ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA MANGSA BERDASARKAN MODEL LOTKA VOLTERRA

OLEH :

ANDI HENDRA

H 111 98 018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSIATAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2003

ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA MANGSA BERDASARKAN MODEL LOTKA VOLTERRA

Skripsi

untuk melengkapi tugas akhir dan memenuhi

syarat-syarat dalam memperoleh gelar sarjana

OLEH :

ANDI HENDRA

H 111 98 018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSIATAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2003

Skripsi ini kupersembahkan buat :

Ayahanda dan Ibunda, serta seluruh Kakak-kakakku tercinta

Yang telah memberikan doa, cinta dan kasih sayangnya

ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA MANGSA BERDASARKAN MODEL LOTKA VOLTERRA

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama

Drs. Syamsuddin Toaha, M.Sc
Nip. 132 126 028

Pembimbing Pertama

Mawardi, S.Si, M.Si
Nip. 132 205 479

Pada tanggal April 2003

KATA PENGANTAR

Bismillahi Rahmanir Rahiim

Assalamu Alaikum Wr.Wb.

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T, atas limpahan rahmat, rezki dan hidayah-Nya sehingga penulis bisa merampungkan tulisan yang merupakan persyaratan akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universiatas Hasanuddin.

Tak lupa pula penulis ingin menghaturkan penghagaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada ayahanda, ibunda, kakak-kakakkku serta seluruh keluarga tercinta yang telah mendo'akan dan memberikan bantuan moril maupun materil yang sangat berharga hingga skripsi ini dapat penulis selesaikan dengan sebaik-baiknya.

Demikian pula penulis dengan tulus menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaaan kepada :

1. Bapak Drs. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing utama yang telah memberi motivasi, dan bimbingan kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.
2. Bapak Mawardi, S.Si, M.Si. selaku pembimbing petama yang telah meluangkan waktu dan tenaganya untuk memberikan petunjuk dan ide-ide kedalam skripsi ini.

3. Bapak Dekan Fakultas MIPA beserta seluruh staf Universitas Hasanuddin.
4. Bapak Drs. Nirwan Ilyas, M.Si. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
5. Bapak Dr. Jeffry Kusuma selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan nasehat dan dorongan kepada penulis.
6. Bapak dan ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
7. Teman-teman mahasiswa angkatan 98' : Asly, Darnah, Yuni, Ikas, Nanna, Nita, Ros, Ria, Tia, Nanni, Patrah dan seluruh teman-teman yang tak bisa saya 0sebut satu-satu, serta seluruh senior dan yunior yang telah membantu penulis dalam penyusunan tugas akhir ini.
8. Rekan-rekan warga pondok Sahara : Muna, Jo', Muhlis, Usu', Jain, Faidil, Eni, Uni, Sam, Ice',Udin, Agus, Jamal, Ahmad, bang doel, wandi dan seluruh teman-teman pondokan.

Semoga Allah S.W.T. senantiasa memberikan pahala yang berlipat ganda kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dalam penyusunan karya ilmiah ini. Dan penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari kesempurnaan, olehnya itu saran dan kritik dari pembaca senantiasa penulis harapkan dengan segala senang hati. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sehingga kelak dapat bernilai ibadah disisi Allah S.W.T.

Makassar, April 2003

Penulis

ABSTRAK

Model kompetisi dua mangsa merupakan suatu model sistem persamaan differensial autonomous non linier.

Dengan menggunakan matriks Jacobi, model tersebut dilinierkan disekitar titik kesetimbangannya.

Untuk memeriksa apakah titik kesetimbangan dari model tersebut stabil atau tidak, digunakan metode Nilai Eigen atau Uji Kestabilan Routh Hurwitz. Dari analisis tersebut diperoleh bahwa dengan diberikannya syarat-syarat tertentu titik kesetimbangan dari model dapat stabil.

ABSTRACT

Competition of two preys model is a system model of non linear autonomous differential equation.

By using Jacobian matrix, the model is linearized around the equilibrium points.

To investigate the equilibrium points of model whetehr they are stabil or not, used either Eigen Value method or Routh Hurwitz Stability Test. From the analysis, we found that with certain conditions the equilibrium points can be stable.

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
α	Alpha
β	Beta
δ	Delta
λ	Lambda
μ	Mu
Σ	Sigma
$\pm$	Plus minus
$\leq$	Lebih kecil atau sama dengan dari
$\geq$	Lebih besar atau sama dengan dari
$=$	Sama dengan
$\neq$	Tidak sama dengan
$\rightarrow$	Menuju

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. LATAR BELAKANG

Dalam ekologi dikenal tiga bentuk dasar dari interaksi antar mahluk hidup yaitu interaksi predasi, kompetisi dan mutualisme

Interaksi yang berbentuk predasi yaitu suatu interaksi dimana spesies yang satu memangsa spesies yang lain ataupun sebaliknya, sehingga satu spesies diuntungkan sementara spesies lain akan dirugikan (+,-). Sementara pada interaksi kompetisi, keberadaan spesies yang satu menjadi saingan bagi spesies lain (-,-). Sedangkan pada interaksi mutualisme, kedua spesies saling mendukung dalam mempertahankan dan melangsungkan hidupnya (+,+).

Namun, untuk jenis spesies yang cukup beragam maka interaksinya tidak terbatas hanya pada predasi, kompetisi atau mutualisme saja. Interaksinya dapat lebih kompleks dan beragam tergantung dari kepentingan masing-masing komponen yang terlibat didalamnya, seperti misalnya interaksi predasi dimana mangsa berkompetisi, predasi dimana pemangsa berkompetisi ataupun bentuk interaksi yang lain.

Dan khusus pada interaksi predasi dimana mangsa berkompetisi, tentunya pengaruh kompetisi dari mangsa akan memberikan dampak yang berbeda bagi pemangsa dibandingkan dengan tanpa adanya kompetisi mangsa pada bentuk predasi yang umum Lotka Volterra, interaksi predasi dimana mangsa berkompetisi dapat dinyatakan dalam suatu sistem persamaan diferensial yang tergantung waktu.

Untuk mengetahui sejauh mana interaksi dan laju pertumbuhan populasi dari komponen yang terlibat didalam interaksi tersebut, maka peranan matematika dalam hal ini model matematika akan sangat membantu. Oleh karena itu penulis tertarik untuk mempelajari dan menyajikan masalah tersebut sebagai tugas akhir dengan judul

ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA MANGSA BERDASARKAN MODEL LOTKA VOLTERRA

1.2 TUJUAN PENULISAN

1. Menentukan titik kesetimbangan dari model kompetisi dua mangsa.
2. Menentukan syarat keberadaan titik kesetimbangan dimana komponen dari model lebih besar nol ($\overline{x} > 0$ dan $\overline{y} > 0$).
3. Menganalisa jenis kestabilan titik kesetimbangan dari model kompetisi dua mangsa.

I.3. BATASAN MASALAH

Pandang bentuk umum dari model kompetisi mangsa dengan n pemangsa dan n mangsa :

$$\frac{dHi(t)}{dt} = Hi(t)(ai - \sum \alpha_{ij} H_j(t) - \sum \beta_{ij} P_j(t))$$
$$\frac{dPi(t)}{dt} = Pi(t)(-bi + \sum \delta_{ij} H_j(t))$$

dimana :

- H_i dan P_i masing-masing adalah populasi mangsa dan pemangsa.
- $a_i, b_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \delta_{ij}$ adalah bilangan bulat positif.

Masalah dibatasi pada model kompetisi dua mangsa untuk satu dan dua pemangsa.

Adapun model yang akan dibahas adalah :

1. Model kompetisi dua mangsa untuk satu pemangsa :

$$\dot{H}_1 = H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1)$$
$$\dot{H}_2 = H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1)$$
$$\dot{P}_1 = P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)$$

2. Model kompetisi dua mangsa untuk dua pemangsa :

$$\dot{H}_1 = H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2)$$
$$\dot{H}_2 = H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2)$$
$$\dot{P}_1 = P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)$$
$$\dot{P}_2 = P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2)$$

dimana :

- H_i, P_i masing-masing adalah populasi mangsa i dan pemangsa i

- $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{21}, \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ adalah bilangan bulat positif

asumsi yang digunakan yaitu :

1. Pertumbuhan mangsa tidak terbatas jika tidak ada pemangsaan dan tidak ada interaksi dengan populasi mangsa dirinya, disini $\frac{dH_i(t)}{dt} = H_i(t)(a_i - H_i(t))$.
2. Pertumbuhan pemangsa akan terus berkurang tanpa adanya mangsa, disini $\frac{dP_i(t)}{dt} = P_i(t)(-b_i))$.

BAB II

MATRIKS JACOBI, PERSAMAAN KARAKTERISTIK DAN NILAI EIGEN

II.1. MATRIKS JACOBI

Definisi 2.1 :

Misalkan $z = f(u,v)$ dengan u=g(x,y) dan $v = h(x,y)$ dimana u dan v differensiabel terhadap x dan y, maka matriks yang terbentuk adalah :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

yang disebut sebagai *matriks jacobi* dan

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

disebut sebagai *determinan jacobi.*

Contoh

Misal diberikan sistem :

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x$$

matriks jacobinya adalah $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x & 0 \end{pmatrix}$

dan determinan jacobinya adalah $|j| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x & 0 \end{vmatrix} = \frac{g}{l}\cos x$.

