SKRIPSI

VEKTOR EIGEN DUA SISI MATRIKS JUMLAH SAMA

Disusun dan diajukan oleh

ANNISAUL MUKRAMINA
H111 14 001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021

VEKTOR EIGEN DUA SISI MATRIKS JUMLAH SAMA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANNISAUL MUKRAMINA

H111 14 001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Annisaul Mukramina

NIM : H11114001

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

VEKTOR EIGEN DUA SISI MATRIKS JUMLAH SAMA

Adalah benar hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain dan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 05 Agustus 2021

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL
AABCDAJX401040109

Annisaul Mukramina

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

VEKTOR EIGEN DUA SISI MATRIKS JUMLAH SAMA

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP. 19680601 199512 2 001**

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Pada Tanggal : 05 Agustus 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

VEKTOR EIGEN DUA SISI MATRIKS JUMLAH SAMA

Disusun dan diajukan oleh :

ANNISAUL MUKRAMINA

H11114001

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
Pada tanggal 05 Agustus 2021
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.
NIP. 19680803 199202 1 001

Pembimbing Pertama

Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.
NIP. 19680601 199512 2 001

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillah, segala puji hanyalah milik Allah, Tuhan yang Maha Rahman dan Maha Rahim, yang telah memberikan keberkahanNya berupa Ilmu kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul **“Vektor Eigen Dua Sisi Matriks Jumlah Sama”** untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat serta salam tak lupa penulis haturkan untuk Rasulullah SAW, insan pemberi Syafaat, insan yang sempurnah akal dan budi pekerti sebagai Uswatun Hasanah.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa karya tulis ini dapat terwujud berkat bantuan dari berbagi pihak. Untuk itu pada kesempatan kali ini, penulis menghaturkan penghargaan dan terimakasih yang paling tulus kepada Ayahanda **H. Abd. Muhith** dan Ibunda **HJ. Amirah** yang telah membesarkan penulis dengan cinta, kasih sayang, serta penuh keikhlasan hati, yang telah mengiringi dan menyemangati setiap langkah penulis dengan doa dan restunya, demi kelanjutan belajar penulis.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si,** selaku Ketua Departemen Matematika dan segenap **Dosen Pengajar dan Staf Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika serta semua pihak birokrasi atas ilmu dan kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dibidang akademik maupun dibidang kemahasiswaan.
2. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc**., selaku pembimbing utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama, yang telah memberikan banyak bantuan atas nasehat, dukungan, doa dan dengan

setulus hati telah meluangkan waktunya ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.

3. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** dan Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku penguji atas kesediaannya untuk memberikan kritik, saran dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam perbaikan skripsi ini.
4. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Sc.** dan Ibu **Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, MS** selaku pembimbing Akademik, yang juga menjadi orang tua penulis selama masa studi, yang selalu meluangkan waktunya untuk mendengarkan segala keluh kesah penulis, dan memberikan kritikan dan saran yang membangun disetiap bimbingannya.
5. Keluarga besar dan Saudara-saudaraku **Muh. Yusran**, **Ainil Muthmainna, Fajrul Khaer** dan **Ummy Aimanah** untuk dukungan dan doa selama masa studi penulis.
6. Sahabat-sahabat yang selalu sabar mendengarkan keluahan penulis **Andi Nirwana, Nurfadhila,** dan **Dwi Utari,** serta sahabat-sahabat di Rohis Himatika Unhas **Fitriana, Seltuti, Mukrimah Ramdayani, Meylina Siruddin,** dan **Aprilia Atika Syarif** yang selama ini berjuang bersama penulis menuntut ilmu agama.
7. Teman-teman **TRANSPOSE 2014** kepada **Nurfahmy Afdhaly**, **Amalia Ramadhani, Lintang Wulandari, Muli, Ratu, Nunu, Vira, Evi, Muslimah, Sukma, Niar, Ratri, Arfyan Saputra, Syahrul, Nawir, Farid, Setiawan, Dadang** serta teman-teman lainnya yang tidak dapat disebut satu per satu. Terima kasih untuk dukungan dan waktunya saat berjuang sama-sama di dunia perkuliahan dan di himpunan. Terkhusus kepada ketua angkatan **Fandy Heribet** yang selalu memberi dukungan pada penulis untuk pengerjaan tugas akhir.
8. Teman-teman Seangkatan 2014 prodi **Matematika** kepada **Ariani**, **Selvi, Muayyadah, Nini, Agnes, Indah, Rusdi, Wardiman, Jeriko, Nasrullah** serta teman-teman lainnya yang tidak dapat disebut satu per satu. Terima kasih untuk dukungan dan waktunya saat berjuang sama-sama di dunia perkuliahan.

Terkhusus kepada **Nikita** dan **Kak Nivel Saputra** yang membantu pengerjaan tugas akhir penulis.

