SKRIPSI

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SISTEM PEGAS TERKOPEL DUA MASSA IDENTIK MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA

NUR ARYADINT
H211 16 018

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SISTEM PEGAS TERKOPEL DUA MASSA IDENTIK MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA

SKRIPSI

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Fisika Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin

NUR ARYADINT
H211 16 018

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Nur Aryadint
NIM	: H2116018
Program Studi	: Fisika
Judul Skripsi	: Solusi Numerik Persamaan Sistem Pegas Terkopel Dua Massa Identik Menggunakan Metode Runge Kutta

Makassar, 27 November 2020

Disahkan oleh :

Pembimbing Pertama	Pembimbing Kedua
Eko Juarlin, S.Si., M.Si.	Nur Hasanah, S.Si., M.Si.
NIP. 19811106 200812 1 002	NIP. 19831122 200912 2 001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini merupakan karya orisinal saya dan sepanjang pengetahuan saya tidak memuat bahan yang pernah dipublikasi atau telah ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau di lembaga pendidikan tinggi lainnya di manapun, kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Saya juga menyatakan bahwa skripsi ini merupakan hasil karya saya sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Penulis

Nur Aryadint

ABSTRAK

Gerakan pada pegas dapat dikategorikan sebagai getaran atau osilasi yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu model pegas adalah sistem pegas terkopel dua massa dengan solusi persamaannya berbentuk persamaan diferensial linier orde keempat yang cukup rumit dan panjang jika diselesaika nmelalui metode analitik. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan perbandingan antara solusi numerik dan solusi analitik dari solusi penyelesaian sistem pegas terkopel dua massa identik dengan variasi konstanta pegas yang berbeda. Posisi dua massa yang terhubung dengan dua pegas pada penelitian ini dihitung secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde pertama (Metode Euler), Runge Kutta orde kedua, orde ketiga, dan orde keempat. Sistem yang dipilih memiliki dua massa identik dan dua pegas dengan konstanta yang beragam. Solusi numerik menunjukkan periode osilasi numerik sama dengan periode osilasi analitik. Amplitudo x_1 dan x_2 bernilai konstan. Kesalahan numerik maksimum muncul saat kedua massa berada di posisi seimbang dan bernilai cenderung konstan.

Kata kunci: Kesalahan Numerik, Massa Identik, Metode Runge Kutta, Sistem Pegas Terkopel, Amplitudo.

ABSTRACT

Any object’s movement connected into springs can be categorized as vibrations or oscillations that can be found in daily life. One model of the spring is a two-mass coupled spring system, where the solution equation will be in the form of a fourth-order linear differential equation which is quite complicated and long if solved by analytical methods. The purpose of this study is to obtain a comparison between the numerical solution and the analytical solution of the two identical mass coupled spring system solution with different variations of the spring constant. The positions of two masses connected to two springs in this study were calculated numerically using the first-order Runge Kutta methods (Euler's method), second-order, third-order, and fourth-order Runge Kutta methods. The system chosen has two identical masses and two springs with varying constants. The numerical solution shows that the result of numerical oscillations period equal to analytical oscillations period. The amplitudes of x_1 and x_2 are constant. The maximum numerical error occurs when the two masses are in equilibrium and the values tend to be constant.

Keywords: Numeric Error, Identical Mass, The Runge Kutta Method, Coupled Spring System, Amplitude.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Puji syukur penulis ucapkan atas kehadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan berkah, rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Solusi Numerik Persamaan Sistem Pegas Terkopel Dua Massa Identik Menggunakan Metode Runge Kutta” yang diajukan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam memperoleh gelar sarjana sains di Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Tidak lupa pula, shalawat serta salam penulis panjatkan kepada panutan utama penulis, baginda Rasulullah Muhammad SAW, Allohumma sholli wasallim ’alaihi, yang telah membawa umatnya dari zaman yang gelap gulita ke zaman yang terang benderang.

