

SKRIPSI

**PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG
TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA
HINGGA EKSPLISIT**

Disusun dan diajukan oleh

SYAHRUL

H11114008



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021**

**PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG
TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA
HINGGA EKSPLISIT**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Komputer pada Program Studi Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

SYAHRUL

H11114008

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Syahrul
NIM : H11114008
Program Studi : Matematika
Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA EKSPISIT

Adalah benar hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain dan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 02 Agustus 2021

Yang Menyatakan

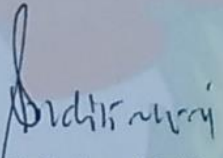

Syahrul


**PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG TSUNAMI
DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT**

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama


Andi Galsan Mahie, S.Si, M.Si
NIP. 19720628 200501 1 002


Dr. Khaeruddin, M.Sc
NIP. 19650914 199103 1 003

Ketua Program Studi


Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si
NIP. 19700807 200003 1 002



Pada Tanggal : 02 Agustus 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT

Disusun dan diajukan oleh :

SYAHRUL

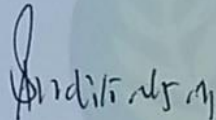
H11114008

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Pada tanggal 02 Agustus 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama



Andi Galsan Mahie, S.Si, M.Si

NIP. 19720628 200501 1 002



Dr. Khaeruddin, M.Sc

NIP. 19650914 199103 1 003

Ketua Program Studi



Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si

NIP. 19700807 200003 1 002



KATA PENGANTAR



Segala puji bagi Allah Azza Wa Jalla Rabb semesta alam yang ditangan-Nya terenggam nyawa seluruh makhluk semesta alam, yang Maha kekal sebelum sesuatunya ada, dan akan tetap kekal setelah segala sesuatunya tiada. Shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi Muhammad ﷺ dan kepada para keluarga serta Sahabat beliau. Alhamdulillah Wasyukurillah, berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul “ **PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT** ” yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar dalam program studi matematika.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tugas akhir ini masih terdapat kekurangan dalam penyelesaian dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua penulis, Ayahanda **Muh. Jabir** dan Ibunda **Sahri** yang telah mendidik dengan penuh kesabaran, terimakasih telah mencurahkan kasih sayang yang tak pernah putus, kesungguhan dalam memberikan dukungan moril serta tak kenal lelah dalam memanjatkan doa serta memberikan nasihat dan motivasi kepada penulis selama menjalani proses pendidikan. Untuk adik penulis **Syafar Rahmat** serta keluarga yang senantiasa memberikan dukungan dan doa, terima kasih atas segala perhatian yang telah kalian berikan kepada penulis. Tugas akhir ini hanya setitik kebahagiaan kecil yang bisa penulis persembahkan kepada kalian.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**, selaku Ketua Departemen Matematika dan segenap dosen pengajar dan staf Departemen Matematika yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma**, selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan dukungannya yang setulus hati meluangkan waktu ditengah berbagai kesibukan.
5. Bapak **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si**, selaku dosen pembimbing utama atas nasehat, dukungan, doa dan dengan setulus hati telah meluangkan waktunya ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc**, selaku dosen pembimbing pertama atas segala masukan bantuan, nasehat serta motivasi yang diberikan kepada penulis dalam membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Bapak **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc** selaku ketua penguji dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**, selaku sekretaris penguji atas kesediaannya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
8. **Dosen pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika. Serta Staf Departemen Matematika yang telah membantu banyak dalam perkuliahan.
9. Saudara tak sedarah **TRANSPOSE 2014**, terkhusus ketua angkatan **Fandy Heribet**, saudara-saudara di grup **SAHABAT LERR** terkhusus **Arfyan Saputra, Nivel Saputra Wahid, Setiawan Ahmad, Munawir**

Djamaluddin, Muh. Sarwan, Miftah Farid, Muh. Alfajar, Hedi Kuswanto, Rachmat Darmawan, Ahmad Husain, Muhammad Mappanyompa, Muh. Ij'lal, Andi Muh. Fawzy serta seluruh saudara saudari tanpa terkecuali Transpose 2014 terima kasih telah menjadi rumah ke dua bagi penulis.

10. Seluruh **Anggota Himatika FMIPA Unhas**, kanda POLINOM 2011, REKURENSI 2012, BINOMIAL 2013, adinda SIMETRIS 2015, ALGORITMA 2016, DISKRIT 2017, INTEGRAL 2018, POLIGON 2019 dan HORIZONTAL 2020. Terima kasih telah menjadi keluarga dan memberikan kenangan yang tidak akan penulis lupakan.
11. Saudara – saudari **MIPA 2014** tanpa terkecuali terkhusus ketua angkatan **Muh. Sidiq Tolleng** semoga selalu tetap pada slogan “Kita Semua Sama”.
12. Seluruh teman-teman KKN Pangkajene dan Kepulauan Unhas Gel.96, terkhusus kepada teman **Posko Kelurahan Paddoang-doangan**, terima kasih atas waktu singkat dan pengalaman yang bermakna.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas segala bentuk kontribusi, partisipasi, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini. Semoga apa yang telah diberikan akan dilipatgandakan oleh Allah Subhanahu Wa Ta’ala. Aamiin.

