$N(t)$  : Jumlah total populasi manusia (host) pada saat  $t$ .

$M(t)$  : Jumlah total populasi nyamuk (vektor) pada saat  $t$ .

$H_R(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang rentan pada saat  $t$ .

$H_I(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang terinfeksi pada saat  $t$ .

$H_S(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang sembuh pada saat  $t$ .

$V_R(t)$  : Jumlah populasi nyamuk (vektor) yang rentan pada saat  $t$ .

$V_I(t)$  : Jumlah populasi nyamuk (vektor) yang terinfeksi pada saat  $t$ .

$K$  : Upaya pengendalian terhadap vektor yang dilakukan secara konstan.

$\alpha$  : Laju rata-rata kelahiran alami persatuan waktu

$\beta$  : Rata-rata gigitan banyaknya gigitan nyamuk yang terinfeksi kepada manusia yang rentan.

$\mu$  : Laju rata-rata kematian alami manusia persatuan waktu.

$\gamma$  : Peluang seorang manusia yang terinfeksi diobati sembuh.

$a$  : Laju rata-rata kematian alami nyamuk persatuan waktu.

$b$  : Peluang seekor vektor disemprot kemudian mati.

$c$  : Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk yang rentan kepada manusia yang terinfeksi.

$$H_R(t) \geq 0, H_I(t) \geq 0, H_S(t) \geq 0, V_R(t) \geq 0, V_I(t) \geq 0, K > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0, \\ a > 0, b > 0, c > 0$$

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah:

1. Bagaimana menentukan dan menganalisis titik kesetimbangan sistem , dalam hal ini, menentukan syarat cukup kestabilan dari solusi kesetimbangan sistem serta menginterpretasikan solusi stabil tersebut.
2. Bagaimana menentukan parameter-parameter model yang dapat dikontrol untuk menekan laju penyebaran virus dengue.

### **C. Batasan Masalah**

Dalam skripsi ini, penulis hanya akan membahas model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Jumlah populasi manusia dan nyamuk, konstan yang berarti bahwa tingkat kelahiran alami akan sama dengan tingkat kematian alami.
2. Nyamuk yang sudah terinfeksi tidak dapat sembuh.
3. Perpindahan aliran dari manusia yang rentan menjadi manusia yang terinfeksi tergantung pada gigitan nyamuk.
4. Virus yang akan dikaji hanya 1 jenis tipe virus saja.
5. Upaya pengendalian terhadap nyamuk dilakukan secara konstan.

#### **D. Tujuan Penulisan**

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menentukan dan menganalisis titik kesetimbangan model yaitu dengan menentukan syarat cukup kestabilan dari solusi kesetimbangan serta menginterpretasikan solusi stabil dari model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan.
2. Menentukan parameter-parameter model yang dapat dikontrol untuk menekan laju penyebaran virus dengue.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### A. Model Dasar Epidemiologi

Model epidemiologi pada umumnya berfokus pada dinamik dari transmisi atau perpindahan ciri atau karakter antara individu dengan individu, populasi dengan populasi, komunitas dengan komunitas, daerah dengan daerah bahkan negara dengan negara. Ciri atau karakter tersebut dapat berbentuk penyakit (malaria, tuberculosis, HIV), karakteristik genetik (gender, ras, penyakit genetik) dan bentuk lain seperti kultur (bahasa, kepercayaan). Beberapa istilah yang sering kita dengar dalam model epidemiologi diantaranya adalah epidemik dan endemik. Epidemik merupakan sebuah fenomena dimana sebuah penyakit tiba-tiba muncul dalam suatu populasi dan menjangkit secara cepat sebelum penyakit tersebut menghilang dan kemudian akan muncul kembali dalam interval waktu tertentu (penyakit yang muncul secara temporal). Sedangkan endemik merupakan sebuah fenomena dimana sebuah penyakit yang muncul akan selalu ada dalam suatu populasi (B. Fred, C. Carlos-Chavez, 2000).

Dalam membentuk model epidemiologi ke bentuk persamaan differensial kita mengasumsikan bahwa setiap fungsi dalam kompartemen merupakan fungsi yang kontinu. Selain itu diasumsikan pula bahwa proses epidemik yang terjadi merupakan bentuk yang deterministik yaitu kelakuan dari populasi dan aturan yang membangun perkembangan model seluruhnya ditentukan dari latar belakang epidemik tersebut.



Dalam memodelkan fenomena epidemik tersebut, kita dapat membagi populasi menjadi beberapa kelas populasi. Pembagian tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Kermack-McKendrick, 1927, yang disebut sebagai model kompartemen (*compartmental model*).

Pada model dasar epidemiologi, kelas populasi umumnya dibagi menjadi 3 kompartemen yaitu *susceptible population*, dilambangkan dengan  $S(t)$ , yaitu populasi sehat dan dapat terinfeksi penyakit, *infective population*, dilambangkan dengan  $I(t)$ , yaitu populasi yang terinfeksi pada saat  $t$  dan dapat menularkan penyakit melalui kontak dengan populasi sehat dan *removed population*, dilambangkan dengan  $R(t)$ , yaitu populasi yang pernah terinfeksi dan kemudian sembuh dari kemungkinan terinfeksi kembali atau menularkan penyakit. Metode *removal* merupakan suatu proses perpindahan populasi yang terinfeksi menjadi populasi yang sehat yang dilakukan melalui isolasi, imunisasi, *recovery* atau melalui kematian (B. Fred, C. Carlos-Chavez, 2000).

Model epidemiologi sederhana yaitu model SIR dibangun atas beberapa asumsi sebagai berikut:

1. Rata-rata individu yang terinfeksi membuat kontak yang cukup untuk menularkan infeksi kepada individu yang lain sebesar  $\beta N$  pada waktu  $t$ , dimana  $N$  adalah jumlah total populasi.
2. Peluang terjadinya kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan adalah  $S/N$ .
3.  $\gamma I$  adalah banyaknya individu yang terinfeksi dan menjadi sembuh pada waktu  $t$ .

4. Pengaruh kelahiran dan kematian dapat diabaikan karena jenjang waktu epidemi yang relatif singkat.

Berdasarkan asumsi ini, Kermack dan McKendrick mengemukakan model SIR sebagai berikut:

$$\begin{aligned}S' &= -\beta S I \\I' &= \beta S I - \gamma I \\R' &= \gamma I\end{aligned}\tag{2.1}$$

Pada model ini  $R$  dapat dihitung melalui  $S$  dan  $I$ , sehingga persamaan (2.1) dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned}S' &= -\beta S I \\I' &= (\beta S - \gamma) I\end{aligned}\tag{2.2}$$

Kita tidak dapat menyelesaikan secara analitik persamaan (2.2) diatas tetapi kita dapat mempelajari kelakuan dari solusinya dengan melakukan pendekatan kualitatif. Kita tinjau bahwa  $S' < 0$  untuk semua  $t$  dan  $I' > 0$  jika dan hanya jika  $S > \alpha / \beta$ . Akibatnya  $I$  akan bertambah sepanjang  $S > \alpha / \beta$  tetapi sebaliknya  $S$  berkurang untuk semua  $t$ . Jika  $S(0) < \alpha / \beta$  maka  $I$  akan berkurang menuju ke nol yang berarti bahwa terjadi epidemik. Sedangkan jika  $S(0) > \alpha / \beta$  maka  $I$  pada awal akan bertambah dan mencapai maksimum pada saat  $S = \alpha / \beta$  dan kemudian berkurang ke nol yang berarti bahwa terjadi epidemik.

Untuk menyelesaikan fungsi  $S$  dan  $I$  terhadap  $t$ , kita dapat membagi kedua persamaan  $I'$  dan  $S'$  dari model yang diberikan, yaitu

$$\frac{I'}{S'} = \frac{dI}{dS} = \frac{(\beta S - \gamma)I}{-\beta S I} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}\tag{2.3}$$

Dengan mengintegrasikan kedua persamaan (2.3) maka kita dapat memperoleh kurva pada ruang  $(S, I)$ , yaitu:

$$I = -S + \frac{\gamma}{\beta} \log S + c \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) di atas dapat ditulis dalam bentuk fungsi  $V(S, I)$ , yaitu:

$$V(S, I) = S + I - \frac{\gamma}{\beta} \log S \quad (2.5)$$

dengan  $V(S, I) = c$ .