Proses penyelesaian skripsi sebagai tugas akhir merupakan perjalanan yang panjang, baik dalam proses penelitian maupun pada proses penulisan. Penulis menyadari bahwa terselesaikannya skripsi ini tak lepas dari dukungan serta bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua penulis, ayahanda **Mulyadi M. Yusuf** dan Ibunda **Intang Laha** atas curahan kasih sayang, dorongan do’a, nasihat, motivasi, dan dukungan moril maupun materil selama penulis menempuh studi di Departemen Fisika, Universitas Hasanuddin. Serta tak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua saudari penulis, **Nur Dwi Riyadint** dan **Nur Sry Tiyaradint** beserta keluarga besar penulis, yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Arifin, M.T**., selaku Ketua Departemen Fisika, Universitas Hasanuddin serta seluruh staf dosen pengajar dan pegawai Departemen Fisika FMIPA Unhas yang telah memberikan bimbingan serta ilmu selama penulis menjalani studi hingga penyelesaian skripsi.
2. Bapak **Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc.**, sebagai dosen Pembimbing Akademik (PA) penulis atas arahan dan masukannya kepada penulis selama

menempuh studi di Program Studi Fisika Universitas Hasanuddin.

3. Bapak **Eko Juarlin, S.Si., M.Si.**, sebagai pembimbing utama atas arahan, nasihat, dorongan motivasi serta waktu yang telah diluangkan pada penulis sehingga dapat menyelesaikan penelitian ini.
4. Ibu **Nur Hasanah, S.Si., M.Si.**, sebagai pembimbing pertama yang telah banyak meluangkan waktu serta memberikan banyak arahan selama penulis melakukan penelitian.
5. Bapak **Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc.** dan bapak **Prof. Dr. Dahlang Tahir, M.Si.** sebagai tim penguji dalam melaksanakan seminar proposal, hasil dan skripsi fisika yang telah banyak memberikan masukan dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini.
6. Bapak **Prof. Dr. rer-nat Wira Bahari Nurdin** selaku Kepala Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi Departemen Fisika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin, serta kakak-kakak dan adik-adik di Laboratorium Fisika Teori dan komputasi yang selama ini memberikan arahan dan masukan kepada penulis selama menempuh studi.
7. **Reza Ayu Lestari**, yang selalu menemani dan menyemangati serta memberikan banyak bantuan, dorongan juga motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan penelitian ini sesegera mungkin.
8. Seluruh warga dan alumni **KMF FMIPA UNHAS** serta **HIMAFI FMIPA UNHAS** yang telah membentuk penulis menjadi pribadi seperti saat ini dengan segala proses yang diberikan.
9. Kakak-kakak **MIPA 2013 (Kak Takdir, Kak Asnur, Kak Boy, kak Sandi, dkk.)**, kakak-kakak **HIMAFI 2014 (Kak Ariyadi, Kak Aswan, Kak Sidiq, dkk.)**, serta kakak-kakak **HIMAFI 2015 (Kak Hafis, Kak JR, Kak Gustamin, dkk.)** yang telah memberikan banyak pelajaran dan bimbingan di luar ruang kelas kepada penulis selama menempuh studi.
10. Kawan-kawan sejawat dan seperjuangan **MIPA 2016** yang telah menemani penulis bertumbuh dan berproses di KM FMIPA UNHAS terkhusus juga kepada **PEJANTAN MIPA (Wandi, Rully, Rudi, Feri, Aldi, Wisnu, dkk.)** salam "Seperti Seharusnya".