9. Seluruh **Anggota Himatika FMIPA Unhas,** kanda POLINOM 2011, REKURENSI 2012, BINOMIAL 2013, adinda SIMETRIS 2015, ALGORITMA 2016, dan DISKRIT 2017. Terima kasih telah menjadi keluarga dan memberikan kenangan yang tidak akan penulis lupakan.
10. Saudara – saudari **MIPA 2014** tanpa terkecuali terkhusus ketua angkatan **Muh. Sidiq Tolleng** semoga selalu tetap pada slogan “Kita Semua Sama”.
11. Seluruh teman-teman **KKN UNHAS GEL.96 Kec. Balusu, Kab. Barru** terkhusus kepada teman posko **Desa Lampoko: Susi, Suci, Syafriman, Rasdi** dan **Kak Dayat** serta warga Lampoko yang telah menjadi teman serta keluarga baru dan semoga kedepannya silaturahmi yang telah dibangun bersama tetap terjalin dengan baik.
12. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga bantuan dan harapan dan doanya bukanlah suatu hal yang sia-sia dihadapan Allah SWT. Akhir kata penulis mengharapkan kritikan dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan tulisan ini. Sebab penulis menyadari kesalan dan kekurangan tidak pernah lepas dari setiap manusia sebagai makhluk Allah. Serta semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi kita semua.

Semoga Allah SWT meridhoi segala langkah kita semua. Akhirnya dengan segala kekurangan penulis mempersembahkan karya tulis ini.

Makassar, 05 Agustus 2021

Annisaul Mukramina

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Annisaul Mukramina
NIM	: H11114001
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakulstas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul :

Vektor Eigen Dua Sisi Matriks Jumlah Sama

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 05 Agustus 2021

Yang menyatakan

(Annisaul Mukramina)

ABSTRAK

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik dalam aljabar linear yang banyak digunakan di berbagai pengaplikasian matriks dalam bidang sains. Penelitian ini membahas tentang vektor eigen dua sisi pada matriks jumlah sama, yaitu matriks yang elemen setiap baris dan elemen setiap kolomnya memiliki jumlah yang sama. Berbeda halnya dengan matriks pada bilangan riil yang menggunakan persamaan karakteristik dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigennya, dalam penelitian ini Penentuan nilai eigen dan vektor eigen dua sisi matriks menggunakan representasi blok dari matriks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa representasi blok dari matriks merupakan suatu metode dengan membentuk matriks jumlah sama terlebih dahulu, kemudian menentukan vektor eigen kanan $\tilde{P}_1$ dan vektor eigen kiri $\tilde{P}_2$., maka akan didapatkan nilai eigen λ dan P merupakan vektor eigen dua sisi untuk M^2, lebih jauh lagi dapat ditunjukkan bahwa $M^2P = P\ \mathrm{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$ dan $PM^2 = \mathrm{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$.

Kata Kunci : Nilai Eigen, Vektor Eigen Dua Sisi, Representasi Blok, Matriks Jumlah Sama.

ABSTRACT

Eigenvalue and eigenvector is one of topic in linear algebra which are widely used in various application of matrix in science. This research discuss about two-sided eigenvectors in the same number matrix, which a matrix in which the elements of each row and the elements of each column have the same number. Different from matrix on real numbers that uses characteristic equations in determining the eigenvalues and their eigenvectors, in this research determination of eigenvalues and two-sided eigenvectors of the matrix uses a block representation of the matrix.. Result of this research is show that block representation of the matrix is a method by forming an same sum matrix first, and then determine the right eigenvector $\tilde{P}_1$ and the left eigenvector $\tilde{P}_2$, then we get the eigenvalues λ and P is a two-sided eigenvector for M^2, further more it can be show that $M^2 P = P \operatorname{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$ dan $PM^2 = \operatorname{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$.

.

Key word : Eigenvalue, Two-sided Eigenvector, Block Representation, Same Sum Matrix.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar linear merupakan salah satu cabang ilmu matematika, yang mempelajari tentang matriks, vektor, ruang vektor, transformasi linear, dan sistem persamaan linear. Matriks pertama kali ditemukan oleh Arthur Cayley (1821-1895), pada awalnya matriks hanya dianggap permainan sampai pada tahun 1925 matriks digunakan pada mekanika kuantum dan selanjutnya penggunaan matriks dalam bidang sains semakin berkembang.

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik dalam aljabar linear yang dimiliki matriks bujur sangkar, yaitu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama. Banyak pengaplikasian matriks pada bidang sains menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Seperti pada teori kontrol, analisis getaran, sirkuit listrik, mekanika kuantum, pemodelan matematika, dan banyak permasalahan lainnya (Allahviranloo, 2012).

Pada umumnya matriks yang dipelajari dalam aljabar linear merupakan matriks dengan elemen-elemen bilangan riil yang memiliki baris dan kolom, namun terdapat pula matriks yang elemen-elemen bilangan riil yang memiliki baris dan kolom dengan elemen setiap baris dan kolomnya memiliki jumlah yang sama.

Penentuan vektor eigen pada suatu matriks tidak lepas dari konsep sistem persamaan linear. Pada penentuan vektor eigen dua sisi dari matriks jumlah sama ditentukan dengan representasi blok pada matriks tersebut.

Matriks jumlah sama adalah matriks yang elemen setiap baris dan elemen setiap kolomnya memiliki jumlah yang sama (Hill, Lettington & Schmidt, 2018).

Berbeda halnya dengan matriks pada bilangan riil yang dapat menggunakan determinan matriks sebagai alat untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks. Pada matriks jumlah sama hanya dapat menggunakan metode representasi blok dari matriks berdimensi ganjil atau genap untuk mendapatkan vektor eigen dua sisinya. Berdasarkan hal ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh penentuan vektor eigen dua sisi dari Matriks jumlah sama dengan representasi blok dari matriks. Sehingga kajian ini dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan rencana judul:

"Vektor Eigen Dua Sisi Matriks Jumlah Sama"

1.2 Rumusan masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang akan ditinjau adalah bagaimana menentukan vektor eigen dua sisi dari matriks jumlah sama?