Konstanta  $c$  dapat dihitung melalui nilai awal  $S_0, I_0$  dari  $S$  dan  $I$ , yaitu:

$$c = V(S_0, I_0) = S_0 + I_0 - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0 \quad (2.6)$$

Misalkan terdapat sebuah populasi yang virgin dengan ukuran  $K$  ( $K$  konstan), dan terdapat sejumlah kecil populasi yang terinfeksi yang dimasukkan dalam populasi yang virgin tersebut sehingga diperoleh  $S_0 \approx K, I_0 \approx 0$ , dan

$R_0 = \beta \frac{K}{\gamma}$ . Jika  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ , dan  $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ , maka diperoleh hubungan antara

$V(S_0, I_0) = V(S_\infty, 0)$  sebagai berikut:

$$K - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0 = S_\infty - \frac{\gamma}{\beta} \log S_\infty \quad (2.7)$$

Dari persamaan (2.7) diperoleh nilai untuk  $\frac{\beta}{\gamma}$  yang berhubungan dengan

nilai  $R_0$  yaitu:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\log \frac{S_0}{S_\infty}}{K - S_\infty} \quad (2.8)$$

dengan  $0 < S_{\infty} < K$ . Pada umumnya cukup sulit untuk memperkirakan nilai dari rata-rata kontak  $\beta$  yang tidak hanya tergantung pada penyakit yang dipelajari tetapi kemungkinan yang bergantung pada keadaan social dan kelakuan dalam lingkungannya dimana penyakit tersebut terjadi.

Nilai maksimum dari  $I$  terjadi pada saat  $S = \frac{\gamma}{\beta}$ , yaitu:

$$I_{\max} = S_0 + I_0 - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0 - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \log \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.9)$$

## B. Angka Basic Reproduction Ratio

Penyebaran DBD dapat diketahui dari suatu besaran dimana besaran tersebut menyatakan tingkat penularan terhadap suatu penyakit dalam sebuah populasi yang virgin. Dalam model epidemiologi, besaran tersebut dinamakan angka *basic reproduction ratio* yang dilambangkan dengan  $R_0$ . Nilai  $R_0$  menyatakan rasio banyaknya kasus infeksi kedua dari kasus infeksi pertama (awal) dalam populasi tertutup dan bebas penyakit. Dengan kata lain besaran tersebut berupa faktor kelipatan (*multiplication factor*) dari kasus awal (kasus primer) sehingga  $R_0$  mempunyai nilai ambang yaitu 1.

Model epidemiologi biasanya mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tak endemik dan titik kesetimbangan endemik. Jika  $R_0 > 1$ , maka dalam populasi telah terjadi epidemi dan apabila tidak segera dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemik (wabah), dan jika  $R_0 < 1$ , maka dalam



populasi tidak terjadi epidemi sehingga untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit (O. Diekmann, J.A.P. hesterbeek & J.A.J. Metz).

## BAB III

### TEORI PENDUKUNG

#### A. Jenis-Jenis Titik Kestimbangan

Titik kestimbangan dari suatu sistem persamaan differensial dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol (Haberman, 1987).

##### Definisi 1 :

Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik kestimbangan (equilibrium point) dari

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

dimana

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

jika  $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ .

Pandang suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$



dengan  $a, b, c, d$  adalah koefisien konstan

Titik  $\bar{x} = (0,0)$  adalah titik kesetimbangan persamaan (3.1) karena pada

$$\text{titik, } \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = 0, \forall i = 1,2.$$

**Definisi 2 :**

Jika  $A$  suatu matriks yang berukuran  $n \times n$  maka sebuah vektor tidak nol  $x$  di dalam  $R^n$  dinamakan *vektor eigen* dari  $A$  jika  $Ax = \lambda x$ . dimana

skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ .

Tinjau sistem persamaan diferensial linear :

$$\dot{x} = Ax \tag{3.2}$$

dimana  $A$  adalah matriks konstan  $2 \times 2$  dan  $x$  adalah vektor kolom  $2 \times 1$ .

Salah satu titik keseimbangan sistem (3.2) adalah titik  $(0,0)$ . Titik kesetimbangan dapat dibedakan atas beberapa jenis titik, yaitu :

**1). Node**

Jenis titik kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya real dan mempunyai tanda yang sama. Solusi umum dari persamaan (3.2) yaitu

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3.3}$$

dimana  $\lambda_i$  adalah nilai eigen dan  $\xi_i$  adalah vektor eigen dari matriks  $A$  dengan  $i = 1,2$ .

Kasus pertama jika  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, 2$ . Solusi (3.3) akan menunjukkan bahwa  $x(t) \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Dengan kata lain semua solusi akan mendekati titik kesetimbangan pada saat  $t \rightarrow \infty$ , yang dimana akan stabil asimptotik.

Kasus kedua jika  $\lambda_i > 0$ . Solusi (3.3) menunjukkan bahwa  $x(t) \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ , dengan kata lain arah gerakan solusinya menjauh dari titik kesetimbangan, yang dimana solusi tersebut tidak akan stabil.

## 2). Pelana (Saddle)

Jenis titik kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya real dan berbeda tanda ( $\lambda_1$  positif dan  $\lambda_2$  negatif atau sebaliknya). Solusi umum dari persamaan (3.2) adalah:

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.4)$$

Jika  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$  maka  $x(t) \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ . Artinya solusi bergerak menjauhi titik kesetimbangan.. Karena arah gerakan solusinya ada yang menjauh dan ada yang mendekati titik kesetimbangan, maka jenis kesetimbangan ini tidak stabil.

## 3). Spiral

Jenis titik kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya kompleks. Misalkan nilai eigen tersebut adalah  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\mu$  dimana  $\alpha$  dan  $\mu$  adalah bilangan real,  $\alpha \neq 0$  dan  $\mu > 0$ . Sistem (3.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ -\mu & \alpha \end{pmatrix} x \quad (3.5)$$

atau:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \alpha x_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dari koordinat polar  $r$  dan  $\theta$  diberikan :

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ \tan \theta &= \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Jika kedua persamaan terakhir diturunkan, diperoleh :

$$rr' = x_1 x_1' + x_2 x_2' \quad (3.7)$$

$$(\sec^2 \theta) \theta' = \frac{(x_1 x_2' - x_2 x_1')}{x_1^2} \quad (3.8)$$

Substitusi persamaan (3.6) ke (3.7) diperoleh :

$$r(t) = ce^{\lambda t} \quad (3.9)$$

dimana  $c$  adalah konstan.

Selanjutnya substitusi persamaan (3.6) ke persamaan (3.8) sehingga diperoleh :

$$\theta(t) = -\mu t + \theta_0 \quad (3.10)$$

dimana  $\theta_0$  adalah nilai dari  $\theta$  pada saat  $t = 0$ .

Jika  $\mu > 0$  maka persamaan (3.10) menunjukkan bahwa  $\theta \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  dengan arah gerakan yang searah jarum jam dan jika  $\mu < 0$  maka  $\theta \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  dengan arah gerakan yang berlawanan dengan jarum jam. Dari persamaan (3.9), jika  $\lambda < 0$  maka  $r \rightarrow 0$  pada saat  $t \rightarrow \infty$

dan jika  $\lambda > 0$  maka  $r \rightarrow \infty$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ , sehingga trajektorinya akan berbentuk spiral dengan arah gerakan yang mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan yang bergantung pada nilai eigen  $\lambda_{12}$  dengan bagian real yang negatif atau positif.

#### 4). Pusat (Center)

Titik kesetimbangan ini terjadi apabila nilai eigen yang diperoleh merupakan bilangan kompleks dengan bagian real nol ( $\pm i\mu$ ). Sistem (3.2) dapat digambarkan sebagai berikut :

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.11)$$

dengan nilai eigen  $\pm i\mu$ . Seperti halnya spiral maka akan diperoleh :

$$r' = 0, \theta' = -\mu$$

mengakibatkan,  $r = c, \theta = -\mu t + \theta_0$  dimana  $c$  dan  $\theta_0$  adalah konstan.

