

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN
PENYAKIT HIV DENGAN KLASIFIKASI GEJALA PADA PENDERITA**

*STABILITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS FOR HIV
SPREADING WITH SYMPTOM CLASSIFICATION ON PATIENT*

FAISAH

H022191006



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN
PENYAKIT HIV DENGAN KLASIFIKASI GEJALA PADA
PENDERITA**

TESIS

*Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Magister Sains
Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin*



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT
HIV DENGAN KLASIFIKASI GEJALA PENDERITA**

Disusun dan diajukan oleh

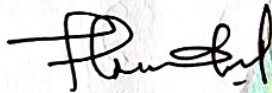
**FAISAH
H022191006**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 1 Juli 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,

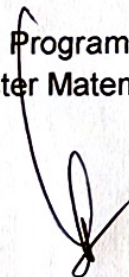


Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 19680114 199412 1 001

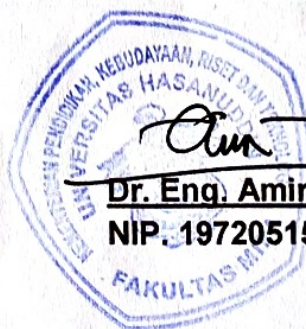
Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si
NIP. 19800904 200312 2 001

Ketua Program Studi
Magister Matematika,

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Faisah
Nim : H022191006
Program Studi : Matematika
Jenjang : S2

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV dengan
Klasifikasi Gejala pada Penderita**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa Tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut

Makassar, 15 Juli 2022



Faisah

PRAKATA

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah Rabbil Alamin, Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas izin dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan tesis ini sebagai salah satu syarat untuk menggapai gelar Magister pada Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin. Penulis sangat menyadari bahwa dalam proses penyusunan tesis ini, tidak sedikit hambatan yang telah dilalui. Akan tetapi rasa optimis, usaha dan doa yang mampu mengalahkan hambatan yang dihadapi.

Terima kasih yang tak terhingga penulis haturkan kepada Ayahanda Alm. Syahrudin, S.Pd dan Ibunda Samrah, Ayahanda DRS. Manju Idrus, S.Pd., M.pd dan Ibunda Halapah, S.Pd.I atas segala doa, kasih sayang, cinta, motivasi, serta dukungan berupa materi. Terima kasih atas perhatian, bimbingan serta ketulusan dalam menemani penulis dalam penyusunan tesis ini.

Iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besar dan setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku pembimbing pertama yang meluangkan waktu dan pikiran untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahan dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si, selaku pembimbing kedua yang banyak meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk senantiasa membimbing, saran, semangat, dan arahan dalam penyusunan tesis ini.
3. Dr. Khaeruddin, M.Sc, Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si, dan Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS, selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tesis ini.
4. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta staff yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
5. Dekan MIPA Universitas Hasanuddin Dr. Eng. Amiruddin, M.Si, seluruh dosen, dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademis

maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

6. Saudaraku Faikatul Hikmah, S.Pd, Faizul Ahmad Zazali, dan Faidul Amin Ashshiddiq atas bantuan dan dukungan dalam penyusunan tesis ini.
7. Teman-teman terdekat penulis, Alvioni Bani, S.Si., M.Si, Nola Curex, S.Si., M.Si Sellacindi Rella, S.Si, Meisy Tri Elsa, S.Si, Nur Wahidah Sari, S.Si dan Aswar, S.Si atas dukungan kepada penulis.
8. Teman-teman pascasarjana matematika, Rabiatal Adawiah, S.Si., M.Si., Fitri Amalyah, S.Si, M.Si., Amirah Wahid, S.Pd., Putri Amalia, S.Si., Syamsir, S.Pd, M.Si., Utari Samsir, S.Si, M.Si., dan Astri, S.Si, M.Si.

