KEBERADAAN *ABSORBING SET* PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL REAKSI-DIFUSI DI RUANG H^2

SKRIPSI

WISNU WARDANA

H 111 16 006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2022

KEBERADAAN *ABSORBING SET* PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL REAKSI-DIFUSI DI RUANG H^2

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

WISNU WARDANA

H 111 16 006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Wisnu Wardana
NIM	: H11116006
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Keberadaan *Absorbing Set* Pada Persamaan Diferensial Parsial Reaksi-Difusi Di Ruang H^2

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 8 Maret 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

Wisnu Wardana

NIM. H11116006

LEMBAR PENGESAHAN

KEBERADAAN *ABSORBING SET* PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL REAKSI-DIFUSI DI RUANG H^2

Disusun dan diajukan oleh

WISNU WARDANA

H 111 16 006

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesain Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 8 Maret 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Naimah Aris, S.Si, M.Math.	**Dr. Muh. Nur, S.Si, M.Si.**
NIP. 197110031997022001	**NIP. 198505292008121002**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008807200003100 2

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah Rabbil Alamin ucapan syukur penulis terhadap kehadirat Allah *Subhanahu Wa ta'ala Rabb* semesta alam. Karena atas limpahan rahmat, hidayah, dan kasih sayang-Nya, penulis masih diberikan kesempatan dan kesehatan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam juga tak henti-hentinya tercurah kepada Baginda Rasulullah *Shallallahu Alaihi Wasallam*, sebagai tauladan dalam mengarungi bahtera kehidupan dunia dan telah membawa Al-Qur'an sebagai pedoman dunia dan akhirat."*Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan*" (QS. Al-Insyirah : 5-6).

Hanya dengan taufik dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul judul "**Keberadaan *Absorbing Set* Pada Persamaan Diferensial Parsial Reaksi-Difusi di Ruang $\boldsymbol{H^2}$**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Dalam penulisan skripsi ini, penulis dengan segala keterbatasan, kemampuan, dan pengetahuan dapat melewati segala hambatan serta masalah berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada Ayahanda dan Ibunda tercinta, **Anang** dan **Nurjannah,** yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran bertabur cinta dan kasih sayang serta dengan penuh ketulusan hati dan kesungguhan dalam memberikan dukungan moril serta doanya yang tak ternilai harganya demi keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan.. Tidak lupa pula penulis sampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA** selaku Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam serta seluruh staf dekanat.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu **Dr. Kasbawati, M.Si.**, selaku Sekretaris Departemen Matematika, dan segenap bapak dan ibu dosen serta staf Departemen Matematika, yang telah membekali ilmu dan bantuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. Ibu **Naimah Aris, S.Si, M.Math.** selaku pembimbing utama sekaligus ketua penguji dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si, M.Si** selaku pembimbing pertama sekaligus sekertaris penguji penulis, terimakasih atas kesediaan, kesabaran, dan kesetiaannya untuk membimbing dan menuntun penulis hingga menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS** selaku anggota tim penguji dan Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**. selaku penasehat akademik sekaligus anggota tim penguji yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, kritik, dan saran yang sangat membangun dalam penyusunan skripsi ini.
5. Kawan terbaik 2016 **Rudy, Aldi, Zaitun, Feri, Ilyas, Afdal, Awal, Surit, Gunta, Takim, Bagas** dan teman – teman **ALGORITMA 2016,** terima kasih untuk semua kebersamaan dan ikatan persaudaraan yang telah terjalin dari mahasiswa baru sampai saat ini. Semoga kita masih tetap **“Bersatu dalam Kebersamaan”.**
6. Keluarga besar **Himatika FMIPA Unhas**, yang selalu memberikan cambukan semangat untuk menyelesaikan tugas akhir ini, demi menjadi insan yang berilmu dan tentunya untuk menjaga nama baik lembaga, serta memberikan pengalaman berharga yang mungkin tidak bisa didapatkan ditempat lain. **Salam *Queen Of Science*** dan **Bravo Himatika!!**
7. Teman-teman seperjuangan **MIPA 2016** terkhusus untuk **Pejantan MIPA 2016** yang telah membersamai dan memberikan warna disetiap momen yang ada. Semoga kita tetap **“Seperti Seharusnya”.**

8. Adik – adik dikampus yaitu **Diskrit 2017**, **Integral 2018**, **Poligon 2019**, **Horizontal 2020**, serta **Matriks 2021** yang selalu memberikan semangat dan membuat belaajar bagaimana caranya jadi pengader yang baik.
9. Keluarga besar **KM FMIPA Unhas,** terima kasih untuk semua pembelajaran dan pengalaman yang diberikan.
10. Teman-teman **MATEMATIKA 2016**, terima kasih untuk kebersamaan, dukungan dan waktunya saat berjuang sama-sama di dunia perkuliahan.

Serta kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semuanya. Semoga apa yang telah dituliskan oleh penulis pada skripsi ini dapat bermanfaat bagi sesama.