Makassar, 02 Agustus 2021



Syahrul

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Syahrul
NIM : H11114008
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Noneklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul :

Pemodelan Numerik Perambatan Gelombang Tsunami Dua Dimensi Dengan Metode Beda Hingga Eksplisit

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 02 Agustus 2021

Yang menyatakan


(Syahrul)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang perambatan tsunami linear dua dimensi secara numerik untuk mengaproksimasi solusi dari model yang digunakan. Perambatan tsunami dimodelkan menggunakan persamaan air dangkal atau Shallow Water Equation (SWE) karena meskipun tsunami terjadi pada perairan yang sangat dalam, akan tetapi panjang gelombangnya lebih besar dibandingkan kedalaman perairannya. Model dibangun dan diselesaikan dengan metode numerik skema DuFort-Frankel. Kestabilan skema DuFort-Frankel diuji dengan menggunakan stabilitas Von Neumann yang menghasilkan skema DuFort-Frankel stabil dengan $4bg \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1$.

Kata kunci : Tsunami, SWE, DuFort-Frankel, Von Neumann

ABSTRACT

This research discusses the two-dimensional linear tsunami propagation numerically to approximate the solution of the model used. Tsunami propagation is modeled using the shallow water equation (SWE) because although the tsunami occurs in very deep waters, the wavelength is larger than the depth of the water. The model was constructed and solved by the DuFort-Frankel schema numerical method. The stability of the DuFort-Frankel scheme was tested using Von Neumann stability which resulted in a stable DuFort-Frankel scheme with $4bg \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1$.

Keyword : Tsunami, SWE, DuFort-Frankel, Von Neumann

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	iii
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING	iv
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	v
KATA PENGANTAR	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS	ix
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
I.1. Latar Belakang.....	1
I.2. Rumusan Masalah	2
I.3. Batasan Masalah	2
I.4. Tujuan Penulisan	2
I.5. Manfaat Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
II.1. Gelombang Tsunami	4
II.2. Persamaan Gelombang Air Dangkal	5
II.3. Deret Taylor.....	11
II.4. Metode Beda Hingga.....	12
II.5. Metode Beda Hingga Eksplisit.....	17
II.6. Kestabilan	19
	xii

BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	21
III.1. Jenis Penelitian	21
III.2. Tahap Persiapan.....	21
III.3. Tahap Pengumpulan Dan Pengolahan Data	21
III.4. Tahap Analisa dan Kesimpulan.....	24
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	25
IV.1. Diskritisasi <i>SWE 2D</i> Skema <i>DuFort-Frankel</i>	25
IV.2. Analisis Kestabilan Metode DuFort-Frankel.....	27
IV.3. Simulasi dan Interpretasi Skema DuFort-Frankel	31
BAB V PENUTUP.....	39
V.1. Kesimpulan.....	39
V.2. Saran	39
DAFTAR PUSTAKA	40
LAMPIRAN.....	42

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1. Fenomena Persamaan Air Dangkal	5
Gambar 2. 2. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.35).....	14
Gambar 2. 3. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.41).....	15
Gambar 2. 4. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.46).....	16
Gambar 2. 5. Titik grid untuk skema eksplisit	17
Gambar 2. 6. Grid point pada skema FTCS	18
Gambar 2. 7. Grid point pada skema Dufort-Frankel	19
Gambar 3. 1. Alur Kerja.....	23
Gambar 4. 1. $h(x,y,t)$ untuk $t=0s$	33
Gambar 4. 2. $h(x,y,t)$ untuk $t=0.3s$	34
Gambar 4. 3. $h(x,y,t)$ untuk $t=0.65s$	34
Gambar 4. 4. $h(x,y,t)$ untuk $t=1s$	34
Gambar 4. 5. $h(x,y,t)$ untuk $t=1.5s$	34
Gambar 4. 6. $h(x,y,t)$ saat $t=0s$	36
Gambar 4. 7. $h(x,y,t)$ untuk $t=0.3s$	37
Gambar 4. 8. $h(x,y,t)$ untuk $t=1.5s$	37
Gambar 4. 9. $h(x,y,t)$ untuk $t=2s$	37
Gambar 4. 10. $h(x,y,t)$ untuk $t=3s$	37

BAB I PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang memiliki peranan penting dalam kehidupan manusia. Banyak masalah dalam kehidupan manusia yang dapat dimodelkan dengan ilmu matematika, misalnya fenomena alam. Dalam ilmu matematika dipelajari persamaan diferensial yaitu suatu persamaan yang menghubungkan fungsi beserta turunan-turunannya. Persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari dapat diterapkan dalam memodelkan suatu peristiwa alam yang menjadi problem agar ditemukan solusinya secara matematis. Peristiwa alam tersebut meliputi permasalahan epidemiologi, mekanika dan fluida, transportasi, klimatologi dan meteorologi, dan tsunami.

Tsunami berasal dari Bahasa Jepang yaitu “tsu” yang berarti pelabuhan dan “nami” yang berarti gelombang. Kata ini kemudian diartikan gelombang besar yang menghantam pantai. Pada umumnya tsunami terjadi akibat gempa bumi tektonik besar dengan pusat gempa dangkal (kedalaman < 70 km) (Ilyas, 2006).

