

SKRIPSI
PERFORMA PETA KENDALI *AUTOREGRESSIVE*
INTEGRATED MOVING AVERAGE

(Studi Kasus: Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019)

Disusun dan diajukan oleh:

HALNIATI

H12116510



PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

**PERFORMA PETA KENDALI *AUTOREGRESSIVE*
*INTEGRATED MOVING AVERAGE***
(Studi Kasus: Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019)

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Statistika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**HALNIATI
H121 16 510**

**PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PENGESAHAN (TUGAS AKHIR)

**PERFORMA PETA KENDALI *AUTOREGRESSIVE
INTEGRATED MOVING AVERAGE***
(Studi Kasus: Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019)

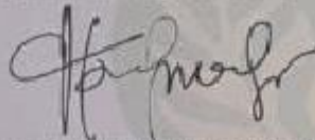
Disusun dan diajukan oleh:

**HALNIATI
H121 16 510**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 30 April 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

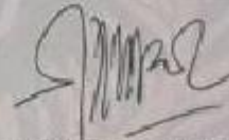
Menyetujui,

Pembimbing Utama,



Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.
NIP. 19750429 200003 2 001

Pembimbing Pendamping



Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.
NIP. 19720117 199703 2002

Ketua Program Studi



Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.
NIP. 19720117 199703 2002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Halniati
NIM : H 121 16 510
Program Studi : Statistika
Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**PERFORMA PETA KENDALI *AUTOREGRESSIVE
INTEGRATED MOVING AVERAGE*
(Studi Kasus: Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019)**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut

Makassar, 30 April 2021

Yang menyatakan



Halniati

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* pemilik alam semesta yang senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Performa Peta Kendali *Autoregressive Integrated Moving Average* (Studi Kasus: Jumlah Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019). Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Rasulullah *Shallallahu Alaihi Wasallam* suri tauladan terbaik sepanjang masa, kepada keluarga beliau serta para sahabat beliau yang senantiasa berjuang di jalan Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan bagi para pembelajar statistika.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari hambatan dan masalah namun dapat terselesaikan berkat bantuan, dorongan, dan dukungan dari berbagai pihak baik moril maupun material. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada orang tua penulis, Ayahanda tercinta dan terkasih **Dempa Hallang** dan Ibunda tercinta dan tersayang **Ramdia** yang telah membesarkan, mendidik, mencintai, menasehati, melindungi dan menyayangi serta menjadi motivasi sepanjang hidup penulis untuk senantiasa menjadi pribadi yang lebih baik serta selalu mengiringi langkah penulis dalam setiap lantunan do'a paling ikhlas dan tulus. Ucapan terima kasih juga kepada kedua adik penulis, **Fatahilla** dan **Naila Alifa** atas doa, perhatian, dukungan, bantuan yang selalu diberikan kepada penulis.

Terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang tulus juga penulis ucapkan kepada:

1. **Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, MA** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya

3. **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Statistika atas segala nasehat, ilmu, motivasi, dan bantuan yang senantiasa diberikan selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
4. **Ibu Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Utama dan **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar senantiasa meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
5. **Ibu Dr.Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.** selaku Penguji yang telah sabar meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan penulisan skripsi ini. **Ibu Siti Sahrinan, S.Si., M.Si.** selaku Penguji sekaligus Penasehat Akademik yang telah sabar meluangkan waktu untuk memberikan motivasi, dukungan, arahan selama menjadi mahasiswa dan atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan skripsi ini.
6. Seluruh **Dosen dan Staf Departemen Statistika** yang senantiasa berbagi ilmu, nasehat, dan motivasi selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
7. *Patnert* bisnis “**THE BUTIEEQ**”, **Nova** atas kerjasama, suka duka, dukungan, bantuan dan kebersamaanya.
8. Sepupu-sepupu tercinta dan terbaik, **Sri Ulfa, A.Md. Keb, Basse Daeng Nige, S.KM, Alpia Daeng Nige, A.Md. Keb, Ridwan** yang telah memberikan motivasi, bantuan serta menjadi tempat curhat terbaik.
9. Sahabat-sahabat tercinta penulis dalam suka dan duka, **Arsyillah Mughni Rahmi, S. Hut., Sinarti, Maman Suriaman, S.E., Andi Yaumil Falakh, Ana Karmelia, S.H.**, yang selalu ada dan menjadi tempat berbagi canda tawa terbaik serta senantiasa memberikan motivasi, kebahagiaan, serta semangat dalam setiap keadaan.
10. Teman-teman **Statistika 2016, Ririn Arianti, S.Si** yang telah banyak membantu penulis dan terkhusus kepada sahabat seperjuangan dalam suka dan duka, **WKNDA 4EVER: Rosdiana, S.Si, Jumrianti, S.Si, Reski Ulandari, Rayhanna Aulia Amin, S.Si, Reski Amalah, S.Si, Widya Nauli**