Makassar, 8 Maret 2022

Wisnu Wardana

ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial reaksi-difusi adalah model yang menggambarkan bagaimana konsentrasi satu atau lebih substansi yang terdistribusi dalam satu ruang, yang berubah karena pengaruh proses kimia yang mengubah bentuk substansi menjadi bentuk lain dan proses difusi yang menyebabkan substansi tersebut menyebar dalam ruang. Perilaku atau dinamika jangka panjang suatu masalah nilai awal dan nilai batas yang telah memenuhi kondisi *well-posed* dapat digambarkan melalui keberadaan *global attractor* dari sistem dinamika tersebut. Keberadaan *global attractor* dapat dibuktikan keberadaannya salah satunya dengan menunjukkan keberadaan *absorbing set*, yaitu suatu himpunan bagian dalam ruang fase suatu sistem dinamik yang pada akhirnya akan menyerap (memuat) hasil peta dari semua himpunan-himpunan terbatas pada ruang fasenya. Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan keberadaan *absorbing set* pada persamaan diferensial parsial reaksi-difusi di ruang H^2. Jika $u(t, u_0) = S(t)u_0$ dengan ($u_0 \in H^2, t > 0$) adalah solusi dari persamaan difusi-reaksi dan $S(t)$ adalah semigrup yang didefinisikan dari persamaan difusi-reaksi pada ruang H^2, menunjukkan syarat perlu keberadaan *absorbing set* masalah nilai awal persamaan reaksi-difusi di ruang H^2, yaitu menunjukkan bahwa untuk setiap himpunan terbatas $E \subset H^2$, terdapat $t_R > 0$ dan $C > 0$ sedemikian sehingga $\|u(t, u_0)\| \leq C$ untuk semua $t > t_R$ dengan $u_0 \in E$, dan menunjukkan bahwa terdapat himpunan terbatas $B \subset H^2$, untuk sebarang $u_0 \in H^2$ terdapat $t_R > 0$ sedemikian sehingga $u(t, u_0) \in B$ untuk semua $t > t_R$.

Kata kunci: Persamaan Reaksi-Difusi, *Absorbing set*, Ruang H^2.

ABSTRACT

The reaction-diffusion partial equation is a model that describes how the concentration of one or more substances distributed in one space changes due to the influence of chemical processes that change the shape of the substance into another form and the diffusion process that causes the substance to spread in space. The behavior or long-term dynamics of a problem with initial values and boundary values that have met the well-posed conditions can be described by the presence of global attractors from the dynamics system. The existence of global attractors can be proven, one of them by showing the existence of an absorbing set, which is a subset in the phase space of a dynamic system which will eventually absorb (load) the map results from all sets limited to its phase space. This study aims to demonstrate the existence of the absorbing set in the reaction-diffusion partial differential equation in the H^2 *space . If* $u(t,u_0) = S(t)u_0$ *where* $(u_0 \in H^2, t > 0)$ *is the solution to the reaction-diffusion equation and* $S(t)$ *is a semigroup defined from the reaction-diffusion equation in space* H^2*, showing the condition for the existence of an absorber for the initial problem set of diffusion-reaction equations in space* H^2*, which shows that for some finite set* $E \subset H^2$*, there are* $t_R > 0$ *and* $C > 0$ *so that* $\|u(t,u_0)\| \leq C$ *for all* $t > t_R$ *with* $u_0 \in E$*, and shows that there is a finite set* $B \subset H^2$*, for every item* $u_0 \in H^2$ *there is* $t_R > 0$ *such that* $u(t,u_0) \in B$ *for all* $t > t_R$*.*

Keywords: Reaction-Diffusion Equation, Absorbing set, Space H^2*.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai fenomena yang ada di alam digambarkan oleh model matematika reaksi-difusi. Model ini menggambarkan bagaimana konsentrasi satu atau lebih substansi yang terdistribusi dalam satu ruang, yang berubah karena pengaruh proses kimia yang mengubah bentuk substansi menjadi bentuk lain dan proses difusi yang menyebabkan substansi tersebut menyebar dalam ruang.

Secara matematis persamaan reaksi-difusi berbentuk persamaan diferensial parsial (PDP) tipe parabolik. Salah satu bentuk persamaan reaksi difusi diberikan oleh PDP berikut:

$$u_t = \Delta u + u - u^3 \tag{1.1}$$

dengan $u = u(x, t)$ menggambarkan kepadatan/konsentrasi suatu zat, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ pada waktu t. Δ menunjukkan operator Laplace. Jadi suku pertama pada sisi kanan menggambarkan "difusi", termasuk D sebagai koefisen difusi. Suku kedua, $f(u) = u - u^3$ adalah fungsi *smooth* $f: R \to R$ menggambarkan proses yang dapat mengubah u. Suku reaksi tersebut tidak hanya bergantung pada u, tetapi juga dapat bergantung pada turunan pertama dari u, yaitu ∇u, dan sebagainya. (Grindrod, Peter, 1996)

Solusi suatu persamaan diferensial parsial dapat berupa solusi klasik dapat pula berupa solusi lemah. Pendekatan solusi lemah dilakukan dengan cara memperluas ruang solusi dari persamaan diferensial yang diberikan. Menurut (Hadamard, Jacques, 2003), PDP yang dijamin keberadaan dan ketunggalan solusi lemahnya akan memenuhi kondisi *well-posed.*