11. Saudara tak sedarah **HIMAFI 2016** yang telah memberikan pengalaman berharga selama ini, yang telah menemani penulis melewati masa-masa susah dan senang dalam dunia kampus khusunya selama berproses di HIMAFI FMIPA UNHAS terkhusus juga kepada **Cowok-Cowok Tega (Arief, Agung, Iksan, Ayyub, Aso, Ulla, Aushaf, Indra, Adit)**, salam "Melangkah Bersama Semangat"
12. Teman-teman **FISIKA 2016 (Arief, Winda, Lili, Mute, Widy, Ekki, dkk.)** yang telah memberikan dukungan serta semangat selama penulis menjalani studi hingga penulis menyelesaikan skripsi.
13. Adik-adik **Himafi 2017 (Zahari, dkk.)**, adik-adik **Himafi 2018 (Dede, dkk.)**, Adik-adik **MIPA 2019 (Alfian, dkk.)**, yang turut memberikan kesan dan pengalaman tersendiri bagi penulis dalam menjalani proses di KM FMIPA UNHAS serta HIMAFI FMIPA UNHAS. Tetap semangat berproses. Panjang umur perjuangan!
14. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, semoga segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis bernilai ibadah disisi **Allah SWT**.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penelitian serta penulisan laporan, penulis masih banyak kekurangan, disebabkan keterbatasan pengetahuan, pengalaman, dan kemampuan penulis. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga karya ini dapat bermanfaat untuk semua pihak. Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada semua pihak yang telah membantu dan semoga Allah SWT melimpahkan karunia-Nya dalam setiap amal kebaikan dan diberikan balasan. Aamiin.

Makassar, 27 November 2020

Nur Aryadint

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Pegas merupakan salah satu komponen penting dalam dunia industri misalnya dalam industri otomotif, transportasi dan industri lainnya. Pegas dapat dijumpai di bagian suspensi, perabot, dan mesin industri. Getaran pegas khususnya sistem pegas terkopel dua massa merupakan salah satu objek yang penyajiannya muncul dalam bentuk persamaan diferensial yang cukup sulit diselesaikan secara analitik sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menyelesaikannya [1].

Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang sulit dan kompleks adalah metode Runge-Kutta [2]. Metode ini dikenal luas dan sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, baik itu linear maupun nonlinear [3]. Metode Runge Kutta sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Dalam penelitian ini digunakan metode Euler dan Runge Kutta orde kedua, ketiga dan keempat. Namun, dalam teori asli, metode Runge Kutta digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde pertama, maka untuk menyelesaikan persamaan pegas terkopel dengan dua massa yang menghasilkan persamaan diferensial orde keempat, penyesuaian metode Ruunge Kutta perlu dilakukan.

Beberapa penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan penelitian ini diantaranya Adhi Kusumadjati, *et, al* (2017) yang menyimulasikan secara satu dimensi gerak osilasi terkopel di sumbu vertikal untuk menentukan amplitudo maksimum benda terbawah menggunakan metode Euler. Pada penelitian itu, dibandingkan sistem pertama yaitu sebuah benda yang berada dalam sistem pegas tanpa redaman dengan sistem kedua yaitu terdiri dari satu benda, dua benda, dan tiga benda yang diberikan redaman. Hasil yang diperoleh adalah sistem yang memiliki lebih banyak benda akan memiliki nilai amplitudo lebih besar pula.

Penelitian lain juga dilakukan oleh Dwi Candra Vitaloka, Moh Hasan, dan Rusli Hidayat (2013) yang menyimulasikan sistem pegas massa dengan variasi massa dan konstanta pegas. Pada penelitian tersebut, dianalisis perilaku beberapa sistem pegas, baik tanpa maupun terdapat gaya gesekan dengan variasi sistem pegas massa yang dihubungkan dengan dua pegas secara seri dan paralel. Hasil yang didapatkan pada penelitian tersebut adalah di sistem pegas massa gerak bebas tanpa gaya gesekan amplitudo tidak menunjukkan penurunan eksponensial dan frekuensi getaran sama.

Berdasarkan hal yang telah dijelaskan di atas, penelitian ini mengaji pengaruh nilai konstanta pegas terhadap amplitudo, frekurensi getaran sistem pegas terkopel dua massa dan perbandingan kesalahan numerik relatif metode Euler, Runge Kutta orde kedua, ketiga, dan keempat dalam persamaan pegas terkopel dua massa dengan variasi nilai konstanta pegas dan simpangan awal.

I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik dari persamaan sistem pegas terkopel dua massa identik menggunakan metode Runge Kutta?
2. Bagaimana pengaruh konstanta pegas dalam sistem pegas terkopel dua massa identik terhadap getaran massa?
3. Bagaimana grafik kesalahan relatif solusi numerik terhadap solusi analitik dalam sistem pegas terkopel dua massa identik?