Serta orang-orang yang telah berjasa kepada penulis yang tidak dapat dituliskan oleh penulis. Penulis berharap semoga segala bentuk bantuan yang diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat ganda di sisi-Nya.

Wassalamulaiakum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, 15 Juli 2022

Faisah

ABSTRAK

Faisah. **Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran penyakit HIV dengan Klasifikasi Gejala pada Penderita** (dibimbing Oleh Syamsuddin Toaha dan Kasbawati).

Penelitian ini membahas mengenai model matematika pada penyebaran penyakit HIV dengan tujuan menentukan titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), analisis sensitivitas, kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik dengan menggunakan enam kompartemen, yaitu *Susceptible (S)*, *Eksposed (E)*, *Infected (I)*, *terinfeksi dengan gejala ringan (J_r)*, *terinfeksi dengan gejala kronis (J_c)*, dan *AIDS (A)*.

Penelitian ini dimulai dengan menentukan titik kesetimbangan model, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya, penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang diperoleh dengan metode matriks *next generation*, menentukan analisis sensitivitas untuk mengetahui pengaruh parameter pada R_0 dan simulasi model menunjukkan bahwa pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS dan interaksi antara individu terinfeksi HIV dengan individu sehat dapat mengendalikan penyebaran penyakit HIV/AIDS.

Kata Kunci : Model Penyebaran HIV, Sensitivitas R_0 , Analisis kestabilan

ABSTRACT

Faisah. Analysis of Stability of the Mathematical Model of the Spread of HIV Disease with Classification of Symptoms in Patients (supervised by Syamsuddin Toaha and Kasbawati).

This research discusses the mathematical model on the spread of HIV disease with the aim of determining the equilibrium point, determining the basic reproduction number (R_0), sensitivity analysis, equilibrium point stability and numerical simulation using six compartments, namely Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), infected with mild symptoms (J_r), infected with chronic symptoms (J_c), and AIDS (A).

This research begins by determining the equilibrium point of the model, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Furthermore, the determination of the basic reproduction number (R_0) obtained by the next generation matrix method, determining the sensitivity analysis to determine the effect of the parameter on R_0 and the simulation model shows that the formation of the HIV/AIDS control commission and the interaction between HIV-infected individuals and healthy individuals can control the spread of the disease. HIV/AIDS.

Keywords : HIV Spread Model, Sensitivity R_0 , Stability analysis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
KATA PENGANTAR	iii
ABSTRAK.....	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR SIMBOL	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
BAB I	1
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Batasan Masalah	3
BAB II	5
KAJIAN PUSTAKA.....	5
2.1 Studi Review Perkembangan Pemodelan HIV	5
2.2 HIV/AIDS.....	6
2.2.1 Pengertian HIV/AIDS	6
2.2.2 Penularan dan Pencegahan	6
2.2.3 Gejala HIV/AIDS.....	7
2.2.4 Pengobatan Antiretroviral pada Penderita HIV	8
2.2.5 Pembentukan Komisi Penanggulangan HIV/AIDS Sebagai Usaha Untuk Menekan Jumlah Individu Terinfeksi HIV	8
2.3 Persamaan Differensial	9
2.4 Sistem Persamaan Differensial Biasa Non Linear	9
Suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut :	9

2.5 Titik Keseimbangan	10
2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Tetap	10
2.7 Bilangan Reproduksi Dasar	11
2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	13
BAB III	15
METODE PENELITIAN.....	15
3.1 Identifikasi Masalah	15
3.2 Studi Literatur	15
3.3 Formulasi Model	15
3.4 Analisis Kestabilan.....	16
3.5 Simulasi Model	16
3.6 Penarikan Kesimpulan.....	16
BAB IV.....	17
HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Pengembangan Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS	17
4.2 Analisis Model Penyakit HIV/AIDS.....	21
4.3 Titik Keseimbangan Model Penyakit HIV/AIDS	21
4.4 Bilangan Reproduksi Dasar	24
4.5 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	27
4.6 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	29
4.6.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	30
4.6.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	31
4.7 Simulasi Numerik Model	35
4.7.1 Analisis Sensitivitas Nilai Parameter Pembentukan Komisi Penanggulangan HIV/AIDS (p) Terhadap Nilai Bilangan Reproduksi Dasar R_0	37
4.7.2 Analisis Sensitivitas Nilai Parameter Interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat (β) Terhadap Nilai Bilangan Reproduksi Dasar R_0	47
BAB V.....	57
PENUTUP	57
5.1 Kesimpulan.....	57
5.2 Saran	58
DAFTAR PUSTAKA.....	59
LAMPIRAN.....	61