Trajektorinya akan bergerak membentuk lingkaran (*Cycle*) yang melintang searah jarum jam jika  $\mu > 0$  dan berlawanan jarum jam jika  $\mu < 0$ .

#### **Teorema eksistensi dan ketunggalan**

Misalkan:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

Jika  $f$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y}$  kontinu dalam ruang  $R: |t| \leq a, |y| \leq b$ , maka pada

interval  $|t| < h < a$  terdapat solusi  $y = \phi(t)$  dan tunggal.

## B. Definisi Kestabilan

Pandang suatu sistem persamaan differensial berikut :

$$\dot{x} = f(t, x), t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.12)$$

dimana  $x$  dan  $f$  adalah vektor dengan solusi  $y(t)$ .

$I = [t_0, \infty)$  untuk  $\rho > 0$ ,  $S_\rho = \{x \in R^n : |x| < \rho\}$

Misalkan fungsi  $f$  pada (3.12) terdefinisi dan kontinu pada  $I \times S_\rho$ . Misalkan (3.12) mempunyai solusi  $x(t)$  dalam  $S_\rho$  melalui titik  $(t_0, x_0)$  pada  $I$ .

### Definisi 3 :

Solusi  $x(t)$  dikatakan stabil jika  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < \rho) \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall y(t)$  dari (3.12) pada  $I$  memenuhi

$$|y(t) - x(t)| < \varepsilon, t \geq t_0 \text{ untuk } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

### Definisi 4 :

Solusi  $x(t)$  dikatakan stabil asimptotik jika solusi tersebut stabil dan jika  $\exists \delta_0 > 0 \ni y(t)$  pada  $I$  memenuhi

$$|y(t) - x(t)| \rightarrow 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty \text{ dengan } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta_0.$$

Suatu populasi yang berada dalam keadaan setimbang stabil jika mengalami gangguan maka cenderung akan kembali ke keadaan setimbang yang semula. Sedangkan pada keadaan setimbang yang tidak stabil, sistem yang sedikit bergeser dari keadaan itu cenderung akan menjauhi titik setimbang tidak stabil tersebut (Haberman, 1987).

### C. Kestabilan Sistem Linear

Pandang suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\tag{3.13}$$

dimana a, b, c dan d konstan.

Dalam notasi vektor persamaan (3.13) dapat dituliskan sebagai :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}\tag{3.14}$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |A| \neq 0 \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diasumsikan nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  berbeda, sehingga titik kesetimbangan dari sistem di atas hanya pada titik asal (0,0). Solusi persamaan (3.13) adalah :

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2\tag{3.15}$$

dimana  $\mathbf{c}_1$  dan  $\mathbf{c}_2$  adalah vektor eigen yang bebas linear dan bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dari matriks A.

**Kasus I :** Misalkan  $\lambda_i$  real untuk setiap  $i = 1, 2$ .

Dari persamaan (3.14)

- Jika  $\lambda_i < 0$  maka titik (0,0) dikatakan stabil asimptotik.
- Jika  $\lambda_i > 0$  maka titik (0,0) dikatakan tidak stabil.
- Jika  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  maka titik kesetimbangan (0,0) disebut tidak stabil.



**Kasus II :** Bila nilai eigennya ( $\lambda_i$ ) kompleks.

Misal  $\lambda_i = u + iv$ , maka persamaan (3.15) menjadi :

$$x(t) = e^{ut} (\beta_1 \cos vt + \beta_2 \sin vt) \quad (3.16)$$

dengan  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  adalah vektor eigen yang sesuai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ .

- Jika  $u = \text{Re}(\lambda_i) < 0$ , maka titik kesetimbangan (0,0) stabil asimptotik.
- Jika  $u = \text{Re}(\lambda_i) > 0$ , maka titik kesetimbangan (0,0) tidak stabil.
- Jika  $u = \text{Re}(i) = 0$ , maka solusinya menjadi terbatas. Hal ini disebut stabil netral.

### Contoh 1

Perhatikan sistem persamaan differensial berikut:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$$

Dari sistem tersebut diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = 2$ . Sehingga titik setimbangnya (0,0) tak stabil.

### D. Kestabilan Sistem Non Linear

Perhatikan sistem persamaan diferensial berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

dimana  $f_1$  dan  $f_2$  merupakan fungsi yang terdiferensial.

Misalkan  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$  merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (3.17) dan

misalkan  $u_1 = x_1 - \bar{x}_1$ , maka dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk fungsi dua peubah diperoleh:

$$f_i(x_1, x_2) = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_i(u_1, u_2) \text{ untuk } i = 1, 2$$

dengan asumsi bahwa  $g_i(u_1, u_2)$  mempunyai turunan parsial pertama dan

memenuhi  $\frac{g_i(u_1, u_2)}{\|u\|} \rightarrow 0$  bila  $\|u\| \rightarrow 0$ , dimana  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

Karena  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  adalah keadaan titik kesetimbangan, maka :

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

dan untuk

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}(x_1 - \bar{x}_1), \quad \dot{x}_2 = \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}(x_2 - \bar{x}_2)$$

maka persamaan (3.17) dapat ditulis :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix}$$

yang dalam notasi vektor dituliskan sebagai :

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{3.18}$$

dimana :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

adalah matriks Jacobian dari  $f$  pada  $\bar{x}$ .

Untuk  $x(t)$  yang sangat dekat  $\bar{x}$ , maka  $g(u)$  menjadi kecil dan dapat diabaikan. Sehingga persamaan (3.18) menjadi

$$\dot{u} = Au \tag{3.19}$$

yang merupakan sistem linear.

Situasi yang mungkin dapat terjadi adalah bergesernya keadaan kesetimbangan. Bila keadaan kesetimbangan  $\bar{x}$  bergeser ke  $x(0)$  maka kestabilannya akan berubah. Dengan kata lain jika  $x(t) \rightarrow \bar{x}$  untuk  $t \rightarrow \infty$  atau  $u(t) = x(t) - \bar{x}$  maka  $u(t) \rightarrow 0$ . Hal ini telah menjadi persoalan linear dan yang terjadi adalah kestabilan lokal.



## BAB IV

### MODEL PENYEBARAN VIRUS DENGUE DENGAN PENGENDALIAN VEKTOR SECARA KONSTAN

#### A. Model Penyebaran Virus Dengue dengan Pengendalian Vektor secara Konstan

Model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan yang akan dikaji dalam bab ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dH_R}{dt} &= \alpha_H N - \beta V_I \frac{H_R}{N} - \mu_R H_R \\ \frac{dH_I}{dt} &= \beta V_I \frac{H_R}{N} - (\mu_I + \gamma) H_I \\ \frac{dH_S}{dt} &= \gamma H_I - \mu_S H_S \\ \frac{dV_R}{dt} &= \alpha_V M - b \frac{V_R}{M} K - c V_R \frac{H_I}{N} - a_R V_R \\ \frac{dV_I}{dt} &= c V_R \frac{H_I}{N} - a_I V_I - b \frac{V_I}{M} K\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dimana:

$N(t)$  : Jumlah total populasi manusia (host) pada saat  $t$ .

$M(t)$  : Jumlah total populasi nyamuk (vektor) pada saat  $t$ .

$H_R(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang rentan pada saat  $t$ .

$H_I(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang terinfeksi pada saat  $t$ .