II.2 PERSAMAAN KARAKTERISTIK DAN NILAI EIGEN

Misal diberikan suatu model :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \qquad (2.1)$$

dapat ditulis dalam bentuk $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ atau $\frac{d\bar{v}}{dt} = A\bar{v}$ dimana

$\bar{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dan\, A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$

Selanjutnya solusi sistem di atas dicari dalam bentuk $\bar{v} = \bar{v}_0 e^{\lambda t}$ (2.2)

atau ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$.

Subtitusi (2.1) ke dalam persamaan (2.2) diperoleh

$A\bar{v}_0 e^{\lambda t} = \bar{v}_0 \lambda e^{\lambda t}$ atau $A\bar{v}_0 = \lambda \bar{v}_0$

ekuivalen dengan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (2.3)

Persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai suatu sistem homogen: $A\bar{v}_0 - \lambda\bar{v}_0 = 0$. Dan dengan menggunakan matriks identitas I, diperoleh $A\bar{v}_0 - \lambda I\bar{v}_0 = 0$ atau $(A - \lambda I)\bar{v}_0 = 0$

Dari aljabar linear, diketahui bahwa solusi non trivial dari suatu sistem linear diperoleh jika dan hanya jika *determinannya* sama dengan nol atau $|A - \lambda I| = 0$

Ekuivalen dengan $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Dengan menyelesaikan determinannnya diperoleh $(a-\lambda)(d-\lambda)$ - bc = 0, atau $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ yang merupakan *persamaan karakteristiknya* dan $\lambda = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$ adalah *nilai eigen* dari matriks A.

Contoh

Cari nilai eigen dari sistem :

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + y$$

Sistem diatas dapat ditulis dalam notasi matriks $\frac{d\bar{v}}{dt} = A\bar{v}$, dimana

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; dan \; A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solusinya diperoleh dalam bentuk $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{\lambda t}$ *atau* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$. Dengan substitusi

diperoleh $\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$. Untuk solusi non trivialnya haruslah

$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, sehingga diperoleh $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ atau $(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$.

sehingga diperoleh dua nilai *eigen* yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$.

Definisi 2.2 :

Misalkan $T : V \to V$ operator linear pada suatu ruang vektor V atas lapangan K, Suatu skalar $\lambda \in K$ disebut nilai eigen dari T jika terdapat suatu vektor tak nol $v \in V$ sehingga $T(v) = \lambda V$.

Teorema 2.3. :

Misalkan $T : V \to V$ adalah operator linear pada suatu ruang vektor atas lapangan K, $\lambda \in K$ adalah suatu nilau eigen dari T jika dan hanya jika operator linear $\lambda I - T$ *singulir.*

Bukti :

$(\to)$ diketahui λ adalah nilai eigen, akan ditunjukkan bahwa $(\lambda I - T)$ singulir.

λ adalah suatu nilai eigen, maka menurut definisi terdapat suatu vektor tak nol v sedemikian sehingga $T(v) = \lambda v$ atau $T(v) = \lambda I(v)$, ekuivalen dengan

$\lambda I(v) - T(v) = 0$

$(\lambda I - T)(v) = 0$

sehingga diperoleh bahwa $(\lambda I - T)$ singulir.

$(\leftarrow)$ diketahui bahwa $(\lambda I - T)$ singulir, akan ditunjukkan bahwa λ adalah suatu nilai eigen.

$(\lambda I - T)$ singulir berarti terdapat suatu vektor tak nol v sehingga $(\lambda I - T)(v) = 0$ atau $\lambda I(v) - T(v) = 0$, atau $T(v) = \lambda v$.

Maka menurut definisi (2.2) diperoleh bahwa λ adalah nilai eigen.

Definisi 2.4 :

Jika A adalah matriks *n x n*, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh :

Carilah nilai eigen dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi :

Karena $\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ maka polinom karakteristik dari A adalah $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

dan persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1$ *dan* $\lambda = 2$ yang merupakan *nilai eigen* dari A.

Teorema 2.5 :

Misalkan A adalah matriks berukuran $n x n$ dan sebuah skalar λ, maka λ adalah *nilai eigen* dari A jika dan hanya jika *det* $(\lambda I - A) = 0$.

Teorema 2.6 :

Jika A adalah matriks $n x n$, maka pernyataan – pernyatiaan berikut ekuivalen satu sama lain :

- λ adalah niali eigen dari A.
- Sistem persamaan ($\lambda I - A)x = 0$ mempunyai pemecahan yang taktrivial
- Ada vektor taknol x di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$
- λ adalah pemecahan riil dari persamaaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

BAB III

KESETIMBANGAN DAN KESTABILAN

III.1 KESETIMBANGAN

Definisi 3.1:

Misalkan diberikan suatu sistem dua dimensi :

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x,y). \tag{3.1}$$

Diasumsikan bahwa fungsi F dan G kontinu dan mempunyai turunan parsial dalam domain D dalam bidang xy.

Solusi ekuilibrium diperoleh dengan membuat $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ sama dengan nol, sehingga diperoleh :

$$F(x,y) = 0$$

$$G(x,y) = 0. \tag{3.2}$$

Solusi yang memenuhi persamaan (3.2) disebut sebagai titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan dari persamaan (3.1).

Definisi 3.2:

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (equilibrium point) dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$, dengan kata lain $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ titik setimbang dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = 0$ dimana $i = 1,2,\ldots n$.

Contoh :

Cari titik kesetimbangan dari model mutualisme berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(-a+by) \\ \dot{y} &= y(-c+dx) \end{aligned}$$

Solusi:

kesetimbangan diperoleh dengan membuat :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0 \quad dan \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 0$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} x(-a+by) &= 0 \\ y(-c+dx) &= 0 \end{aligned}$$

dan titik kesetimbangannya :

$$k_1 = (0,0) \qquad k_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$$

III.2 KESTABILAN

III.2.1 Kestabilan Sistem Linear

Misal diberikan suatu sistem yang terdiri dari dari dua persamaan diferensial ordo satu :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned} \tag{3.3}$$

dimana :

a, b, c, d adalah koefisien konstan.

Persamaan (3.3) dapat pula ditulis dalam notasi matriks sebagai :

$$\dot{x} = Ax \tag{3.4}$$

dimana : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ dan $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Dengan metode eleminasi, maka solusi dari persamaan (3.4) diperoleh dengan bentuk :

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} c_2 \tag{3.5}$$

dimana λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari matriks A.

3.2.2 Kestabilan Sistem Non Linear

Tinjau suatu sistem yang berbentuk :

$$\begin{aligned}\overline{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \overline{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

dimana f_1 dan f_2 adalah suatu fungsi yang diferensiabel. Jika $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ adalah titik kesetimbangan dari persamaan (3.6), dan misalkan $u_i = x_i - \bar{x}_i$ dengan menggunakan teorema Taylor untuk fungsi dua peubah

$$f_i(x_1,x_2) = f_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_2 + g_i(u_1,u_2)\text{, untuk } i = 1,2$$

Atau dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$f_1(x_1,x_2) = f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_2 + g_1(u_1,u_2)$$

$$f_2(x_1,x_2) = f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_2 + g_2(u_1,u_2)$$

karena $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ merupakan keadaan kesetimbangan, maka $f_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = 0$ untuk $i = 1,2$.

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_2 + g_1(u_1,u_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_2 + g_2(u_1,u_2) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

karena $u_1 = x_1 - \bar{x}_1$ maka $\frac{d}{dt}(x_1 - \bar{x}_1) = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1$

$u_2 = x_2 - \bar{x}_2$ maka $\frac{d}{dt}(x_2 - \bar{x}_2) = \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2$

sehingga persamaan (3.7) dapat ditulis :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1-\bar{x}_1 \\ x_2-\bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u_1,u_2) \\ g_2(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

dalam notasi vektor dapat ditulis :

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{3.8}$$

dimana $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *dan* $g(u) = \begin{pmatrix} g_1(u_1,u_2) \\ g_2(u_1,u_2) \end{pmatrix}$

dan

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Matriks A merupakan matriks jacobi dari f pada $\bar{x}$.

Disini, $\dfrac{g_i(u_1,u_2)}{\left((x_1-\bar{x}_1)^2+(x_2-\bar{x}_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \to 0$, bila $x_i \to \bar{x}_i$

Untuk x(t) yang sangat dekat dengan $\bar{x}$ maka g(u) menjadi kecil dan dapat diabaikan. Sehingga persamaan (3.8) dapat didekati dengan persamaan sistem linear :

$$\dot{u} = Au.$$

III.2.3 Metode Nilai Eigen

Di berikan sistem linear

$$\dot{x} = Ax \tag{3.9}$$

Dimana A adalah matriks koefisien berukuran $2x2$ dan $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Di asumsikan bahwa matriks koefisien A adalah *non singulir* atau $\det A \neq 0$ Solusi sistem dicari dalam bentuk

$$\bar{x} = \bar{x}_0 e^{\lambda t} \tag{3.10}$$

sehingga $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}_0 \lambda e^{\lambda t}$. Subtitusi (3.10) ke dalam persamaaan (3.9) diperoleh $A\bar{x}_0 e^{\lambda t} = \bar{x}_0 \lambda e^{\lambda t}$ atau $A\bar{x}_0 = \lambda \bar{x}_0$. Solusi *non trivialnya* $A\bar{x}_0 - \lambda \bar{x}_0 = 0$ dan dapat ditulis sebagai $(A - \lambda I)\bar{x}_0 = 0$. Solusi non trivial diperoleh jika dan hanya jika $|A - \lambda I| = 0$, $\lambda = 0$ bukan nilai eigen dari matriks A sesuai dengan asumsi sebelumnya bahwa $|A| \neq 0$.