I.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan solusi numerik menggunakan metode Runge Kutta pada sistem pegas terkopel dua massa identik.
2. Mendapatkan perbandingan dari solusi penyelesaian sistem pegas terkopel dua massa identik dengan variasi konstanta pegas yang berbeda.
3. Mendapatkan perbandingan antara solusi numerik dengan solusi analitik dari solusi penyelesaian sistem pegas terkopel dua massa identik.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Persamaan Diferensial Biasa

Ada banyak masalah fisis yang melibatkan turunan. Sebuah persamaan yang mengandung turunan, dinamakan persamaan diferensial [4]. Persamaan diferensial sendiri dapat diklasifikasikan menjadi beberapa kategori. Kategori pertama adalah persamaan diferensial biasa (PDB), yaitu persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas. Diferensial dilambangkan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau *f'(x)* atau *y'*. Salah satu contoh persamaan diferensial adalah:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \tag{2.1}$$

Dalam persamaan 2.1, variabel bebas adalah x dan y adalah variabel terikat. Kategori kedua adalah persamaan diferensial parsial (PDP) yang memiliki lebih dari satu variabel bebas.

Berdasarkan derajat turunan tertinggi atau orde, PDB dikategorikan sebagai PDB orde pertama pada saat turunan tertingginya adalah turunan pertama, seperti yang dicontohkan persamaan (2.2) berikut:

$$\begin{gathered} y' + xy = 1 \\ xy' + x = e^x \\ \frac{dv}{dt} = -g \\ \frac{dx}{dt} = 2x + 4 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Sedangkan PDB orde kedua yaitu persamaan diferensial yang turunan tertingginya adalah turunan kedua, seperti persamaan (2.3) berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \tag{2.3}$$

Selanjutnya, PDB orde ketiga yang memiliki turunan tertinggi adalah turunan ketiga dan PDB orde ke-n yang turunan tertingginya adalah turunan ke-n.

Persamaan (2.4) berikut ini merupakan bentuk umum PDB berdasar tingkatan atau ordenya:

$y' = f(x, y)$	Persamaan diferensial orde pertama	
$y'' = f(x, y, y')$	Persamaan diferensial orde kedua	(2.4)
$y^{(10)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(9)})$	Persamaan diferensial orde kesepuluh	
$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$	Persamaan diferensial orde ke-n	

PDB disebut linier jika $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ memuat semua suku fungsi linier dari variabel $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ atau pangkat turunan tertinggi persamaan diferensial bernilai satu. Sebuah persamaan diferensial linier orde ke-n, dengan variabel terikat y serta variabel bebas x, adalah sebuah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{(n-1)}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{2.5}$$

Dengan $a_0 \neq 0, a_1, a_{(n-1)}, \ldots, a_n$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi b(x) disebut sebagai *input* atau unsur non homogen. Jika ruas kanan b(x) bernilai sama dengan nol untuk semua nilai x dalam interval yang ditinjau, persamaan ini disebut dengan persamaan diferensial homogen. Jika ruas kanan b(x) bernilai tidak sama dengan nol untuk semua nilai x dalam interval yang ditinjau, dikatakan sebagai persamaan diferensial non homogen [7]. Secara sederhana persaamaan diferensial biasa linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.6}$$

Ciri-ciri sebuah persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut [6]:

1. Variabel terikat dan suku derivatif hanya berderajat satu
2. Tidak ada ikatan antara variabel terikat dan suku derivatif
3. Variabel terikat bukan persamaan transenden.

Setiap persamaan diferensial linear orde ke-n memiliki solusi yang berisi n konstanta bebas. Solusi ini yang disebut sebagai solusi umum persamaan diferensial linear [4].