DAFTAR TABEL

Nomor urut	Halaman
1. Kestabilan dari sistem linear $x = f(x)$ dengan $\det(J - \lambda I) = 0$	11
2. Variabel Model HIV/AIDS	19
3. Parameter Model HIV/AIDS.....	19
4. Nilai Variabel Model Matematika HIV/AIDS	35
5. Nilai Parameter Model Matematika HIV/AIDS	36
6. Pengaruh parameter p terhadap nilai R_0	38
7. Pengaruh parameter β terhadap nilai R_0	47

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut	Halaman
1. Skema penyebaran penyakit HIV/AIDS	18
2. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS $p = 0.008$...	40
3. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS $p = 0.08$	41
4. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS $p = 0.2$	42
5. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS $p = 0.3$	43
6. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS $p = 0.5$	44
7. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat $\beta = 0.065$	49
8. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat $\beta = 0.06$	50
9. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat $\beta = 0.055$	51
10. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat $\beta = 0.05$	52
11. Grafik dinamika penyebaran penyakit untuk setiap populasi dengan pemberian nilai parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat $\beta = 0.03$	53
12. Hubungan antara parameter proporsi pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS (p) dan parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat β pada saat $R_0 = 1$	56

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama
μ	Tingkat kelahiran alami
p	Proporsi ketidakberhasilan dari dibentuknya komisi penanggulangan HIV/AIDS
β	Rata-rata laju perpindahan kelompok individu rentan menjadi individu terpapar penyakit.
γ	Rata-rata laju perpindahan kelompok individu terpapar penyakit menjadi kelompok individu terinfeksi tanpa gejala.
k_1	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi tanpa gejala menjadi kelompok individu terinfeksi dengan gejala ringan.
k_2	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi tanpa gejala menjadi kelompok individu terinfeksi dengan gejala kronis.
δ	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi dengan gejala ringan kembali menjadi individu terinfeksi tanpa gejala
q	Proporsi kegagalan pemberian pengobatan berupa tretmen ARV
ω	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi dengan gejala ringan menjadi individu terinfeksi gejala kronis
σ	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi dengan gejala kronis menjadi individu terinfeksi aids
d	Tingkat kematian akibat penyakit HIV/AIDS

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor urut	Halaman
1. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik model penyebaran penyakit HIV/AIDS.....	61
2. Penentuan bilangan reproduksi dasar	61
3. Analisis sensitivitas bilangan reprodksi dasar	64
4. Sintax simulasi untu grafik pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS.	67
5. Sintax simulasi untu grafik interaksi antar individu terinfeksi HIV dengan individu sehat	81
6. Hubungan antara parameter proporsi pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS dan parameter interaksi antar individu terinfeksi HIV/AIDS dengan individu sehat pada saat $R_0 = 1$	93

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) adalah virus yang menyerang sistem kekebalan tubuh. Infeksi tersebut menyebabkan penderita mengalami penurunan kekebalan sehingga sangat mudah untuk terinfeksi berbagai macam penyakit lain. Sedangkan AIDS (*Acquired Immuno Deficiency Syndrome*) yaitu sekumpulan gejala berkurangnya kemampuan pertahanan diri yang disebabkan oleh masuknya virus HIV. (Kemenkes, 2019)