- $H_S(t)$  : Jumlah populasi manusia (host) yang sembuh pada saat t.
- $V_R(t)$  : Jumlah populasi nyamuk (vektor) yang rentan pada saat t.
- $V_I(t)$  : Jumlah populasi nyamuk (vektor) yang terinfeksi pada saat t.
- $K$  : Upaya pengendalian terhadap vektor yang dilakukan secara konstan.
- $\alpha$  : Laju rata-rata kelahiran alami persatuan waktu
- $\beta$  : Rata-rata gigitan banyaknya gigitan nyamuk yang terinfeksi kepada manusia yang rentan.
- $\mu$  : Laju rata-rata kematian alami manusia persatuan waktu.
- $\gamma$  : Peluang seorang manusia yang terinfeksi diobati sembuh.
- $a$  : Laju rata-rata kematian alami nyamuk persatuan waktu.
- $b$  : Peluang seekor vektor disemprot kemudian mati.
- $c$  : Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk yang rentan kepada manusia yang terinfeksi.

$$H_R(t) \geq 0, H_I(t) \geq 0, H_S(t) \geq 0, V_R(t) \geq 0, V_I(t) \geq 0, K > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0, \\ a > 0, b > 0, c > 0$$

Adapun asumsi dasar yang digunakan dalam membangun model tersebut adalah sebagai berikut:

1. Jumlah populasi manusia dan nyamuk, konstan yang berarti bahwa tingkat kelahiran alami akan sama dengan tingkat kematian alami.
2. Nyamuk yang sudah terinfeksi tidak dapat sembuh.
3. Perpindahan aliran dari manusia yang rentan menjadi manusia yang terinfeksi tergantung pada gigitan nyamuk.

4. Virus yang akan dikaji hanya 1 jenis tipe virus saja.
5. Upaya pengendalian terhadap nyamuk dilakukan secara konstan.

Karena dikatakan populasi manusia dan nyamuk konstan maka persamaan (4.1) di atas dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_R}{dt} &= \mu N - \frac{\beta V_I H_R}{N} - \mu H_R \\
 \frac{dH_I}{dt} &= \frac{\beta V_I H_R}{N} - (\mu + \gamma) H_I \\
 \frac{dH_S}{dt} &= \gamma H_I - \mu H_S \\
 \frac{dV_R}{dt} &= \alpha M - \frac{b V_R K}{M} - \frac{c V_R H_I}{N} - \alpha V_R \\
 \frac{dV_I}{dt} &= \frac{c V_R H_I}{N} - \alpha V_I - \frac{b V_I K}{M}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

### B. Menentukan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari model penyebaran virus dengue dalam persamaan (4.2) dapat ditentukan ketika laju perubahan populasi host yang rentan, laju perubahan populasi host yang terinfeksi, laju perubahan populasi host yang sembuh, laju perubahan populasi vektor yang rentan, laju perubahan populasi vektor yang terinfeksi tidak berubah terhadap waktu yang secara matematika dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dH_R}{dt} = \frac{dH_I}{dt} = \frac{dH_S}{dt} = \frac{dV_R}{dt} = \frac{dV_I}{dt} = 0 \tag{4.3}$$

Pada model di atas, diperoleh dua titik kesetimbangan yang memenuhi di kuadran pertama, yaitu:

$$E_1 = (H_R, H_I, H_S, V_R, V_I) = E_1 = (H_R = N, H_I = 0, H_S = 0, V_R = \frac{\alpha M^2}{\alpha M + Kb}, V_I = 0)$$

dan  $E_2(H_R^*, H_I^*, H_S^*, V_R^*, V_I^*)$  dimana:

$$H_R^* = \frac{(\mu c M^2 \alpha + \mu b^2 K^2 + \mu c M b K + 2 \mu b K \alpha M + \mu \alpha^2 M^2 + b^2 K^2 \gamma + 2 K \alpha M \gamma + \alpha^2 M^2 \gamma) N^2}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M},$$

$$H_I^* = -\frac{\mu(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M (\mu + \gamma)}$$

$$H_S^* = -\frac{p(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M (\mu + \gamma)}$$

$$V_R^* = \frac{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta)(\mu + \gamma)}{(\alpha M \mu + \alpha M p + \alpha M c + b K \mu + b K \gamma) \beta},$$

$$V_I^* = -\frac{\mu(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(\mu c M^2 \alpha + \mu b^2 K^2 + \mu c M b K + 2 \mu b K \alpha M + \mu \alpha^2 M^2 + b^2 K^2 \gamma + 2 b K \alpha M \gamma + \alpha^2 M^2 \gamma) \beta},$$

### C. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan

Kestabilan sistem dalam persamaan (4.2) akan dianalisis disekitar titik kesetimbangan yang telah diperoleh yaitu  $E_1$  dan  $E_2$ .

Tinjau kembali persamaan (4.2). Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dH_R}{dt} &= f_1(H_R, H_I, H_S, V_R, V_I) \\
\frac{dH_I}{dt} &= f_2(H_R, H_I, H_S, V_R, V_I) \\
\frac{dH_S}{dt} &= f_3(H_R, H_I, H_S, V_R, V_I) \\
\frac{dV_R}{dt} &= f_4(H_R, H_I, H_S, V_R, V_I) \\
\frac{dV_I}{dt} &= f_5(H_R, H_I, H_S, V_R, V_I)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Misalkan  $\mathbf{J}$  adalah matriks Jacobi dari sistem dalam persamaan (4.4), yaitu:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix}
-\frac{\beta V_I}{N} - \mu & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta H_R}{N} \\
\frac{\beta V_I}{N} & -\mu - \gamma & 0 & 0 & \frac{\beta H_R}{N} \\
0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\
0 & -\frac{cV_R}{N} & 0 & -\frac{bK}{M} - \frac{cH_I}{N} - \alpha & 0 \\
0 & \frac{cV_R}{N} & 0 & \frac{cH_I}{N} & -\alpha - \frac{bK}{M}
\end{pmatrix}$$



Jika persamaan (4.4) dilinierkan disekitar titik  $E_1$  maka diperoleh matriks jacobian untuk  $E_1$  yaitu:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\mu - \gamma & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c\alpha M^2}{(\alpha M + Kb)N} & 0 & -\alpha - \frac{bK}{M} & 0 \\ 0 & \frac{c\alpha M^2}{(\alpha M + Kb)N} & 0 & 0 & -\alpha - \frac{bK}{M} \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari solusi titik kesetimbangan  $E_1$  adalah :

$$|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\mu - \gamma - \lambda & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c\alpha M^2}{(\alpha M + Kb)N} & 0 & -\alpha - \frac{bK}{M} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{c\alpha M^2}{(\alpha M + Kb)N} & 0 & 0 & -\alpha - \frac{bK}{M} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau dalam bentuk  $f(\lambda)$ , yaitu:

$$a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

yang dimana:

$$a_5 := \frac{\alpha M^2 N + N M b K}{M(\alpha M + b K)N}$$

$$a_4 := \frac{1}{M^2 (\alpha M + b K) N} ((2 \mu M + \alpha M + b K) (\alpha M^2 N + N M b K) + M(N \mu M b K + 2 N \alpha M b K + \alpha M^2 N \mu + \alpha M^2 N \gamma + N \gamma M b K + N b^2 K^2 + N \alpha^2 M^2))$$

$$a_3 := \frac{1}{M^2 (\alpha M + b K) N} ((M \mu^2 + 2 \mu (\alpha M + b K)) (\alpha M^2 N + N M b K) + (2 \mu M + \alpha M + b K) (N \mu M b K + 2 N \alpha M b K + \alpha M^2 N \mu + \alpha M^2 N \gamma + N \gamma M b K + N b^2 K^2 + N \alpha^2 M^2) + M(-M^3 c \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma))$$

$$a_2 := \frac{1}{M^2 (\alpha M + b K) N} (\mu^2 (\alpha M + b K) (\alpha M^2 N + N M b K) + (M \mu^2 + 2 \mu (\alpha M + b K)) (N \mu M b K + 2 N \alpha M b K + \alpha M^2 N \mu + \alpha M^2 N \gamma + N \gamma M b K + N b^2 K^2 + N \alpha^2 M^2) + (2 \mu M + \alpha M + b K) (-M^3 c \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma))$$

$$a_1 := \frac{1}{M^2 (\alpha M + b K) N} (\mu^2 (\alpha M + b K) (N \mu M b K + 2 N \alpha M b K + \alpha M^2 N \mu + \alpha M^2 N \gamma + N \gamma M b K + N b^2 K^2 + N \alpha^2 M^2) + (M \mu^2 + 2 \mu (\alpha M + b K)) (-M^3 c \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma))$$

$$a_0 := \frac{1}{M^2 N} (\mu^2 (-M^3 c \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma))$$

Persamaan (4.4) tersebut akan menghasilkan nilai karakteristik yang real negatif atau kompleks dengan bagian real yang negatif jika dan hanya jika  $R_0 < 1$  dengan

$$R_0 = \frac{cM^3\alpha\beta}{N\mu b^2 K^2 + 2N\mu b K \alpha M + N\mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma}$$

Jika  $R_0 < 1$  maka populasi yang terinfeksi akan punah dengan kata lain akan membuat titik kesetimbangan  $E_1$  menjadi stabil tak endemik, yang dimana di dalam populasi tersebut tidak terjadi suatu wabah penyakit demam berdarah dengue.