Perilaku atau dinamika jangka panjang suatu masalah nilai awal dan nilai batas yang telah memenuhi kondisi *well-posed* dapat digambarkan melalui keberadaan *global attractor* dari sistem dinamika tersebut. *Global attractor* adalah suatu himpunan tak kosong A yang invarian, kompak, dan menarik setiap himpunan terbatas di dalam A. Keberadaan *global attractor* dapat dibuktikan keberadaannya salah satunya dengan menunjukkan keberadaan *absorbing set,* yaitu suatu himpunan bagian dalam ruang fase suatu sistem dinamik yang pada akhirnya akan menyerap (memuat) hasil peta dari semua himpunan-himpunan terbatas pada ruang fasenya. (Nakao, & Aris, 2007)

Masalah keberadaan *absorbing set* untuk PDP tipe lainnya sudah telah banyak dikaji dalam penelitian seperti pada Acomario (2020), Zhao X. dkk (2010), Nakao M. & Aris N. (2007)

Pada penelitian Acomario (2020) dikaji keberadaan *absorbing set* dari PDP parabolik tak linear tipe p-Laplacian yaitu $u_t - div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u) = 0$ dengan beberapa asumsi yang diberikan pada $f(u)$ dan batasan tertentu. Berdasarkan penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji keberadaan absorbing set pada salah satu bentuk persamaan diferensial parsial reaksi-difusi seperti yang diberikan pada Persamaan (1.1).

Keberadaan *absorbing set* pada masalah nilai awal Persamaan (1.1) telah dibahas pada buku Zheng (2020) namun tidak dijelaskan secara detail, sehingga penulis tertartik untuk membuktikannya secara detatil dan kemudian dituangkan dalam bentuk skripsi berjudul~~,~~

“Keberadaan *Absorbing Set* pada Persamaan Diferensial Parsial Reaksi-Difusi di Ruang H^2”.

1.2 Rumusan Masalah

Jika $u(t, u_0) = S(t)u_0$ dengan $(u_0 \in H^2, t > 0)$ adalah solusi dari Persamaan (1.2)-(1.4) dan $S(t)$ adalah semigrup yang didefinisikan dari Persamaan (1.2)-(1.4) pada ruang H^2, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menunjukkan syarat perlu keberadaan absorbing set masalah nilai awal Persamaan (1.2)-(1.4) di ruang H^2, yaitu

1. Bagimana menunjukkan bahwa untuk setiap himpunan terbatas $E \subset H^2$, terdapat $t_R > 0$ dan $C > 0$ sedemikian sehingga
$$\|u(t, u_0)\| \leq C$$
untuk setiap $t > t_R$ dan $u_0 \in E$?
2. Bagimana menunjukkan bahwa terdapat himpunan terbatas $B \subset H^2$, untuk setiap $u_0 \in H^2$ terdapat $t_R > 0$ sedemikian sehingga
$$u(t, u_0) \in B$$
untuk setiap $t > t_R$?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis mencari *absorbing set* pada persamaan reaksi-difusi yaitu:

$$u_t = \Delta u + u - u^3, \quad u = u(x,t) \to \Omega \times \mathbb{R}^+ \qquad (1.2)$$

dengan syarat awal

$$u(x, 0) = u_0 \qquad (1.3)$$

dan syarat batas direchlet

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (1.4)$$

dengan asumsi Ω adalah domain terbatas yang smooth di $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$. Dan asumsi di ruang

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha = 1,2\}.$$

1.4 Tujuan Penelitian

Jika $u(t, u_0) = S(t)u_0$ dengan $(u_0 \in H^2, t > 0)$ adalah solusi dari Persamaan (1.2)-(1.4) dan $S(t)$ adalah semigrup yang didefinisikan dari Persamaan (1.2)-(1.4) pada ruang H^2, maka tujuan dari penulisan ini yaitu menunjukkan syarat perlu keberadaan absorbing set masalah nilai awal Persamaan (1.2)-(1.4) di ruang H^2, yaitu

1. Menunjukkan bahwa untuk setiap himpunan terbatas $E \subset H^2$, terdapat $t_R > 0$ dan $C > 0$ sedemikian sehingga
$$\|u(t, u_0)\| \leq C$$
untuk setiap $t > t_R$ dan $u_0 \in E$,
2. Menunjukkan bahwa terdapat himpunan terbatas $B \subset H^2$, untuk setiap $u_0 \in H^2$ terdapat $t_R > 0$ sedemikian sehingga
$$u(t, u_0) \in B$$
untuk setiap $t > t_R$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah mengasah kemampuan dalam menunjukkan keberadaan *absorbing set* dari suatu sistem persamaan diferensial serta menambah pengalaman bagi penulis menyusun karya tulis ilmiah dalam bentuk skripsi. Hasil penelitian ini juga diharapkan mampu menjadi referensi dalam menganalisis keberadaan *global attractor* pada persamaan reaksi-difusi.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini mudah dipahami maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam subbab dengan rumusan sebagai berikut:
Bab I Pendahuluan, yang memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka. Dalam bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu teori-teori dasar dalam analisis fungsional, persamaan reaksi-difusi serta definisi dan teorema mengenai keberadaan *absorbing set.*

Bab III Metode Penelitian memuat metode dan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam melakukan penelitian.

Bab IV Pembahasan. Dalam bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yaitu menunjukkan keberadaan *absorbing set* pada persamaan reaksi-difusi.