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi pada:

1. Matriks bilangan riil
2. Vektor eigen dua sisi untuk matriks M^2

1.4 Tujuan Penelitian

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menentukan vektor eigen dua sisi dari matriks jumlah sama.

1.5 Manfaat penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui vektor eigen dua sisi dari matriks jumlah sama.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab sebagai berikut:

a. Bab I sebagai pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.
b. Bab II membahas mengenai konsep dasar, yaitu definisi dan sifat-sifat dasar nilai eigen dan vektor eigen pada matriks jumlah sama,
c. Bab III membahas tentang hasil utama dari tugas akhir yang memuat vektor eigen dua sisi dari matriks jumlah sama.
d. Bab IV memuat kesimpulan dan saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 State Of The Art

Penelitian tentang matriks jumlah sama telah dilakukan oleh Sally L. Hill, Matthew C. Lettington, Karl Michael Schmidt. Yang terkait erat dengan yang dikaji antara lain penelitiannya "Blok Representation and Spectral Properties of Constant Sum Matrice".

Dalam penelitian Sally L. Hill, Matthew C. Lettington, Karl Michael Schmidt (2018) diperoleh bahwa representasi blok matriks dapat membentuk matriks jumlah sama. Penentuan vektor eigen dua sisi diperoleh dari vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri dengan menggunakan metode representasi blok dari matriks.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1 (Anton & Rorres, 2011) Misalkan A merupakan matriks berordo $n \times n$. Vektor tak nol x pada $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi persamaan

$$Ax = \lambda x$$

disebut vektor eigen dari A, dan scalar λ disebut nilai eigen dari A. Dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Kemudian untuk menentukan nilai eigen secara umum pada matriks A berordo $n \times n$. Pertama persamaan $Ax = \lambda x$ dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda I x$ atau juga dapat ditulis sebagai berikut,

$$Ax - \lambda I x = 0$$

Atau

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Karena x merupakan vektor tak nol di $\mathbb{R}^n$, maka untuk mendapatkan solusi tak trivial, maka determinan dari $A - \lambda I$ harus sama dengan nol. Berdasarkan hal tersebut, maka nilai eigen matriks A memenuhi sifat sebagaimana dinyatakan pada Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (Anton & Rorres, 2011) jika A merupakan matriks berordo $n \times n$, maka λ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamamaan berikut,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik dari A. Bila diperluas maka $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah polinom karakteristik dari A.

Contoh 2.1

Misalkan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Berdasarakan teorema 2.1 maka persamaan karakteristik yang berkaitan dengan matriks A adalah:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Atau

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh,

$$(\lambda - 5)(\lambda - 4) - 6 \cdot 7 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 22 = 0$$

$$(\lambda - 11)(\lambda + 2) = 0$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = 11$ dan $\lambda = -2$.

Teorema 2.2(Anton & Rorres, 2011) Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan λ adalah suatu bilangan riil, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

(i) λ adalan nilai eigen dari A.
(ii) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ memiliki solusi nontrivial
(iii) Terdapat suatu vektor taknol x pada $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$.
(iv) λ adalah suatu solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Selanjutnya penentuan vektor eigen x dari A dilakukan dengan menggunakan persamaan berikut,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

dengan x merupakan vektor di dalam ruang solusi sistem linier $(\lambda I - A)x = 0$.

Contoh 2.2

Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Pada Contoh 2.1 telah ditemukan persamaan karakteristik dari A, yaitu

$$(\lambda - 11)(\lambda + 2) = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda = 11$ dan $\lambda = -2$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, terdapat dua ruang eigen dari A, dimana setiap ruang eigen bersesuaian dengan satu nilai eigen.

Berdasarkan definisi 2.1 x merupakan vektor eigen dari A berdasarkan nilai eigen λ jika dan hanya jika x bukan merupakan solusi trivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, sehingga dapat ditulis,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 7 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 11$, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi

$$x_1 = t, \qquad x_2 = t$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Maka vektor eigen dari A untuk $\lambda = 11$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya jika $\lambda = -2$, dengan menggunakan cara yang sama dengan $\lambda = 11$, diperoleh nilai eigen dari A untuk $\lambda = -2$ adalah $\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Matriks Jumlah Sama

Definisi 2.2 (Hill, Lettington, & Schmidt, 2018) Matriks M berukuran n x n, dinotasikan $M \epsilon R^{n \times n}$ disebut matriks jumlah sama dengan bobot w jika elemen setiap baris dan elemen setiap kolom berjumlah nw. Jika jumlah elemen diagonal utama juga berjumlah nw, maka matriks M disebut matriks jumlah sama diagonal. Jika M matriks jumlah sama bukan matriks jumlah sama diagonal maka disebut matriks jumlah sama non diagonal.

Definisi 2.3 (Hill, Lettington, & Schmidt, 2018) Misalkan M adalah matriks jumlah sama n × n bobot w.