Amalia Puteri, S.Si, Dewi Santika Upa, S.Si, Rusyidah Khaerati, S.Si, Fitriatusakiah, S.Si, Dewi Rahma Ente, S.Si, Isnawati, S.Si, Andi Riska Fitriani, S.Si, Zhazha Alifkhamulki Ramdhani, S.Si, Ayu Riski Ramadani, S.Si, Bunga Aprilia, S.Si, Rizki Adiputra, S.Si, Muhammad Jayzul Usrah, S.Si, Agung Muh. Takdir, Suritman, S.Si Fajar Affan, S.Si, Samsul Arifin, S.Si, Terima kasih atas segala pengalaman, cerita, kebahagiaan, keluh kesah, canda tawa, dan kenangan yang telah dibagi bersama-sama.

11. Keluarga besar **KOPMA UNHAS**, terkhusus **PENGURUS TB. 2019**, atas pengalaman, suka duka, cerita, canda tawa, kenangan dan motivasi serta kasih sayang yang telah dibagi bersama-sama.
12. Keluarga besar **KKN TEMATIK PERBATASAN ATAMBUA-TIMOR LESTE**, terkhusus teman-teman seperjuangan **KENEBIBI POSKO 3** atas pengalaman dan cerita suka dukanya selama mengabdikan di daerah timor.
13. Serta semua pihak yang turut membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis ucapkan satu per satu. Terima kasih sebesar-besarnya dan semoga dapat bernilai ibadah.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati memohon maaf. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Makassar, April 2021



Halniati

ABSTRAK

Proses produksi yang berfokus pada kualitas akan menghasilkan produk yang bebas dari kerusakan dan mengalami adanya variansi. Peta kendali ARIMA digunakan untuk menangani data autokorelasi dengan konsep pemodelan stokastik dari deret waktu. Tujuan penelitian ini adalah menentukan peta kendali ARIMA dan mengetahui performanya berdasarkan perhitungan ARL pada data produk penjualan hijab tahun 2015-2019. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peta kendali ARIMA lebih sensitif dibandingkan dengan peta kendali ARIMA EWMA dalam mendeteksi pergeseran proses. Berdasarkan perhitungan ARL dengan nilai $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,5$, $\lambda = 0,7$ menunjukkan bahwa peta kendali ARIMA EWMA lebih sensitif dibandingkan peta kendali ARIMA.

Kata Kunci: ARIMA, Peta Kendali ARIMA, Peta Kendali ARIMA EWMA, *Average Run Length*.

ABSTRACK

Production processes that focus on quality will produce products that are free from damage and experience variance. ARIMA control chart is used to handle autocorrelation data with the concept of stochastic modeling of time series. The purpose of this study is to determine the ARIMA control chart and determine its performance based on the ARL calculation on the hijab sales product data for 2015-2019. The results showed that the ARIMA control chart is more sensitive than the ARIMA EWMA control chart in detecting process shifts. Based on the calculation of ARL with a value of $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.7$ shows that the ARIMA EWMA control chart is more sensitive than the ARIMA control chart.

Keywords: ARIMA, ARIMA Control Chart, ARIMA EWMA Control Chart, Average Run Length.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