Bab V Penutup. Dalam bab ini memuat kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditunjukan bagi para peneliti agar bisa mengembangkan penelitian ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 State of The Art

Masalah persamaan reaksi-difusi ini telah banyak dikaji oleh para ahli dan ilmuwan. Secara umum, mereka mengkaji solusi masalah tersebut secara analitik dan numerik. Dalam *paper* (Liao Wenyuan, dkk, 2006) mengkaji solusi numerik persamaan reaksi-difusi (Persamaan 1.1) orde empat dengan syarat batas Neumann menggunakan *compact algorithm*. Keberadaan solusi global dari sistem persamaan reaksi-difusi *non-linear* dengan dimensi sebarang ditunjukkan oleh (Fellner Klemens, dkk, 2019).

Keberadaan *absorbing set* dari PDP parabolik tak linear tipe *p*-Laplacian dibuktikan dalam skripsi (Acomario, 2020) dengan cara membuktikan keberadaan *absorbing set* pada semigrup yang dibangkitkan dari persamaan parabolik tak linear tipe *p-Laplacian* disertai asumsi-asumsi dan batasan tertentu.

Suatu sistem dinamik dapat dideskripsikan sebagai keluarga dari operator yang dibangun dalam suatu ruang yang bersesuaian oleh suatu persamaan diferensial parsial yang melibatkan waktu. Perilaku atau dinamika dari suatu sistem dinamik untuk waktu yang lama dapat digambarkan oleh konsep *global attractor*. Menurut referensi (Nakao & Aris, 2007) dan (Cholewa & Dlotko, 2000) definisi *global attractor* adalah suatu himpunan tak kosong yang merupakan gabungan dari himpunan-himpunan yang invarian, kompak subset V yang menyerap (memuat) setiap himpunan terbatas dalam ruang metrik V. Menurut (Ma ,dkk, 2002) pembuktian keberadaan *global attractor* dapat dilakukan dengan menunjukkan:

a. Keberadaan *absorbing set*, dan
b. Semigrup adalah ω-limit kompak.

(Zhao X., dkk, 2010) dalam *paper*nya, menentukan *global atractor* pada persamaan diferensial parabolik orde empat dengan cara menentukan keberadaan *absorbing set* dan menunjukkan bahwa semigrup dari persamaan diferensial memenuhi sifat ω-limit kompak.

Persamaan diferensial parsial reaksi-difusi pada Persamaan (1.2)-(1.4) yang akan diteliti, telah dibahas dalam buku Zheng (2004). Dalam buku ini telah dibuktikan keberadaan *absorbing set* pada Persamaan (1.2)-(1.4) namun pembuktiannya tidak diberikan secara detail.

2.2 Ruang Bernorma dan Ruang Banach

Definisi 2.1 *Misalkan X adalah ruang vektor (Real atau kompleks). Norma pada X didefinisikan sebagai suatu fungsi bernilai real $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dan memenuhi sifat dibawah ini.*

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$.

(2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = 0$.

(3) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$.

(4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan setiap skalar* α.

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ *disebut ruang bernorma.* (Kreyszig, 1989)

Contoh 2.2 Ruang L^2 merupakan ruang bernorma.

Ruang L^2 merupakan salah satu contoh dari ruang bernorma dengan norma sebagai berikut,

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Akan ditunjukkan bahwa norma dalam L^2 memenuhi (1), (2), (3) dan (4).

(1) Akan ditunjukkan $\|f\| \geq 0$.

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak maka diketahui $|f| \geq 0$ sehingga $|f|^2 \geq 0$. Selanjutnya dengan menggunakan konsep integral sebagai suatu luasan yang selalu bernilai non-negatif maka $\int_{\Omega} |f|^2 \ dx \geq 0$ sehingga diperoleh

$$\left(\int_{\Omega} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \geq 0$$

(2) Akan ditunjukkan $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

$\Rightarrow \|f\| = 0$ maka $f = 0$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\int_{\Omega} |f|^2 \ dx = 0$$

$$|f|^2 = 0$$

$$|f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\Rightarrow f = 0$ maka$\|f\| = 0$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |0|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\Omega} 0 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (0)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

Jadi, $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

(3) Akan ditunjukkan $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

$$\left(\int_{\Omega} |\alpha f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |\alpha|^2 |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|\alpha|^2 \int_{\Omega} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Karena nilai $|\alpha| \geq 0$ maka nilai $(|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|$, sehingga

$$\|\alpha f\| = \left(\int_{\Omega} |\alpha f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|f\|$$

(4) Akan ditunjukkan $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Untuk menunjukkan pertidaksamaan tersebut maka haruslah diberikan pembuktian ketaksamaan Minkowski sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx &= \int_{\Omega} |f+g|^{2-1}|f+g| \; dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f+g|^{1}(|f|+|g|) \; dx \\ &= \int_{\Omega} |f+g|^{1}|f| \; dx + \int_{\Omega} |f+g|^{1}|g| \; dx\end{aligned}$$

Misalkan q adalah eksponen dual dari 2 dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{q}=1$ atau $(2-1)q=2$ sehinggga dengan menggunakan ketaksamaan Holder $\|ab\|_1 \leq \|a\|_2\|b\|_2$ diperoleh :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f+g|^{1}|f| \; dx &\leq \left(\int_{\Omega} \left(|f+g|^{1}\right)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f+g|^{1}|g| \; dx &\leq \left(\int_{\Omega} \left(|f+g|^{1}\right)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Jadi diperoleh :

$$\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx \leq \left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{1-\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Selanjutnya, pertidaksamaan diatas disebut sebagai ketaksamaan Minkowski yang juga membuktikan (4) yaitu :

$$\|f+g\| = \left(\int_{\Omega} |f+g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |g|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|f\| + \|g\|$$