(a). Matriks M disebut berasosiasi jika setiap entri dan entri cerminannya berkenaan dengan pusat matriks tambahkan ke 2w, yaitu, jika

$$M_{ij} + M_{n+1-i,\, n+1-j} = 2\text{w} \quad (\text{i, j} \in \{1,.., \text{N}\}).$$

(b). Matriks M disebut seimbang (atau centro-simetris) jika setiap entri sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks, yaitu,

M_{ij} - $M_{n+1-i,\, n+1-j}$ = 0 (i, j ∈ {1,.., N}).

Sifat ini dapat diekspresikan secara ekuivalen dengan cara yang lebih mudah menggunakan ketentuan berikut.

Misalkan $1_n \in R^n$ menjadi vektor yang memiliki semua entri sama dengan 1. Misalkan $\varepsilon_n = (1)_{i,j=1}^{n} \in R^{n \times n}$ merupakan matriks n × n yang memiliki semua entri sama dengan 1.Selain itu, misalkan $\mathcal{J}_n = (\delta_{\mathrm{i,n+1-j}})_{i,j=1}^{n} \in R^{n \times n}$, dengan δ adalah delta Kronecker, merupakan matriks n × n yang memiliki entri 1 di antidiagonal dan 0 untuk elemen yang lain. Kemudian, akan digunakan notasi 0_n untuk vektor nol di R^n, $\mathcal{O}_n = (0)_{i,j=1}^{n}$ untuk matriks nol n × n dan $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ untuk matriks satuan n × n.

Contoh 2.2. Misalkan diberikan matriks

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -11 & -11 & 11 & 9 & -9 & -9 & 9 \\ -10 & 10 & 10 & -10 & -6 & 6 & 6 & -6 \\ -8 & 8 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & -7 & 7 & -3 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 & -7 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & -8 & 8 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 10 & -10 & -10 & 10 \\ -9 & 9 & 9 & -9 & -11 & 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

Matriks M adalah matriks jumlah sama yang berasosiasi. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan bahwa persamaan M_{ij} + $M_{n+1-i,\, n+1-j}$ = 2w berlaku

Dengan n = 8

- M_{11} + M_{88}

  = 11 + (-11) = 0

- M_{12} + M_{87}

  = (-11) + 11 = 0

- M_{13} + M_{86}

  = (-11) + 11 = 0

- $M_{14} + M_{85}$

  $= 11 + (-11) = 0$

- $M_{15} + M_{84}$

  $= 9 + (-9) = 0$

- $M_{16} + M_{83}$

  $= (-9) + 9 = 0$

- $M_{17} + M_{82}$

  $= (-9) + 9 = 0$

- $M_{18} + M_{81}$

  $= 9 + (-9) = 0$

- $M_{21} + M_{78}$

  $= (-10) + 10 = 0$

- $M_{22} + M_{77}$

  $= 10 + (-10) = 0$

- $M_{23} + M_{76}$

  $= 10 + (-10) = 0$

- $M_{24} + M_{75}$

  $= (-10) + 10 = 0$

- $M_{25} + M_{74}$

  $= (-6) + 6 = 0$

- $M_{26} + M_{73}$

  $= 6 + (-6) = 0$

- $M_{27} + M_{72}$

  $= 6 + (-6) = 0$

- $M_{28} + M_{71}$

  $= (-6) + 6 = 0$

- $M_{31} + M_{68}$

  $= (-8) + 8 = 0$

- $M_{32} + M_{67}$

  $= 8 + (-8) = 0$

- $M_{33} + M_{66}$

  $= 8 + (-8) = 0$

- $M_{34} + M_{65}$

  $= (-8) + 8 = 0$

- $M_{35} + M_{64}$

  $= 0 + 0 = 0$

- $M_{36} + M_{63}$

  $= 0 + 0 = 0$

- $M_{37} + M_{62}$

  $= 0 + 0 = 0$

- $M_{38} + M_{61}$

  $= 0 + 0 = 0$

- $M_{41} + M_{58}$

  $= 7 + (-7) = 0$

- $M_{42} + M_{57}$

  $= (-7) + 7 = 0$

- $M_{43} + M_{56}$

  $= (-7) + 7 = 0$

- $M_{44} + M_{55}$

  $= 7 + (-7) = 0$

- $M_{45} + M_{54}$

  $= (-3) + 3 = 0$

- $M_{46} + M_{53}$

  $= 3 + (-3) = 0$

- $M_{47} + M_{52}$

  $= 3 + (-3) = 0$

- $M_{48} + M_{51}$

  $= (-3) + 3 = 0$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bahwa matriks M merupakan matriks jumlah sama yang berasosiasi dengan bobot 0.

2.4 Vektor Eigen Dua Sisi Matriks

Definisi 2.4 (Joy, 2000) Diberikan nilai eigen λ, vektor eigen $\vec{r}$ yang memenuhi $A\vec{r}$ =$\lambda\vec{r}$ disebut vektor eigen kanan untuk matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ adalah nilai egen dan $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_r$ adalah vektor eigen kanan yang bersesuaian , maka vektor eigen kanan membentuk basis dari ruang vektor. Jika ruang vektor ini berdimensi n, maka dapat dibuat matriks R berukuran n x n yang kolomnya merupakan komponen dari vektor eigen kanan.

Definisi 2.5 (Joy, 2000) Diberikan nilai eigen λ, vektor eigen $\vec{l}$ yang memenuhi $\vec{l}^T A$ =$\lambda\vec{l}^T$ disebut vektor eigen kiri untuk matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ adalah nilai egen dan $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_r$ adalah vektor eigen kiri yang bersesuaian , maka vektor eigen kiri membentuk basis dari ruang vektor. Jika ruang vektor ini berdimensi n, maka dapat dibuat matriks L berukuran n x n yang barisnya merupakan komponen dari vektor eigen Kiri.