Sebuah PDB yang tidak memenuhi persamaan (2.5) disebut PDB nonlinier. Contoh PDB nonlinier adalah sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3y\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2y = 0 \tag{2.9}$$

Persamaan (2.7) disebut nonlinier karena di dalam $3y\frac{dy}{dx}$ terdapat perkalian antar variabel terikat dengan turunan pertamanya. Persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial yang nonlinier karena variabel terikat y berorde kedua yaitu $2y^2$. Persamaan (2.9) adalah PDB nonlinier, karena pada $3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ turunan pertamanya dipangkat empat.

II.2 Gerak Harmonik Sederhana

Gerak harmonik sederhana merupakan getaran suatu benda yang dipengaruhi oleh gaya pemulih linier tetapi tidak dipengaruhi oleh gaya gesekan, sehingga tidak mengalami pengurangan (disipasi) tenaga. Gaya pemulihlinier memiliki nilai yang berbanding lurus dengan nilai negatif simpangan. Gaya pemulih diartikan sebagai gaya yang bekerja untuk mengembalikan massa atau benda ke arah semulanya [8].

Gerak harmonik sederhana terjadi pada sebuah benda yang digantungkan pada sebuah pegas. Jika benda disimpangkan sejauh x dari titik seimbangnya, pegas yang diwakili oleh nilai konstanta k mengerjakan gaya (F_x) pada benda, sesuai dengan hukum Hooke:

$$F_x = -kx \tag{2.10}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa gaya pegas memiliki arah yang berlawanan dengan simpangannya. Dengan menggabungkan persamaan (2.10) dengan hukum kedua Newton didapatkan gaya yang diterima benda:

$$-kx = ma \tag{2.11}$$

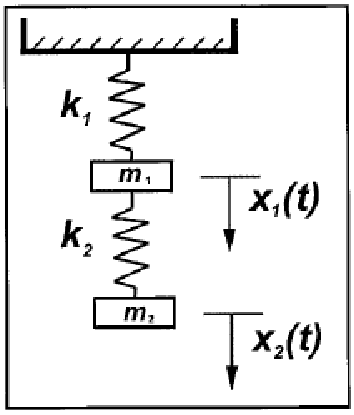
atau

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.12}$$

dengan m adalah massa benda, a adalah percepatan benda, dan $\ddot{x}$ adalah turunan kedua posisi terhadap waktu.

II.3 Pegas Terkopel dengan Dua Massa

Sistem pegas massa merupakan suatu sistem yang di dalamnya, terdapat massa benda yang dihubungkan oleh pegas. Susunan rangkaian pegas bisa seri dan paralel dengan jumlah pegas yang bervariasi. Sebagai contoh, sistem yang terdiri atas dua massa dan dua pegas seperti pada gambar 2.1 [10] dijelaskan perilaku fisisnya.



Gambar 2. 1 Sistem Pegas Terkopel dengan Dua Massa [11]

Berdasarkan asusmsi osilasi kecil dan tanpa adanya gaya gravitasi, gaya pemulih pada sistem menghasilkan bentuk $-k_1x_1$ dan $-k_2x_2$ dimana x_1 dan x_2 adalah pemanjangan atau kompresi dari kedua pegas. Ketika m_1 terhubung dengan kedua pegas, terjadi dua gaya pemulih yang bekerja pada sistem, yaitu gaya pemulih yang nilainya $-k_1x_1$ dari pegas pertama dan gaya pemulih yang nilainya $-k_2(x_2 - x_1)$ dari pegas kedua. Massa kedua hanya mendapatkan gaya pemulih dari pemanjangan atau kompresi dari pegas kedua [11].

Hukum Newton menyatakan dua persamaan yang merepresentasikan gerakan kedua benda tersebut, yaitu [11]:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \qquad (2.13)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \qquad (2.14)$$

Sehingga, didapat dua persamaan diferensial linier orde kedua terkopel.

Setelah dimanipulasi persamaan (2.13), diperoleh:

$$x_2 = \frac{m_1\ddot{x}_1}{k_2} + \frac{k_1 + k_2}{k_2}x_1 \qquad (2.15)$$

Dengan penyubstitusian persamaan (2.15) ke dalam persamaan (2.14), diperoleh:

$$m_1 m_2 x_1^{(4)} + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2))\ddot{x}_1 + k_1 k_2 x_1 = 0 \tag{2.16}$$

Maka, posisi benda pertama terhadap waktu ditentukan oleh persamaan diferensial linier orde keempat itu.