Kasus I : Nilai eigennya berbeda, real dan bertanda sama.

Solusi umum persamaan (3.9) adalah

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} \tag{3.11}$$

Dimana λ_1 dan λ_2 keduanya positif atau keduanya negatif.

Pengandaian (1) : $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (keduanya negatif), maka titik kesetimbangannya *stabil asimtotik.*

Pengandaian (2) : $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (keduanya positif), maka titik kesetimbangannya *tidak stabil.*

Kasus 2 : Nilai eigennya berlawanan tanda.

Solusi umum persamaan (3.9) adalah :

$$x = c_1\xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{\lambda_2 t}$$

Dimana $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka titik kesetimbangannya adalah *tidak stabil*

Kasus 3 : Nilai eigennya sama.

Solusi umum persamaan (3.9) adalah

$$x = e^{\lambda t}(c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}).$$

Pengandaian (1) : $\lambda > 0$, maka titik kesetimbangannya *tidak stabil.*

Pengandaian (2) : $\lambda < 0$, maka titik kesetimbangannya *stabil asimtotik.*

Kasus 4 : Nilai eigennya kompleks. misal nilai eigennya adalah $\lambda \pm i\mu$, Dimana λ *dan* μ adalah bilangan real dan $\mu > 0$.

Pengandaian (1) : $\lambda > 0$, maka titik kesetimbangannya *tidak stabil.*

Pengandaian (2) : $\lambda < 0$, maka titik kesetimbangannya *stabil asimtotik.*

Kasus 5 : Nilai eigennya imajiner murni. Misal nilai eigennya $\pm i\mu$, maka titik kesetimbangannya *stabil center.*

Kestabilan Untuk Sistem Dinamik

Anggaplah suatu sistem fungsi f untuk sistem dinamik

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.12}$$

kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu pada suatu himpunan buka. Misalkan pula titik x^* adalah titik kesetimbangan untuk (3.12). Titik kesetimbangan dari model (3.12) diperoleh dengan menyamakan nol dan menyelesaikannya terhadap x. Selanjutnya, secara umum pelinearan untuk (3.12) disekitar titik kesetimbangan x^* dinyatakan sebagai sistem dinamik linear

$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (x^*, t) x_j$, dengan $\dot{x}_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t}$, yang dapat ditulis dalam bentuk

matriks

$$\dot{x} = Jx. \tag{3.13}$$

Teorema 3.4 :(Jeffries 1989 dan Willems (1970)

Misalkan Sistem (3.12) analitik pada x dan t, dan misalkan pula

i) Titik **0** adalah atraktor trajektori (stabil asimtotik) untuk sistem (3.13) yang bersesuaian dengan titik x^* untuk sistem (3.12), dan

ii) Terdapat bilangan real N sedemikian sehingga $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*, t)\right| \le N$ untuk setiap i, j, dan t, maka titik x^* adalah atraktor trajektori untuk sistem pada persamaan (3.12) .

Persamaan karakteristik untuk matriks J adalah $f(r)=|rI-J|$, yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(r)=\lambda^{n}+P_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+P_{2}\lambda^{2}+P_{1}\lambda+P_{0} \tag{3.14}$$

dengan $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ adalah bilangan real. Nilai eigennya adalah akar-akar dari persamaan (3.14).

Dengan asumsi bahwa $|J|\neq 0$, maka titik kesetimbangan **0** adalah satu-satunya titik kesetimbangan untuk sistem (3.13). titik kesetimbangan **0** stabil jika dan hanya jika bagian real untuk setiap nilai eigennya negatif, Wiley(1979).

Teorema 3.5 :

Misalkan nilai eigen dari suatu sistem linear memenuhi suatu sistem non linear, maka jenis kestabilan dari titik kesetimbangan suatu sistem linear dan sistem non linear, sebagaimana ditunjukkan dalam tabel :

Nilai Eigen (λ_1, λ_2)	Sistem linear	Sistem non linear
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil	Tidak stabil
$\lambda_2 = \lambda_1 > 0$	Tidak stabil	Tidak stabil
$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Stabil asimtotik	Stabil asimtotik

$\lambda_2, \lambda_1 = \alpha \pm i\mu$ $\alpha > 0$ $\alpha < 0$	Tidak stabil Stabil asimtotik	Tidak stabil Stabil asimtotik
$\lambda_2 = i\mu, \lambda_1 = i\mu$	stabil	Tidak dapat ditentukan

III.2.4 Metode Routh Hurwitz

Selain dengan cara nilai eigen, penentuan kestabilan suatu sistem dapat pula dilakukan dengan menggunakan suatu metode yang dikenal sebagai metode Routh Hurwitz.

Misal diberikan suatu sistem : $\dot{x} = Ax$ dimana A adalah matriks konstan berukuran nxn dan x adalah suatu vektor kolom $nx1$. Misalkan $f(x)$ adalah fungsi polinomial berbentuk

$$f(x) = x^n + P_{n-1}x^{n-1} + ... + P_1 x + P_0$$

dengan $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ bernilai real yang mempunyai akar-akar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dimana akar-akar tersebut bernilai real atau kompleks yang memenuhi :

$$f(\lambda_i) = 0 \ atau \ f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n).$$

Nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar dari persamaan karakteristik polinomialnya. Sebuah solusi fundamental dari suatu sistem linear adalah bahwa (0,0) merupakan suatu titik kesetimbangan dari $\dot{x} = Ax$ jika dan hanya jika setiap nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif.

Metode Routh Hurwitz tidak melibatkan nilai eigen dari matriks A, tetapi kestabilan ditentukan oleh determinan dari matriks H_n, dimana matriks ini dikenal sebagai matriks Hurwitz yang mempunyai entri-entri $1, P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1, P_0$ yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$H_1 = \begin{pmatrix} P_{n-1} \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} \\ 1 & P_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} \\ 1 & P_{n-2} & P_{n-4} \\ 0 & P_{n-1} & P_{n-3} \end{pmatrix} \qquad H_4 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} & P_{n-7} \\ 1 & P_{n-2} & P_{n-4} & P_{n-6} \\ 0 & P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} \\ 0 & 1 & P_{n-2} & P_{n-4} \end{pmatrix}$$

Disini P_j didefinisikan bernilai 0 untuk j negatif.

Uji kestabilan Routh Hurwitz :

misalkan suatu sistem linear dengan titik kesetimbangan (0,0), maka setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan positif jika dan hanya jika setiap nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif, dan (0,0) adalah titik kesetimbangan yang *stabil asimtotik.*

Untuk nilai n yang kecil, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa matriks Hurwitz mempunyai determinan positif jika dan hanya jika:

$n=1: \quad P_0 > 0$

$n=2: \quad P_0, P_1 > 0$

$n=3: \quad P_0, P_1, P_2 > 0;\ P_2P_1 - P_0 > 0$

$n=4: \quad P_0, P_1, P_2, P_3 > 0;\ P_3P_2P_1 - P_1^2 - P_0P_3^2 > 0$

BAB IV

ANALISIS KESTABILAN MODEL KOMPETISI DUA MANGSA

IV.1 MODEL KOMPETISI DUA MANGSA DENGAN SATU PEMANGSA

Tinjau kembali model :

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1) \\
\dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1) \\
\dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dimana

$\dot{H}_1$ = laju pertumbuhan mangsa pertama terhadap waktu

$\dot{H}_2$ = laju pertumbuhan mangsa kedua terhadap waktu

$\dot{P}_1$ = laju pertumbuhan pemangsa terhadap waktu

a_1 = laju pertumbuhan intrinsik untuk populasi mangsa pertama

a_2 = laju pertumbuhan intrinsik untuk populasi mangsa kedua

b_1 = laju kematian untuk populasi pemangsa

α_{11} = koefisien interaksi sesama mangsa pertama

α_{12} = koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan mangsa kedua

α_{21} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan mangsa pertama

α_{22} = koefisien interaksi antar sesama mangsa kedua

β_{11} = koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan pemangsa

β_{21} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan pemangsa

δ_{11} = koefisien keuntungan yang diperoleh pemangsa dari interaksinya dengan mangsa pertama

δ_{12} = koefisien keuntungan yang diperoleh pemangsa dari interaksinya dengan mangsa kedua

IV.1.1 Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem persamaaan (4.1) diperoleh dengan membuat :

