SKRIPSI

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI INTENSITAS BERSYARAT MODEL *POINT PROCESS* DAN APLIKASINYA PADA DATA GEMPA BUMI

Disusun dan diajukan oleh:

SULTAN

H12116315

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI INTENSITAS BERSYARAT MODEL *POINT PROCESS* DAN APLIKASINYA PADA DATA GEMPA BUMI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SULTAN
H 121 16 315

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI INTENSITAS BERSYARAT MODEL *POINT PROCESS* DAN APLIKASINYA PADA DATA GEMPA BUMI

Disusun dan diajukan oleh

SULTAN
H12116315

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
pada tanggal 05 Maret 2021
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.	**Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.**
NIP. 19720117 199703 2 002	**NIP. 19750429 200003 2 001**

Ketua Program Studi

Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.
NIP. 19720117 199703 2 002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN STATISTIKA FAKULTAS MIPA

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Sultan
NIM	:	H12116315
Program Studi	:	Statistika
Jenjang	:	S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI INTENSITAS BERSYARAT MODEL *POINT PROCESS* DAN APLIKASINYA PADA DATA GEMPA BUMI

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 05 Maret 2021

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL
399F3AHF912390943
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Sultan

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat **Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*** atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya serta kemudahan dan kelancaran yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Estimasi Parameter Fungsi Intensitas Bersyarat Model *Point Process* dan Aplikasinya Pada Data Gempa Bumi", serta shalawat dan salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi **Muhammad bin Abdullah *Shallallahu 'Alaihi Wasallama*** dan kepada para keluarga serta sahabat beliau yang senantiasa berjuang di jalan **Allah *Subhanahu Wa Ta'ala***. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari hambatan dan masalah namun dapat terselesaikan berkat bantuan, dorongan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga untuk Ayahanda **Bennu** dan Ibunda tercinta **Sahati** yang tak kenal lelah mendoakan, memberikan dukungan, dan selalu melimpahkan cinta dan kasih sayangnya kepada penulis sehingga mereka menjadi motivasi terbesar penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Ucapana terima kasih juga kepada saudara-saudara penulis **Sofyan, Herman dan Suryadi** atas doa, nasehat, motivasi dan bantuan yang selalu diberikan kepada penulis.

Terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang tulus juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, MA s**elaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya
3. Ibu **Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Statistika atas segala nasehat, ilmu, motivasi, dan bantuan yang senantiasa diberikan selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
4. Alm. Bapak **Drs. Shaleh A.F., M.Si.** dan Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si.** selaku Penasehat Akademik atas segala masukan, bantuan, nasehat

serta motivasi yang diberikan dari penulis masih berstatus mahasiswa baru sampai penulis menyelesaikan studi di Departemen Statistika.

5. Ibu **Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar senantiasa meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si.** selaku Penguji atas saran, nasehat, motivasi, dan dukungan yang telah diberikan selama menjadi mahasiswa dan atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan skripsi ini. Bapak **Dr. La Podje Talangko, M.Si.** selaku Penguji yang dengan sabar telah meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen dan Staf Departemen Statistika yang senantiasa berbagi ilmu, nasehat, dan motivasi selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
8. Sahabat-sahabat terbaik sekaligus teman berbagi kamar selama menjadi mahasiswa di Asrama Mahasiswa Universitas Hasanuddin, **Hajrin**, **Muhammad Rizaldy**, **Sulaeman**, **Sangereng Dewa Raja**, **Muhammad Baderuddin Hidayat,** dan **Hamzah Julianto Nugraha** Terima kasih atas segala suka duka, motivasi, nasehat, dan pengalaman yang telah dibagi bersama.
9. Seluruh teman-teman **STATISTIKA 2016** Terkhusus kepada **Azman, Muhammad Naim, Samsir Aditya Ania, dan Muhammad Idman** yang selalu menemani penulis dikampus. Terima kasih selalu setia untuk mendengar dan berbagi kisah kehidupan perkuliahan. Terima kasih atas warna warni kehidupan selama ini. terima kasih karena masih selalu ada untuk mendoakan dan berbagi cerita serta saling memberi motivasi untuk mimpi-mimpi kedepannya.
10. Teman-teman **KKN Reguler Unhas Gelombang 102 Kecamatan Parangloe**, terkhusus kepada teman-teman **Kecalamatan Lanna**. Terima kasih atas suka duka selama sebulan di posko dan setelahnya.