Supaya didapat persamaan yang hanya mengandung variabel x_2, persamaan (2.14) dimanipulasi menjadi:

$$x_1 = \frac{m_2}{k_2}\ddot{x}_2 + x_2 \tag{2.17}$$

dan disubstitusi ke dalam persamaan (2.13), yang menghasilkan persamaan:

$$m_1 m_2 x_2^{(4)} + (m_2 k_1 + k_2(m_1 + m_2))\ddot{x}_2 + k_1 k_2 x_2 = 0 \tag{2.18}$$

Konstanta dalam persamaan (2.18) dan konstanta dalam persamaan (2.16) sama. Dalam persamaan diferensial, kecepatan awal dan posisi awal massa satu dan massa dua dimasukkan sebagai syarat awal.

Sistem pegas terkopel dua massa dianggap memiliki massa 1. Pada kasus tidak ada redaman dan gaya eksternal, persamaan karakteristik dari persamaan (2.16) dan (2.18), adalah:

$$m^4 + (k_1 + 2k_2)m^2 + k_1 k_2 = 0 \tag{2.19}$$

yang memiliki akar-akar:

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{2}k_1 - k_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}} \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) memiliki nilai imajiner untuk semua massa positif. Maka, bentuk solusi umum persamaan diferensial seperti untuk persamaan (2.16) dan (2.18) adalah

$$x(t) = c_1 \cos r_1 t + c_2 \sin r_1 t + c_3 \cos r_2 t + c_4 \sin r_2 t \tag{2.21}$$

Contoh 2.1. Persamaan gerak pegas dengan konstanta pegas $k_1 = 10$ dan $k_2 = 12$ dengan kondisi inisial $(x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)) = (1, 0, 2, 0)$.

Akar-akar persamaan karakteristik adalah $\pm\sqrt{30}i$ dan $\pm 2i$ Dengan memasukkan syarat batas $\left(x_1(0), \dot{x}_1(0), \ddot{x}_1(0), \dddot{x}_1(0)\right) = (1, 0, -4, 0)$, dua pasang persamaan simultan muncul sebagai berikut:

$$c_1 + c_3 = 1 \qquad\qquad 2c_2 + \sqrt{30}c_4 = 0 \tag{2.22}$$

$$-4c_1 - 30c_3 = -4 \qquad\qquad -8c_2 - 30\sqrt{30}c_4 = 0$$

yang solusinya adalah $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$. Jadi solusi unik untuk $x_1(t)$ adalah:

$$x_1(t) = \cos 2t \tag{2.23}$$

Dengan memasukkan syarat batas $\left(x_2(0), \dot{x}_2(0), \ddot{x}_2(0), \dddot{x}_2(0)\right) = (2, 0, -8, 0)$, dua pasang persamaan linier simultan muncul:

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 2 \qquad\qquad & 2c_2 + \sqrt{30}c_4 &= 0 \\ -4c_1 - 30c_3 &= -8 \qquad\qquad & -8c_2 - 30\sqrt{30}c_4 &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

yang solusinya adalah $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$. Jadi solusi unik untuk $x_2(t)$adalah:

$$x_1(t) = 2\cos 2t \tag{2.25}$$

II.4 Metode Runge-Kutta

Penyelesaian masalah PDB secara analitik sering dinilai tidak efektif. Karena tidak semua fungsi mudah untuk didapatkan turunannya, terutama pada fungsi persamaan dengan bentuk yang rumit [6]. Oleh karena itu, penyelesaian fungsi tersebut dapat menggunakan metode numerik untuk didapatkan turunannya.

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehinga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, bagi, kali). Perbedaan metode numerik dan metode analitik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier.