$\dot{H}_1 = 0,\ \dot{H}_2 = 0,\ dan\ \dot{P}_1 = 0$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1) &= 0 \\ H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1) &= 0 \\ P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangannya

$$k_i = (\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{P}_1),\ untuk\ i = 1,2,....7 \tag{4.3}$$

α_{21} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan mangsa pertama

α_{22} = koefisien interaksi antar sesama mangsa kedua

β_{11} = koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan pemangsa

β_{21} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan pemangsa

δ_{11} = koefisien keuntungan yang diperoleh pemangsa dari interaksinya dengan mangsa pertama

δ_{12} = koefisien keuntungan yang diperoleh pemangsa dari interaksinya dengan mangsa kedua

IV.1.1 Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem persamaaan (4.1) diperoleh dengan membuat :

$\dot{H}_1 = 0$, $\dot{H}_2 = 0$, *dan* $\dot{P}_1 = 0$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} &H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1) = 0 \\ &H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1) = 0 \\ &P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangannya

$$k_i = (\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{P}_1),\ untuk\ i = 1,2,\ldots.7 \tag{4.3}$$

titik kesetimbangan tersebut adalah :

$$\begin{aligned}
k_1 &= (0,0,0) \\
k_2 &= (0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},0) \\
k_3 &= (0,\frac{b_1}{\delta_{12}},\frac{\delta_{12}a_2-\alpha_{22}b_1}{\delta_{12}\beta_{21}}) \\
k_4 &= (\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,0) \\
k_5 &= (\frac{b_1}{\delta_{11}},0,\frac{\delta_{11}a_1-\alpha_{11}b_1}{\delta_{11}\beta_{11}}) \\
k_6 &= (\frac{a_1\alpha_{22}-\alpha_{12}a_2}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}},\frac{\alpha_{11}a_2-\alpha_{21}a_1}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}},0) \\
K_7 &= \left(\frac{\beta_{11}(A)+\beta_{21}(B)}{\beta_{11}(E)+\beta_{21}(F)},\frac{\beta_{11}(C)+\beta_{21}(D)}{\beta_{11}(E)+\beta_{21}(F)},\right. \\
&\qquad \left.\frac{\alpha_{12}(-C)+\alpha_{11}(-A)+a_1(E)}{\beta_{11}(E)+\beta_{21}(F)}\right)
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Dimana :

$$\begin{aligned}
A &= b_1\alpha_{22}-\delta_{12}a_2 & D &= \alpha_{11}b_1-\delta_{11}a_1 \\
B &= \delta_{12}a_1-b_1\alpha_{12} & E &= \delta_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\delta_{12} \\
C &= \delta_{11}a_2-\alpha_{21}b_1 & F &= \alpha_{11}\delta_{12}-\delta_{11}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

4.1.2. Analisis Titik kesetimbangannya

Tinjau kembali model persamaan (4.1) yaitu :

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1) \\
\dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1) \\
\dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)
\end{aligned}$$

Dengan titik kesetimbangan yang telah diperoleh pada persamaan (4.1.4). untuk mengetahui sejauh mana proses interaksi yang terjadi pada model tersebut , akan di analisis kestabilan disekitar titik kesetimbangannya.Disini, tidak semua titik kesetimbangan dianalisis kestabilannya. Hanya yang memenuhi syarat dimana mangsa dan pemangsa lebih besar nol atau

$$\overline{H}_1 > 0, \overline{H}_2 > 0, \text{ dan } \overline{P}_1 > 0 \tag{4.5}$$

Dengan demikian dilihat dari titik kesetimbangan yang diperoleh pada persamaan (4.4) maka dapat disimpulkan bahwa hanya titik kesetimbangan ketujuh yang dapat memenuhi syarat sebagaimana pada persamaan (4.5). Akibatnya titik kesetimbangan ketujuh adalah satu-satunya titik kesetimbanagn dari model pada persamaan (4.4) yang akan dianalisis kestabilannya.

Adapun kemungkinan agar titik kesetimbangan ketujuh dapat memenuhi persamaan (4.5), yaitu :

Memenuhi ketiga kondisi berikut :

a) $\dfrac{\beta_{11}(b_1\alpha_{22}-\delta_{12}a_2)+\beta_{21}(\delta_{12}a_1-b_1\alpha_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\delta_{12})+\beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12}-\delta_{11}\alpha_{12})}>0$

b) $\dfrac{\alpha_{12}(\alpha_{21}b_1-\delta_{11}a_2)+\alpha_{11}(\delta_{12}a_2-b_1\alpha_{22})+a_1(\delta_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\delta_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\delta_{12})+\beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12}-\delta_{11}\alpha_{12})}>0$

c) $\dfrac{\beta_{11}(\delta_{11}a_2-\alpha_{21}b_1)+\beta_{21}(\alpha_{11}b_1-\delta_{11}a)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\delta_{12})+\beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12}-\delta_{11}\alpha_{12})}>0$

Karena model pada persamaan (4.1) adalah suatu model tak linear, maka untuk melinearkan digunakan matriks jakobi.Stabil atau tidaknya titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan dari nilai eigennya (metode Nilai Eigen) atau persamaan karakteristik polinomialnya (metode Routh Hurwitz).

Matriks jacobi untuk model pada persamaan (4.1) adalah :

$$J_{(H,H,P)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\dot{H}_1}{\partial H_1} & \dfrac{\partial\dot{H}_1}{\partial H_2} & \dfrac{\partial\dot{H}_1}{\partial P_1}\\ \dfrac{\partial\dot{H}_2}{\partial H_1} & \dfrac{\partial\dot{H}_2}{\partial H_2} & \dfrac{\partial\dot{H}_2}{\partial P_1}\\ \dfrac{\partial\dot{P}_1}{\partial H_1} & \dfrac{\partial\dot{P}_1}{\partial H_2} & \dfrac{\partial\dot{P}_1}{\partial P_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & -\alpha_{12}H_1 & -\beta_{11}H_1\\ -\alpha_{21}H_2 & x_2 & -\beta_{21}H_2\\ \delta_{11}P_1 & \delta_{12}P_1 & x_3\end{pmatrix}$$

dimana : $x_1=a_1-2\alpha_{11}H_1-\alpha_{12}H_2-\beta_{11}P_1$

$x_2=a_2-\alpha_{21}H_1-2\alpha_{22}H_2-\beta_{21}P_1$

$x_3=-b_1+\delta_{11}H_1+\delta_{12}H_2$

Untuk titik kesetimbangan ketujuh (K_7), matriks jacobinya adalah :

$$J_{(H_1,H_2,P_1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial H_1} & \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial H_2} & \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial \dot{H}_2}{\partial H_1} & \frac{\partial \dot{H}_2}{\partial H_2} & \frac{\partial \dot{H}_2}{\partial P_1} \\ \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial H_1} & \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial H_2} & \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial P_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dimana :

$$a_{11} = -\alpha_{11}\left(\frac{\beta_{11}(b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2) + \beta_{21}(\delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{12} = -\alpha_{12}\left(\frac{\beta_{11}(b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2) + \beta_{21}(\delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{13} = -\beta_{11}\left(\frac{\beta_{11}(b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2) + \beta_{21}(\delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{21} = -\alpha_{21}\left(\frac{\beta_{11}(\delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1) + \beta_{21}(\alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{22} = -\alpha_{22}\left(\frac{\beta_{11}(\delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1) + \beta_{21}(\alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{23} = -\beta_{21}\left(\frac{\beta_{11}(\delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1) + \beta_{21}(\alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{31} = \delta_{11}\left(\frac{\alpha_{12}(-C) + \alpha_{11}(-A) + a_1(E)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{32} = \delta_{12}\left(\frac{\alpha_{12}(-C) + \alpha_{11}(-A) + a_1(E)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})}\right)$$

$$a_{33} = 0$$

dimana :

$$A = b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2$$

$$E = \delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}$$

$$C = \delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 \\ &= \lambda^3 - (a_{22} + a_{11})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{12})\lambda \\ &\quad + a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{21}a_{32}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Selanjutnya akan dianalisis koefisien dari polinom-polinomnya untuk menentukan jenis kestabilannya. Analisis dari koefisien polinomialnya dilakukan dengan menggunakan ketiga syarat sebagaimana yang telah diperoleh sebelumnya , sehingga diperoleh bahwa :

$$\begin{matrix} a_{11} < 0 & a_{21} < 0 & a_{31} > 0 \\ a_{12} < 0 & a_{22} < 0 & a_{32} > 0 \\ a_{13} < 0 & a_{23} < 0 & a_{33} > 0 \end{matrix} \qquad (4.7)$$

akibatnya diperoleh bahwa :

- $a_{22} + a_{11} < 0$, sehingga $P_2 = -(a_{22} + a_{11}) > 0$
- $P_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31}$

karena $a_{13}a_{31} < 0,\ a_{23}a_{32} < 0$ dan

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})(\beta_{11}(A) + \beta_{21}(B))(\beta_{11}(C) + \beta_{21}(D))}{(\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F))^2}$$

sehingga diperoleh bahwa jika $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) > 0$ maka $P_1 > 0$.