Vektor eigen dua sisi matriks berarti kolom-kolom matriks adalah vektor eigen kanan dari matriks M , sedangkan baris-barisnya adalah vektor eigen kiri dari matriks M. Penentuan vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri untuk matriks M^2 , Vektor eigen kanan ditempatkan pada kolom sebelah kanan dari vektor untuk membentuk matriks 2n × 2

$$P_1 = \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & -\mathcal{J}_n x \\ \mathcal{J}_n v & x \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Dimana $A_1 = \begin{pmatrix} v_n & -x_1 \\ v_n & x_1 \end{pmatrix}$ dan B_1 dan C_1 adalah $(n-1)\,x\,2$ matriks sehingga $C_1 = \mathcal{J}_{n-1} B_1 \sigma_3$ (dengan $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Asumsi bahwa $v_n, x_1 \neq 0$, sehingga matriks A_1 teratur. Susunan di bawah ini dapat digeneralisasikan untuk kasus di mana A_1 adalah matriks biasa yang terdiri dari dua baris P_1 (dan memang selalu dapat menemukan dua baris bebas linier P_1 karena kolomnya tidak bebas linier), tetapi akan diambil baris tengah berikut ini untuk penyederhanaannya.

Didefinisikan :

$$\tilde{P}_1 = -P_1 {A_1}^{-1} \quad (2.2)$$

Demikian pula, matriks vektor eigen kiri ditetapkan :

$$P_2 = \begin{pmatrix} y & -\mathcal{J}_n u \\ \mathcal{J}_n y & u \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dan asumsikan $y_n, u_1 \neq 0$, sehingga $A_2 = \begin{pmatrix} y_n & -u_1 \\ y_n & u_1 \end{pmatrix}$ adalah tetap, didefinisikan:

$$\tilde{P}_2 = -P_2 {A_2}^{-1} \quad (2.4)$$

Contoh 2.3. Jika diberikan $\boldsymbol{u}^T = (2, -4, -8, 10)$, $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{y}^T = (1, -1, -1, 1)$ $\epsilon\ R^4$

maka vektor eigen kanan $\tilde{P}_1$ dapat ditentukan berdasarkan persamaan (2.2)

dengan ${A_1}^{-1}$ dan $-P_1$ adalah sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_n & -x_1 \\ v_n & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_4 & -x_1 \\ v_4 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$${A_1}^{-1} = \frac{1}{4+4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} v & -\mathcal{J}_n x \\ \mathcal{J}_n v & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ -1 & 16 \\ -1 & 8 \\ 1 & -4 \\ 1 & 4 \\ -1 & -8 \\ -1 & -16 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}_1 = -P_1 {A_1}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 20 \\ 1 & -16 \\ 1 & -8 \\ -1 & 4 \\ -1 & -4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 16 \\ -1 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Kemudain vektor eigen kiri $\tilde{P}_2$ dapat ditentukan berdasarkan persamaan (2.4) dengan ${A_2}^{-1}$ dan $-P_2$ adalah sebagai berikut:

$$A_2 = \begin{pmatrix} y_n & -u_1 \\ y_n & u_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_4 & -u_1 \\ y_4 & u_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$${A_1}^{-1} = \frac{1}{2+2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} y & -\mathcal{J}_n u \\ \mathcal{J}_n y & u \end{pmatrix}$$

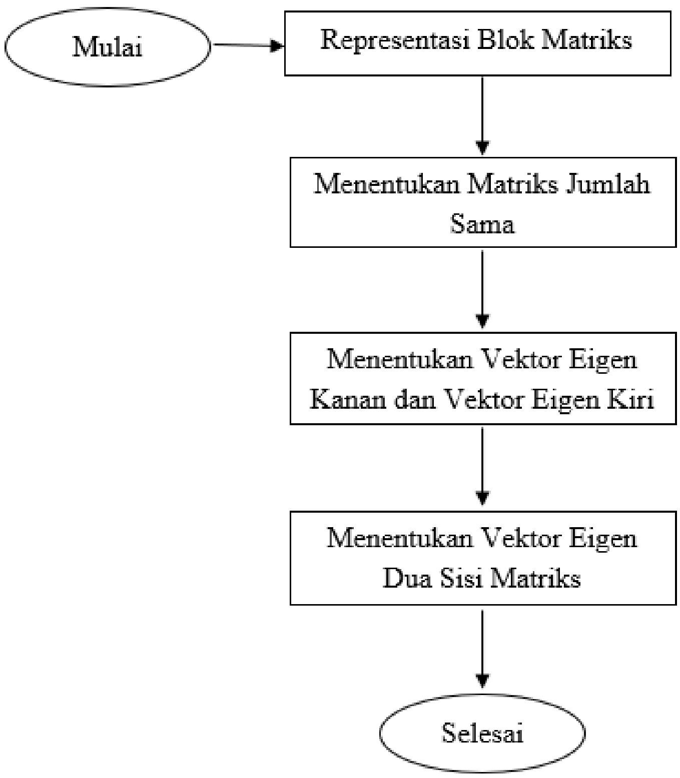
$$= \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 8 \\ -1 & 4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ -1 & -8 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}_2 = -P_2 {A_2}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 1 & -8 \\ 1 & -4 \\ -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.5 Alur Kerja



Gambar 2.1 Alur Kerja

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Representasi Blok Matriks

Diketahui bahwa untuk menentukan vektor eigen dua sisi suatu matriks jumlah sama adalah dengan menggunakan representasi blok matriks. Oleh karena itu terlebih dahulu harus diketahui definisi dari representasi blok matriks.