10. Teman-teman **KKN Reguler Unhas Gelombang 102 Kecamatan Parangloe**, terkhusus kepada teman-teman **Kecalamatan Lanna**. Terima kasih atas suka duka selama sebulan di posko dan setelahnya.
11. Serta semua pihak yang turut membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis ucapkan satu per satu. Terima kasih sebesar-besarnya dan semoga dapat bernilai ibadah.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati memohon maaf. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Makassar, 05 Maret 2021

Sultan

ABSTRAK

Kemunculan gempa bumi adalah fenomena alam yang bersifat acak baik dalam ruang maupun waktu. *Point process* merupakan salah satu model yang cukup baik digunakan untuk menggambarkan sistem stokastik yang terjadi dalam pola tertentu, dengan penggambaran peristiwa tersebut berupa titik-titik kejadian yang terjadi dalam suatu selang waktu atau ruang tertentu. Tujuan penelitian ini adalah memperoleh persamaan *likelihood* dan memperoleh prakiraan gempa bumi dengan menggunakan model parametrik. Dalam hal ini, intensitas bersyarat dipandang sebagai suatu proses renewal dimana intensitas bersyarat bergantung hanya pada selisih waktu sejak waktu kemunculan kejadian terakhir, dan untuk memperoleh persamaan *likelihood* dilakukan konstruksi melalui pendekatan Bernoulli. Hasil penelitian ini diperoleh bahwa model parametrik yang paling sesuai adalah model persamaan kubik. Karena model ini memiliki MSE terkecil dan nilai R-Square yang paling besar diantara model yang lain, yaitu sebesar 97.6%.

Kata Kunci: *Point Process*, Fungsi Intensitas Bersyarat, Percobaan Bernoulli, Proses Renewal, Gempa Bumi

ABSTRACT

The appearance of an earthquake is a natural phenomenon that is random in both space and time. Point process is a model that is quite good to use to describe stochastic systems that occur in a certain pattern, by depicting these events in the form of points of events that occur in a certain time or space interval. The purpose of this study is to obtain the likelihood equation and obtain earthquake forecasts using a parametric model. In this case, the conditional intensity is seen as a renewal process where the conditional intensity depends only on the time difference since the last occurrence of the event, and to obtain the likelihood equation construction is carried out using the Bernoulli approach. The results of this study indicate that the most suitable parametric model is the cubic equation model. Because this model has the smallest MSE and the largest R-Square value among other models, which is 97.6%.

Key Words: Point Process, Conditional Intensity Function, Bernoulli Experiment, Renewal Process, Earthquake

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL i
HALAMAN JUDUL ii
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI iii
PERNYATAAN KEASLIAN iv
KATA PENGANTAR v
ABSTRAK viii
ABSTRACT ix
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR TABEL xiii
DAFTAR LAMPIRAN xiv
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 3
1.3. Batasan Masalah 4
1.4. Tujuan Penelitian 4
1.5. Manfaat Penelitian 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1. Distribusi Bernoulli 5
2.2. Proses Poisson 5
2.3. Proses Renewal 6
2.4. Deret Taylor dan Maclaurin 7
2.5. *Point Process* 7
2.5.1. Temporal Point Process 8
2.5.2. Spatial Point Process 9
2.6. Fungsi Intensitas Bersyarat 9
2.7. Distribusi Eksponensial 10
2.7.1. Distribusi Eksponensial Satu Parameter 10
2.7.2. Distribusi Eksponensial Dua Parameter 10
2.8. Distribusi Weibull 11
2.8.1. Distribusi Weibull Tiga Parameter 11
2.8.2. Distribusi Weibull Dua Parameter 11
2.8.3. Distribusi Weibull Satu Parameter 11

