SKRIPSI FISIKA

# SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL POPULASI LOGISTIK

**DISUSUN DAN DIAJUKAN OLEH**

**IRMA**

**H21115021**

**DEPARTEMEN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2021**

# SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL POPULASI LOGISTIK

**SKRIPSI**

***Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat***

***Memperoleh Gelar Sarjana Sains***

***pada Program Studi Sarjana Fisika Departemen Fisika***

***Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam***

***Universitas Hasanuddin***


**IRMA**

**H21115021**


**DEPARTEMEN FISIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2021**

## LEMBAR PENGESAHAN

# SOLUSI NUMERIK PERSAMAAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL POPULASI LOGISTIK


**DISUSUN DAN DIAJUKAN OLEH**

**IRMA**

**H21115021**


Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 26 Februari 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

| Pembimbing Utama | Pembimbing Pertama |
|---|---|
| Eko Juarlin, S.Si., M.Si. | Drs. Bansawang BJ, M.Si. |
| NIP : 198111062008121002 | NIP : 196312061994121001 |

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Arifin, MT

NIP :196705201994031002



Dipindai dengan CamScanner

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Irma |
| NIM | : H21115021 |
| Program Studi | : Fisika |
| Jenjang | : S1 |

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL POPULASI LOGISTIK**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilalihan tulisan orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar,

Yang menyatakan

IRMA

# Abstrak

Telah dilakukan penelitian solusi numerik persamaan diferensial biasa non linear menggunakan metode Runge Kutta orde pertama, kedua, ketiga, keempat dan kelima pada model populasi logistik. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui nilai r (*growth rate*) dan K (*carrying capacity*) untuk memprediksi jumlah penduduk lima negara, yaitu Indonesia, Singapura, Cina, Finlandia dan Amerika Serikat. Dari simulasi yang dilakukan diperoleh nilai r dan K data basis dan data uji masing-masing negara. Nilai r dan K data basis digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk lima negara ke depan. Hasil prediksi yang didapatkan menunjukkan bahwa ketika ukuran suatu populasi berada di bawah daya tampung maksimal, pertumbuhan populasi cepat, tetapi ketika populasi mendekati daya tampung maksimal, pertumbuhan populasi menjadi lambat.



**Kata Kunci:** model populasi logistik, persamaan diferensial, metode Runge Kutta

## ***ABSTRACT***

*Research on numerical solutions of nonlinear ordinary differential equations using the Runge Kutta method of first order, second order, third order, fourth order and fifth order in the logistic population model has been implemented. This study aims to determine the value of r (growth rate) and K (carrying capacity) to predict the population of five countries,  Indonesia, Singapore, China, Finland, and Tthe United States of America. From the simulation, r and K were obtained from the based data and test data of each country. The value of r and K in the database is used to predict the population of five countries in the future. The prediction obtained, indicates that when population is under the maximum carrying capacity, population growth is fast, but when population approaches the maximum capacity, population growth is slow.*

***Keywords****: logistic population model, differential equations, Runge Kutta method*

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Subhanallahuwata'ala yang senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah serta karunia ilmu kepada hamba-Nya, sehingga atas izin dan perkenaan-Nya maka penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul **"SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL POPULASI LOGISTIK"** yang merupakan syarat dalam menyelesaikan studi pada jurusan Fisika Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Dalam menyelesaikan skripsi ini penulis banyak mendapat bimbingan, petunjuk dan bantuan dari berbagai pihak yang sangat berarti dan berharga bagi penulis. Untuk itu pada kesempatan ini penulis sampaikan rasa terimakasih yang tak terhingga kepada *my little family,* ibu tercinta, **Sam'ia,** serta kakak dan adikku **Raiyana, Riska** atas doa'anya yang selalu menyertai, yang selalu ada, selalu mendukung dan selalu sabar menasehati dan mengingatkan untuk menyelesaikan skripsi ini. Persembahan gelar ini tak lain untuk kalian, semoga ini bisa menjadi sarana balas budi penulis meskipun tidak akan pernah menyamai. *Love you all my little family*. Terima kasih juga kepada seluruh keluarga, **Usman Ali Fata** dan paman **Darman, Asmaul** yang sudah banyak berkontribusi selama penyusunan skripsi ini