Tsunami dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan gelombang air dangkal, karena Tsunami meskipun terjadi pada perairan yang sangat dalam sekitar 4-5 km, tetapi panjang gelombangnya sangat besar bila dibandingkan dengan kedalaman perairannya, yaitu antara 100-200 km (Jamhuri, 2014).

Persamaan gelombang air dangkal atau biasa disebut SWE (*shallow water equation*) merupakan sistem persamaan diferensial parsial yang solusinya dapat ditentukan dengan menggunakan metode numerik. SWE telah banyak diturunkan oleh para peneliti terdahulu, salah satunya adalah pada laporan penelitian yang ditulis oleh Mohammad Jamhuri dari Universitas Islam Negeri (UIN) Maliki yang menurunkan SWE dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum. Persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum tersebut diistilahkan sebagai persamaan-persamaan pengatur dalam pemodelan gelombang. Dalam laporan penelitian tersebut dibuat prosedur numerik penyelesaian model perambatan gelombang air dangkal yang dihasilkan

dari penurunan SWE. Prosedur numerik yang digunakan dalam laporan penelitian tersebut adalah metode finite volume.

Pada penelitian ini, akan dilakukan pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami dengan menggunakan persamaan SWE linear 2D yang diperoleh dari hasil penurunan SWE dalam laporan penelitian Mohammad Jamhuri. Pemodelan numerik yang akan digunakan dalam penelitian ini berbeda dengan metode numerik yang digunakan dalam laporan penelitian tersebut. Dalam Penelitian ini akan membahas pemodelan numerik dengan menggunakan metode beda hingga dengan skema eksplisit untuk membentuk model numerik perambatan gelombang tsunami. Fokus dari penelitian ini adalah untuk memodifikasi model numerik perambatan gelombang tsunami dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit DuFort-Frankle. Kajian ini dituangkan dalam sebuah skripsi yang berjudul:

**“PEMODELAN NUMERIK PERAMBATAN GELOMBANG
TSUNAMI DUA DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA
EKSPLISIT”.**

I.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang dirumuskan dalam skripsi ada dua yaitu:

1. Bagaimana melakukan pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami dengan metode Dufort-Frankel?
2. Bagaimana syarat kestabilan dari model numerik perambatan gelombang tsunami?

I.3. Batasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini akan dibatasi pada pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami dengan persamaan air dangkal linear 2D dan menggunakan metode beda hingga skema DuFort-Frankel.

I.4. Tujuan Penulisan

Skripsi ini mempunyai dua tujuan, yaitu:

1. Melakukan pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami dengan metode DuFort-Frankel.
2. Menentukan syarat kestabilan dari model numerik perambatan gelombang tsunami.

I.5. Manfaat Penulisan

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat berupa:

1. Penjelasan pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami
2. Penjelasan tentang syarat kestabilan model numerik perambatan gelombang tsunami
3. Pembahasan, pengetahuan, dan informasi pada penelitian yang terkait dengan pemodelan numerik perambatan gelombang tsunami.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

II.1. Gelombang Tsunami

Tsunami adalah gelombang yang terjadi karena adanya letusan gunung berapi (*volcanoes*), longsor bawah laut (*submarine landslide*), atau gempa bumi (Bryant, 2008 dan Jokowiarno, 2009). Diantara penyebab tersebut, gempa bumi yang terjadi di dasar laut adalah faktor yang sering menyebabkan terjadinya tsunami. Tetapi, gempa bumi yang terjadi di laut tidak semuanya dapat menyebabkan terjadinya tsunami. Ada beberapa kondisi yang menjadi syarat terjadinya tsunami diantaranya adalah adanya pergerakan lempeng bumi sehingga saling bertemu, kemiringan sudut antar lempeng dan kedalaman laut yang tidak lebih dari 80 km (Kodoatie & Syarif, 2010). Pergerakan lempeng yang saling bertemu akan membentuk patahan baik dalam arah vertical maupun horizontal. Ketika terjadi patahan, maka volume air yang berada di atasnya akan ikut bergerak dan melahirkan tsunami (Sutowijoyo, 2005).

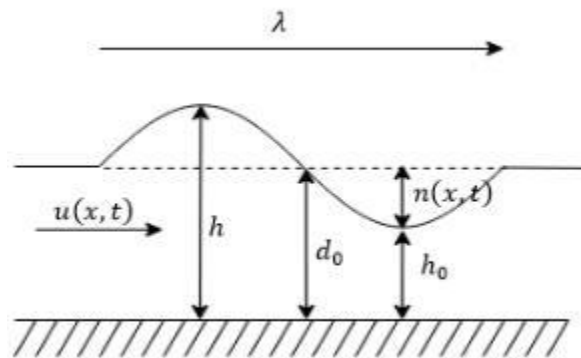
Gelombang tsunami merupakan gelombang panjang yang dapat menjalar kesegala arah dari sumber asalnya. Gelombang tersebut menjalar sebagai gelombang perairan dangkal (Geist, 1997), karena kebanyakan tsunami bergerak pada kedalaman yang nilai kedalaman tersebut kurang dari setengah dari nilai panjang gelombang (Bryant, 2008). Pada saat dilaut terbuka, tsunami mempunyai periode 15 sampai 20 menit (Neumann & Pierson, 1966). Karakteristik tersebut membuat gelombang tsunami sulit dibedakan dengan gelombang biasa, dan bahkan sulit dibedakan oleh kapal-kapal yang sedang berlayar.