Definisi 3.1 (Hill, Lettington, & Schmidt, 2018) Matriks X_{2n} disebut representasi blok dari matriks jumlah sama berdimensi genap, dengan persamaan berikut

$$X_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & \mathcal{J}_n \\ \mathcal{J}_n & -I_n \end{pmatrix} \epsilon\ R^{2n \times 2n} \tag{3.1}$$

Definisi 3.2 (Hill, Lettington, & Schmidt, 2018) Matriks X_{2n+1} disebut representasi blok dari matriks jumlah sama berdimensi ganjil, dengan persamaan berikut

$$X_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I_n & 0_n & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_n \\ {0_n}^T & 1 & {0_n}^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_n & 0_n & -\frac{1}{\sqrt{2}} I_n \end{pmatrix} \epsilon\ R^{(2n+1) \times (2n+1)} \tag{3.2}$$

Representasi blok dari matriks jumlah sama M adalah

$$M = X_{2n}\begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & vu^T \\ xy^T & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n} \tag{3.3}$$

Dan kemudian matriks blok untuk persegi M^2

$$M^2 = X_{2n}\begin{pmatrix} vu^T xy^T & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{O}_n & xy^T vu^T \end{pmatrix} X_{2n} \tag{3.4}$$

3.2 Vektor Eigen Dua Sisi Matriks Jumlah Sama

Teorema 3.1 (Hill, Lettington, & Schmidt, 2018) Misalkan $u, v, x, y \in R^n$ sedemikian sehingga

$$\lambda \coloneqq (u^T x)(y^T v) \neq 0$$

dan u_1, v_n, x_1, y_n bukan nol. Misalkan pula M adalah matriks (3.3), $\tilde{P}_1 = -P_1 {A_1}^{-1}$ dan $\tilde{P}_2 = -P_2 {A_2}^{-1}$. Kemudian

$$P = I_{2n} + \left(\mathcal{O}_{2n,n-1} \middle| \widetilde{P_1} \middle| \mathcal{O}_{2n,n-1}\right) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{n-1,2n} \\ {\tilde{P}_2}^T \\ \mathcal{O}_{n-1,2n} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

adalah matriks vektor eigen dua sisi untuk M^2, maka

$$M^2 P = P \operatorname{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_n, 0_{n-1}) \text{ dan } PM^2 = \operatorname{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_n, 0_{n-1}) P \tag{3.6}$$

Dari Teorema 3.1 dapat disimpulkan bahwa vektor eigen dua sisi matriks jumlah sama pada saat $\lambda \coloneqq (u^T x)(y^T v) \neq 0$ dan u_1, v_n, x_1, y_n bukan nol. Dengan kata lain vektor eigen dua sisi matriks jumlah sama untuk M^2 akan memenuhi saat $\lambda \coloneqq (u^T x)(y^T v) \neq 0$ dan u_1, v_n, x_1, y_n bukan nol. Adapun untuk P yang merupakan vektor eigen dua sisi matriks jumlah sama untuk M^2 memenuhi Teorema 3.1 dapat dilihat dari Contoh 3.1.

Contoh 3.1

Jika diberikan $\boldsymbol{u}^T = (2, -4, -8, 10)$, $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{y}^T = (1, -1, -1, 1) \in R^4$

Langkah pertama adalah membentuk matriks jumlah sama M.

Untuk membentuk matriks M, terlebih dahulu akan ditentukan uv^T, xy^T, $\mathcal{O}_4$ serta representasi blok matriks x_8. Sehingga diperoleh

$u^T = (2, -4, -8, 10)$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x = 2u$$

$$x = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$vu^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(2, -4, -8, 10)$$

$$vu^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix}(1, -1, -1, 1)$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \\ -16 & 16 & 16 & -16 \\ 20 & -20 & -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Representasi blok matriks x_8 dapat dibuat dengan persamaan (3.1) sehingga diperoleh

$$X_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & \mathcal{J}_n \\ \mathcal{J}_n & -I_n \end{pmatrix}$$

$$X_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_4 & -I_4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Setelah mendapatkan uv^T, xy^T, $\mathcal{O}_4$ serta representasi blok matriks x_8 , akan disubstitusikan ke persamaan (3.3) sehingga diperoleh

$$M = x_{2n}\begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & vu^T \\ xy^T & \mathcal{O}_n \end{pmatrix}x_{2n}$$

$$= x_8\begin{pmatrix} \mathcal{O}_4 & vu^T \\ xy^T & \mathcal{O}_4 \end{pmatrix}x_8$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_4 & -I_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & vu^T \\ xy^T & \mathcal{O}_n \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_4 & -I_4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -8 & 10 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & 16 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -20 & -20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -14 & -12 & 11 & 9 & -8 & -6 & 5 \\ -13 & 12 & 10 & -9 & -7 & 6 & 4 & -3 \\ -9 & 8 & 6 & -5 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 & -8 & 9 \\ 3 & -4 & -6 & 7 & 9 & -10 & -12 & 13 \\ -5 & 6 & 8 & -9 & -11 & 12 & 14 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 15 & -14 & -12 & 11 & 9 & -8 & -6 & 5 \\ -13 & 12 & 10 & -9 & -7 & 6 & 4 & -3 \\ -9 & 8 & 6 & -5 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 & -8 & 9 \\ 3 & -4 & -6 & 7 & 9 & -10 & -12 & 13 \\ -5 & 6 & 8 & -9 & -11 & 12 & 14 & -15 \end{pmatrix}$$