LEMBAR PENGESAHAN iii

PERNYATAAN KEASLIAN iv

KATA PENGANTAR..... v

ABSTRAK viii

ABSTRACK ix

DAFTAR ISI..... xi

DAFTAR TABEL xiii

DAFTAR GAMBAR..... xiv

DAFTAR LAMPIRAN xv

BAB I PENDAHULUAN..... 1

 1.1 Latar Belakang 1

 1.2 Rumusan Masalah 2

 1.3 Batasan Masalah..... 2

 1.4 Tujuan Penelitian..... 3

 1.5 Manfaat Penelitian..... 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA..... 4

 2.1 Peta Kendali 4

 2.2 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* 5

 2.2.1 Stasioneritas 5

 2.2.2 *Autocorrelation Function* 6

 2.2.3 *Partial Autocorrelation Function* 6

2.2.4 <i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>	7
2.3 Peta Kendali ARIMA	10
2.4 Peta Kendali ARIMA EWMA	13
2.5 Average Run Lenght	14
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	16
3.1 Sumber Data	16
3.2 Identifikasi Variabel	16
3.3 Metode Analisis.....	16
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	18
4.1 Peta Kendali ARIMA untuk Data Penjualan Hijab.....	18
4.1.1 Identifikasi Kestasioneran Data	18
4.1.2 Estimasi Parameter	21
4.1.3 Pemeriksaan Diagnostik	21
4.1.4 Pemilihan Model Terbaik	22
4.1.5 Pembuatan Batas Kendali ARIMA.....	23
4.1.6 Pembuatan batas kendali ARIMA EWMA.....	24
4.2 Performa Peta Kendali ARIMA dan ARIMA EWMA	26
4.2.1 Perhitungan ARL pada Peta Kendali ARIMA.....	26
4.2.2 Perhitungan ARL pada Peta Kendali ARIMA EWMA.....	28
4.2.3 Perbandingan nilai <i>Average Run Lenght</i> untuk Peta Kendali ARIMA dan Peta Kendali ARIMA EWMA	29
BAB V PENUTUP.....	32
5.1 Kesimpulan.....	32
5.2 Saran	32
DAFTAR PUSTAKA	33
LAMPIRAN.....	35

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1 Uji Signifikansi Parameter Model	21
Tabel 4. 2 Perbandingan Nilai MSE.....	22
Tabel 4. 3 Perbandingan Nilai ARL ARIMA dan ARL ARIMA EWMA	30

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4. 1 Plot Data Penjualan Hijab.....	18
Gambar 4. 2 Plot ACF Data Penjualan Hijab.....	19
Gambar 4. 3 Plot ACF Hasil <i>Differencing</i> Kedua.....	20
Gambar 4. 4 Plot PACF Hasil <i>Differencing</i> Kedua.....	20
Gambar 4. 5 Peta Kendali <i>Moving Range</i>	23
Gambar 4. 6 Peta Kendali <i>Individual</i>	24
Gambar 4. 7 Peta Kendali EWMA	26
Gambar 4. 8 Grafik Nilai ARL ARIMA dan ARL ARIMA EWMA.....	31

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1: Data Produk Penjualan Hijab Tahun 2015-2019	36
Lampiran 2: Output nilai ACF Data Penjualan Hijab Hasil <i>Differencing</i> Pertama	37
Lampiran 3: Output Nilai ACF dan PACF Data Jumlah Produk Penjualan Hijab Hasil <i>Differencing</i> kedua.....	38
Lampiran 4: Output Estimasi Parameter ARIMA(1,2,0) dan ARIMA(0,2,1)	40
Lampiran 5: Output Residual ARIMA(1,2,0) dan ARIMA(0,2,1)	42
Lampiran 6: Hasil Perhitungan Nilai X_t Peta Kendali ARIMA EWMA	43
Lampiran 7: Faktor-Faktor untuk Membuat Peta Kendali Variabel	44
Lampiran 8: Nilai Residual dan Nilai Rentang Sampel	45

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Proses produksi yang berfokus pada kualitas akan menghasilkan produk yang bebas dari kerusakan. Pengendalian kualitas pada proses produksi harus terus-menerus dilakukan untuk meminimalkan kecacatan. Oleh karena itu, teknologi dan metode pengendalian kualitas semakin berkembang. Proses pengendalian statistik adalah sebuah metode yang banyak digunakan untuk memastikan proses produksi sesuai standar. Salah satu alat bantu proses pengendalian statistik adalah peta kendali.

Peta kendali merupakan alat *Statistical Proses Control* yang paling penting digunakan untuk mendeteksi proses dalam keadaan terkendali atau tidak terkendali. Peta kendali pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Walter.A Shewhart pada tahun 1931 (Akhmadi, 2006). Terdapat beberapa peta kendali menurut data yang digunakan, salah satunya peta kendali untuk data variabel yaitu diagram kontrol yang dapat diukur atau mengalami variansi.

Ada beberapa metode yang cocok untuk membuat peta kendali yang terdapat variansi, salah satunya peta kendali *Shewhart*. Konsep *Shewhart* mengasumsikan bahwa data yang diukur tidak berkorelasi sehingga ketika menghadapi data autokorelasi dengan tingkat yang sangat rendah dapat menyebabkan adanya kegagalan pada peta kendali *Shewhart*. Salah satu cara untuk menangani data autokorelasi adalah dengan konsep pemodelan stokastik dari deret waktu yaitu menggunakan *autoregressive integrated moving average* (ARIMA). Pada tahun 2012, Kovarik dan Klimek mengusulkan peta kendali ARIMA dan EWMA pada data keuangan yang memiliki sifat heteroskedastisitas. Hasilnya menunjukkan bahwa peta kendali menjadi lebih sensitif dalam mendeteksi perubahan yang kecil ketika menghadapi data berautokorelasi.