- $P_0 = a_{13}(a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$

$$a_{13}(a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32}) = -\frac{\beta_{11}(\alpha_{21}\delta_{12} - \alpha_{22}\delta_{11})}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$
$$\frac{(\beta_{11}(A) + \beta_{21}(B))(\beta_{11}(C) + \beta_{21}(D))}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)} \text{ dan}$$
$$\frac{(\alpha_{12}(-C) + \alpha_{11}(-A) + a_1(E))}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$

$$a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = \frac{-\beta_{21}(\delta_{11}\alpha_{12} - \alpha_{11}\delta_{12})}{(\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$
$$\frac{(\beta_{11}(C) + \beta_{21}(D))((\beta_{11}(A) + \beta_{21}(B))}{(\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$
$$\frac{(\alpha_{12}(-C) + \alpha_{11}(-A) + a_1(E))}{(\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$

sehingga diperoleh bahwa jika

$$-\beta_{11}(\alpha_{21}\delta_{12} - \alpha_{22}\delta_{11}) - \beta_{21}(\alpha_{12}\delta_{11} - \alpha_{11}\delta_{12}) > 0 \text{ maka, } P_0 > 0$$

dimana :

$$A = b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2 \qquad D = \alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a$$
$$B = \delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12} \qquad E = \delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}$$
$$C = \delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1$$

Sehingga *uji kestabilan Routh Hurwitz* diperoleh bahwa (K_7) adalah titik kesetimbangan yang *stabil* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut

- $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} > 0$,
- $-\beta_{11}(\alpha_{21}\delta_{12} - \alpha_{22}\delta_{11}) - \beta_{21}(\alpha_{12}\delta_{11} - \alpha_{11}\delta_{12}) > 0$.

Contoh :

Tinjau kembali model pada persamaan (4.4)

$$\dot{H}_1 = H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1)$$
$$\dot{H}_2 = H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1)$$
$$\dot{P}_1 = P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)$$

dengan :

$$a_1 = 10 \quad \alpha_{11} = 20 \quad \alpha_{22} = 3 \quad \delta_{11} = 9$$
$$a_2 = 5 \quad \alpha_{12} = 5 \quad \beta_{11} = 4 \quad \delta_{12} = 3$$
$$b_1 = 4 \quad \alpha_{21} = 4 \quad \beta_{21} = 3$$

diperoleh titik kesetimbangan:

$$K_1 = (0,0,0) \qquad K_2 = (0,0,\frac{5}{3})$$

$$K_3 = (0,\frac{4}{3},\frac{1}{3}) \qquad K_4 = (\frac{1}{2},0,0)$$

$$K_5 = (\frac{4}{9},0,\frac{5}{18}) \qquad K_6 = (\frac{1}{8},\frac{3}{2},0)$$

$$K_7 = (\frac{6}{35},\frac{86}{105},\frac{13}{21})$$

dari titik ksetimbangan yang diperoleh, hanya satu titik kesetimbangan yang memenuhi syarat pada persamaan (4.5) yaitu titik kesetimbangan ketujuh $\left(K_7 = (\frac{6}{35},\frac{86}{105},\frac{13}{21})\right)$.

Matriks Jacobi untuk model tersebut adalah :

$$J = \begin{pmatrix} 10-40H_1-5H_2-4P_1 & -5H_1 & -4H_1 \\ -4H_2 & 5-4H_1-4H_2-3P_1 & -3H_2 \\ 9P_1 & 3P_1 & -4+9H_1+3H_2 \end{pmatrix}$$

Maka untuk $K_7 = (\frac{6}{35}, \frac{86}{105}, \frac{13}{21})$, matriks jacobinya adalah :

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} -24/7 & -6/7 & -24/35 \\ -344/105 & -86/35 & -86/35 \\ 39/7 & 13/7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{J}) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{24}{7} & \frac{6}{7} & \frac{24}{35} \\ \frac{344}{105} & \lambda + \frac{86}{35} & \frac{86}{35} \\ \frac{-39}{7} & \frac{-13}{7} & \lambda \end{vmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai eigennya yaitu :

$$\lambda_1 = -1{,}002435$$
$$\lambda_2 = -2{,}441682 + 1{,}772944\,I$$
$$\lambda_3 = -2{,}441682 - 1{,}772944\,I$$

menurut teorema *Nilai Eigen* , diperoleh bahwa titik kestimbangan $K_7 = (\frac{6}{35}, \frac{86}{105}, \frac{13}{21})$ adalah titik kesetimbangan yang *stabil.*

IV.2 MODEL KOMPETISI DUA MANGSA DENGAN DUA PEMANGSA

Tinjau kembali model :

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2) \\
\dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2) \\
\dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) \\
\dot{P}_2 &= P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dimana :

$\dot{H}_1 =$ laju pertumbuhan populasi mangsa pertama terhadap waktu

$\dot{H}_2 =$ laju pertumbuhan populasi mangsa kedua terhadap waktu

$\dot{P}_1 =$ laju pertumbuhan populasi pemangsa pertama terhadap waktu

$\dot{P}_2 =$ laju pertumbuhan populasi pemangsa kedua terhadap waktu

$a_1 =$ laju pertumbuhan intrinsik untuk populasi mangsa pertama

$a_2 =$ aju pertumbuhan intrinsik untuk populasi mangsa kedua

$b_1 =$ laju kematian untuk populasi pemangsa pertama

$b_2 =$ laju kematian untuk populasi pemangsa kedua

$\alpha_{11} =$ koefisien interaksi antara sesama mangsa pertama

$\alpha_{12} =$ koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan mangsa kedua

$\alpha_{21} =$ koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan mangsa pertama

α_{22} = koefisien interaksi antara sesama mangsa kedua

β_{11} = koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan pemangsa pertama

β_{12} = koefisien kerugian mangsa pertama dari interaksinya dengan pemangsa kedua

β_{21} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan pemangsa pertama

β_{22} = koefisien kerugian mangsa kedua dari interaksinya dengan pemangsa kedua

δ_{11} = koefisien keuntungan pemangsa pertama dari interaksinya dengan mangsa pertama

δ_{12} = koefisien keuntungan pemangsa pertama dari interaksinya dengan mangsa kedua

δ_{21} = koefisien keuntungan pemangsa kedua dari interaksinya dengan mangsa pertama

δ_{22} = koefisien keuntungan pemangsa kedua dari interaksinya dengan mangsa kedua

4.2.1. Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem pers (4.8) diperoleh dengan membuat $\dot{H}_1 = 0$, $\dot{H}_2 = 0$, $\dot{P}_1 = 0$ dan $\dot{P}_2 = 0$, Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2) = 0 \\
&H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2) = 0 \\
&P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) = 0 \\
&P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2) = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dengan demikian diperoleh titik kesetimbanagn

$$E_i = (\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{P}_1, \overline{P}_2) \quad ; i = 1,2,\ldots,11 \tag{4.10}$$

titik kesetimbangan tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
&E_1 = (0,0,0,0) \\
&E_2 = (\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,0,0) \\
&E_3 = (\frac{b_1}{\delta_{21}},0,0\frac{\delta_{21}a_1 - b_2\alpha_{11}}{\delta_{21}\beta_{12}}) \\
&E_4 = (\frac{b_1}{\delta_{11}},0,\frac{\delta_{11}a_1 - b_1\alpha_{11}}{\delta_{11}\beta_{11}},0) \\
&E_5 = (0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},0,0) \\
&E_6 = (\frac{-a_2\alpha_{12} + \alpha_{22}a_1}{-\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{22}},\frac{-a_1\alpha_{21} + \alpha_{11}a_2}{-\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{22}},0,0) \\
&E_7 = (0,\frac{b_1}{\delta_{12}},\frac{\delta_{12} - \alpha_{22}b_1}{\delta_{12}\beta_{21}},0)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$E_8 = \left(\frac{\beta_{11}(A_1)+\beta_{21}(B_1)}{\beta_{11}(H_1)+\beta_{21}(I_1)}, \frac{\beta_{11}(C_1)+\beta_{21}(D_1)}{\beta_{11}(H_1)+\beta_{21}(I_1)}, \frac{a_1(E_1)+\alpha_{11}(F_1)+\alpha_{12}(G_1)}{\beta_{11}(H_1)+\beta_{21}(I_1)}, 0\right)$$

$$E_9 = \left(0, \frac{b_2}{\delta_{22}}, 0, \frac{\delta_{22}a_2 - b_2\alpha_{22}}{\delta_{22}\beta_{22}}\right)$$

$$E_{10} = \left(\frac{\beta_{22}(J_1)+\beta_{12}(K_1)}{\beta_{22}(O_1)+\beta_{12}(P_1)}; \frac{\beta_{22}(L_1)+\beta_{12}(M_1)}{\beta_{22}(O_1)+\beta_{12}(P_1)}, 0, \frac{a_1(N_1)+\alpha_{11}(-K_1)+\alpha_{12}(-M_1)}{\beta_{22}(O_1)+\beta_{12}(P_1)}\right)$$

$$E_{11} = \left(\frac{Q_1}{S_1}, \frac{R_1}{-S_1}, \frac{\beta_{12}a_2(S_1)+\beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1)+\beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \frac{a_1\beta_{22}(-S_1)+\alpha_{11}\beta_{22}(Q_1)+\alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}, \frac{a_1\beta_{21}(S_1)+\alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1)+\alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \frac{\beta_{11}a_2(-S_1)+\beta_{11}\alpha_{21}(Q_1)+\beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}\right)$$

dimana :

$$\begin{aligned}
A_1 &= b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2 & K_1 &= b_2\alpha_{22} - \delta_{22}a_2 \\
B_1 &= \delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12} & L_1 &= \alpha_{11}b_2 - \delta_{21}a_1 \\
C_1 &= \delta_{11}a_2 - b_1\alpha_{21} & M_1 &= \delta_{21}a_2 - \alpha_{21}b_2 \\
D_1 &= \alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1 & N_1 &= \delta_{21}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{22} \\
E_1 &= \delta_{11}\alpha_{22} - \delta_{12}\alpha_{21} & O_1 &= \alpha_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\alpha_{12} \\
F_1 &= a_2\delta_{12} - \alpha_{22}b_1 & P_1 &= \delta_{21}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{22} \\
G_1 &= \alpha_{21}b_1 - a_2\delta_{11} & Q_1 &= \delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12} \\
H_1 &= \delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12} & R_1 &= \delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2 \\
I_1 &= \delta_{12}\alpha_{11} - \alpha_{12}\delta_{11} & S_1 &= \delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12} \\
J_1 &= \delta_{22}a_1 - b_2\alpha_{22} & T_1 &= -\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11}
\end{aligned}$$