Penulisan skripsi ini dapat selesai berkat bantuan dan doa pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, penulis dengan segala kerendahan hati juga menghaturkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak **Eko Juarlin, S.Si, M.Si** selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah memberi ide dasar pembuatan tugas akhir ini, yang telah banyak membimbing dan meluangkan waktunya untuk penulis, sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak **Drs. Bansawang BJ., M.Si** selaku Pembimbing Pertama yang telah memberi masukan dan nasehat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak **Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc** dan bapak **Prof. Dr. Syamsir Dewang, M.Eng. Sc** selaku Tim Penguji yang telah banyak meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan ilmu, saran dan diskusi dalam menyelesaikan skripsi ini
4. Bapak **Prof. Dr. Arifin, M.T** selaku Ketua Departement Fisika FMIPA UNHAS yang telah memberi nasehat kepada penulis.
5. **Bapak dan Ibu Dosen Pengajar Departemen Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**. Terimakasih atas ilmu dan bimbingannya selama ini semoga ilmunya akan selalu memberikan manfaat untuk semua orang.
6. Bapak/ibu **Staf pegawai** Departemen Fisika
7. Bapak staf Pegawai **FMIPA UNHAS**, terima kasih banyak atas bantuan-bantuannya
8. Saudara-saudariku **F1SIKA 2015** terima kasih untuk semua bantuan, cerita dan motivasi selama ini, kalian akan selalu dihati. F1SIKA 2015 *"Satu Dalam Dekapan"*
9. *My best friend until jannah*, in shaa Allah, **Fatimah, Nurlia Rahma, salmatia** yang selalu memberi semangat, masukan, dan selalu mendengarkan keluhan-keluhan dalam mengerjakan skripsi ini.
10. Teman tercinta, **Ike Puji, Aslina**, **Andi Febrina Alam, Hardianti Asmin, Ayuni Kartika, Nur Halima, Yuliati Parung, Suarni B.** yang telah memberikan semangat, dukungan baik moril maupun materiil.
11. Teman pondokan, **kak ica, uli, maulidyah, evi**, terima kasih selalu memberi semangat.
12. Semua pihak yang tidak sempat saya sebutkan.

# DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR LAMPIRAN

**BAB I**

**PENDAHULUAN**

## I.1 Latar Belakang

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kehidupan sehari-hari, ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang dari matematika adalah persamaan diferensial, yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam berbagai ilmu pengetahuan seperti bidang ekonomi, biologi, fisika, matematika, dan lain sebagainya. Masalah tersebut dapat diubah ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu [1].

Persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua, yakni persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa non linear. Beberapa fenomena di alam dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial yaitu model ayunan sederhana, model populasi logistik menurut Verhulst, laju perubahan tekanan uap suatu zat, hukum Newton tentang gerak dan lain-lain. Yang merupakan persamaan diferensial biasa non linear, adalah model ayunan sederhana dan model populasi logistik [2].

Solusi persamaan diferensial dapat ditentukan dengan menggunakan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik memberikan solusi sejati yaitu solusi yang memiliki galat sama dengan nol tetapi metode numerik menghasilkan solusi yang menghampiri solusi sejati. Solusi hampiran dapat dibuat sepresisi yang diinginkan [3].

Metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana. Bila metode analitik tidak dapat lagi digunakan, solusi persoalan dapat dihitung dengan metode numerik. Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, diantaranya Metode Euler, Metode Deret Taylor, dan Metode Runge-Kutta [3].

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang lebih praktis daripada metode Deret Taylor karena dalam Metode Runge-Kutta, tidak perlu dicari turunan fungsi yang lebih tinggi. Evaluasi fungsi dihitung di titik tertentu untuk setiap selang langkah. Dari segi ketelitian, hasil yang diperoleh dari Metode Runge-Kutta lebih teliti dibandingkan metode Euler. Tingkat ketelitian dari metode ini dipengaruhi oleh ordenya. Semakin besar ordenya, semakin teliti hasil yang diperoleh [3].