Russo, Maria dan Jonas (2012), telah menerapkan peta kendali ARIMA untuk data autokorelasi. Proses yang telah dilakukan oleh para peneliti ini adalah

menggunakan teknik peta kendali untuk data yang berautokorelasi dengan menjadikan sebagai model ARIMA. Residual yang dihasilkan dari model ini diterapkan pada peta kendali *Shewhart*. Data yang digunakan berasal dari data perusahaan industri kain. Perkembangan peta kendali untuk variabilitas proses memperhatikan kinerja dari peta kendali tersebut. Kinerja dari suatu peta kendali dapat dilihat dari seberapa cepat suatu peta kendali mengidentifikasi adanya sinyal *out of control*. Salah satu metode untuk melihat kinerja peta kendali adalah *Average Run Length* (ARL).

Nur Ekayanti (2016) telah mengkaji tentang peta kendali ARIMA dan aplikasinya pada data Produk Domestik Bruto (PDB) Indonesia, namun belum dilakukan analisis tentang performa *Average Run Length* nya. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini dilakukan kajian *Average Run Length* untuk menguji performa peta kendali yang diperoleh dan data yang digunakan yaitu jumlah produk penjualan hijab pada tahun 2015-2019.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan, permasalahan yang diangkat dalam tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana menentukan peta kendali ARIMA pada data jumlah produk penjualan hijab tahun 2015-2019 dan membandingkan dengan peta kendali ARIMA EWMA?
2. Bagaimana menentukan performa peta kendali ARIMA menggunakan *Average Run Length* (ARL)?

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan tugas akhir ini dibatasi pada data produk penjualan hijab tahun 2015-2019 yang saling berautokorelasi dan pada model ARIMA EWMA nilai lamda yang digunakan adalah $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,5$, $\lambda = 0,7$ dan $\lambda = 0,9$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Memperoleh peta kendali ARIMA dan peta kendali ARIMA EWMA pada data jumlah produk penjualan hijab tahun 2015-2019.
2. Memperoleh informasi tentang performa peta kendali ARIMA menggunakan *Average Run Length* (ARL).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai gambaran dan alternatif pertimbangan dalam menggunakan peta kendali ARIMA. Secara umum untuk semua mahasiswa yang bekerja dengan metode pengendalian kualitas statistika dan aplikasinya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peta Kendali

Peta Kendali merupakan suatu teknik yang dikenal sebagai metode grafik yang digunakan untuk mengevaluasi apakah suatu proses berada dalam pengendalian kualitas secara statistik atau tidak sehingga dapat memecahkan masalah dan menghasilkan perbaikan kualitas. Peta Kendali pertama kali diperkenalkan oleh DR. Walter Andrew Shewart pada tahun 1924 dengan maksud menghilangkan variasi tidak normal melalui pemisahan variasi yang disebabkan oleh penyebab khusus dan variasi yang disebabkan oleh sebab umum (Gaspersz, 1998).

Montgomery (1998) menyatakan peta kendali dapat digunakan oleh manajemen sebagai alat guna mencapai tujuan tertentu berkenaan dengan mutu proses. Garis tengah dan batas-batas kendali dapat merupakan nilai-nilai standar yang dipilih oleh manajemen, sedemikian hingga mereka menghendaki proses dalam keadaan terkendali pada tingkat mutu itu. Peta kendali juga dapat berfungsi sebagai alat penaksir parameter tertentu seperti rata-rata (*mean*), standar deviasi, bagian yang sesuai dan sebagainya. Sebagian taksiran ini mempunyai dampak yang cukup besar pada banyak masalah, keputusan manajemen yang terjadi dalam perputaran produk, termasuk keputusan membuat atau membeli, perangkat pabrik dan proses yang mengurangi variabilitas proses dan perjanjian kontrak dengan langganan atau penjual mengenai mutu produk.

Gaspersz (2009), menyebutkan bahwa terdapat beberapa jenis peta kendali berdasarkan jenis data pengukuran yang dipakai (data variabel atau data atribut). Data variabel menunjukkan karakteristik kualitas berdimensi kontinu yang dapat mengambil nilai-nilai kontinu yang kemungkinan yang tidak terbatas, seperti panjang, kecepatan, bobot, volume dan lain-lain. Sedangkan data atribut hanya memiliki dua nilai yang berkaitan dengan ya atau tidak, seperti sesuai atau tidak sesuai, berhasil atau gagal dan lain-lain. Peta kendali sederhana dengan terdiri dari tiga garis, yaitu garis tengah (*center line*), garis batas atas atau UCL (*Upper Control Limit*) dan garis batas bawah atau LCL (*Lower Control Limit*).