Perubahan kontur atau dasar perairan akan mempengaruhi ketinggian gelombang. Semakin dangkal dasar perairan, maka akan semakin tinggi tsunami tersebut. Kondisi tersebut dapat membuat tinggi tsunami mencapai puluhan meter ketika bergerak menuju pantai (Triatmodjo, 2002). Berbeda dengan tinggi tsunami, kecepatan tsunami akan semakin menurun ketika menuju pantai. Pada saat di lautan dalam kecepatan gelombang berkisar 166-250 m/s, dan ketika

memasuki area dengan kedalaman ± 200 m menjadi 28-83 m/s, sedangkan saat mencapai pantai menjadi 10 m/s (Bryant, 2008).

II.2. Persamaan Gelombang Air Dangkal

Persamaan gelombang air dangkal atau Shallow Water Equation (SWE) yaitu persamaan sistem hiperbolik yang dapat digunakan dalam mendeskripsikan bermacam-macam kejadian yang berhubungan dengan fluida. Selain itu, persamaan ini banyak digunakan dalam mensimulasikan pergerakan fluida yang dapat berjalan dua arah dalam ruang satu dimensi serta ke segala arah dalam ruang dua dimensi (Farouq & Adytia, 2018). Persamaan ini terdiri atas dua persamaan yang diperoleh dari hasil penurunan rumus dari hukum kesetimbangan fluida yaitu hukum kekekalan massa dan kekekalan momentum yang kemudian menjadi persamaan pengatur. Umumnya, model SWE digunakan untuk memodelkan aliran gelombang pada permukaan air yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi misalnya aliran gelombang pada permukaan danau, laut, ataupun sungai. Pada persamaan gelombang air dangkal, pergerakan permukaan air dipengaruhi oleh kedalaman dan berlaku bahwa panjang gelombang (λ) lebih panjang dari kedalaman air (d_0) (Farouq & Adytia, 2018).



Gambar 2. 1. Fenomena Persamaan Air Dangkal

Pada Gambar 2.1 merupakan contoh dari sistem persamaan air dangkal satu dimensi dimana variabel x adalah variabel jarak, t merupakan variabel waktu, λ merupakan panjang gelombang air, $h = h(x; t)$ adalah kedalaman air,

$u = u(x; t)$ adalah kecepatan dalam arah x , $n(x; t)$ merupakan perubahan ketinggian air, dan d_0 merupakan kedalaman air (Farouq & Adytia, 2018).

II.2.1. Persamaan Pengatur

Penomona alam Tsunami ini dimodelkan dengan menggunakan persamaan gelombang air-dangkal atau SWE. Penurunan SWE akan dilakukan dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum serta kondisi-kondisi pada permukaan bebas dan dasar saluran. Persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum tersebut biasa diistilahkan sebagai persamaan-persamaan pengatur dalam pemodelan gelombang. Adapun persamaan tersebut adalah:

1. Persamaan kontinuitas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{pada } -b(x, y) < z < \eta(x, y, t) \quad (2.1)$$

2. Persamaan momentum,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) = -\frac{1}{\rho} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) = -\frac{1}{\rho} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (2.4)$$

$$\text{pada } -b(x, y) < z < \eta(x, y, t)$$

3. Kondisi kinematik pada permukaan bebas,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \quad \text{pada } z = \eta(x, y, t) \quad (2.5)$$

4. Kondisi kinematik pada dasar saluran,

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w = 0 \quad \text{pada } z = b(x, y) \quad (2.6)$$

dimana x dan y adalah sumbu horizontal, z adalah sumbu vertikal, t adalah waktu, b adalah kedalaman dasar saluran, η adalah ketinggian permukaan laut, u ,

v , dan w adalah kecepatan partikel laut pada sumbu x , y , dan z , g adalah percepatan gravitasi, dan p adalah tekanan *hydrostatic* (Jamhuri, 2014).

Persamaan (2.4) telebih dahulu dijabarkan sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} w + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} w + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} w + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \end{aligned} \quad (2.7)$$

Atau

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{Turunan total } \left(\frac{Dw}{Dt} \right)} + \underbrace{w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{Persamaan kontiunitas}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (2.8)$$

Pada masalah gelombang panjang atau air dangkal, lapisan air dianggap sangat tipis dan tidak dipengaruhi oleh kedalaman air, sehingga turunan total dari w dapat diabaikan dan persamaan (2.8) menjadi:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (2.9)$$

sehingga dapat diperoleh:

$$p = \int_{-b}^{\eta} \rho g dz = \rho g(\eta + b) \quad (2.10)$$

Subtitusikan p dari persamaan (2.10) pada persamaan momentum (2.2) dan (2.3) sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) = -g \frac{\partial}{\partial x}(\eta + b) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) = -g \frac{\partial}{\partial y}(\eta + b) \quad (2.12)$$