Karena ruang L^2 memenuhi sifat ruang bernorma maka $(L^2, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Definisi 2.3 *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *merupakan ruang bernorma dan* $u \in X$. *Persekitaran*$-\varepsilon$ *didefinisikan sebagai himpunan.* (Kreyszig, 1989)

$$V_\varepsilon(u) = \{x \in X : \; \|x-u\| < \varepsilon\}.$$

Contoh 2.4 Misalkan $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x-x_0\| = |x-x_0|$, untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Persekitaran$-\varepsilon$ dalam $\mathbb{R}$ adalah

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} | \|x-x_0\| = |x-x_0| < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon < x-x_0 < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\}$$
$$= (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon).$$

Jadi, persekitaran- ε dalam $\mathbb{R}$ merupakan interval buka $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Definisi 2.5 *Misalkan* X *adalah ruang bernorma,* $A \subset X$ *dan* $A \neq \emptyset$. *Himpunan* A *dikatakan terbatas jika terdapat* $k > 0$ *sedemikian sehingga* (Kreyszig, 1989)

$$\|x-x_0\| \leq k, \textit{ untuk setiap } x, x_0 \in A.$$

Contoh 2.6 Misalkan $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x-x_0\| = |x-x_0|$, untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Maka $A = [0,1] \subset X$ merupakan himpunan terbatas karena terdapat $k = 1$ sehingga $\|x-x_0\| \leq k$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Definisi 2.7 *Ambil titik di* $x_o \in X$ *dan bilangan rill* $r > 0$, *diberikan dalam tiga kasus yaitu,* *(a)* $B(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$ ***(Bola buka)***

(b) $\bar{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ ***(Bola tutup)***

(c) $S(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = r\}$ ***(Bola)***

dari ketiga kasus, x_0 *adalah pusat bola dan* r *adalah jari-jari bola* (Kreyszig, 1989).

Contoh 2.8

a. Diketahui $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$, untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. $B(0,1) = \{x_0 \in \mathbb{R} | -1 < x_0 < 1\}$ adalah bola buka berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang bernorma X.

b. Diketahui $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$, untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. $B(0,1) = \{x_0 \in \mathbb{R} | -1 \leq x_0 \leq 1\}$ adalah bola tutup berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang bernorma X.

Definisi 2.9 *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *merupakan ruang norm dan* $A \subset X$. *Subhimpunan* A *dikatakan buka jika untuk setiap* $u \in A$ *terdapat* $\varepsilon > 0$ *sedemikian sehingga* $V_\varepsilon(u) \subseteq A$. *Subhimpunan* A *dikatakan tutup jika* $X - A$ *buka, dengan* $X - A = \{x \in X, x \notin A\}$. *Selanjutnya* $X - A$ *ditulis* A^C. (Kreyszig, 1989)

Contoh 2.10 Diketahui ruang bernorma $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ dan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$, $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$. Himpunan $D = \{x_0 \in \mathbb{R} |\ 0 < x_0 < 1\} \subset X$ buka di X.

Ambil sebarang $x_0 \in D$.

Pilih $\varepsilon = min\,\{x_0, 1 - x_0\}$.

(i) Kasus 1: untuk $\varepsilon = min\,\{x_0, 1 - x_0\} = x_0$. Maka $\varepsilon = x_0$ dan

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} |\ \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} |\ |x - x_0| < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon + x_0 < x < (1 - x_0) + \varepsilon\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | -x_0 + x_0 < x < 1 - x_0 + x_0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$$

Jadi, $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

(ii) Kasus 2: $\varepsilon = min\,\{x_0, 1 - x_0\} = 1 - x_0$. Maka $\varepsilon = 1 - x_0$ dan

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} |\ \|x - x_0\| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} |\ |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon + (1 - x_0) < x < \varepsilon + x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | 1 - (\varepsilon + x_0) < x < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} \end{aligned}$$

Jadi, $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

Dari (i) dan (ii) menyatakan bahwa D himpunan buka di X karena setiap $x_0 \in D$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

Ruang Banach

Definisi 2.11 *Ruang bernorma X disebut ruang yang lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen di X. Ruang bernorma yang lengkap adalah ruang Banach.*

Contoh 2.12 Ruang L^2 merupakan ruang Banach.

Langkah 1. Menunjukkan ruang L^2 adalah ruang bernorma.

Berdasarkan pada Contoh 2.2 bahwa L^2 adalah ruang bernorma.

Langkah 2. Menunjukkan L^2 adalah ruang lengkap.
Untuk menunjukkan L^2 lengkap adalah dengan menunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ di $L^2(\Omega)$ maka terdapat sebuah barisan $u \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga barisan u_n konvergen ke suatu $u \in L^2(\Omega)$.