Adapun bentuk umum peta kendali Shewhart, yaitu :

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + L\sigma \\ CL &= \mu \\ LCL &= \mu - L\sigma \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 Model Autoregressive Integrated Moving Average

2.2.1 Stasioneritas

Pembentukan model deret waktu diasumsikan bahwa data dalam keadaan stasioner. Suatu model deret waktu dikatakan stasioner jika tidak ada perubahan kecenderungan dalam variansi dan rata-rata. Kestasioneran dalam variansi dapat dilakukan dengan melihat plot Box-Cox data. Jika koefisien λ (lamda) yang diperoleh sama dengan satu atau mendekati nilai satu, maka data dapat dikatakan stasioner terhadap variansi (Box & Cox, 1964). Sedangkan untuk mengetahui kestasioneran dalam rata-rata, dapat digunakan diagram deret waktu (*time series plot*) yaitu diagram pencar antara nilai peubah Z_t dengan waktu t . Jika diagram deret waktu berfluktuasi di sekitar garis yang sejajar sumbu waktu (t) maka dikatakan deret (*series*) stasioner dalam rata-rata. Bila stasioner dalam rata-rata tidak terpenuhi diperlukan proses pembedaan (*differencing*) (Aswi, 2006).

Proses *differencing* pada orde pertama merupakan selisih antara data ke- t dengan data ke $t-1$, yaitu:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Adapun bentuk *differencing* untuk orde kedua adalah:

$$\Delta^2 Z_t = \Delta Z_t - \Delta Z_{t-1} = (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

Bila kondisi stasioner terhadap dalam variansi tidak terpenuhi, dilakukan transformasi pangkat yang dikenal dengan transformasi Box-Cox:

$$Z_t^{(r)} = \frac{Z_t^{(r)} - 1}{r}$$

2.2.2 Autocorrelation Function

Koefisien korelasi adalah suatu fungsi yang menunjukkan besarnya korelasi (hubungan linear) antara pengamatan pada waktu ke t (dinotasikan dengan Z_t) dengan pengamatan pada waktu-waktu sebelumnya model dapat digunakan untuk memprediksi nilai ramal di masa mendatang. Pada fungsi autokorelasi, ρ_k merupakan ukuran korelasi antara dua nilai Z_t dan Z_{t+k} dengan k merupakan koefisien korelasi pada lag k . Untuk Z_t yang stasioner terdapat nilai rata-rata $E(Z_t) = \mu$ dan variansi $Var(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2$ adalah bernilai konstan. Autokovarian antara Z_t dan Z_{t+k} adalah sebagai berikut:

$$\gamma_k = cov(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)$$

Dan korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} adalah:

$$\rho_k = corr(Z_t, Z_{t+k}) = \frac{cov(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{var(Z_t)var(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Pada analisa deret berkala, nilai γ_k disebut sebagai fungsi autokovarian dan ρ_k disebut sebagai fungsi autokorelasi yang merupakan ukuran keeratan antara Z_t dan Z_{t+k} dari proses yang sama dan hanya dipisahkan oleh selang waktu ke- k (Wei, 2006).

Perhitungan fungsi autokorelasi dengan pengambilan data sampel dirumuskan sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Nilai ρ_k yang mendekati ± 1 mengindikasikan adanya korelasi tinggi, sedangkan nilai ρ_k yang mendekati nol mengindikasikan adanya hubungan yang lemah. Diagram ACF dapat digunakan sebagai alat untuk mengidentifikasi kestasioneran data. Jika diagram ACF cenderung turun lambat atau turun secara linear, maka dapat disimpulkan data belum stasioner dalam rata-rata.

2.2.3 Partial Autocorrelation Function

Fungsi autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur keeratan antara Z_t dan Z_{t-k} , apabila pengaruh dari lag waktu (*time lag*) $1, 2, 3, \dots, k-1$ dianggap terpisah. Fungsi autokorelasi parsial adalah suatu fungsi yang menunjukkan

besarnya korelasi parsial antara pengamatan pada waktu ke t dengan pengamatan pada waktu-waktu sebelumnya.