4.2.2 Analisis titik kesetimbangan

Perhatikan kembali model pada persamaan (4.8) :

$$
\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2) \\
\dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2) \\
\dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) \\
\dot{P}_2 &= P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2)
\end{aligned}
$$

untuk mengetahui sejauh mana proses interaksi yang terjadi pada model tersebut, akan diananlisis kestabilan disekitar titik kesetimbangannnya . disini, tidak semua titik kesetimbangan akan dianalisis. Hanya yang memenuhi syarat dimana komponen mangsa dan pemangsa dari model tersebut lebih besar nol, dengan kata lain $\overline{H}_1 > 0, \overline{H}_2 > 0, \overline{P}_1 > 0, \overline{P}_2 > 0$ (4.12)

Dari titik kesetimbangan yang telah diperoleh pada persamaan (4.11), terlihat bahwa hanya titik kesetimbangan sebelas (E_{11}) yang dapat memenuhi syarat persamaan (4.12). Akibatnya titik kesetimbangan kesebelas adalah satu-satunya titik kesetimbangan dari model pada persamaan (4.8) yang akan dianalisis kestabilannya .

Adapun syarat agar (E_{11}) dapat memenuhi persamaan (4.12) adalah :

$$
\begin{aligned}
&a)\ \frac{\delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12}}{\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12}} > 0 \\
&b)\ \frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11}} > 0 \\
&c)\ \frac{\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} + \\
&\quad \frac{a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} > 0 \\
&e)\ \frac{a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} + \\
&\quad \frac{\beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} > 0
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

karena model tersebut adalah suatu model non linear maka untuk menganalisis kestabilannya digunakan matriks jacobi. Stabil atau tidaknya titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan dari nilai eigen (*metode Nilai Eigen*) atau persamaan karakteristik (*Uji kestabilan Routh Hurwitz*) dari matriks jacobinya.

Bentuk umum matriks jacobi dari model pada persamaan (4.8) adalah :

$$J_{(H_1,H_2,P_1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{H}_1}{\partial H_1} & \dfrac{\partial \dot{H}_1}{\partial H_2} & \dfrac{\partial \dot{H}_1}{\partial P_1} \\ \dfrac{\partial \dot{H}_2}{\partial H_1} & \dfrac{\partial \dot{H}_2}{\partial H_2} & \dfrac{\partial H_2}{\partial P_1} \\ \dfrac{\partial \dot{P}_1}{\partial H_1} & \dfrac{\partial \dot{P}_1}{\partial H_2} & \dfrac{\partial \dot{P}_1}{\partial P_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha_{12}H_1 & -\beta_{11}H_1 & -\beta_{12}H_1 \\ -\alpha_{21}H_2 & x_2 & -\beta_{21}H_2 & -\beta_{22}H_2 \\ \delta_{11}P_1 & \delta_{12}P_1 & x_3 & 0 \\ \delta_{21}P_2 & \delta_{22}P_2 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

dimana :

$$x_1 = a_1 - 2\alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2$$
$$x_2 = a_2 - \alpha_{21}H_1 - 2\alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2$$
$$x_3 = -b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2$$
$$x_4 = -b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2$$

Dan matriks jacobi untuk titik kesetimbangan 11 (E_{11})adalah :

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

dimana :

$$a_{11} = -\alpha_{11}\left(\frac{\delta_{22}b_1 - \delta_{12}b_2}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}\right) \quad a_{21} = -\alpha_{21}\left(\frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{-\delta_{11}\delta_{22} + \delta_{21}\delta_{12}}\right)$$

$$a_{12} = -\alpha_{12}\left(\frac{\delta_{22}b_1 - \delta_{12}b_2}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}\right) \quad a_{22} = -\alpha_{22}\left(\frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{-\delta_{11}\delta_{22} + \delta_{21}\delta_{12}}\right)$$

$$a_{13} = -\beta_{11}\left(\frac{\delta_{22}b_1 - \delta_{12}b_2}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}\right) \quad a_{23} = -\beta_{21}\left(\frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{-\delta_{11}\delta_{22} + \delta_{21}\delta_{12}}\right)$$

$$a_{14} = -\beta_{12}\left(\frac{\delta_{22}b_1 - \delta_{12}b_2}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}\right) \quad a_{24} = -\beta_{22}\left(\frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{-\delta_{11}\delta_{22} + \delta_{21}\delta_{12}}\right)$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \delta_{11}\Bigg(\frac{\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \\
&\qquad \frac{a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}\Bigg) \\
a_{32} &= \delta_{12}\Bigg(\frac{\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \\
&\qquad \frac{a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}\Bigg) \\
a_{33} &= 0 \\
a_{34} &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= \delta_{21}\Bigg(\frac{a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \\
&\qquad \frac{\beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}\Bigg) \\
a_{42} &= \delta_{22}\Bigg(\frac{a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \\
&\qquad \frac{\beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}\Bigg) \\
a_{43} &= 0 \\
a_{44} &= 0
\end{aligned}$$

dimana :

$$S_1 = \delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12} \qquad T_1 = -\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11}$$

$$Q_1 = \delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12} \qquad R_1 = \delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2$$

sehingga dari matriks jacobinya diperoleh persamaan karakteristiknya:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^4 + P_3\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 \\ &= \lambda^4 + (-a_{11} - a_{22})\lambda^3 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{14}a_{41} - a_{13}a_{31} \\ &\quad - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{24})\lambda^2 + (a_{13}a_{31}a_{22} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{24}a_{11}a_{42} \\ &\quad - a_{24}a_{41}a_{12} + a_{14}a_{41}a_{22} - a_{14}a_{21}a_{42} + a_{23}a_{11}a_{32} - a_{23}a_{31}a_{12})\lambda \\ &\quad + (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})(a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangannya daapat ditentukan dengan memeriksa koefisien dari polinom -polinomnya.

Dari syarat yang diperoleh pada persamaan (4.13) dan persamaan (4.14) diperoleh:

$$\begin{array}{llll} a_{11} < 0 & a_{21} < 0 & a_{31} > 0 & a_{41} > 0 \\ a_{12} < 0 & a_{22} < 0 & a_{32} > 0 & a_{42} > 0 \\ a_{13} < 0 & a_{23} < 0 & a_{33} = 0 & a_{43} = 0 \\ a_{14} < 0 & a_{24} < 0 & a_{34} = 0 & a_{44} = 0 \end{array} \tag{4.16}$$

sehingga dari persamaan (4.16) dan persamaan (4.15) diperoleh :

- $a_{11} + a_{22} < 0$, maka $P_3 = -(a_{11} + a_{22}) > 0$
- $P_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{14}a_{41} - a_{13}a_{31} - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{24}$

  karena $a_{31}a_{13} < 0$, $a_{32}a_{23} < 0$, $a_{42}a_{24} < 0$, $a_{14}a_{41} < 0$ dan

dimana :

$$S_1 = \delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12} \qquad T_1 = -\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11}$$

$$Q_1 = \delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12} \qquad R_1 = \delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2$$

sehingga dari matriks jacobinya diperoleh persamaan karakteristiknya:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^4 + P_3\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 \\ &= \lambda^4 + (-a_{11} - a_{22})\lambda^3 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{14}a_{41} - a_{13}a_{31} \\ &\quad - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{24})\lambda^2 + (a_{13}a_{31}a_{22} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{24}a_{11}a_{42} \\ &\quad - a_{24}a_{41}a_{12} + a_{14}a_{41}a_{22} - a_{14}a_{21}a_{42} + a_{23}a_{11}a_{32} - a_{23}a_{31}a_{12})\lambda \\ &\quad + (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})(a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangannya daapat ditentukan dengan memeriksa koefisien dari polinom -polinomnya.