Salah satu metode numerik yang bisa digunakan untuk menggantikan penyelesaian masalah menggunakan metode analitik adalah metode Runge-Kutta. Metode ini berusaha untuk mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi. Metode Runge-Kutta memiliki 3 sifat utama yaitu [12]:

1. Metodenya satu langkah, untuk mendapatkan y_{m+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia dititik sebelumnya yaitu x_m, y_m.

2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan nilai p ini disebut sebagai derajat metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x,y)$ tapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Banyak variasi yang mucul sebagai model dari persamaan Runge-Kutta sesuai tingkat ordenya. Dalam hal ini tingkat orde menyatakan tingkat kesulitan dan keakuratannya. Namun semua itu dapat diberikan secara umum oleh bentuk [13]:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{2.26}$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut sebagai fungsi kenaikan, yang bisa diartikan sebagai representatif kemiringan selama interval. Fungsi kenaikan dapat dituliskan secara umum sebagai:

$$\phi = a_1k_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n \tag{2.27}$$

dimana semua nilai a adalah konstan dan nilai k adalah:

$$r_1 = f(x_i, y_i) \tag{2.27a}$$

$$r_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}r_1h) \tag{2.27b}$$

$$r_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}r_1h + q_{22}r_2h) \tag{2.27c}$$

$$\vdots$$

$$r_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}r_1h + q_{n-1,2}r_1h + \cdots + q_{n-1,n-1}r_{n-1}h) \tag{2.27d}$$

dimana p dan q adalah konstan serta $f(x_i, y_i)$ merupakan persamaan diferensial yang dievaluasi pada x_i dan y_i. Harus diperhatikan pula bahwa r adalah hubungan pengulangan. Pengulangan yang dimaksud seperti, r_1 muncul pada persamaan untuk r_2, yang juga muncul pada persamaan untuk r_3, dan seterusnya. Karena setiap r adalah evaluasi fungsional, pengulangan ini membuat metode Runge Kutta efisien untuk kalkulasi komputer. Berbagai jenis metode Runge Kutta dapat divariasikan dengan menggunakan jumlah istilah yang digunakan dalam fungsi kenaikan seperti yang ditentukan oleh n [13].

II.5 Kesalahan Numerik

Penyelesaian suatu persamaan matematika menggunakan metode numerik hanya memberikan nilai yang mendekati nilai eksaknya (*true value*), sehingga penyelesaian secara numerik akan memunculkan kesalahan numerik atau galat (*error*). Galat berhubungan dengan seberapa dekat solusi hampiran dengan solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya maka semakin mendekati solusi hampiran yang dihasilkan terhadap solusi eksaknya, hal ini mengindikasikan seberapa teliti solusi numerik yang telah didapatkan [14].

Kesalahan numerik muncul karena adanya perkiraan mewakili operasi dan kuantitas matematika yang tepat. Hubungan antara hasil yang tepat, atau benar, dan perkiraan dari suatu galat dapat dirumuskan sebagai [13]:

$$\varepsilon = z(t_i) - y_i \tag{2.28}$$

dimana:

ε = Kesalahan numerik atau galat terhadap nilai eksak

$z(t_i)$ = Nilai eksak

y_i = Nilai hampiran dari persamaan $z(t_i)$

Besarnya suatu galat yang dihasilkan dari solusi numerik dapat dinyatakan dalam bentuk relatif, yaitu dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksaknya [15]. Dengan penjelasan seperti itu maka, galat relatif dapat dituliskan sebagai:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{z(t_i)} \tag{2.29}$$

atau dapat juga dalam bentuk persentase yang dituliskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{z(t_i)} \times 100\% \tag{2.30}$$

dengan ϵ_R merupakan kesalahan relatif terhadap nilai eksak.

Pengaplikasian metode numerik, sering kali nilai eksak tidak diketahui, oleh karena itu galat dapat juga dinyatakan berdasarkan solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran ini dapat dituliskan dengan bentuk:

$$\varepsilon_{RH} = \frac{\epsilon}{y_i} \times 100\% \tag{2.31}$$

dengan ε_{RH} merupakan kesalahan relatif hampiran terhadap solusi hampirannya.