Solusi titik kesetimbangan  $E_2(H_R^*, H_I^*, H_S^*, V_R^*, V_I^*)$  dimana:

$$H_R^* = \frac{(\mu c M^2 \alpha + \mu b^2 K^2 + \mu c M b K + 2 \mu b K \alpha M + \mu \alpha^2 M^2 + b^2 K^2 \gamma + 2 K \alpha M \gamma + \alpha^2 M^2 \gamma) N^2}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M},$$

$$H_I^* = -\frac{\mu(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M (\mu + \gamma)}$$

$$H_S^* = -\frac{p(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta) c M (\mu + \gamma)}$$

$$V_R^* = \frac{(N \alpha M \mu + N b K \mu + \alpha M^2 \beta)(\mu + \gamma)}{(\alpha M \mu + \alpha M p + \alpha M c + b K \mu + b K \gamma) \beta},$$

$$V_I^* = -\frac{\mu(-c M^3 \alpha \beta + N \mu b^2 K^2 + 2 N \mu b K \alpha M + N \mu \alpha^2 M^2 + N b^2 K^2 \gamma + 2 N b K \alpha M \gamma + N \alpha^2 M^2 \gamma)}{(\mu c M^2 \alpha + \mu b^2 K^2 + \mu c M b K + 2 \mu b K \alpha M + \mu \alpha^2 M^2 + b^2 K^2 \gamma + 2 b K \alpha M \gamma + \alpha^2 M^2 \gamma) \beta},$$

akan stabil asimptotik secara lokal jika dan hanya jika  $R_0 > 1$ .

Jika  $R_0 > 1$  maka populasi yang terinfeksi akan selalu muncul dengan kata lain akan membuat titik kesetimbangan  $E_2$  menjadi stabil endemik, yang dimana di dalam populasi tersebut terjadi peledakan populasi yang terinfeksi atau telah terjadi suatu wabah penyakit demam berdarah dengue.



Tinjau nilai  $R_0$  yang telah diperoleh dari analisis kestabilan  $E_1$  dan  $E_2$ , yaitu:

$$R_0 = \frac{cM^3\alpha\beta}{N\mu b^2 K^2 + 2N\mu b K\alpha M + N\mu\alpha^2 M^2 + Nb^2 K^2 \gamma + 2NbK\alpha M\gamma + N\alpha^2 M^2 \gamma} \quad (4.5)$$

Agar  $R_0 < 1$  maka salah satu parameter yang dapat dikontrol adalah parameter  $c$  dan  $\beta$  yaitu semakin besar nilai  $c$  atau  $\beta$  maka nilai  $R_0$  akan semakin besar pula.

#### D. Analisis Simulasi Numerik

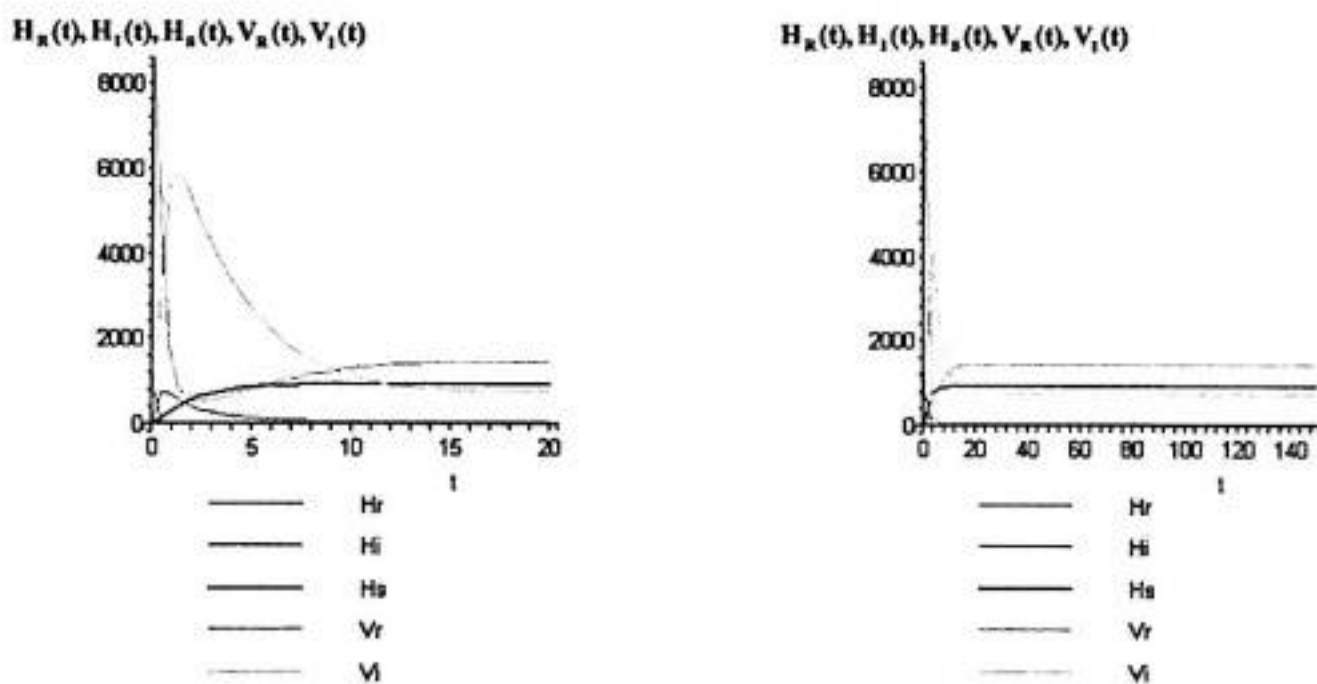
Pada bagian ini akan dilakukan beberapa simulasi terhadap solusi dari persamaan (4.2) untuk beberapa nilai parameter sebagai berikut:

$$\alpha = 0,08 ; \mu = 0,03 ; \gamma = 0,5 ; \beta = 3 ; c = 3 ; b = 0,5$$
$$N = 1000 ; M = 9000 ; K = 4500$$

Misalkan total populasi manusia sebesar 1000 orang dan total populasi nyamuk sebesar 9000 ekor serta upaya pengendalian yang dilakukan secara konstan yaitu dengan pereduksian nyamuk sebesar 4500 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu  $\mu = 0,03$  dan  $\alpha = 0,08$ . Banyaknya kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu  $\beta = 3 ; c = 3$  akan mengakibatkan masih adanya populasi yang terinfeksi. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu  $\gamma = 0,5$  dan peluang nyamuk yang disemprot kemudian mati yaitu  $b = 0,5$  akan mempengaruhi besarnya jumlah populasi manusia yang sembuh, nyamuk yang rentan, manusia yang terinfeksi dan nyamuk yang terinfeksi. Nilai-nilai

parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 112,3$ . Ini berarti  $R_0 > 1$ , bahwa dalam populasi tersebut telah terjadi wabah penyakit.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah  $H_r(0) = 900$ ;  $H_i(0) = 50$ ;  $H_s(0) = 50$ ;  $V_r(0) = 8400$ ;  $V_i(0) = 600$ . maka dengan menggunakan parameter-parameter diatas diperoleh grafik solusi dari persamaan (4.2) pada Gambar 2 di bawah ini:



Gambar 2. Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$

Dari grafik di atas terlihat bahwa populasi nyamuk yang terinfeksi pada saat tahun ke 2 mengalami kenaikan yang maksimum tapi setelah tahun ke 2 akan perlahan bergerak menuju ke titik kestabilannya. Begitu pula sebaliknya yang terjadi pada populasi nyamuk yang rentan. Populasi manusia yang terinfeksi pada tahun pertama mengalami kenaikan yang maksimum dan kemudian akan perlahan turun menuju ke titik kestabilannya. Dengan adanya manusia yang terinfeksi maka akan membuat adanya manusia yang sembuh.