Gejala HIV dibagi dalam beberapa tahap. Tahap pertama adalah tahap infeksi akut, dan terjadi pada beberapa bulan pertama setelah seseorang terinfeksi HIV. Pada tahap ini, sistem kekebalan tubuh orang yang terinfeksi membentuk antibodi untuk melawan virus HIV. Pada banyak kasus, gejala pada tahap ini muncul 1-6 bulan setelah infeksi terjadi. Penderita umumnya tidak menyadari telah terinfeksi HIV. Hal ini karena gejala yang muncul mirip dengan gejala penyakit flu, serta dapat hilang dan kambuh kembali. Setelah beberapa bulan, infeksi HIV memasuki tahap laten. Infeksi tahap laten dapat berlangsung hingga beberapa tahun atau dekade. Pada tahap ini, virus HIV semakin berkembang dan merusak kekebalan tubuh. Infeksi tahap laten yang terlambat ditangani, akan membuat virus HIV semakin berkembang. Kondisi ini membuat infeksi HIV memasuki tahap ketiga, yaitu AIDS. (Kemenkes, 2018)

Sampai saat ini belum ditemukan obat untuk menyembuhkan penyakit HIV, namun ada jenis obat yang dapat memperlambat perkembangan virus, jenis obat ini di sebut antiretroviral (ARV). ARV bekerja dengan menghilangkan unsur yang dibutuhkan virus HIV untuk menggandakan diri agar tidak menurun secara drastis, sehingga infeksi virus HIV memiliki waktu yang lebih lama sebelum berkembang menjadi AIDS. (Kemenkes, 2017)

Berdasarkan data yang dihimpun oleh Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, estimasi ODHA (Orang Dengan HIV AIDS) pada tahun 2020 adalah

sebanyak 543.100 yang tersebar diseluruh Indonesia. Meski demikian, tidak semua ODHA rutin melakukan test Viral Load HIV sesuai rekomendasi yang ada. (Kemenkes, 2020)

Dinamika pertambahan jumlah penderita HIV AIDS dapat diamati dengan memodelkannya ke dalam model matematika. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata (Syam, Side, & Said, 2020). Model matematika adalah hubungan antara komponen-komponen dalam suatu masalah yang dirumuskan dalam suatu persamaan matematik yang memuat komponen-kompenen itu sebagai variabelnya (Side & Rangkuti, 2015)

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya maka peneliti membawa permasalahan tersebut ke dalam bentuk model matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu tahap pemecahaan masalah yakni berupa penyederhanaan suatu fenomena nyata ke dalam bentuk matematika. Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Khan, dkk (2019) populasi dibagi menjadi empat kompartemen yaitu *Susceptible* (S) atau individu yang rentan terhadap virus HIV, *Infected* (I) atau individu yang terinfeksi virus HIV, individu yang terinfeksi dengan gejala (J), individu yang terkena gejala AIDS (A). Selanjutnya dari penelitian yang dilakukan oleh Aziz, dkk., peneliti akan memodifikasi dengan menambahkan kelompok *Exposed* (E) dan mengklasifikasi kelompok individu yang terinfeksi dengan gejala menjadi dua kelompok yaitu kelompok individu terinfeksi dengan gejala ringan (J_r) dan kelompok individu yang terinfeksi dengan gejala kronis (J_c) serta penambahan proporsi pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS sebagai usaha menekan bertambahnya individu terinfeksi HIV dan penambahan proporsi ARV sebagai pengobatan terhadap individu yang terinfeksi HIV. Atas pertimbangan tersebut akan dilakukan penelitian yang dituangkan dalam tesis yang berjudul

**“ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN
PENYAKIT HIV DENGAN MENGLASIFIKASI GEJALA PADA PENDERITA”**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka rumusan masalah yang diperoleh adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana membangun model matematika penyebaran penyakit HIV?