Dari syarat yang diperoleh pada persamaan (4.13) dan persamaan (4.14) diperoleh:

$$\begin{array}{llll} a_{11} < 0 & a_{21} < 0 & a_{31} > 0 & a_{41} > 0 \\ a_{12} < 0 & a_{22} < 0 & a_{32} > 0 & a_{42} > 0 \\ a_{13} < 0 & a_{23} < 0 & a_{33} = 0 & a_{43} = 0 \\ a_{14} < 0 & a_{24} < 0 & a_{34} = 0 & a_{44} = 0 \end{array} \tag{4.16}$$

sehingga dari persamaan (4.16) dan persamaan (4.15) diperoleh :

- $a_{11} + a_{22} < 0$, maka $P_3 = -(a_{11} + a_{22}) > 0$
- $P_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{14}a_{41} - a_{13}a_{31} - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{24}$

  karena $a_{31}a_{13} < 0$, $a_{32}a_{23} < 0$, $a_{42}a_{24} < 0$, $a_{14}a_{41} < 0$ dan

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\left(\frac{(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12})(\delta_{22}b_1-b_2\delta_{12})(\delta_{21}b_1-\delta_{11}b_2)}{(\delta_{22}\delta_{11}-\delta_{21}\delta_{12})(\delta_{21}\delta_{12}-\delta_{22}\delta_{11})}\right)$$

maka diperoleh bahwa jika $(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12})>0$ maka $P_2>0$.

- $P_1=a_{13}(a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32})+a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})$

  $+a_{14}(a_{41}a_{22}-a_{21}a_{42})+a_{24}(a_{11}a_{42}-a_{41}a_{12})$

  karena

$$(a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32})=\left(\frac{(\alpha_{21}\delta_{12}-\delta_{11}\alpha_{22})(\delta_{21}b_1-\delta_{11}b_2)}{(-S_1)^2(T_1)}\right)$$
$$\big(\beta_{12}a_2(S_1)+\beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1)+\beta_{12}\alpha_{22}(R_1)+$$
$$a_1\beta_{22}(-S_1)+\alpha_{11}\beta_{22}(Q_1)+\alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)\big)$$

$$(a_{11}a_{42}-a_{41}a_{12})=\left(\frac{(\delta_{21}\alpha_{12}-\delta_{22}\alpha_{11})(\delta_{22}b_1-\delta_{12}b_2)}{(S_1)(-S_1)(T_1)}\right)$$
$$(a_1\beta_{21}(S_1)+\alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1)+\alpha_{12}\beta_{21}(R_1)+$$
$$\beta_{11}a_2(-S_1)+\beta_{11}\alpha_{21}(Q_1)+\beta_{11}\alpha_{22}(-R_1))$$

$$(a_{41}a_{22}-a_{21}a_{42})=\left(\frac{(\delta_{22}\alpha_{21}-\delta_{21}\alpha_{22})(\delta_{21}b_1-\delta_{11}b_2)}{(T_1)(-S_1)^2}\right)$$
$$(a_1\beta_{21}(S_1)+\alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1)+\alpha_{12}\beta_{21}(R_1)+$$
$$\beta_{11}a_2(-S_1)+\beta_{11}\alpha_{21}(Q_1)+\beta_{11}\alpha_{22}(-R_1))$$

$$(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})=\left(\frac{(\delta_{11}\alpha_{12}-\delta_{12}\alpha_{11})(\delta_{22}b_1-\delta_{12}b_2)}{(S_1)(-S_1)(T_1)}\right)$$
$$(\beta_{12}a_2(S_1)+\beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1)+\beta_{12}\alpha_{22}(R_1)+$$
$$a_1\beta_{22}(-S_1)+\alpha_{11}\beta_{22}(Q_1)+\alpha_{12}\beta_{22}(-R_1))$$

maka diperoleh bahwa jika :

$(\alpha_{21}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{22}) < 0$, $(\delta_{21}\alpha_{12} - \delta_{22}\alpha_{11}) < 0$, $(\delta_{22}\alpha_{21} - \delta_{21}\alpha_{22}) < 0$

dan $(\delta_{11}\alpha_{12} - \delta_{12}\alpha_{11} < 0)$ maka $p_1 > 0$

- $P_0 = (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})$

  karena

$$a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = \frac{(-\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11})(\delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12})(\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12})}$$

$$\begin{aligned} a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32} = \frac{(-\delta_{21}\delta_{12} + \delta_{22}\delta_{11})}{(-S_1)^2(T_1)^2} \\ (\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1) + \\ a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)) \\ (a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1) + \\ \beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1) \end{aligned}$$

maka diperoleh bahwa jika

$(-\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11})(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21}) > 0$, maka $P_0 > 0$.

maka menurut *uji kestabilan Routh Hurwitz*, diperoleh bahwa titik kesetimbangan (E_{11}) adalah adalah suatu titik kesetimbangan yang *stabil* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut :

- $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) > 0$,
- $(\alpha_{21}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{22}) < 0$, $(\delta_{21}\alpha_{12} - \delta_{22}\alpha_{11}) < 0$, $(\delta_{22}\alpha_{21} - \delta_{21}\alpha_{22}) < 0$

  dan $(\delta_{11}\alpha_{12} - \delta_{12}\alpha_{11}) < 0$
- $(-\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11})(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21}) > 0$

Contoh :

Tinjau kembali model pada persamaan (4.8)

$$
\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2) \\
\dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2) \\
\dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) \\
\dot{P}_2 &= P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2)
\end{aligned}
$$

dengan :

$$
\begin{array}{llll}
a_1 = 29 & a_2 = 16 & b_1 = 12 & b_2 = 20 \\
\alpha_{11} = 12 & \alpha_{21} = 4 & \delta_{11} = 5 & \delta_{21} 9 \\
\alpha_{12} = 3 & \alpha_{22} = 2 & \delta_{12} = 2 & \delta_{22} = 3 \\
\beta_{11} = 6 & \beta_{21} = 8 & & \\
\beta_{12} = 3 & \beta_{22} = 3 & &
\end{array}
$$

diperoleh titik kesetimbangan:

$$E_1 = (0,0,0,0) \qquad E_2 = (0,8,0,0)$$

$$E_3 = (0,\frac{20}{3},0,\frac{8}{9}) \qquad E_4 = (0,6,\frac{1}{2},0)$$

$$E_5 = (\frac{20}{9},0,0,\frac{7}{9}) \qquad E_6 = (\frac{29}{12},0,0,0)$$

$$E_7 = (\frac{12}{5},0,\frac{1}{5},0) \qquad E_8 = (\frac{5}{6},\frac{19}{3},0,0)$$

$$E_9 = (\frac{19}{15},\frac{43}{5}0,\frac{26}{15}) \qquad E_{10} = (\frac{32}{21},\frac{46}{21},\frac{29}{42},0)$$

$$E_{11} = (\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{6},\frac{4}{3})$$

dari titik ksetimbangan yang diperoleh, hanya satu titik kesetimbangan yang memenuhi syarat pada pers. (4.12) yaitu titik $E_{11} = (\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{6},\frac{4}{3})$

Matriks Jacobi untuk model tersebut adalah :

$$J = \begin{pmatrix} X_{11} & -2H_1 & -4H_1 & -4H_1 \\ -6H_2 & X_{22} & -4H_2 & -5H_2 \\ 6P_1 & 3P_1 & X_{33} & 0 \\ 6P_2 & 2P_2 & 0 & X_{44} \end{pmatrix}$$

dimana :

$$X_{11} = 14 - 16H_1 - 2H_2 - 4P_1 - 4P_2$$
$$X_{22} = 15 - 6H_1 - 8H_2 - 4P_1 - 5P$$
$$X_{33} = -8 + 6H_1 + 3H_2$$
$$X_{44} = -7 + 6H_1 + 2H_2$$

Maka untuk $E_{11} = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3})$, matriks jacobinya adalah :

$$J = \begin{bmatrix} -16 & -4 & -8 & -4 \\ -32/3 & -16/3 & -64/3 & -8 \\ 5/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda+16 & 4 & 8 & 4 \\ 32/3 & \lambda+16/3 & 64/3 & 8 \\ -5/6 & -1/3 & \lambda & 0 \\ -12 & -4 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \frac{64}{3}\lambda^3 + \frac{1228}{9}\lambda^2 + \frac{2368}{9}\lambda + \frac{128}{9}$$

diperoleh nilai eigennya :

$$\lambda_1 = -11{,}2989$$
$$\lambda_2 = -6{,}485$$
$$\lambda_3 = -3{,}4725$$
$$\lambda_4 = -0{,}059$$

menurut *teorema nilai eigen* , diperoleh bahwa titik kestimbangan

$E_{11} = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3})$ adalah titik kesetimbangan yang *stabil.*

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

V.1 KESIMPULAN

Dari hasil yang telah diperoleh, dapat ditarik kesimpulan bahwa :

1. Pada model kompetisi dua mangsa dengan satu pemangsa :

$$\dot{H}_1 = H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1)$$
$$\dot{H}_2 = H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1)$$
$$\dot{P}_1 = P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)$$