II.2.2. Persamaan Kontinuitas

Agar solusi dari persamaan (2.1), (2.11), dan (2.12) dapat ditentukan, ketiga persamaan tersebut diintegrasikan terhadap z , dimana $-b(x, y) < z < \eta(x, y, t)$. Dari persamaan kontinuitas (2.1) diintegrasikan terhadap z , yaitu

$$\int_{-b}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \right) dz \quad (2.13)$$

Dengan menggunakan aturan Leibniz tentang integral, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz - (u|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (u|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz - (v|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial y} - (v|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^{\eta} w dz - (w|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial z} - (w|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Karena η dan b bebas dari z maka persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz \\ &+ \left[-(u|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (v|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial y} + w|_{z=\eta} \right] \\ &- \left[(u|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial x} + (v|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial y} + w|_{z=-b} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dengan menggunakan kondisi batas (2.5) dan (2.6) maka diperoleh

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz = 0 \quad (2.16)$$

Gunakan aproksimasi $\int_{-b}^{\eta} u dz$ dan $\int_{-b}^{\eta} v dz$ sebagai berikut:

$$\int_{-b}^{\eta} u dz \approx u(\eta + b) \quad \text{dan} \quad \int_{-b}^{\eta} v dz \approx v(\eta + b)$$

Dengan asumsi bahwa kedalaman air, $z = (\eta + b)$ sangat kecil yang diperoleh dari asumsi air dangkal yang mana sebagai akibatnya u dan v dapat dianggap konstan terhadap z . Sehingga persamaan (2.16) menjadi:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\eta + b)] = 0 \quad (2.17)$$

II.2.3. Persamaan Momentum dalam Arah-x dan Arah-y

1. Persamaan momentum dalam arah- x adalah

Kedua ruas dari persamaan momentum (2.11) diintegrasikan terhadap z sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial z} (wu) \right) dz \\ = - \int_{-b}^{\eta} \left(g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b) \right) dz \end{aligned} \quad (2.18)$$

Gunakan aturan Leibniz pada persamaan (2.18) kemudian gunakan kondisi syarat batas (2.5) dan (2.6) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (vu) dz = \\ - \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b)^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Gunakan aproksimasi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} u dz \approx u(\eta + b), \int_{-b}^{\eta} (u^2) dz \approx (u^2)(\eta + b), \\ \text{dan } \int_{-b}^{\eta} (vu) dz \approx vu(\eta + b) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.19) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} \left[u^2(\eta + b) + \frac{1}{2} g(\eta + b)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} [vu(\eta + b)] = 0 \quad (2.20)$$

2. Persamaan momentum dalam arah- y adalah

Kedua ruas dari persamaan momentum (2.12) diintegrasikan terhadap z sebagai berikut:

$$\int_{-b}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) \right) dz = - \int_{-b}^{\eta} \left(g \frac{\partial}{\partial y}(\eta + b) \right) dz \quad (2.21)$$

Gunakan aturan Leibniz pada persamaan (2.21) kemudian gunakan kondisi syarat batas (2.5) dan (2.6) sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (uv) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (v^2) dz = - \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b)^2 \quad (2.22)$$

Gunakan aproksimasi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} v dz &\approx v(\eta + b), \quad \int_{-b}^{\eta} (uv) dz \approx uv(\eta + b), \\ \text{dan} \quad \int_{-b}^{\eta} (v^2) dz &\approx v^2(\eta + b) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.22) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} [v(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} [uv(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v^2(\eta + b) + \frac{1}{2} g(\eta + b)^2 \right] = 0 \quad (2.23)$$

Misalkan kedalaman air $(\eta + b)$ sebagai $h = (\eta + b)$, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\eta + b) \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Maka persamaan (2.17), (2.20), dan (2.23) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0 \quad (2.27)$$

II.2.4. Pelinieran Model SWE

Persamaan air dangkal (2.25), (2.26), dan (2.27) dapat dilinearkan dengan memisalkan perubahan ketinggian permukaan gelombang cukup kecil disekitar ketinggian permukaan gelombang pada kondisi diam, yaitu

$$\eta = 0 + \eta', \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v' \quad (2.28)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.28) pada Persamaan air dangkal (2.25), (2.26), dan (2.27). Kemudian mengabaikan suku-suku orde-2, akan diperoleh bentuk linear dari persamaan air dangkal

Persamaan (2.25), (2.26), dan (2.27) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.31)$$

Variable h merupakan ketinggian permukaan air, variabel b merupakan kedalaman dasar saluran, variabel u merupakan kecepatan fluida di permukaan pada arah x , variabel v merupakan kecepatan fluida di permukaan pada arah y , dan variabel g merupakan percepatan gravitasi pada fluida.

II.3. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Persamaan deret Taylor dari $y = f(x)$ di sekitar x_0, y_0 adalah sebagai berikut:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2.32)$$

Asal dari persamaan (2.32) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)^1 + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots \\ + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x - x_0)^1 + 4.3a_4(x - x_0)^2 + 5.4a_5(x - x_0)^3 + \dots \\ + n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n - 2}$$

$$f'''(x) = 3.2a_3 + 4.3.2a_4(x - x_0)^1 + 5.4.3a_5(x - x_0)^2 + \dots \\ + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

$$f^n(x) = n! (a_n)$$

Kemudian, pada fungsi awal dan fungsi-fungsi turunan tersebut, jika diterapkan $x = x_0$, maka:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2! (a_2)$$

$$f'''(x_0) = 3! a_3$$

⋮

$$f^n(x) = n! (a_n)$$

Dengan memasukan nilai a_0, a_1, a_2, a_3 , dan seterusnya, maka deret taylor pun terbukti seperti pada persamaan (2.32) (Purcel & Verbeg , 1987).