Adapun rumus autokorelasi parsial adalah sebagai berikut:

$$\phi_{kk} = \text{corr}(Z_t, Z_{t-k} | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1})$$

Nilai ϕ_{kk} dapat ditentukan melalui persamaan Yule Walker sebagai berikut:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Durbi (1960) telah memperkenalkan metode yang lebih efisien untuk menyelesaikan persamaan Yule Walker (Aswi, 2006), yaitu:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j}$$

Dengan $\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-j}$, untuk $j = 1, 2, \dots, k - 1$

2.2.4 Autoregressive Integrated Moving Average

Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) sering juga disebut metode deret waktu *Box-Jenkins*. ARIMA merupakan hasil penggabungan model *autoregressive* AR (p), *moving average* MA (q) dengan proses *differencing* (d). Model *autoregressive* adalah suatu bentuk regresi, tetapi tidak menghubungkan variabel tak bebas melainkan menghubungkan nilai-nilai sebelumnya pada *lag* (selang waktu) yang bermacam-macam. Jadi, suatu model *autoregressive* akan menyatakan suatu ramalan sebagai fungsi nilai-nilai sebelumnya dari deret waktu tertentu (Makridakis, Wheelwright, & Hyndman, 1998). Sedangkan model *moving average* merupakan model yang menggambarkan ketergantungan variabel terikat Z terhadap nilai-nilai *residual* pada waktu sebelumnya yang berurutan.

Secara umum, bentuk model ARIMA (p, d, q) sebagai berikut:

$$\phi_p(B)(1 - B)^d Z_t = \theta_q(B)e_t$$

dengan p = orde AR

d = orde *differencing*

q = orde MA

$$\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p)$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p =$ koefisien orde p

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q =$ koefisien orde q

$(1 - B)^d =$ orde *differencing* non-musiman

$Z_t =$ besarnya pengamatan pada waktu ke- t

$e_t =$ suatu proses *residual* pada waktu ke- t yang diasumsikan mempunyai *mean* 0 dan variansi konstan σ_e^2 (Aswi, 2006).

Tahap-tahap analisis runtun waktu model ARIMA adalah sebagai berikut:

1. Tahap identifikasi

Tahap identifikasi merupakan suatu tahapan yang digunakan untuk mencari atau menentukan nilai p, d dan q dengan bantuan autocorrelation function (ACF) atau fungsi autokorelasi dan partial autocorrelation function (PACF) atau fungsi autokorelasi parsial.

2. Tahap Estimasi

Model sementara yang telah diperoleh, selanjutnya dilakukan estimasi parameter. Metode yang digunakan untuk estimasi parameter adalah *Least Square*. Metode ini dapat digunakan untuk menduga parameter ARMA yaitu ϕ dan θ . Estimasi parameter ARMA dilakukan hingga membuat nilai jumlah kuadrat galat menjadi minimum yaitu $S(\phi, \theta) = \min \sum_{i=1}^n e_i^2$

a. Membentuk suatu fungsi:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

b. Mendiferensiasikan S terhadap parameter-parameter didalamnya dan hasilnya sama dengan nol.

Misalnya dilakukan estimasi parameter untuk AR(1).

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t$$

Fungsi pada persamaan diatas dijabarkan menjadi persamaan berikut:

$$S(\phi_1) = \sum_{i=1}^n [Z_t - (\phi_1 Z_{t-1})]^2$$

Fungsi pada persamaan diatas dijabarkan menjadi persamaan berikut:

$$S(\phi_1) = \sum_{i=1}^n [Z_t^2 - 2Z_t\phi_1 Z_{t-1} + \phi_1^2 Z_{t-1}^2]$$

Setelah persamaan dijabarkan, lalu disamakan dengan nol menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \phi_1} &= \sum_{t-1}^n -2Z_t Z_{t-1} + 2\phi_1 \sum_{t-1}^n Z_{t-1}^2 = 0 \\ 2\phi_1 \sum_{t-1}^n Z_{t-1}^2 &= 2 \sum_{t-1}^n Z_t Z_{t-1} \\ \phi_1 &= \frac{2 \sum_{t=1}^n Z_t Z_{t-1}}{2 \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, maka estimasi parameter untuk $\hat{\phi}_1$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan tersebut. Setelah dilakukan estimasi parameter, maka parameter tersebut perlu diuji signifikansinya untuk mengetahui apakah parameter tersebut dapat dimasukkan dalam model dengan uji signifikan.