Pada penelitian sebelumnya oleh Randhi Nanang Darmawan dibahas Metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear menggunakan persamaan Lotka Volterra [4]. Penelitian lain yang serupa, dilakukan oleh Susmita Paul dan kawan-kawan membandingkan metode Runge Kutta Fehlberg dengan metode Dekomposisi Laplace Adomian dalam penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear dengan Model Lotka Volterra [5]. Dalam penelitian ini, dibahas persamaan logistik yang termasuk dalam persamaan diferensial biasa non linear untuk memprediksi jumlah pertumbuhan penduduk.

Dari uraian di atas, penulis tertarik untuk mengambil judul "Solusi Numerik Persamaan Diferensial Non Linear dengan Metode Runge Kutta pada Model Populasi Logistik".

### I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana program simulasi untuk memprediksi jumlah penduduk di suatu daerah?
2. Berapakah nilai r (*growth rate*) dan nilai K (*carrying capacity*) yang paling akurat untuk jumlah penduduk di suatu daerah?

### I.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Membuat program simulasi untuk memprediksi jumlah penduduk di suatu daerah
2. Menghitung nilai r dan nilai K yang paling akurat di suatu daerah

## BAB II

## TINJAUAN PUSTAKA

### 1.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan suatu fungsi yang memuat variabel bebas dan variabel bergantung. Sebagai contoh:

$y' + xy = 3$

Persamaan tersebut adalah persamaan yang mengandung turunan orde satu dengan variabel bebas $x$. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi derivatif. Derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi derivatif dalam persamaan [6,7].

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui yang bergantung pada satu variabel bebas, Persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui yang bergantung pada beberapa variabel bebas.

### II.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa orde *n* dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$y^n = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2.1)$$

dimana $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ bergantung pada *x*. Berdasarkan sifat kelinearan, persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial non linear. Sebuah persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial linear jika memenuhi dua hal berikut ini [9]:

1. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu.

2. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya atau turunan yang satu dengan turunan lainnya atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Persamaan diferensial linear orde *n* dalam variabel bergantung *y* dan variabel bebas *x* memiliki bentuk umum:

$$a_0(x)\left(\frac{d^n y}{dx}\right)+\ a_1(x)\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)+\ \dots+\ a_{n-1}(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+\ a_n x(y)=F(x)\dots \ (2.2)$$

Dimana $a_0$ tidak nol, diasumsikan $a_0$, $a_1$, … , $a_n$ dan $F$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $a_0(x)\ \neq 0$ untuk setiap $x$ pada $a \leq x \leq b$. Jika $F(x)=0$, persamaan diferensial linear orde *n* dikatakan homogen. Jika$F(x) \neq 0$, persamaan diferensial disebut persamaan diferensial linear lengkap atau tak homogeny [8,9].

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linear, yaitu pada (2.2), persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa non linear. Contoh persamaaan diferensial biasa non linear:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\ 3x^2=\ sin\ t$$

persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa non linear non homogen order dua.

## II.3 Model Populasi Logistik

Model Populasi Logistik pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dan seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, Pierre Francois Verhulst pada tahun 1838. Model pertumbuhan alami tidak cukup akurat untuk populasi yang cukup besar dan tempatnya terbatas sehingga timbul hambatan karena padatnya populasi yang akan mengurangi populasi itu sendiri. Perubahan jumlah populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian dan migrasi. Salah satu model pertumbuhan adalah model populasi logistik. Model ini digunakan karena besar kecilnya populasi bergantung pada kerapatannya, sehingga laju kelahiran dan laju kematian tidak konstan [10].

Model populasi logistik merupakan salah satu model pertumbuhan populasi, yang secara matematis dirumuskan [11].

$$\frac{dN}{dt} = rN\ (1 - \frac{N}{K}) \qquad (2.3)$$

dengan kondisi batas,

$$N(0) = N_0$$

dimana $N$ didefinisikan jumlah populasi pada waktu $(t)$, r didefinisikan laju pertumbuhan intrinsik dan $K$ didefinisikan kapasitas pembawaan.