Karena $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka dapat ditemukan sub barisan u_{n_j} dan dengan memilih $\varepsilon = 2^{-j} > 0$ sedemikian sehingga

$$\left\| u_{n_{j+1}} - u_{n_j} \right\|_{L^p} < 2^{-j}$$

Lalu diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \left| u_{n_{j+1}} - u_{n_j} \right| \right\|_{L^p} < \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} < 1.$$

Untuk setiap k, dan jika kita definsikan

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left| u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right|,$$

Dengan memperbolehkan $v(x) = \infty$ jika dibutuhkan, dengan menggunakan lemma Fatou maka dapat disimpulan bahwa

$$\|v\|_{L^p} \leq 1.$$

Sehingga mengakibatkan $v(x) < \infty$ untuk hampir disetiap titik dan barisan tersebut

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right).$$

Jelas konvergen untuk hampir disemua titik x. Karena jumlah parsial dari barisan ini hanya $u_{n_{k+1}}(x)$, maka dapat didefinisikan suatu fungsi $u(x)$ untuk hampir disetiap titik $x \in \Omega$ dengan

$$u(x) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}(x).$$

Akhirnya, dapat ditunjukkan bahwa $u \in L^2(\Omega)$ maka $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$.

Pilih suatu nilai N sedemikian sehingga

$$\|u_n - u_m\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n, m \geq N.$$

Dengan menggunakan lemma Fatou maka dapat disimpulkan

$$\left\| u - u_{n_j} \right\|_{L^2} \leq \lim_{k\to\infty} inf \left\| u_{n_k} - u_{n_j} \right\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Karena $n_j \geq N$. Maka menjadikan $u - u_{n_j} \in L^2$ dan karena

$$u = \left(u - u_{n_j}\right) + u_{n_j} \text{ dengan } u_{n_j} \in L^2$$

Maka kita punya $u \in L^2(\Omega)$. Untuk $n > N$, pilih j sedemikian sehingga $n_j \geq N$ juga, sehingga

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leq \left\|u_n - u_{n_j}\right\|_{L^2} + \left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^2}$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Maka u_n konvergen ke u di ruang $L^2(\Omega)$. Karena L^2 adalah ruang bernorma dan L^2 lengkap maka L^2 adalah ruang Banach.

2.3 Ruang L^2

Definisi 2.13 Ruang $L^2(\Omega)$ *merupakan* fungsi *terukur pada kelas ekuivalen dari fungsi-fungsi sedemikian sehingga*

$$L^2(\Omega) = f \mid f: \Omega \to \mathbb{R} \;\; f \textit{ terukur dan } \int_\Omega |f|^2 \, dx < \infty.$$

Norma ruang $L^2(\Omega)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Hilbert

Definisi 2.14 *Suatu ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor X yang dilengkapi dengan suatu hasil kali dalam di dalamnya. Hasil kali dalam pada X adalah suatu pemetaan $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to F$, dengan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ yang selanjutnya disebut sebagai hasil kali dalam dari $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$, sehingga untuk setiap vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan suatu nilai skalar α diperoleh*

(1) $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$

(2) $\langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$

(3) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}$

(4) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geq 0$

$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$. (Kreyszig, 1989)

Hubungan norm dan hasil kali dalam di X didefinisikan oleh

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}.$$

Definisi 2.15 *Suatu ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap.* (Kreyszig, 1989)

Contoh 2.16 Ruang L^2 merupakan ruang Hilbert.

Ruang L^2 merupakan salah satu contoh dengan hasil kali dalam

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ adalah suatu fungsi Sehingga berlaku aturan-aturan dalam bilangan kompleks.

Langkah 1. Akan ditunjukkan ruang hasil kali dalam L^2 memenuhi (IP1), (IP2), (IP3) dan (IP4).

(IP1) $\langle \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\rangle = \int_\Omega (f(x)+g(x)h(x)dx$

$= \int_\Omega (f(x)h(x)+g(x)h(x)\,dx$

$= \int_\Omega (f(x)h(x)dx + \int_\Omega g(x)h(x)\,dx$

$= \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{h}\rangle + \langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\rangle.$

(IP2) $\langle \alpha\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle = \int_\Omega \alpha f(x)g(x)dx$

$= \alpha\int_\Omega f(x)g(x)dx$

$= \alpha\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle.$

(IP3) $\overline{\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{f}\rangle} = \overline{\int_\Omega g(x)f(x)dx}$

$= \int_\Omega f(x)g(x)dx$

$= \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle.$

(IP4) $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = \int_{\Omega} f(x)f(x)dx$

$= \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \geq 0.$

Jika $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = 0$ maka akan ditunjukkan $f(x) = 0$

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = \int_{\Omega} f(x)f(x)dx = 0$$

$|f(x)|^2 = 0$ diperoleh $f(x) = 0$.

Jika $f(x) = 0$ maka $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = 0$.

Karena $f(x) = 0$ sehingga dapat ditulis

$$\int_{\Omega} f(x)f(x)dx = \int_{\Omega} 0\, dx = 0.$$

Langkah 2. Menunjukkan L^2 adalah ruang lengkap.

Berdasarkan pada Contoh 2.12 L^2 adalah ruang lengkap. Karena L^2 memenuhi aturan hasil kali dalam dan L^2 lengkap maka L^2 adalah ruang Hilbert.