2.9. Uji Kesesuaian Distribusi 12
2.10. Pemilihan Model Terbaik 12
2.11. Gempa Bumi 13
BAB III METODOLOGI PENELITIAN 15
3.1. Sumber Data 15
3.2. Metode Analisis 15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 16
4.1. Mengkostruksi Fungsi Likelihood Temporal Point Process 16
4.1.1. Hubungan Antara Poisson dan Bernoulli 16
4.1.2. Fungsi Likelihood 18
4.2. Proses Renewal Pada Fungsi Intensitas Bersyarat 21
4.3. Fungsi Intensitas Bersyarat Dari Distribusi Waktu Antar Kejadian 22
4.4. Estimasi Parameter Fungsi Intensitas Bersyarat Dari Distribusi Waktu Antar Kejadian 25
4.5. Uji Kesesuaian Distribusi 27
4.6. Menentukan Nilai Parameter 28
4.7. Model Distribusi Waktu Antar Kejadian 31
4.8. Uji Kelayakan Menggunakan AIC (Akaike Information Criterion) 32
4.9. Aplikasi Fungsi Intensitas Bersyarat Pada Data Kemunculan Gempa Bumi 34
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 37
5.1. Kesimpulan 37
5.2. Saran 38
DAFTAR PUSTAKA 39
LAMPIRAN 41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Hubungan antara waktu antar kejadian dan proses renewal 6
Gambar 2.2. Proses titik waktu 8
Gambar 2.3. Waktu kejadian ti.. 9
Gambar 2.4. Waktu antar kejadian τi 9
Gambar 2.5. Spatial point process.. 9
Gambar 2.6. Peta kepulauan Indonesia pada pertemuan 3 lempeng tektonik (Sumber: BMKG, 2018)... 13
Gambar 4.1. Δt sebagai interval-interval sempit dari interval sepanjang τ……...19
Gambar 4.2. Peluang ti lebih besar dari suatu waktu t 20
Gambar 4.3. Model Distribusi Eksponensial untuk Waktu Antar Kejadian gempa bumi tektonik di pulau Jawa dan sekitarnya pada tahun 1971 sampai 2019.. 31
Gambar 4.4. Model Distribusi Weibull untuk Waktu Antar Kejadian gempa bumi tektonik di pulau Jawa dan sekitarnya pada tahun 1971 sampai 2019.. 32

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Analisis Uji Kesesuaian Distribusi 28
Tabel 4.2. Iterasi Newton-Raphson.. 30
Tabel 4.3. Nilai Estimasi Parameter untuk Distribusi Waktu Antar Kejadian...... 32
Tabel 4.4. Nilai AIC untuk Masing-masing Distribusi Waktu Antar Kejadian.... 33
Tabel 4.5. Hasil Estimasi Intensitas Bersyarat Pada Data Gempa Bumi untuk Waktu Antar Kejadian Berdistribusi Eksponensial 1 Parameter 34
Tabel 4.6. Uji Kesesuaian Model... 35
Tabel 4.7. Hasil Prakiraan Peluang Gempa Bumi untuk Waktu Antar Kejadian Berdistribusi Eksponensial 1 Parameter Pada $(t, t+1)$...................... 36

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kemunculan Gempa Bumi Tektonik di Pulau Jawa dan Sekitarnya 42
Lampiran 2. Waktu Antar Kejadian Kemunculan Gempa Bumi Tektonik di Pulau Jawa dan Sekitarnya dalam Selang Pengamatan $[0, T]$ 48
Lampiran 3. Hasil Estimasi Intensitas Bersyarat Pada Data Gempa Bumi untuk Waktu Antar Kejadian Berdistribusi Eksponensial 1 Parameter 57
Lampiran 4. Model Parametrik Intensitas Bersyarat Distribusi Eksponensial 1 Parameter 59
Lampiran 5. Hasil Prakiraan Peluang Gempa Bumi untuk Waktu Antar Kejadian Berdistribusi Eksponensial 1 Parameter Pada Interval $(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \mathrm{n})$ 60

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Gempa bumi adalah fenomena alam yang acak, tidak teratur dalam ruang dan waktu. Secara umum sumber terjadinya gempa bumi ada 3, yaitu gempa bumi tektonik, vulkanik, dan akibat runtuhan. Gempa bumi tektonik biasanya terjadi di pertemuan batas lempeng (*plate boundary*) yang saling bersinggungan. Gempa bumi terjadi diawali dengan akumulasi tekanan di sekitar batas lempeng, sehingga banyak terjadi aktifitas gempa di lokasi tersebut. Walaupun konsentrasi akumulasi tekanan akibat tabrakan lempeng berada di sekitar batas lempeng, pengaruhnya biasa jauh sampai beberapa ratus kilometer dari batas lempeng. Untuk gempa bumi vulkanik adalah gempa yang disebabkan oleh kegiatan gunung api, magma yang berada pada kantong di bawah gunung tersebut mendapatkan tekanan dan melepaskan energinya secara tiba-tiba sehingga menimbulkan getaran tanah. Sedangkan gempa bumi runtuhan adalah gempa lokal yang terjadi apabila suatu gua di daerah topografi karst atau daerah pertambangan runtuh, sifat gempa bumi runtuhan melalui runtuhan dari lubang-lubang interior bumi. Hingga saat ini prakiraan terjadinya gempa khususnya gempa bumi tektonik di suatu lokasi masih sulit diperkirakan sehingga pengembangan metodologi prakiraan gempa masih terus dilakukan baik dari aspek seismologi maupun aspek probabilistik.