2. Bagaimana penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik seta analisis kestabilan titik kesetimbangannya?
3. Bagaimana penentuan bilangan reproduksi dasar dan sensitivitas parameter yang mempengaruhi model?
4. Bagaimana menganalisis hasil simulasi model yang penyebaran HIV?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan model matematikapenyebaran penyakit HIV
2. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemic serta menganalisa kestabilan titik kesetimbangannya.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar dan sensitivitas parameter yang mempengaruhi model.
4. Menganalisa hasil simulasi model penyebaran penyakit HIV.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari Penelitian Ini adalah :

1. Penelitian ini diharapkan akan memberikan gambaran secara jelas tentang penyebaran penyakit HIV.
2. Hasil dari penelitian ini diharapka dapat instansi terkait dalam mencegah semakin meluasnya penyebaran penyakit HIV.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini memerlukan asumsi asumsi agar tidak menimbulkan penafsiran yang lebih luas, batasan masalah berdasarkan asumsi sebagai berikut

1. Kompartemen pada penelitian ini dibagi menjadi 6 kelas yaitu *Susceptible (S)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Gejala Ringan (J_r)*, *Gejala Kronis (J_c)* dan *AIDS (A)*
2. Tingkat kelahiran dan tingkat kematian diasumsikan sama.
3. Yang dapat menularkan penyakit HIV adalah individu yang terinfeksi penyakit HIV.

4. Individu yang terinfeksi dengan gejala kronis diberikan pengobatan Antiretroviral (ARV).
5. Data yang akan digunakan untuk simulasi model adalah data penderita penyakit HIV di Indonesia.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Studi Review Perkembangan Pemodelan HIV

Pada bagian ini akan diberikan studi review penelitian model matematika penyebaran penyakit HIV. Khan, dkk (2019) melakukan penelitian dengan membagi populasi menjadi empat kompartemen yaitu *Susceptible* (S) atau individu yang rentan terhadap virus HIV, *Infected* (I) atau individu yang terinfeksi virus HIV, individu yang terinfeksi dengan gejala (J), individu yang terkena gejala AIDS (A). Dalam penelitian menggunakan turunan Liouville-Caputo dan Atangana-Baleanu-Caputo-Fractional Order, untuk menentukan solusi khusus dengan menggunakan skema iterative, seperti transformasi laplace dan Samudu, keberadaan dan keunikan solusi yang dilakukan melalui titik kesetimbangan. Peneliti dalam penelitian ini juga menggunakan Adams Schemes untuk simulasi numerik.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Silva, dkk (2016), dalam penelitian ini menggunakan empat kompartemen yaitu *Susceptible* (S) atau individu yang rentan terhadap virus HIV, *Infected* (I) atau jumlah individu yang terinfeksi virus HIV, jumlah individu yang terinfeksi virus HIV dengan pengobatan ART (C), individu yang terinfeksi HIV dengan gejala AIDS (A). Dalam penelitian ini mengusulkan dan menganalisis model matematika untuk dinamika penularan HIV/AIDS, penelitian ini mengasumsikan bahwa individu dikelas C tidak memiliki perilaku berisiko untuk menularkan virus HIV dan juga berasumsi bahwa individu dengan gejala AIDS bertanggung jawab dan tidak memiliki perilaku yang dapat menularkan virus HIV.