Kestabilan sistem tercapai disekitar titik  $t = 16$ , dimana  $H_r = 13$ ;  $H_i = 56$ ;  $H_s = 931$ ;  $V_r = 1447$ ;  $V_i = 735$ . Jelas sekali bahwa usaha pengendalian haruslah

sangat besar dan pengurangan kontak antara host yang rentan dengan vektor yang terinfeksi agar kestabilan populasi yang tak endemik tercapai.

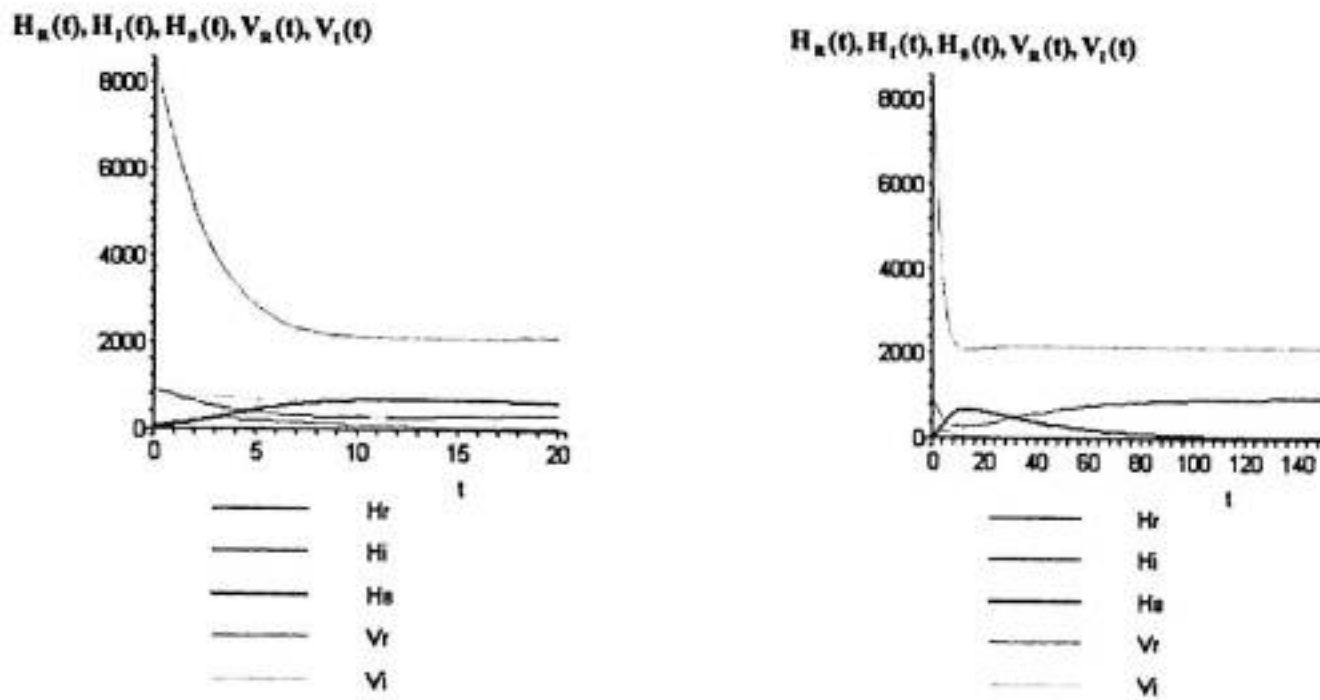
Untuk beberapa nilai parameter sebagai berikut:

$$\alpha = 0,08 ; \mu = 0,03 ; \gamma = 0,5 ; \beta = 0,3 ; c = 0,3 ; b = 0,5$$
$$N = 1000 ; M = 9000 ; K = 4500$$

Misalkan total populasi manusia sebesar 1000 orang dan total populasi nyamuk sebesar 9000 ekor serta upaya pengendalian yang dilakukan secara konstan yaitu dengan pereduksian nyamuk sebesar 4500 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu  $\mu = 0,03$  dan  $\alpha = 0,08$ . Kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu  $\beta = 0,3 ; c = 0,3$  akan mengakibatkan masih adanya populasi yang terinfeksi. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu  $\gamma = 0,5$  dan peluang nyamuk yang disemprot kemudian mati yaitu  $b = 0,5$  akan mempengaruhi besarnya jumlah populasi manusia yang sembuh, nyamuk yang rentan, manusia yang terinfeksi dan nyamuk yang terinfeksi. Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 1,1$ . Ini berarti  $R_0 > 1$  tapi sudah mendekati nilai ambang  $R_0$  yaitu 1 yang dimana dalam populasi tersebut tetap terjadi wabah penyakit.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah  $H_r(0) = 900; H_i(0) = 50;$   
 $H_s(0) = 50; V_r(0) = 8400; V_i(0) = 600$ . maka dengan menggunakan parameter-

parameter diatas diperoleh grafik solusi dari persamaan (4.2) pada Gambar 3 di bawah ini:



Gambar 3. Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$

Dari grafik di atas jelas terlihat bahwa populasi yang terinfeksi sangat berkurang dibandingkan dengan grafik sebelumnya. Sedangkan populasi manusia yang rentan semakin bertambah. Dengan berkurangnya populasi yang terinfeksi akan mengakibatkan populasi manusia yang sembuh juga akan semakin berkurang.

Kestabilan sistem tercapai disekitar titik  $t = 128$ , dimana  $H_r = 895$ ;  $H_i = 6$ ;  $H_s = 99$ ;  $V_r = 2170$ ;  $V_i = 12$ . Jelas sekali bahwa usaha pengendalian haruslah sangat besar dan pengurangan kontak antara host yang rentan dengan vektor yang terinfeksi agar kestabilan populasi yang tak endemik tercapai.

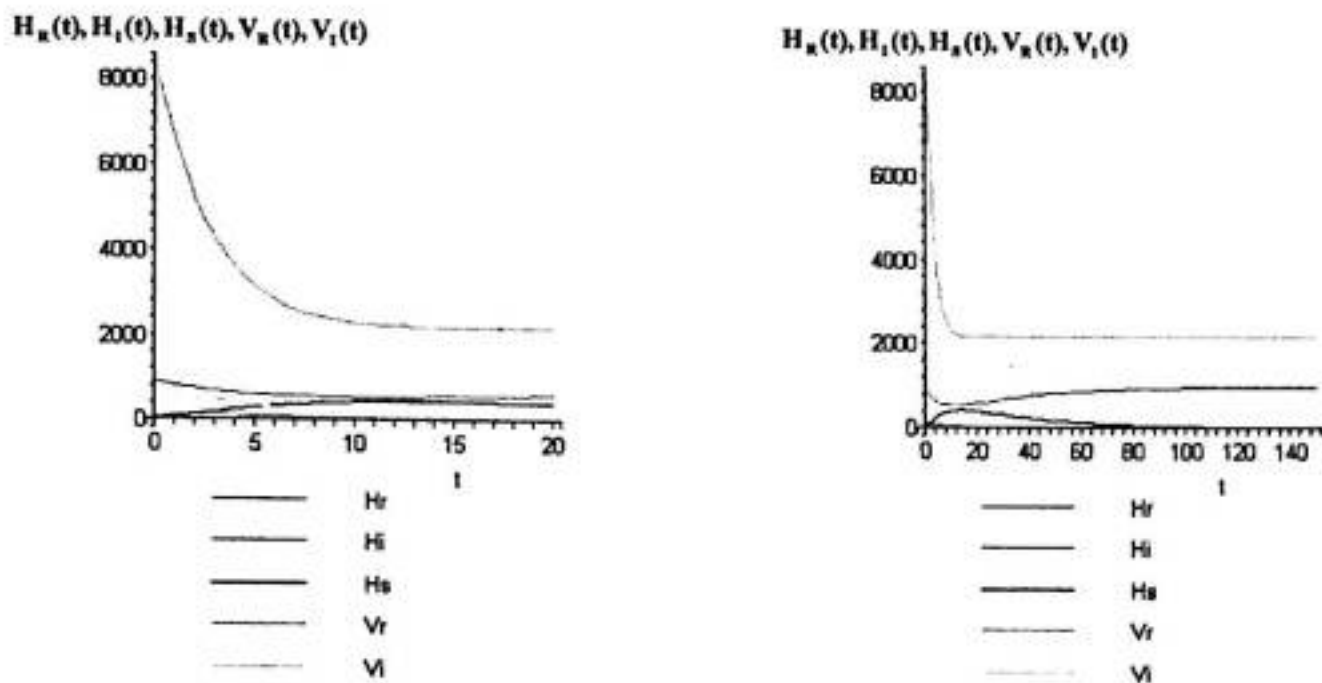
Untuk beberapa nilai parameter sebagai berikut:

$$\alpha = 0,08 ; \mu = 0,03 ; \gamma = 0,5 ; \beta = 0,2 ; c = 0,2 ; b = 0,5$$
$$N = 1000 ; M = 9000 ; K = 4500$$

Misalkan total populasi manusia sebesar 1000 orang dan total populasi nyamuk sebesar 9000 ekor serta upaya pengendalian yang dilakukan secara konstan yaitu dengan pereduksian nyamuk sebesar 4500 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu  $\mu = 0,03$  dan  $\alpha = 0,08$ . Kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu  $\beta = 0,2 ; c = 0,2$  akan mengakibatkan hilangnya populasi yang terinfeksi. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu  $\gamma = 0,5$  dan peluang nyamuk yang disemprot kemudian mati yaitu  $b = 0,5$  akan mempengaruhi besarnya jumlah populasi manusia yang sembuh, nyamuk yang rentan, manusia yang terinfeksi dan nyamuk yang terinfeksi. Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 0,5$ . Ini berarti  $R_0 < 1$  tapi masih mendekati nilai ambang  $R_0$  yaitu 1 yang dimana dalam populasi tersebut sudah tidak terjadi wabah penyakit.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah  $H_r(0) = 900; H_i(0) = 50;$   
 $H_s(0) = 50; V_r(0) = 8400; V_i(0) = 600$ . maka dengan menggunakan parameter-parameter diatas diperoleh grafik solusi dari persamaan (4.2) pada Gambar 4 di bawah ini:





Gambar 4. Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$

Dari grafik di atas terlihat jelas bahwa populasi manusia yang rentan pada tahun ke 9 mengalami jumlah yang minimum. Tapi kemudian perlahan naik menuju ke titik kestabilannya. Terlihat juga bahwa populasi yang tetap exist adalah populasi yang rentan karena populasi yang terinfeksi hilang dalam populasi tersebut dan ini mengakibatkan populasi manusia yang sembuh akan ikut hilang juga.

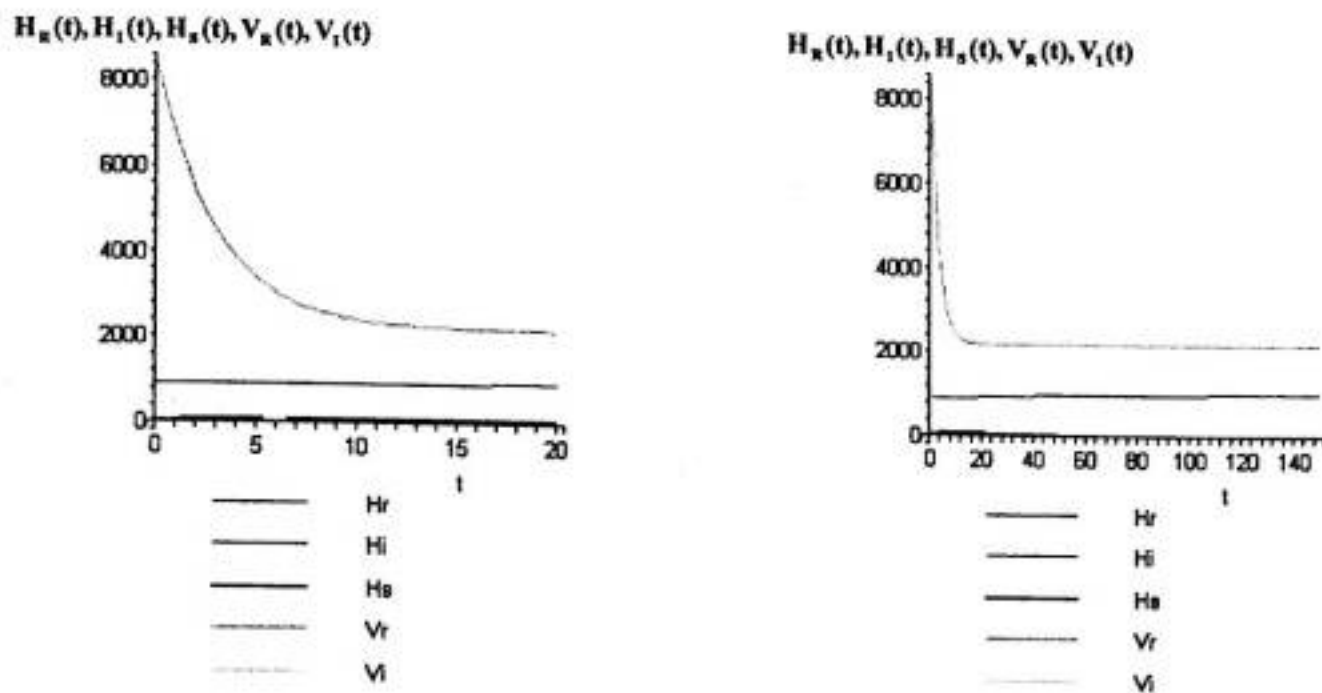
Kestabilan sistem tercapai disekitar titik  $t = 108$ , dimana  $H_r = 1939$ ;  $H_i = 0$ ;  $H_s = 0$ ;  $V_r = 2254$ ;  $V_i = 0$ . Jelas sekali bahwa usaha pengendalian haruslah sangat besar dan pengurangan kontak antara host yang rentan dengan vektor yang terinfeksi agar kestabilan populasi yang tak endemik tercapai.

Untuk beberapa nilai parameter sebagai berikut:

$$\alpha = 0,08 ; \mu = 0,03 ; \gamma = 0,5 ; \beta = 0,02 ; c = 0,02 ; b = 0,5$$
$$N = 1000 ; M = 9000 ; K = 4500$$

Misalkan total populasi manusia sebesar 1000 orang dan total populasi nyamuk sebesar 9000 ekor serta upaya pengendalian yang dilakukan secara konstan yaitu dengan pereduksian nyamuk sebesar 4500 ekor. Misalkan pula rata-rata pertumbuhan populasi manusia lebih kecil dari rata-rata pertumbuhan populasi nyamuk yaitu  $\mu = 0,03$  dan  $\alpha = 0,08$ . Kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi dan begitu pula sebaliknya yaitu  $\beta = 0,02 ; c = 0,02$  akan mengakibatkan hilangnya populasi yang terinfeksi. Peluang manusia yang diobati kemudian sembuh yaitu  $\gamma = 0,5$  dan peluang nyamuk yang disemprot kemudian mati yaitu  $b = 0,5$  akan mempengaruhi besarnya jumlah populasi manusia yang sembuh, nyamuk yang rentan, manusia yang terinfeksi dan nyamuk yang terinfeksi. Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 0,005$ . Ini berarti  $R_0 < 1$  yang mendekati nol yang sangat kecil dari nilai ambang  $R_0$  yaitu 1 yang dimana dalam populasi tersebut jauh dari wabah penyakit.