II.4. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan metode yang sangat umum dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial yang didasarkan pada ekspansi deret taylor (Srauss, 2007). Penurunan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Ross, 1998).

Misalkan diberikan sebuah fungsi $f(x)$ yang analitis, maka $f(x + \Delta x)$ dapat diekspansi dalam sebuah deret taylor disekitar x sebagai

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \\
&+ \dots \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Dari persamaan (2.33), dapat diperoleh:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots \tag{2.34}$$

Jika suku-suku yang memuat faktor Δx atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, maka $\frac{\partial f}{\partial x}$ dapat ditulis

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.35}$$

Persamaan (2.35) merupakan pendekatan turunan parsial orde pertama dari fungsi f terhadap x , jika indeks i digunakan sebagai diskritisasi titik kearah x , maka (2.35) menjadi

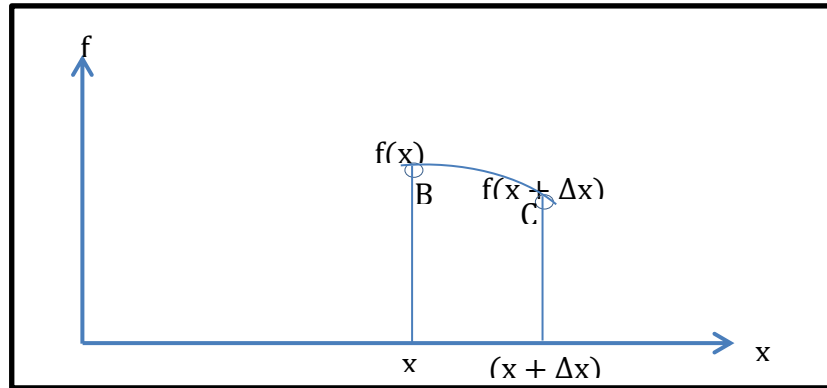
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.36}$$

Persamaan (2.36) disebut pendekatan beda maju orde pertama dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ orde (Δx) . Sangat jelas kelihatan bahwa jika ukuran Δx diperkecil, maka galat akan berkurang akibatnya ketepatan dari pendekatan akan meningkat. Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y) , dengan indeks j digunakan sebagai diskritisasi titik kearah y maka bentuk dari pendekatan beda maju menjadi

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.37}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_j = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \tag{2.38}$$

Secara grafik akan ditunjukkan dalam Gambar 2.2, hampiran ini dapat diinterpretasikan sebagai kemiringan fungsi pada titik B , menggunakan nilai fungsi pada titik B dan C .



Gambar 2. 2. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.35)

Dengan cara yang sama $f(x - \Delta x)$ pertimbangankan dapat diekspansi dalam deret Taylor disekitar x sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(x - \Delta x) &= f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \\
 &\quad - \dots \\
 &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

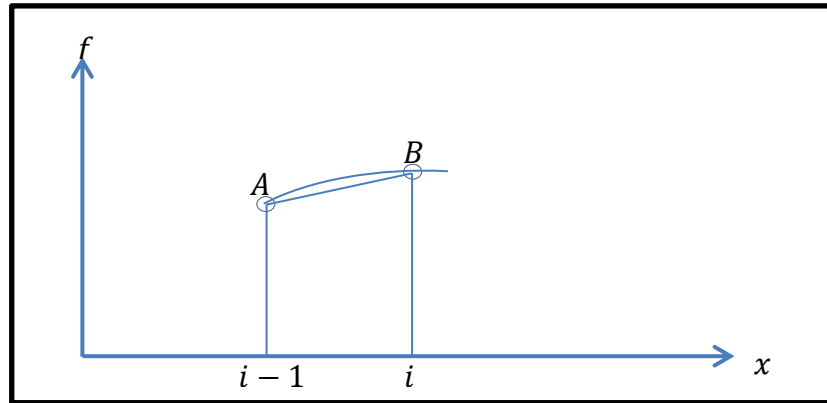
Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.40}$$

atau

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.41}$$

yang menggambarkan kemiringan fungsi pada titik B menggunakan nilai fungsi pada titik A dan B , ini ditunjukkan pada Gambar 2.3. Persamaan (2.41) merupakan pendekatan beda mundur $\frac{\partial f}{\partial x}$ orde (Δx) .