2.2 HIV/AIDS

2.2.1 Pengertian HIV/AIDS

HIV adalah sebuah virus yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia. AIDS muncul setelah virus (HIV) menyerang sistem kekebalan tubuh kita selama lima hingga sepuluh tahun atau lebih. HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) merupakan virus yang dapat menyebabkan AIDS dengan cara menyerang sel darah putih yang bernama sel CD4 sehingga dapat merusak sistem kekebalan tubuh manusia (WHO,2019)

AIDS (*Acquired Immuno Deficiency Syndrome*) atau kumpulan berbagai gejala penyakit akibat turunnya kekebalan tubuh individu akibat HIV. Ketika individu sudah tidak lagi memiliki sistem kekebalan tubuh maka semua penyakit dapat dengan mudah masuk ke dalam tubuh. Karena sistem kekebalan tubuhnya menjadi sangat lemah, penyakit yang tadinya tidak berbahaya akan menjadi sangat berbahaya. Orang yang baru terpapar HIV belum tentu menderita AIDS. Hanya saja lama kelamaan sistem kekebalan tubuhnya makin lama semakin lemah, sehingga semua penyakit dapat masuk ke dalam tubuh. Pada tahapan itulah penderita disebut sudah terkena AIDS. (Kemenkes, 2016)

2.2.2 Penularan dan Pencegahan

Menurut (Kemenkes, 2015) Penularan HIV akan terjadi bila ada kontak atau pertukaran cairan tubuh yang mengandung virus, yaitu :

1. Melalui hubungan seksual yang tidak terlindung dengan orang yang terinfeksi HIV dan AIDS. Hubungan seksual ini bisa homoseksual (sesama jenis) ataupun heteroseksual (berlainan jenis). Virus dapat masuk ke tubuh melalui lapisan/selaput vagina, vulva, penis, rektum atau mulut.
2. Melalui transfusi darah dan transplantasi organ yang terinfeksi/tercemar HIV. Transfusi darah yang tercemar HIV secara langsung akan menularkan HIV ke dalam sistem peredaran darah dari si penerima.
3. Melalui jarum suntik atau alat tusuk lainnya (akupuntur, tindik, tato) yang terinfeksi/tercemar HIV. Oleh sebab itu pemakaian jarum suntik secara

bersama-sama oleh pecandu narkotika akan mudah menularkan HIV di antara mereka, bila salah satu diantaranya seorang pengidap HIV.

4. Penularan ibu hamil yang terinfeksi HIV kepada bayi yang dikandungnya. Penularan dapat terjadi selama kehamilan, atau persalinan atau selama menyusui.

Upaya pencegahan HIV/AIDS adalah dengan meningkatkan keterampilan (*skill*) dan pengetahuan (*knowledge*) dengan cara/metode yang sesuai dengan kepercayaan dan budaya masyarakat setempat. Penyebaran pengetahuan melalui pendidikan formal dan non formal merupakan salah satu alternatif yang dapat dipilih. (Faridah I, 2020).

(WHO, 2019) Upaya yang selama ini dilakukan untuk menghambat penyebaran penularan HIV, dikenal konsep “ABCDE” sebagai berikut :

1. A (*Abstinence*): artinya Absen seks atau tidak melakukan hubungan seks bagi yang belum menikah.
2. B (*Be faithful*): artinya Bersikap saling setia kepada satu pasangan seks (tidak berganti-ganti pasangan).
3. C (*Condom*): artinya Cegah penularan HIV melalui hubungan seksual dengan menggunakan kondom.
4. D (*Drug No*): artinya Dilarang menggunakan narkoba.
5. E (*Education*): artinya pemberian Edukasi dan informasi yang benar mengenai HIV, cara penularan, pencegahan dan pengobatannya.

2.2.3 Gejala HIV/AIDS

Menurut (Kemenkes, 2016) tanda dan gejala yang dialami oleh tubuh manusia akibat infeksi virus HIV dibagi menjadi tiga tahap yaitu:

1. Tahap satu (Periode Jendela)

Pada tahap ini tubuh terinfeksi HIV namun saat dilakukan pemeriksaan sampel darah belum ditemukan antibodi anti-HIV pada tahapan ini dimulai dari 2 minggu sampai 3 bulan sejak terinfeksi HIV dan individu mampu dan berpotensi untuk melakukan transmisi virus kepada individu lain. Tanda dan gejala yang ditimbulkan pada tahap ini seperti meriang, sakit tenggorokan, sakit sendi, sakit kepala dan batuk yang dapat disembuhkan tanpa pengobatan.