3. Uji Kesesuaian Model

a. Uji Sisa *White Noise*

- Hipotesis $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$ (sisa memenuhi syarat WN)
- Statistik Uji : uji *Ljung-Box* atau *Box-Pierce Modifiedi* :

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{(n-k)} \quad (2.2)$$

$$\hat{\rho}_k^2 \text{ diperoleh dari } \hat{\rho}_k^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (\hat{a}_t - \hat{a})}{\sum_{t=1}^n (\hat{a} - \hat{a})^2}$$

- Daerah Penolakan

Tolak H_0 jika $Q > X_{\alpha; df=K-m}^2$. K berarti pada lag K dan m adalah jumlah parameter yang ditaksir dalam model.

b. Uji Asumsi Distribusi Normal

Salah satu cara untuk melakukan uji asumsi kenormalan adalah uji *Jarque-Berra* (JB). Uji ini berfungsi untuk menguji kenormalan sebaran data yang mengukur perbedaan antara *skewness* (kemenjuluran) dan *kurtosis* (keruncingan) dari sebaran data. Uji JB memiliki hipotesis sebagai berikut:

- Hipotesis H_0 : *residual* data berdistribusi normal

$$H_1 : \textit{residual} \text{ data berdistribusi tidak normal}$$

- Statistik Uji

$$JB = n \left[\frac{s^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right]$$

dengan n = banyaknya pengamatan, S = koefisien kemenjuluran, K = koefisien keruncingan.

- Daerah Penolakan

Tolak H_0 jika $p_{value} > \alpha$.

4. Pemilihan Model Terbaik

Kriteria yang dapat digunakan untuk pemilihan model ARIMA yang terbaik adalah dengan menggunakan kriteria *Mean Squared Error* (MSE), yaitu suatu kriteria pemilihan model terbaik berdasarkan pada hasil sisa peramalannya. Persamaan MSE adalah sebagai berikut:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{e}_t^2$$

dimana :

\hat{e}_t = taksiran residual pada peramalan

N = banyaknya residual

Pada pemilihan model terbaik yang digunakan untuk meramalkan suatu data dapat dipertimbangkan dengan meminimalkan residual yang mempunyai nilai ukuran kesalahan model terkecil.

2.3 Peta Kendali ARIMA

Peta kendali ARIMA didasarkan pada prinsip menemukan model deret waktu yang cocok dan penggunaan peta kendali untuk model residual. Langkah penting lainnya dalam penggunaan model ARIMA adalah pemilihan peta kendali *Statistical Process Control* (SPC) yang sesuai. Jika jumlah pengamatan sama dengan satu ($n = 1$) maka diutamakan menggunakan peta kendali *Individual Moving Range* (I-MR) (Kovarik dan Klimek, 2012). Peta kendali I-MR merupakan gabungan dari peta kendali *Individual* (I) yang menampilkan angka

hasil pengukuran dengan peta kendali *Moving Range* (MR) yang menampilkan perbedaan angka dari pengukuran yang satu ke pengukuran selanjutnya. Dalam menginterpretasikan pola grafik *individual*, pertama-tama harus menentukan peta kendali MR dalam keadaan terkendali atau tidak.

Pembuatan batas kendali memerlukan penaksir untuk standar deviasi σ . Jika z_1, z_2, \dots, z_n merupakan sampel berukuran n dan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka rentang sampel (R) merupakan selisih pengamatan yang terbesar dan terkecil, yaitu

$$R = z_{max} - e_{min}.$$

Penggunaan peta kendali MR dalam peta kendali *individual* adalah hasil dari rentang antara dua pengamatan yang berurutan, dengan persamaannya menjadi;

$$R_t = |e_t - e_{t-1}|,$$

dengan $t = 1, 2, 3, \dots, n$; n menunjukkan jumlah bulan yang digunakan.

Hubungan antara rentang sampel dan standar deviasi dari distribusi normal, ditentukan oleh $W = R/\sigma$, dimana W merupakan rentang relatif (Montgomery, 2009). Sedangkan parameter dari distribusi W adalah fungsi dari n sampel dan *mean* W adalah d_2 . Sehingga penaksir untuk σ adalah $\hat{\sigma} = R/d_2$. Nilai d_2 untuk ukuran sampel dapat dilihat nilainya pada Lampiran 6.

Misalkan R_1, R_2, \dots, R_n merupakan rentang n untuk sampel tersebut, dengan rentang rata-ratanya sebagai berikut

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n},$$

maka taksiran untuk σ dihitung sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Penggunaan peta kendali untuk model residual, dengan residualnya adalah

$$e_t = z_t - \hat{z}_t,$$

dimana e_t independen dan berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi konstan. Persamaan rata-rata residual adalah :

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t$$

Ketika dilakukan pengujian residual dan diperoleh nilai residualnya tidak berautokorelasi dan berdistribusi normal, maka langkah selanjutnya dilakukan pemeriksaan kestabilan prosesnya secara statistik atau tidak (Kovarik dan Klimek, 2012).