Gambar 2. 3. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.41)

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y) maka bentuk bentuk pendekatan beda mundur persamaan (2.41) menjadi:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.42)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_j = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (2.43)$$

Lebih lanjut dengan mempertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor pada persamaan (2.33) dan (2.39) dan mengurangkan pers. (2.33) terhadap pers. (2.39), maka diperoleh

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2.44)$$

Penyelesaian untuk $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2.45)$$

atau

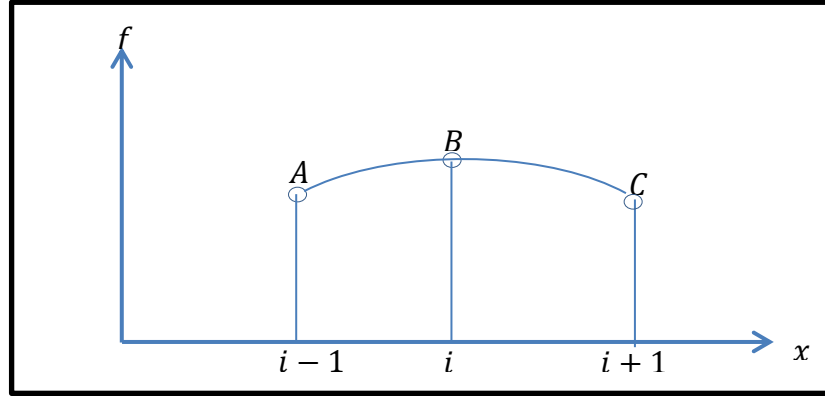
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2.46)$$

yang merepresentasikan kemiringan fungsi pada titik B menggunakan nilai fungsi pada titik A dan C , sebagaimana pada Gambar 2.4. Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y) maka bentuk dari pers. (2.46) menjadi

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2.47)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_j = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (2.48)$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan beda pusat dengan orde $(\Delta x)^2$.



Gambar 2. 4. Ilustrasi titik grid pada persamaan (2.46)

Adapun pendekatan turunan parsial orde dua terhadap x untuk beda pusat dapat diperoleh melalui penjumlahan persamaan (2.33) dan persamaan (2.39), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.49)$$

Jika digunakan indeks subskrip i untuk menyatakan titik diskrit pada arah, maka persamaan (2.49) dapat ditulis:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (2.50)$$

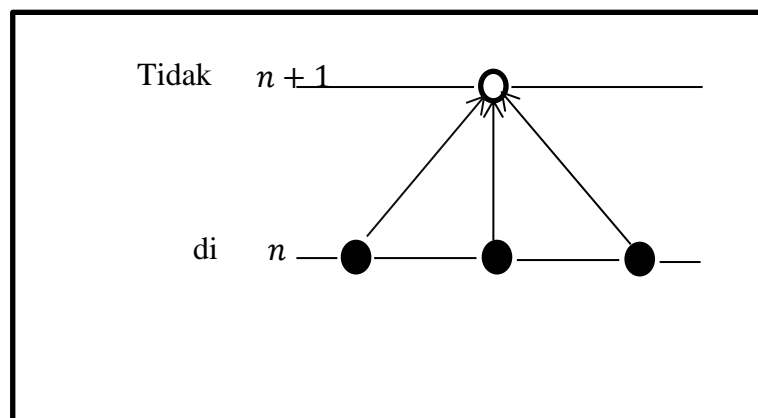
Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y) maka bentuk dari pers. (2.50) menjadi

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j} \quad (2.51)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_i = f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1} \quad (2.52)$$

II.5. Metode Beda Hingga Eksplisit

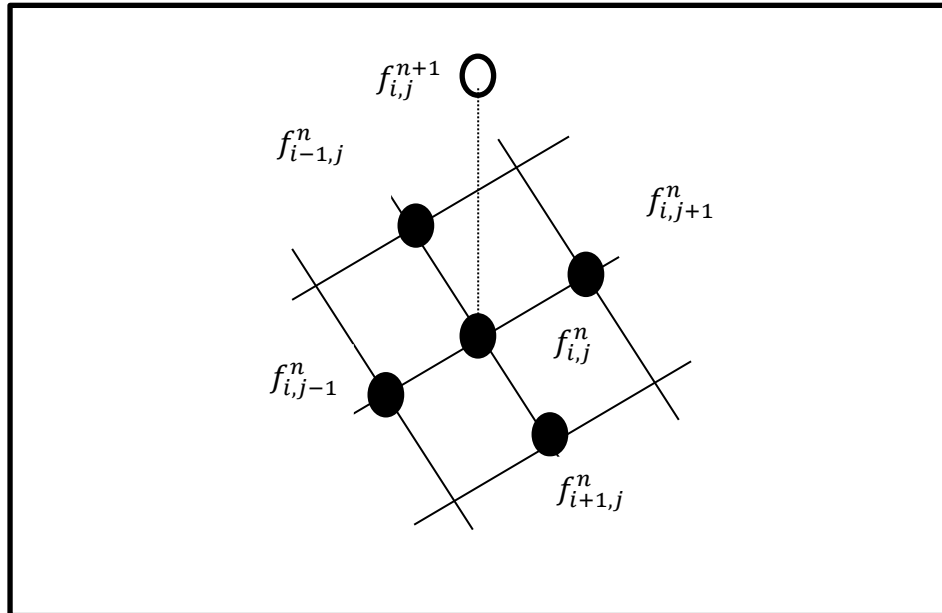
Metode beda hingga dengan skema eksplisit adalah penyelesaian yang sering digunakan pada masalah pemodelan matematika berupa persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Hal ini dikarenakan penyelesaian dengan skema eksplisit relatif mudah jika dibandingkan dengan skema implisit. Penyelesaian dengan skema eksplisit hanya melibatkan satu suku yang tidak diketahui sedang suku-suku yang lain di ketahui. Karena hanya melibatkan satu suku yang tidak diketahui, persamaan yang di hasilkan pada langkah waktu selanjutnya ($n + 1$) diselesaikan secara independen untuk memberikan nilai-nilai yang tidak di ketahui. Catatan bahwa nilai variabel bebas pada langkah waktu n diketahui dari solusi sebelumnya atau dari data awal yang diberikan sehingga nilai yang dihitung pada ($n + 1$) hanya bergantung pada nilai yang diketahui sebelumnya. Untuk memulai penyelesaian dengan skema eksplisit, sebuah nilai awal dan dua syarat batas harus dapat ditentukan. Pada Gambar 2.5 akan diperlihatkan titik grid dari skema eksplisit.