2. Tahap dua (Periode Laten)

Pada tahap ini biasanya tidak ada gejala dan tanda yang ditimbulkan dari virus HIV (*asimtomatik*) dan juga terdapat gejala dalam skala ringan. Pada tahap ini pada saat dilakuka pemeriksaan tes sampel darah menunjukkan hasil positif HIV, meskipun gejala HIV belum timbul pada penderita. Masa asimtomatik pada penderita biasanya terjadi dua sampai tiga tahun dan gejala dalam skala ringan terjadi sekitar lima sampai delapan tahun yang ditandai dengan adanya peradangan pada mukosa.

3. Tahap tiga (Periode AIDS)

Tahapan ini merupakan tahapan terminal pada penderita HIV yang ditandai dengan penurunan kekebalan tubuh secara signifikan yang akan mengakibatkan terjadinya infeksi berupa peradangan pada bagian mukosa.

2.2.4 Pengobatan Antiretroviral pada Penderita HIV

Setelah diagnosis HIV dinyatakan positif, pasien diberikan konseling pasca-diagnosis untuk meningkatkan pengetahuannya mengenai HIV termasuk pencegahan, pengobatan dan pelayanan, yang tentunya akan mempengaruhi transmisi HIV dan status kesehatan pasien. (Kemenkes, 2015)

Penderita HIV memerlukan pengobatan dengan Antiretroviral (ARV) agar virus HIV tidak menggandakan diri dan infeksi virus HIV memiliki waktu yang lebih lama sebelum berkembang menjadi AIDS (Kemenkes, 2014)

2.2.5 Pembentukan Komisi Penanggulangan HIV/AIDS Sebagai Usaha Untuk Menekan Jumlah Individu Terinfeksi HIV

(Permenkes RI No. 21 Tahun 2013) Kegiatan penanggulangan HIV dan AIDS diselenggarakan oleh pemerintah dan masyarakat, serta penyelenggaraannya dilakukan dalam bentuk layanan komprehensif dan berkesinambungan. Layanan komprehensif dan berkesinambungan merupakan upaya yang meliputi semua bentuk layanan HIV dan AIDS yang dilakukan secara paripurna mulai dari rumah, masyarakat sampai ke fasilitas pelayanan kesehatan. Kegiatan penanggulangan HIV dan AIDS dapat dilakukan melalui pembentukan komisi penanggulangan HIV/AIDS atau promosi kesehatan.

2.3 Persamaan Differensial

Sistem persamaan differensial adalah kumpulan persamaan differensial yang terhubung satu sama lain dan membentuk sebuah sistem persamaan. Misalkan diberikan sebuah vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Jika notasi $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ digunakan untuk menyatakan turunan \mathbf{x} terhadap t maka diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T \quad (2.1)$$

Misalkan diberikan sistem autonomous $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yaitu suatu sistem persamaan differensial dengan variabel bebas t yang secara implisit, dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : L \rightarrow \mathbb{R}^n$, L adalah himpunan terbuka dan $\mathbf{f} \in C^1(L)$, dengan C^1 merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di L , maka sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2.4 Sistem Persamaan Differensial Biasa Non Linear

Suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

adalah fungsi tak linear pada x_1, x_2, \dots, x_n . Sistem persamaan (2.2) disebut sistem persamaan diferensial tak linear (Brawn, 1983).

2.5 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan atau biasa disebut solusi kesetimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga $f(x^*) = 0$. (Wiggins, 1990) dengan,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

atau dengan kata lain, jika $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Tetap

Linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial non linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 2.1. (Hale & Kocak, 1991) *Jika x^* merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka persamaan diferensial linear:*

$$\dot{x} = J(x^*)x \tag{2.3}$$

disebut persamaan linearisasi dari vector field f pada titik kesetimbangan x^ di mana $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ dan*

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$J(x^*)$ disebut sebagai matriks Jacobi dari f di titik x^* .