2.5 Persamaan Differensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial yang artinya turunan fungsi terhadap dua atau lebih variabel bebas. Sebagai contoh, temperatur suatu batangan logam tertentu senantiasa bergantung pada posisi atau tempat dan waktu. Dalam bentuk sederhana persamaan diferensial parsial dinyatakan matematis berikut,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Pada suatu Persamaan diferensial parsial (PDP) ada yang disebut dengan orde. Orde PDP merupakan turunan tertinggi dari turunan parsial yang ada. Linieritas diklasifikasi atas linier dan nonlinier. PDP dikatakan linier jika tidak terdapat faktor kuadratik atau pangkat lainnyadan perkalian terhadap u sedangkan PDP dikatakan nonlinier terdapat faktor kuadratik atau pangkat lainnya dan perkalian terhadap u. (Evans, 1998)

Contoh 2.17

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$; PDE berorde 2 dan Linier.

(2) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$; PDE berorde 3 dan Linier.

(3) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = x$; PDE berorde 3 dan Nonlinier.

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$; PDE berorde 2 dan Nonlinier.

Misal, suatu PDP yang berorde dua,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0. \qquad (2.1)$$

disebut

(1) Persamaan Diferensial Eliptik,

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$. Persamaan diferensial eliptik adalah persamaan yang berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau tidak bergantung pada waktu dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan. Seperti air tanah dibawah bendungan dan karena adanya pemompaan serta difleksi pelat akibat pembebanan, dengan bentuk persamaan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(2) Persamaan Diferensial Parabolik,

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$. Persamaan diferensial parabolik biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu dan penyesaiannya memerlukan kondisi awal dan syarat batas. Persamaan yang paling sederhana yaitu perambatan panas, dengan bentuk persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}(u^2).$$

(3) Persamaan Diferensial Hiperbolik

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$. Persamaan diferensial hiperbolik biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinu dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi diskontinu dalam kecepatan dan rapat massa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Suatu fungsi $u(t)$ disebut solusi dari suatu persamaan differensial apabila jika disubtitusi $u(t)$ dan turunannya ke dalam persamaan diferensial memenuhi persamaan tersebut untuk semua nilai t dalam domain $u(t)$.

2.6 Persamaan Reaksi-Difusi

Secara matematis persamaan reaksi-difusi yang paling sederhana dapat direpresentasikan dalam bentuk umum,

$$u_t = D\Delta u + f(u) \tag{2.2}$$

dengan $u = u(x,t)$ adalah variabel keadaan dan menggambarkan kepadatan/konsentrasi suatu zat, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ pada waktu t (Ω merupakan himpunan buka). Δ menunjukkan operator Laplace. Jadi suku pertama pada sisi kanan menggambarkan "difusi", termasuk D sebagai koefisen difusi. Suku kedua, $f(u)$ adalah fungsi *smooth* $f: R \to R$ menggambarkan proses yang dapat mengubah u. Suku reaksi tersebut tidak hanya bergantung pada u, tetapi juga dapat bergantung pada turunan pertama dari u, yaitu ∇u, dan sebagainya. (Grindrod, Peter, 1996)

Persamaan reaksi-difusi pada pesamaan (2.2) dikatakan persamaan diferensial parsial karena terdiri dari dua variabel bebas pada $u = u(x,t)$ yaitu x dan t, serta adanya faktor Δu dengan $\Delta u = \sum_{j-1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ yang artinya turunan parsial sehingga dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial. Jika Persamaan (2.2) di misalkan dalam bentuk $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_t + Eu_y + Fu + G = 0$ sehingga diperoleh $= D$, $B = 0$ dan $C = 0$ dengan D ini merupakan koefisien difusi atau konstanta, jadi Persamaan (2.2) memenuhi kondisi $B^2 - 4AC = 0$ maka dapat dikatakan persamaan diferensial parsial tipe parabolik.

Contoh 2.18 Misalkan persamaan reaksi-difusi sebagai berikut**,**

$$u_t = \Delta u + u - u^3 \tag{2.3}$$

Jadi Persamaan (2.3) dapat dikatakan parabolik jika memenuhi kondisi $B^2 - 4AC = 0$ ketika persamaan (2.3) dalam bentuk $u_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_t + Eu_y + Fu + G = 0$, diperoleh $A = 1$, $B = 0$ dan $C = 0$ maka $B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1)(0) = 0$ sehingga dapat dikatakan Persamaan (2.3) PDP Parabolik dan Persamaan (2.3) merupakan *nonlinier* karena adanya faktor perpangkatan dari u.

2.7 Operator Linier

Definisi 2.19 *Suatu operator linear T adalah suatu operator sedemikian sehingga,*

1. *Domain $\mathfrak{D}(T)$ pada T adalah ruang vektor dan range $\mathfrak{R}(T)$ juga adalah ruang vektor pada lapangan yang sama yang dituliskan sebagai*

$$T: \mathfrak{D}(T) \to \mathfrak{R}(T)$$

2. *Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{D}(T)$ dan skalar α,*

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T\boldsymbol{x} + T\boldsymbol{y}$$

$$T(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha T \boldsymbol{x}.$$

(Kreyszig, 1989)

Penulisan $T(x)$ dapat dituliskan sebagai Tx.

Contoh 2.20 Operator identitas $I_x: X \to X$ didefinisikan oleh $I_x x = x$ untuk setiap $x \in X$. Kita juga menulis sederhana I untuk I_x. Jadi $Ix = x$.