Gambar 2. 5. Titik grid untuk skema eksplisit

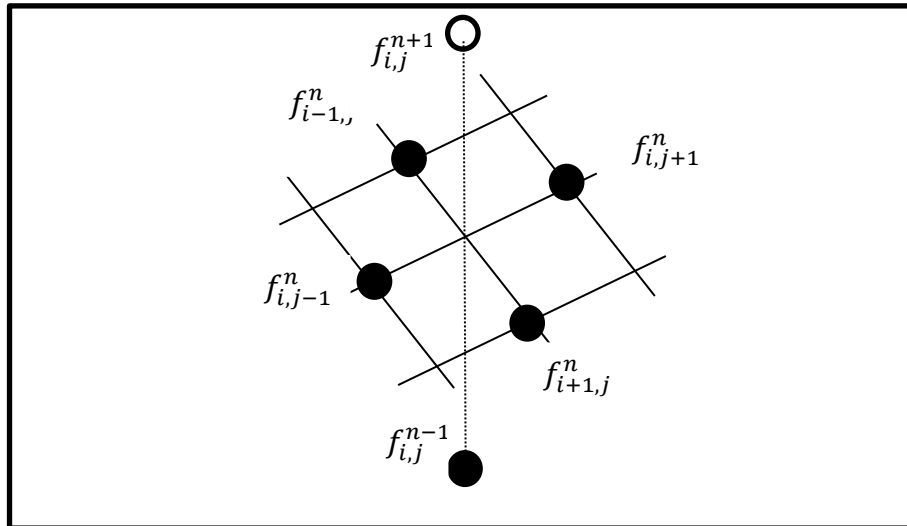
Terdapat beberapa metode penyelesaian metode beda hingga dengan skema eksplisit yang umum digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yakni metode *Forward Time Central Space* (FTCS), metode Lax, metode Richardson, dan metode DuFort-Frankel. Sesuai dengan namanya metode FTCS menghampiri turunan terhadap waktu dengan skema beda maju dan menghampiri turunan terhadap ruang dengan skema beda pusat. Orde dari skema FTCS dua

dimensi adalah $[(\Delta t), (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$. Gambaran grid point skema FTCS dua dimensi ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2. 6. Grid point pada skema FTCS

Metode Richardson menghampiri turunan terhadap ruang dan waktu dengan hampiran beda pusat. Hampiran ini memiliki orde dua dimensi $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$. DuFort-Frankel adalah metode yang dihasilkan dari pengembangan skema Richardson. Turunan terhadap ruang dan waktu sekaligus di hampiri dengan hampiran beda pusat. Hal berbeda dari metode Richardson adalah pada metode DuFort-Frankel dilakukan perubahan nilai suku ke- (i, j, n) (i, j, n adalah indeks subskrip untuk menyatakan titik diskrit masing-masing pada sumbu arah x , sumbu arah y dan waktu t) menjadi nilai rata-rata dari suku $(i, j, n + 1)$ dan suku $(i, j, n - 1)$. Orde metode ini adalah $\left[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2, \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right]$. Gambaran grid point skema DuFort-Frankel dua dimensi ditunjukkan oleh Gambar 2.7 berikut.



Gambar 2. 7. Grid point pada skema DuFort-Frankel

II.6. Kestabilan

Zaureder (2006) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati solusi eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas von Neumann. Stabilitas von Neumann didekati dengan analisis forier, sehingga dengan menerapkan stabilitas von Neumann terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $U_i^n = \rho^n e^{iak}$ ke dalam persamaan tersebut, yang mana subskrip i menunjukkan posisi, n menunjukkan waktu, $k = \sqrt{-1}$, dan untuk semua a dalam interval $[0, 2\pi]$. Syarat perlu dan cukup stabilitas von Neumann yaitu $|\rho| \leq 1$ (Zaureder, 2006).

Untuk kasus skema numerik yang berbentuk matriks, syarat perlu dan cukup stabilitas von Neumann yaitu $|\lambda| \leq 1$. Dengan λ adalah nilai eigen dari matriks yang terbentuk dari skema numerik metode beda hingga.

Uji kestabilan skema numerik dengan stabilitas von Neumann hanya dapat dilakukan pada skema numerik yang berbentuk linear. Untuk skema yang nonlinear uji kestabilan dengan von Neumann dapat dilakukan setelah dilakukan linearisasi pada skema numerik tersebut. Dengan mengikuti Feng dan Mitsui (1998) suku nonlinear dari skema numerik diubah mejadi konstanta dengan memilih nilai maksimal yang mungkin dari suku nonlinear tersebut.