Kestabilan titik kesetimbangan x^* dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik:

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2.4)$$

dengan I adalah suatu matriks identitas. Dalam Tabel 1 diberikan beberapa jenis sifat kestabilan yang di kategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik (2.4).

Tabel 1 Kestabilan dari sistem linear $\dot{x} = f(x)$ dengan $\det(J - \lambda I) = 0$

No	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1	$\lambda > \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
2	$\lambda < \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
3	$\lambda < 0 < \lambda_j$	Tidak Stabil
4	$\lambda_j = \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
5	$\lambda_j = \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
6	$\lambda_j, \lambda_j = r \pm ic$	$r > 0$, Tidak Stabil
7	$\lambda_j, \lambda_j = r \pm ic$	$r < 0$, Stabil Asimtotik
8	$\lambda_j = ic, \lambda_j = -ic$	Stabil

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012)

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya rentan. Kondisi yang mungkin akan timbul, yaitu :

- Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang.
- Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat menjadi wabah

- c. Jika $R_0 = 1$ maka kestabilan dari kedua titik ekuilibrium tidak dapat ditentukan.

Apabila nilai dari reproduksi dasar tinggi maka tingkat penyebaran penyakit juga tinggi dalam hal ini terjadi endemik. Agar kemungkinan individu terinfeksi tidak ada lagi maka $R_0 < 1$ yang menunjukkan apakah satu individu itu menginfeksi kurang dari satu individu rentan atau tidak terjadi penyebaran. Tetapi jika bilangan reproduksi dasar lebih dari 1 ($R_0 > 1$) maka terjadi penyebaran atau satu individu menginfeksi lebih dari 1 individu rentan. Bilangan $R_0 > 1$ terjadi jika dan hanya jika semua nilai eigen mempunyai bagian real negatif (Brauer & Castillo, 2011)

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi atau rentan, serta $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$, sehingga untuk $m, n \in \mathbb{N}$, maka diperoleh :

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y) \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y) \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

Dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas infeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi merupakan hasil dari linearisasi sistem persamaan diferensial yang berdasarkan titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinierisasi, yaitu:

:

$$\dot{x} = (F - V)x \quad (2.7)$$

dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut

$$K = FV^{-1}, \quad (2.8)$$

dengan K disebut sebagai matriks *next generation*. Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spectral (nilai *eigendomain*) dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002) sehingga:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}). \quad (2.9)$$

2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Uji kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar dari persamaan karakteristik secara langsung. Tinjau sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.10)$$

Dengan A adalah matriks $n \times n$ yang diperoleh dari linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan yang disebut matriks Jacobi di titik kesetimbangan dan x adalah vektor yang berukuran $n \times 1$. Persamaan karakteristik dari sistem (2.10) yaitu

$$|A - \lambda I| = 0,$$

dimana I adalah matriks identitas. Nilai egen dari matriks A adalah akar-akar dari polinomial karakteristik berikut :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.11)$$

dengan $a_i, i=1,2,3,\dots,n$ adalah konstanta riil. Diasumsikan $a_n \neq 0$ karena jika tidak maka $\lambda = 0$ adalah solusi. Persamaan tersebut mempunyai n buah akar-akar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ yang dapat bernilai riil atau dapat bernilai kompleks yang memenuhi $P(\lambda) = 0$. Adapun syarat perlu dan syarat cukup agar $P(\lambda)$ mempunyai nilai eigen dengan bagian riil yang negatif adalah (Murray,2002)

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0 \quad k = 1,2,3, \dots, n \text{ dan } a_n > 0$$

Contoh : Diberikan persamaan kubik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan kubik tersebut mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

Dengan demikian diperoleh kondisi

$$a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ dan } a_1 a_2 - a_3$$