Untuk membentuk matriks M^2, terlebih dahulu akan ditentukan vu^Txy^T, xy^Tvu^T. Sehingga diperoleh

$$vu^T xy^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & -8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \\ -16 & 16 & 16 & -16 \\ 20 & -20 & -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$vu^T xy^T = \begin{pmatrix} 368 & -368 & -368 & 368 \\ -368 & 368 & 368 & -368 \\ -368 & 368 & 368 & -368 \\ 368 & -368 & -368 & 368 \end{pmatrix}$$

$$xy^T vu^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \\ -16 & 16 & 16 & -16 \\ 20 & -20 & -20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$xy^T vu^T = \begin{pmatrix} 32 & -64 & -128 & 160 \\ -64 & 128 & 256 & -320 \\ -128 & 256 & 512 & -640 \\ 160 & -320 & -640 & 800 \end{pmatrix}$$

Kemudian substitusikan $vu^T xy^T$ dan $xy^T vu^T$ untuk membentuk matriks M^2 dengan persamaan (3.4) sehingga diperoleh

$$M^2 = x_{2n} \begin{pmatrix} vu^T xy^T & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{O}_n & xy^T vu^T \end{pmatrix} x_{2n}$$

$$M^2 = x_8 \begin{pmatrix} 368 & -368 & -368 & 368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -368 & 368 & 368 & -368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -368 & 368 & 368 & -368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 368 & -368 & -368 & 368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & -64 & -128 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 128 & 256 & -320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -128 & 256 & 512 & -640 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & -320 & -640 & 800 \end{pmatrix} x_8$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 368 & -368 & -368 & 368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -368 & 368 & 368 & -368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -368 & 368 & 368 & -368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 368 & -368 & -368 & 368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & -64 & -128 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 128 & 256 & -320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -128 & 256 & 512 & -640 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & -320 & -640 & 800 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = 8 \begin{pmatrix} 73 & -63 & -43 & 33 & 13 & -3 & 17 & -27 \\ -63 & 55 & 39 & -31 & -15 & 7 & -9 & 17 \\ -43 & 39 & 31 & -27 & -19 & 15 & 7 & -3 \\ 33 & -31 & -27 & 25 & 21 & -19 & -15 & 13 \\ 13 & -15 & -19 & 21 & 25 & -27 & -31 & 33 \\ -3 & 7 & 15 & -19 & -27 & 31 & 39 & -43 \\ 17 & -9 & 7 & -15 & -31 & 39 & 55 & -63 \\ -27 & 17 & -3 & 13 & 33 & -43 & -63 & 73 \end{pmatrix}$$

Kemudian nilai eigen bukan nol adalah $\lambda \coloneqq (u^T x)(y^T v) = 1472.$

Berdasarkan contoh 2.3 diketahui vektor eigen kanan $\tilde{P}_1$ adalah $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dan

vektor eigen kiri $\tilde{P}_2$ adalah $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Setelah mendapatkan vektor eigen kanan $\tilde{P}_1$ dan vektor eigen kiri $\tilde{P}_2$. Selanjutnya akan ditentukan I_8, $\mathcal{O}_{8,3}$, dan $\mathcal{O}_{3,8}$ untuk membentuk vektor eigen dua sisi matriks M^2.

$$I_8 = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{8,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{3,8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya substitusikan $\tilde{P}_1$, I_8, $\mathcal{O}_{8,3}$, $\tilde{P}_2$ dan $\mathcal{O}_{3,8}$ untuk membentuk vektor eigen dua sisi untuk matriks M^2 pada persamaan (3.5) , sehingga diperoleh

$$P = I_{2n} + \left(\mathcal{O}_{2n,n-1} \middle| \widetilde{P_1} \middle| \mathcal{O}_{2n,n-1}\right) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{n-1,2n} \\ \tilde{P_2}^{T} \\ \mathcal{O}_{n-1,2n} \end{pmatrix}$$

$$= I_8 + \left(\mathcal{O}_{8,3} \middle| \widetilde{P_1} \middle| \mathcal{O}_{8,3}\right) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{3,8} \\ \tilde{P_2}^{T} \\ \mathcal{O}_{3,8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka, akan ditunjukkan persamaan (3.6) dimana

$M^2P = P \text{ diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$ dan $PM^2 = \text{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$