Misalkan populasi awal manusia dan nyamuk adalah  $H_r(0) = 900; H_i(0) = 50;$   
 $H_s(0) = 50; V_r(0) = 8400; V_i(0) = 600$ . maka dengan menggunakan parameter-parameter diatas diperoleh grafik solusi dari persamaan (4.2) pada Gambar 5 di bawah ini:



Gambar 5. Grafik hubungan antara populasi  $H_R(t), H_I(t), H_S(t), V_R(t)$  dan  $V_I(t)$  terhadap  $t$

Dari grafik di atas terlihat jelas bahwa populasi yang terinfeksi benar-benar hilang dalam populasi. Ini mengakibatkan populasi manusia yang sembuh juga ikut hilang. Yang yang tersisa dalam populasi tersebut adalah populasi yang rentan saja.

Kestabilan sistem tercapai disekitar titik  $t = 108$ , dimana  $H_r = 119167; H_i = 0; H_s = 0; V_r = 3669; V_i = 0$ . Jelas sekali bahwa usaha pengendalian haruslah sangat besar dan pengurangan kontak antara host yang rentan dengan vektor yang terinfeksi agar kestabilan populasi yang tak endemik tercapai.

Dari uraian grafik di atas dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan  $(13, 56, 931, 1447, 735), (895, 6, 99, 2170, 12), (1939, 0, 0, 2254, 0)$  dan  $(119167, 0, 0, 3669, 0)$  merupakan titik kestabilan.

## BAB V

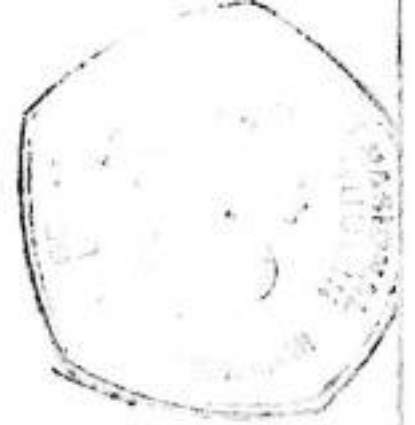
### PENUTUP

#### A. Kesimpulan

Model dari penyebaran virus dengue dikembangkan menjadi model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan. Dari model tersebut diperoleh titik kesetimbangan yang stabil dimana kestabilannya dianalisis dengan menggunakan nilai  $R_0$ , seperti yang ditunjukkan pada halaman 29. Salah satu titik kesetimbangan tersebut adalah titik kesetimbangan tak endemik, yang menunjukkan bahwa populasi yang terinfeksi akan hilang dari sistem yang berarti bahwa wabah penyakit demam berdarah dengue pada saat  $t \rightarrow \infty$  tidak terjadi lagi, seperti yang ditunjukkan pada halaman 30.

Salah satu parameter yang dapat dikontrol yaitu  $\beta$ , yang merupakan banyaknya kontak antara manusia yang rentan dengan nyamuk yang terinfeksi, dan  $c$ , yang merupakan banyaknya kontak antara manusia yang terinfeksi dengan nyamuk yang rentan. Jika parameter tersebut nilainya diperkecil maka akan semakin mempercepat berkurangnya bahkan hilangnya populasi yang terinfeksi dalam populasi tersebut, seperti yang ditunjukkan pada halaman 31.

Jika nilai  $R_0 > 1$  dan nilainya besar sekali akan mengakibatkan jumlah populasi nyamuk yang terinfeksi sangat besar sehingga mengakibatkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi juga bertambah, seperti yang ditunjukkan pada



halaman 32 dan pada gambar 2. Jika nilai  $R_0 > 1$  dan nilainya mendekati satu maka di dalam populasi tersebut memang masih terdapat populasi yang terinfeksi, tetapi jumlah populasinya itu sangat kecil sehingga mengakibatkan jumlah populasi manusia yang sembuh semakin berkurang. Hal ini juga akan mengakibatkan jumlah populasi manusia yang rentan akan semakin bertambah, seperti yang ditunjukkan pada halaman 33 dan pada gambar 3. Jika nilai  $R_0 < 1$  dan nilainya mendekati satu, populasi yang terinfeksi dan populasi yang sembuh akan menghilang dari populasi tersebut, seperti yang ditunjukkan pada halaman 35 dan pada gambar 4. Berbeda halnya dengan  $R_0 < 1$  yang nilainya mendekati nol, yang dimana populasi yang terinfeksi dan populasi yang sembuhnya lebih cepat menghilang dari populasi tersebut, seperti yang ditunjukkan pada halaman 37 dan pada gambar 5.

## **B. Saran**

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya akan membahas mengenai model penyebaran virus dengue dengan pengendalian vektor secara konstan dengan tanpa memasukkan faktor pengaruh iklim. Diharapkan agar pada penulisan selanjutnya model ini dapat dikembangkan dengan memasukkan faktor tersebut dan pengendalian terhadap vektornya tidak hanya dilakukan secara konstan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton. H., 1994, **Aljabar Linear Elementer**, Erlangga, Jakarta.
- B. Fred, C. Carlos-Chavez, 2000, **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology**, Springer, Vancouver, B.C., Canada.
- Boyce. W.E, Dprima R.C, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**, John Wiley & Sons, Inc., 2001
- Haberman. R, 1997, **Mathematical Models - an Introduction to Applied Mathematics**, Prentice-Hall, Inc., 1987.
- Lawrence. P, **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer-Verlag, New York, Berlin, London, Paris.
- Niken. L, Ponidi, Djati. K, 2005, **Pengaruh Mekanisme Diagnosa Terhadap Penyebaran Demam Berdarah Dengue**.  
<http://www.ns.ui.ac.id/seminar2005/Data/S3F-09.pdf>. [10 Oktober 2007]
- O. Diekmann, J.A.P. Hesterbeek & J.A.J. Metz, 1990, **on The Definition and The Computation of The Basic Reproduction Ratio  $R_0$  in Models for Infectious Disease in Heterogeneous Populations**, Journal of Mathematical Biology, Springer-Verlag.
- S. Eunha, 2002, **an Epidemic Model with Immigration of Infectives and Vaccination**.  
[http://www.iam.ubc.ca/theses/AliciaShim/AShim\\_MSc\\_Thesis.pdf](http://www.iam.ubc.ca/theses/AliciaShim/AShim_MSc_Thesis.pdf)  
[21 November 2007]

LAMPYRA

```

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=3:c:=3:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..20,numpoints=1);

```

```

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=3:c:=3:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..150,numpoints=1);

```



```

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.3:c:=0.3:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..20,numpoints=1);

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.3:c:=0.3:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..150,numpoints=1);

```

```

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.2:c:=0.2:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..20,numpoints=1);

```

```

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.2:c:=0.2:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..150,numpoints=1);

```



```
> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.02:c:=0.02:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..20,numpoints=1);

> alpha:=0.08:mu:=0.03:p:=0.5:
beta:=0.02:c:=0.02:b:=0.5:
N:=1000:
M:=9000:
K:=4500:
> sys :=
diff(Hr(t),t)=mu*N-beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-mu*Hr(t),
diff(Hi(t),t)=beta*Vi(t)*(Hr(t)/N)-(mu+p)*Hi(t),
diff(Hs(t),t)=p*Hi(t)-mu*Hs(t),
diff(Vr(t),t)=alpha*M-b*(Vr(t)/M)*K-c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-
alpha*Vr(t),
diff(Vi(t),t)=c*Vr(t)*(Hi(t)/N)-alpha*Vi(t)-
b*(Vi(t)/M)*K:
fcns := {Hr(t),Hi(t),Hs(t),Vr(t),Vi(t)}:
L:=
dsolve({sys,Hr(0)=900,Hi(0)=50,Hs(0)=50,Vr(0)=8400,Vi(0)
)=600},fcns,type=numeric,method=classical):
> with(plots):
> odeplot(L, [[t,Hr(t),color=blue],
[t,Hi(t),color=red],
[t,Hs(t),color=black],
[t,Vr(t),color=green],
[t,Vi(t),color=cyan]],0..150,numpoints=1);
```