Istilah statistik seismologi pertama kali diperkenalkan oleh Keiiti Aki pada tahun 1956 (Yilmaz, 2004), kemudian subjek utama dalam statistik seismologi adalah *point process* diperkenalkan oleh Cox dan Lewis pada tahun 1966. *Point process* merupakan suatu model stokastik yang dapat menerangkan fenomena alam yang sifatnya acak baik dalam ruang maupun waktu. Pada model ini, gempa dipandang sebagai koleksi acak titik-titik dalam suatu ruang, dimana masing-masing titik menyatakan waktu atau lokasi dari suatu kejadian. Kemunculan gempa umumnya dipandang sebagai suatu proses Poisson. Pada proses ini, kemunculan tersebut bersifat *memoryless* dan saling bebas terhadap kemunculan-kemunculan lainnya. *Point process* terbagi dua yaitu, pertama *temporal point process* dapat dinyatakan sebagai pola acak titik/kejadian pada suatu garis yang ditandai dengan waktu kejadian, dan kedua *spatial point process* dinyatakan sebagai posisi kejadian dalam suatu ruang. Sebagai contoh kejadian kebakaran pada lokasi, kemunculun gempa bumi, tsunami, kejadian munculnya suatu penyakit, dan lain-lain.

Dalam *point process*, fungsi intensitas bersyarat yang didefinisikan sebagai turunan dari perubahan peluang kemunculan kejadian memegang peranan yang sangat penting seperti dikemukakan oleh Ogata (Ogata, 1999). Hal ini disebabkan karena fungsi intensitas bersyarat mengkarakterisasikan *point process* yang bersesuaian. Misalnya, jika fungsi intensitas bersyarat hanya bergantung pada waktu atau kejadian sekarang, maka bentuk intensitas bersyarat seperti ini mengkarakterisasikan proses Poisson tak stasioner. Sedangkan untuk fungsi intensitas bersyarat yang bergantung pada selisih waktu sejak waktu kemunculan kejadian terakhir, maka bentuk seperti ini mengkarakterisasikan proses renewal. Pada penelitian ini di tinjau kasus di mana selisih waktu sejak kejadian terakhir tidak tergantung pada selang sebelumnya yang dimana waktu antar kejadian dua gempa bumi yang berurutan sebagai variabel acaknya.

Penelitian tentang *point process* yang mengkaji gempa bumi telah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya diantaranya Vere-Jones (1995) melakukan prakiraaan kemunculan gempa bumi, Ogata (1999) mengestimasi intensitas bersyarat menggunakan pendekatan parametrik, yaitu melalui persamaan likelihood point process yang dikemukakan oleh Vere-Jones dimana Ogata sebagai persamaan non linear dan solusinya seringkali diselesaikan secara numerik. Schoenberg (2003) melakukan analisis residual model point process untuk kejadian gempa bumi. Dan Sergio G. Ferráes (2003) mengestimasi selang waktu tunggu hingga kemunculan gempa berikutnya menggunakan konsep peluang bersyarat.