Bentuk umum peta kendali dengan menggunakan batas kendali 3σ dan \bar{e} digunakan sebagai penaksir untuk μ dan \bar{R}/d_2 sebagai penaksir untuk σ , maka peta kendali ARIMA untuk nilai-nilai individual dapat ditentukan dengan :

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{e} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \\ CL &= \bar{e} \\ LCL &= \bar{e} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Penggunaan batas kendali 3σ dikarenakan dapat memberikan hasil yang baik dalam hal praktek.

Taksiran σ_R digunakan untuk menentukan batas pengendalian dalam peta kendali MR, dengan karakteristik kualitas berdistribusi normal dan untuk estimasi $\hat{\sigma}_R$ diperoleh dari distribusi rentang $W = R/\sigma$. Standar deviasi W adalah fungsi n yang diketahui. Jadi, karena $R = W\sigma$, maka standar deviasi R adalah $\sigma_R = d_3\sigma$. Karena σ tidak diketahui, maka σ_R dapat ditaksir dengan persamaan

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Sehingga, parameter untuk MR dengan batas pengendali 3σ adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \\ CL &= \bar{R} \\ LCL &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned}$$

Misalkan, $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$ dan $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$, maka parameter-parameter peta kendali MR dapat didefinisikan kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned} UCL &= D_4 \bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ LCL &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.4 Peta Kendali ARIMA EWMA

Peta kendali ARIMA EWMA dapat didefinisikan sebagai berikut (Montgomery, 2009):

$$x_t = \lambda e_t + (1 - \lambda)x_{t-1} \tag{2.5}$$

dengan x_t merupakan nilai EWMA pengamatan ke- t , e_t merupakan data nilai residual dari model ARIMA ke- t , dan λ merupakan nilai pembobot dengan $0 < \lambda \leq 1$ adalah konstan (sampel pertama pada $t = 1$) sehingga $z_0 = \mu_0$. Lebih lanjut lagi (Montgomery, 2009) menyatakan bahwa dalam praktiknya, nilai $\lambda = 0,05$; $\lambda = 0,1$; $\lambda = 0,2$ dan $L = 3$ adalah pilihan yang populer dalam mendeteksi pergeseran proses yang kecil.

Batas kontrol dari peta kendali ARIMA EWMA adalah:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} (1 - (1 - \lambda)^{2t})},$$

$$CL = \mu_0 ,$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} (1 - (1 - \lambda)^{2t})},$$

atau,

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \tag{2.6}$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}}$$

dengan L adalah lebar dari batas kendalinya, μ_0 adalah rata-rata residual pengamatan, σ adalah simpangan baku residual dari pengamatan, *upper control limit* adalah batas kendali atas, *control limit* adalah titik tengah dan *lower control limit* adalah batas kendali bawah.

2.5 Average Run Lenght

Average Run Lenght merupakan rata-rata pengamatan yang harus diplot pada peta kendali sebelum sampai terindikasi kondisi *out of control*. Berdasarkan definisi ini maka ARL berfungsi untuk mengukur efektifitas kinerja suatu peta kendali dalam mendeteksi perubahan suatu proses.

$$ARL = \frac{1}{P(\text{satu titik plot diluar kendali})}, \tag{2.7}$$

Nilai ARL terbagi menjadi 2 yaitu, ARL_0 (*ARL in control*) dan ARL_1 (*ARL out of control*) dengan persamaan sebagai berikut:

$$ARL_0 = \frac{1}{P(\text{Tolak } H_0 \mid H_0 \text{ benar})} = \frac{1}{\alpha}$$

$$ARL_1 = \frac{1}{P(\text{Terima } H_0 \mid H_0 \text{ benar})} = \frac{1}{1 - \beta} \tag{2.8}$$

dengan H_0 merupakan proses dalam keadaan *in control*. Sehingga α disebut tipe kesalahan I pada uji hipotesis, yaitu probabilitas memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control* namun kenyataannya proses dalam kondisi *in control*. Sedangkan β adalah tipe kesalahan II pada uji hipotesis, yang berarti probabilitas memutuskan bahwa proses dalam keadaan *in control*, namun kenyataannya proses dalam kondisi *out of control*, sehingga $1 - \beta$ adalah probabilitas yang memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control*.

Maka ARL_0 dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang harus diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control*, pada saat proses berada pada kondisi *in control*. Sedangkan ARL_1 dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control* pada proses dalam kondisi *out of control*.