- Titik kesetimbangannya adalah :

$$k_1 = (0,0,0)$$

$$k_2 = (0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},0)$$

$$k_3 = (0,\frac{b_1}{\delta_{12}},\frac{\delta_{12}a_2 - \alpha_{22}b_1}{\delta_{12}\beta_{21}})$$

$$k_4 = (\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,0)$$

$$k_5 = (\frac{b_1}{\delta_{11}},0,\frac{\delta_{11}a_1 - \alpha_{11}b_1}{\delta_{11}\beta_{11}})$$

$$k_6 = (\frac{a_1\alpha_{22} - \alpha_{12}a_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}},\frac{\alpha_{11}a_2 - \alpha_{21}a_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}},0)$$

$$k_7 = (\frac{\beta_{11}(A) + \beta_{21}(B)}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)},\frac{\beta_{11}(C) + \beta_{21}(D)}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)},$$
$$\frac{\alpha_{12}(-C) + \alpha_{11}(-A) + a_1(E)}{\beta_{11}(E) + \beta_{21}(F)}$$

dimana :

$$\begin{aligned} A &= b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2 & D &= \alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1 \\ B &= \delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12} & E &= \delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12} \\ C &= \delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1 & F &= \alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12} \end{aligned}$$

- Titik kesetimbangan (k_7) adalah satu-satunya titik yang mungkin dimana $\overline{H}_1 > 0, \overline{H}_2 > 0$, dan $\overline{P}_1 > 0$, dengan syarat :

  Memenuhi ketiga kondisi berikut :

a) $$\frac{\beta_{11}(b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2) + \beta_{21}(\delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})} > 0$$

b) $$\frac{\alpha_{12}(\alpha_{21}b_1 - \delta_{11}a_2) + \alpha_{11}(\delta_{12}a_2 - b_1\alpha_{22}) + a_1(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12})}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})} > 0$$

c) $$\frac{\beta_{11}(\delta_{11}a_2 - \alpha_{21}b_1) + \beta_{21}(\alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a)}{\beta_{11}(\delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12}) + \beta_{21}(\alpha_{11}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{12})} > 0$$

- Dari analisis kestabilannya diperoleh bahwa titik kesetimbangan (k_7) stabil jika dan hanya jika

  - $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} > 0$,
  - $-\beta_{11}(\alpha_{21}\delta_{12} - \alpha_{22}\delta_{11}) - \beta_{21}(\alpha_{12}\delta_{11} - \alpha_{11}\delta_{12}) > 0$.

2. Pada model kompetisi dua mangsa dengan dua pemangsa :

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= H_1(a_1 - \alpha_{11}H_1 - \alpha_{12}H_2 - \beta_{11}P_1 - \beta_{12}P_2) \\ \dot{H}_2 &= H_2(a_2 - \alpha_{21}H_1 - \alpha_{22}H_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{22}P_2) \\ \dot{P}_1 &= P_1(-b_1 + \delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2) \\ \dot{P}_2 &= P_2(-b_2 + \delta_{21}H_1 + \delta_{22}H_2) \end{aligned}$$

- Titik kesetimbangannya adalah :

$$E_1 = (0,0,0,0)$$

$$E_2 = (\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,0,0)$$

$$E_3 = (\frac{b_1}{\delta_{21}},0,0,\frac{\delta_{21}a_1 - b_2\alpha_{11}}{\delta_{21}\beta_{12}})$$

$$E_4 = (\frac{b_1}{\delta_{11}},0,\frac{\delta_{11}a_1 - b_1\alpha_{11}}{\delta_{11}\beta_{11}})$$

$$E_5 = (0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},0,0)$$

$$E_6 = (\frac{-a_2\alpha_{12} + \alpha_{22}a_1}{-\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{22}},\frac{-a_1\alpha_{21} + \alpha_{11}a_2}{-\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{22}},0,0)$$

$$E_7 = (0,\frac{b_1}{\delta_{12}},\frac{\delta_{12} - \alpha_{22}b_1}{\delta_{12}\beta_{21}},0)$$

$$E_8 = (\frac{\beta_{11}(A_1) + \beta_{21}(B_1)}{\beta_{11}(H_1) + \beta_{21}(I_1)},\frac{\beta_{11}(C_1) + \beta_{21}(D_1)}{\beta_{11}(H_1) + \beta_{21}(J_1)},$$
$$\frac{a_1(E_1) + \alpha_{11}(F_1) + \alpha_{12}(G_1)}{\beta_{11}(H_1) + \beta_{21}(I_1)},0)$$

$$E_9 = (0,\frac{b_2}{\delta_{22}},0,\frac{\delta_{22}a_2 - b_2\alpha_{22}}{\delta_{22}\beta_{22}})$$

$$E_{10} = (\frac{\beta_{22}(J_1) + \beta_{12}(K_1)}{\beta_{22}(O_1) + \beta_{12}(P_1)},\frac{\beta_{22}(L_1) + \beta_{12}(M_1)}{\beta_{22}(O_1) + \beta_{12}(P_1)},$$
$$0,\frac{a_1(N_1) + \alpha_{11}(-K_1) + \alpha_{12}(-M_1)}{\beta_{22}(O_1) + \beta_{12}(P_1)})$$

$$E_{11} = (\frac{Q_1}{S_1}, \frac{R_1}{-S_1}, \frac{\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \frac{a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)}, \frac{a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(-S_1)(T_1)} + \frac{\beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(-S_1)(T_1)})$$

- Titik kesetimbangan (E_{11}) adalah satu-satunya titik kesetimbangan yang mungkin dimana $\overline{H}_1 > 0, \overline{H}_2 > 0, \overline{P}_1 > 0$, dan $\overline{P}_2 > 0$ dengan syarat :

$$a) \frac{\delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12}}{\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12}} > 0$$

$$b) \frac{\delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2}{\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11}} > 0$$

$$c) \frac{\beta_{12}a_2(S_1) + \beta_{12}\alpha_{21}(-Q_1) + \beta_{12}\alpha_{22}(R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} + \frac{a_1\beta_{22}(-S_1) + \alpha_{11}\beta_{22}(Q_1) + \alpha_{12}\beta_{22}(-R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} > 0$$

$$e) \frac{a_1\beta_{21}(S_1) + \alpha_{11}\beta_{21}(-Q_1) + \alpha_{12}\beta_{21}(R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} + \frac{\beta_{11}a_2(-S_1) + \beta_{11}\alpha_{21}(Q_1) + \beta_{11}\alpha_{22}(-R_1)}{(\delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11})(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12})} > 0$$

dimana :

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1\alpha_{22} - \delta_{12}a_2 & K_1 &= b_2\alpha_{22} - \delta_{22}a_2 \\ B_1 &= \delta_{12}a_1 - b_1\alpha_{12} & L_1 &= \alpha_{11}b_2 - \delta_{21}a_1 \\ C_1 &= \delta_{11}a_2 - b_1\alpha_{21} & M_1 &= \delta_{21}a_2 - \alpha_{21}b_2 \\ D_1 &= \alpha_{11}b_1 - \delta_{11}a_1 & N_1 &= \delta_{21}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{22} \\ E_1 &= \delta_{11}\alpha_{22} - \delta_{12}\alpha_{21} & O_1 &= \alpha_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\alpha_{12} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
F_1 = a_2\delta_{12} - \alpha_{22}b_1 & P_1 = \delta_{21}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{22} \\
G_1 = \alpha_{21}b_1 - a_2\delta_{11} & Q_1 = \delta_{22}b_1 - b_2\delta_{12} \\
H_1 = \delta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\delta_{12} & R_1 = \delta_{21}b_1 - \delta_{11}b_2 \\
I_1 = \delta_{12}\alpha_{11} - \alpha_{12}\delta_{11} & S_1 = \delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12} \\
J_1 = \delta_{22}a_1 - b_2\alpha_{22} & T_1 = -\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11}
\end{array}
$$

- Dari analisis kestabilannya diperoleh bahwa (E_{11}) adalalah titik kesetimbangan yang stabil jika dan hanya jika :
  - $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) > 0$,
  - $(\alpha_{21}\delta_{12} - \delta_{11}\alpha_{22}) < 0, (\delta_{21}\alpha_{12} - \delta_{22}\alpha_{11}) < 0, (\delta_{22}\alpha_{21} - \delta_{21}\alpha_{22}) < 0$ dan $(\delta_{11}\alpha_{12} - \delta_{12}\alpha_{11}) < 0$
  - $(-\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}\beta_{11})(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21}) > 0$

V.2 SARAN

Agar mahasiswa jurusan matematika yang berminat mengambil model sebagai tugas akhir, dapat mengembangkan model kompetisi mangsa untuk jumlah mangsa dan pemangsa yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. *Aljabar Linear Elementer* , Erlangga, Jakarta, 1994.

Doucet, P. dan Sloep, B. P. *Mathematical Modelling In The Life Science*, Ellis Horwood, New York, 1992.

Haberman, R. *Mathematical Models In Mechanical Vibrations, Population Dynamic And Traffic Flow*, Department of Mathematics, Rutgers University, New Jersey, 1997.

Jeffries, C. *Mathematical Modelling In Ecology*, Birkhauser, Boston, 1989.

May, R. M. *Stability and Complexity In Model Ecosistems*, Pricenton University Press, New Jersey, 1974.

William, B. E. and Richard D. P. C. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons Inc, New York, 1991.