Definisi 2.21 *Misalkan X dan Y adalah ruang norm dan $T: \mathfrak{D}(T) \to Y$ adalah suatu operator linear, dengan $\mathfrak{D}(T) \subset X$ .Operator T dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan real positif M sedemikian sehingga untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$,* (Kreyszig, 1989)

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

Contoh 2.22 Misalkan $C[0,1]$ adalah ruang bernorma dengan norma yang didefinisikan sebagai,

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

Operator integral $T: C[0,1] \to C[0,1]$ yang didefinisikan oleh $y = Tx$ dengan

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)\, x(\tau) d\tau,$$

dan fungsi k diasumsikan kontinu dan interval tutup pada $G = [0,1] \times [0,1]$. Maka akan ditunjukkan operator T adalah operator linier terbatas.

Karena diketahui fungsi k kontinu pada interval tutup G maka fungsi k terbatas atau terdapat bilangan riil positif k_0 sedemikian sehingga $|k(t,\tau)| \le k_0$ dan

$$\begin{aligned}
\|y\| = \|Tx\| &= \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(t,\tau)\, x(\tau) d\tau \right| \\
&\le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|\, |x(\tau)| d\tau \\
&\le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 k_0\, |x(\tau)| d\tau \\
&= k_0 \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |x(\tau)| d\tau \\
&= k_0 \|x\|.
\end{aligned}$$

Jadi, terdapat bilangan riil posotif k_0 sedemikian sehingga $\|Tx\| \le k_0 \|x\|$ untuk $x \subset C[0,1]$ sehingga operator T adalah operator terbatas.

2.8 Semigrup

Definisi 2.23 *Misalkan M adalah ruang banach. Keluarga dari operator-operator linier terbatas $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ yang memetakan $S(t): M \to M,\ t \ge 0$ dikatakan semigrup jika,*

1). $S(0) = I$, *adalah pemetaan identitas di ruang bernorma* M.
2). $S(t + s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$.

(Temam Roger, 1997)

Contoh 2.24 Misalkan $u(t) = e^t$, dan $e^t \in M$, dimana M adalah bernorma dan $s, t, k \geq 0$. Dan misalkan,

$$S(t): u(s) \to u(t + s)$$

(i) $S(0)u(s) = u(0 + s) = u(0)u(s) = e^0 u(s) = 1u(s) = u(s)$, jadi $S(0)$ merupakan pemetaan identitas di ruang bernorma M,

(ii) $S(t + s)u(k) = u(t + s + k) = S(t)u(s + k) = S(t)(S(s)u(k)) = S(t)S(s)u(k)$.

Jadi menurut Definisi 2.23, himpunan dari operator $\{S(t)\}$ dari pemetaan $S(t): M \to M$, disebut semigrup.

Pada buku Zheng (2004), Persamaan (1.2)-(1.4) telah ditunjukkan keberadaan solusi didefinisikan berikut

Definisi 2.25 *Asumsikan Ω adalah domain terbatas yang smooth di* $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$. *Untuk setiap nilai awal* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *dan setiap* $T > 0$, *terdapat solusi unik* u *untuk persamaan (1.2)-(1.4) yang memenuhi*

$$u \in C\big([0, T], H^2(\Omega)\big) \cap C^1([0, T], L^2)$$

dan didefinisikan operator semigrup $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *di ,* $H^2(\Omega)$ *sebagai*

$$S(t)u_0: H^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+ \to H^2(\Omega).$$

(Zheng, Songmu., 2004)

Telah dibuktikan oleh Zheng (2004) bahwa Persamaan (1.2)-(1.4) memiliki solusi global u yang tunggal didefinisikan oleh,

$$u(t) = S(t)u_0 \tag{2.4}$$

dengan $S(t)$ semigrup pada H^2.

2.9 Beberapa Formula dan Ketidaksamaan Lainnya

Definisi 2.27 (Formula Green). Misalkan $u, v \in C^2(\Omega)$ sehingga

$$\int_\Omega Dv \,.\, Du \, dx = -\int_\Omega u\Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS.$$

(Evans, 1998)

Teorema 2.28 ***(Ketidaksamaan Young).*** *Misalkan* $\varepsilon > 0,\ a, b \geq 0,\ p, q > 1,$ *dan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sehingga*

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \frac{b^q}{q}.$$

(Cholewa, J. W., & Dlotko, T., 2000)

Teorema 2.29 ***(Sobolev Imbedding)*** *Asumsikan bahwa* Ω *adalah domain terbatas di* C^m. *Sehingga kita punya, Jika* $mp < n$, *maka* $W^{m,p}(\Omega)$ *adalah imbedded kontinu di* $L^{q*}(\Omega)$ *dengan* $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

$$W^{m,p}(\Omega)$$

(Zheng, Songmu., 2004)

Teorema 2.30 ***(Ketidaksamaan Diferensial Energi)***

$$\frac{dE(t)}{dt} + C_1 E(t) \leq C^2, \forall t \geq 0$$

dengan solusi umum

$$E(t) \leq E(0)e^{-C_1 t} + \frac{C_2}{C_1}, \forall t \geq 0$$

(Zheng, Songmu., 2004)

Teorema 2.31 ***(Interior regularity)*** *Misalkan* $u \in H^2$ *adalah weak solution (global solution) dari persamaan diferensial parsial yaitu*

$$\Delta u = f$$

sehingga

$$\|u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$$

(Evans, 1998)