Persamaan (2.3) menyatakan bahwa jika $N$ kecil daripada $K$, $\frac{N}{K}$ mendekati nol dan $\frac{dN}{dT} \approx rN$. Jika $N \rightarrow K$ (populasi mendekati kapasitas tampungnya), $\frac{N}{K} \rightarrow 1$, sehingga $\frac{dN}{dT} \rightarrow 1$. Jika populasi $N$ berada diantara nol dan $K$, ruas kanan persamaan (2.3) bernilai positif, sehingga $\frac{dN}{dT} \rightarrow 1$ dan populasi naik. Tetapi jika populasi melampaui kapasitas tampungnya ($N > K$), maka $1 - \frac{N}{K}$ negatif, sehingga $\frac{dN}{dT} < 0$ dan populasi turun [10].

## II.4 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta memiliki bentuk umum:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i)h \qquad (2.4)$$

dengan $\varphi(x_i, y_i)\ h$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \qquad (2.5)$$

dengan $a$ adalah konstanta dan $k$ adalah:

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = hf(x_r + p_1 h, y_r q_{11} k_1)$

$k_3 = hf(x_r + p_2 h, y_r + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$

.
.
.

$k_n = hf(x_r + p_{n-1} h, y_r + q_{n-1,1} k_1 + q_{\substack{n \\ -1,2}} k_2 + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$

dengan $p$ dan $q$ adalah konstanta. Nilai $k$ menunjukkan hubungan sekuensial. Nilai $k_1$ muncul dalam persamaan untuk menghitung $k_2$, $k_1$dan $k_2$ muncul dalam persamaan untuk menghitung $k_3$ dan seterusnya. Hubungan sekuensial ini membuat metode Runge Kutta efisien dalam hitungan komputer [13].

Metode Runge Kutta orde pertama memiliki bentuk umum:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h \text{.............................} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) disebut metode Euler. Nilai baru y diperkirakan menggunakan kemiringan untuk mengekstrapolasi secara linear pada ukuran langkah h.

Chapra dan Canale merumuskan versi kedua metode Runge Kutta sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h \text{ ..........................} (2.7)$$

dimana:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

Menurut Chapra dan Canale, metode Runge Kutta orde ketiga adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \text{ .....................} \quad (2.8)$$

dimana:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h)$$

Metode Runge Kutta yang paling popular adalah metode Runge Kutta orde keempat. Metode tersebut terkenal karena tingkat ketelitian solusinya tinggi dibandingkan metode Runge Kutta orde ketiga, kedua dan pertama, mudah di program dan stabil [12]. Berikut adalah bentuk umum metode Runge Kutta orde keempat:

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \text{ ………………. (2.9)}$$

dimana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

Menurut Chapra dan Canale, versi umum metode Runge Kutta orde kelima adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h\text{……… (2.10)}$$

dimana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)$$

## II.5 Aplikasi Pemrograman *Scilab*

*Scilab* merupakan salah satu aplikasi dalam kategori sistem numerik umum yang menampilkan komputasi numerik, bahasa pemrograman yang digunakan untuk menguji algoritma dan di desain secara khusus untuk aplikasi ilmiah. *Syntax* pada *Scilab* cukup mudah dan penggunaan matriks sebagai objek fundamental dari kalkulus ilmiah, di fasilitasi melalui operator dan fungsi khusus.

*Scilab* didedikasikan untuk perhitungan ilmiah. Aplikasi ini menyediakan akses ke perpustakaan numerik yang luas, melingkupi aljabar linear, integrasi numerik dan optimisasi. Lingkupan *Scilab* dapat diperluas dengan mudah, yaitu dengan mengimpor fungsionalitas baru dari perpustakaan luar melalui *link* statis atau dinamis. *Scilab* juga menyediakan banyak fungsionalitas visualisasi mencakup 2D, 3D, *contour*, plot parametrik dan animasi. Grafik bisa di ekspor dalam format yang bervariasi seperti Gif, Postscript, Postscript-Latex, dan Xfig.

Dalam pemrograman *Scilab*, terdapat sekumpulan intruksi yang di eksekusi untuk tujuan khusus. Intruksi ini di ketik satu per satu pada *prompt Scilab*, tetapi bisa ditempatkan di dalam arsip ASCII (contohnya **build-in editor** *Scilab*) dan dieksekusi dengan perintah *Scilab* **exec** [14]**.**