Sebelumnya akan dicari hasil dari $M^2P, P \text{ diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$, PM^2, dan $\text{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$

$$M^2P = 8\begin{pmatrix} 73 & -63 & -43 & 33 & 13 & -3 & 17 & -27 \\ -63 & 55 & 39 & -31 & -15 & 7 & -9 & 17 \\ -43 & 39 & 31 & -27 & -19 & 15 & 7 & -3 \\ 33 & -31 & -27 & 25 & 21 & -19 & -15 & 13 \\ 13 & -15 & -19 & 21 & 25 & -27 & -31 & 33 \\ -3 & 7 & 15 & -19 & -27 & 31 & 39 & -43 \\ 17 & -9 & 7 & -15 & -31 & 39 & 55 & -63 \\ -27 & 17 & -3 & 13 & 33 & -43 & -63 & 73 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1104 & 736 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 920 & -552 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 552 & -184 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -368 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -368 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -184 & 552 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -552 & 920 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 736 & -1104 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4416 & 2944 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3680 & -2208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2208 & -736 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -736 & 2208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2208 & 3680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2944 & -4416 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
P\,\mathrm{diag}(0_3, \lambda 1_2, 0_3)
$$

$$
= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8832 & 5888 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7360 & -4416 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4416 & -1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2944 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2944 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1472 & 4416 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4416 & 7360 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5888 & -8832 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4416 & 2944 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3680 & -2208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2208 & -736 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -736 & 2208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2208 & 3680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2944 & -4416 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
PM^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} 8 \begin{pmatrix} 73 & -63 & -43 & 33 & 13 & -3 & 17 & -27 \\ -63 & 55 & 39 & -31 & -15 & 7 & -9 & 17 \\ -43 & 39 & 31 & -27 & -19 & 15 & 7 & -3 \\ 33 & -31 & -27 & 25 & 21 & -19 & -15 & 13 \\ 13 & -15 & -19 & 21 & 25 & -27 & -31 & 33 \\ -3 & 7 & 15 & -19 & -27 & 31 & 39 & -43 \\ 17 & -9 & 7 & -15 & -31 & 39 & 55 & -63 \\ -27 & 17 & -3 & 13 & 33 & -43 & -63 & 73 \end{pmatrix}
$$

$$
= 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1104 & 920 & 552 & -368 & 0 & -184 & -552 & 736 \\ 736 & -552 & -184 & 0 & -368 & 552 & 920 & -1104 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4416 & 3680 & 2208 & -1472 & 0 & -736 & -2208 & 2944 \\ 2944 & -2208 & -736 & 0 & -1472 & 2208 & 3680 & -4416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\mathrm{diag}(0_3, \lambda 1_2, 0_3)P$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8832 & 7360 & 4416 & -2944 & 0 & -1472 & -4416 & 5888 \\ 5888 & -4416 & -1472 & 0 & -2944 & 4416 & 7360 & -8832 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4416 & 3680 & 2208 & -1472 & 0 & -736 & -2208 & 2944 \\ 2944 & -2208 & -736 & 0 & -1472 & 2208 & 3680 & -4416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bahwa $M^2P = P\,\mathrm{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$ dan $PM^2 = \mathrm{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$ dengan nilai eigen $\lambda = 1472$ dan vektor eigen dua sisi untuk M^2 adalah $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan di Bab III adalah sebagai berikut

a) Nilai eigen dan vektor eigen dua sisi matriks menggunakan representasi blok dari matriks berdimensi genap dan ganjil, merupakan suatu metode dengan membentuk matriks M dan M^2 terlebih dahulu, kemudian menentukan vektor eigen kanan $\tilde{P}_1$ dan vektor eigen kiri $\tilde{P}_2$. Sehingga vektor eigen dua sisi untuk M^2 sebagai berikut

$$P = I_{2n} + \left(\mathcal{O}_{2n,n-1} \middle| \widetilde{P_1} \middle| \mathcal{O}_{2n,n-1}\right) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{n-1,2n} \\ \tilde{P}_2{}^T \\ \mathcal{O}_{n-1,2n} \end{pmatrix}$$

b) Jika λ adalah nilai eigen dari suatu matriks jumlah sama dan P merupakan vektor eigen dua sisi untuk M^2, serta M dan M^2 merupakan matriks jumlah sama, maka $M^2P = P\ \text{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})$ dan $PM^2 = \text{diag}(0_{n-1}, \lambda 1_2, 0_{n-1})P$.

4.2 Saran

Adapun saran yang penulis berikan setelah melakukan kajian dan penelitian ini adalah sebagai berikut

a) Disarankan untuk peneliti selanjutnya untuk mengkaji lebih lanjut penentuan nilai eigen dan vektor eigen dua sisi matriks jumlah sama ketika nilai dan vektor eigen dua sisi matriksnya merupakan bilangan kompleks.

b) Disarankan untuk peneliti selanjutnya untuk membuat program yang dapat menghitung nilai eigen dan vektor eigen dua sisi matriks jumlah sama dengan aplikasi matlab.

DAFTAR PUSTAKA

Allahviranloo .T, S. S. (2011). Maximal and Minimal Symetric Solution of Fully Fuzzy Linear Systems. *Journal OF Computational and Applied Mathematics 235*, 4652-4662.

Allahviranloo. T, L. H. (2012). A Method to Find Fuzzy Eigenvalues and Fuzzy eigenvectors of fuzzy matrix. *Neural Comput & applic*.

Anton. H, R. C. (2011). *Elementary Linear Algebra 10th Edition.* New York: Jhon Wiley & Sons.

Hill, S. L., Lettington, M. C., & Schmidt, K. M. (2018). Blok Representation and Spectral Properties of Constant Sum Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*.School of Mathematics Cardiff Universty.

Joy, K. I. (2000). Eigenvalues and Eigenvectors. *On-Line Geometric Modeling Notes*.University of California.