Sejumlah model distribusi selisih waktu antar kejadian dua gempa berurutan juga telah dilakukan peneliti antara lain: Hagiwara (1974) dan Rikitake (1974) menggunakan distribusi Weibull untuk mengestimasi peluang dari kejadian gempa bumi, Nishenko dan Buland (1987) mendapatkan distribusi yang cocok yaitu distribusi Log-normal dengan membandingkan antara distribusi double exponential, Gaussian dan Weibull. Veysel Yilmaz *et al.* (2004) berpendapat bahwa distribusi Weibull lebih tepat diantara distribusi Log-normal, Log-logistik, Exponential dan Gamma. Sunusi *et al.* (2008) juga telah mengkaji Brownian

Passage Time model sebagai distribusi selisih waktu sejak kemunculan kejadian yang terakhir. Dan Sunusi *et al.* (2013) berpendapat bahwa distribusi waktu antar kejadian umumnya berdistribusi keluarga eksponensial. Pada penelitian ini distribusi waktu antar kejadian dua gempa berurutan yang akan digunakan adalah salah satu distribusi keluarga eksponensial yaitu distribusi ekponensial dan akan dibandingkan dengan distribusi weibull.

Dalam kajian *temporal point process*, waktu kemunculan suatu kejadian merupakan hal yang sangat berpengaruh dalam proses pemodelan karena waktu kemunculan kejadian pada suatu lokasi tertentu menjadi objek dalam *temporal point process*. Oleh karena itu, penting dilakukan estimasi yang tepat tentang parameter yang berkaitan dengan waktu kemunculan kejadian. Umumnya untuk mengestimasi parameter fungsi intensitas bersyarat pada *temporal point process* menggunakan persamaan likelihood yang diperkenalkan Vere-Jones pada tahun 1995 (Vere-Jones, 2003). Persamaan likelihood tersebut dikontruksi dengan menggunakan pendekatan Riemann Stieltjes.

Pada penelitian ini parameter fungsi intensitas bersyarat akan diestimasi menggunakan persamaan likelihood yang dikonstruksi menggunakan pendekatan Bernoulli. Oleh karena itu, penelitian ini akan dituangkan dalam skripsi dengan judul “Estimasi Parameter Fungsi Intensitas Bersyarat Model Point Process dan Aplikasinya Pada Data Gempa Bumi”.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumus masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengkostruksi persamaan likelihood model *point process* menggunakan pendekatan Bernoulli?
2. Bagaimana mengestimasi parameter fungsi intensitas bersyarat waktu antar kejadian yang berdistribusi eksponensial dan Weibull?
3. Bagaimana mengaplikasikan fungsi intensitas bersyarat model *point process* pada data kemunculan gempa bumi?

1.3. Batasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, batasan masalah pada penelitian ini adalah fungsi intensitas bersyarat dibatasi pada waktu antar kejadian yang berdistribusi eksponensial dan distribusi Weibull 2 parameter, dimana parameter lokasi Weibull sama dengan nol $(\gamma = 0)$. Adapun data kemunculan gempa bumi dalam penelitian ini merupakan gempa bumi tektonik dan dibatasi di pulau Jawa dan sekitarnya.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan masalah yang dirumuskan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh persamaan likelihood model *point process* menggunakan pendekatan Bernoulli.
2. Memperoleh estimator parameter fungsi intensitas bersyarat waktu antar kejadian yang berdistribusi Eksponensial dan Weibull.
3. Mengaplikasi fungsi intensitas bersyarat model *point process* pada data kemunculan gempa bumi.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

a. Manfaat Keilmuan:

Memberikan pemahaman yang jelas mengenai konsep *point process* khususnya pengembangan metode estimasi sehingga dapat diaplikasikan untuk mengungkap fenomena-fenomena alam yang kemunculannya bersifat acak baik dalam ruang maupun waktu.

b. Manfaat Praktis:

Memberikan informasi kepada para peneliti, pengguna, dan pengambil keputusan, mengenai penggunaan model stokastik yang tepat untuk menganalisa peluang waktu kemunculan gempa pada lokasi tertentu.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli adalah distribusi yang bersumber dari percobaan Bernoulli. Percobaan Bernoulli adalah percobaan yang menghasilkan dua kemungkinan, yaitu sukses dan gagal (misalnya, wanita atau pria, hidup atau mati, tidak cacat atau cacat). Urutan percobaan Bernoulli terjadi ketika percobaan Bernoulli dilakukan beberapa kali independen sehingga kemungkinan sukses, katakanlah p, tetap sama dari percobaan ke percobaan. Artinya, dalam urutan seperti itu, kita misalkan p menunjukkan peluang keberhasilan pada setiap percobaan.

Misalkan X variabel acak dari suatu percobaan Bernoulli dengan mendefinisikannya sebagai berikut:

$$X(\text{sukses}) = 1 \; dan \; X(\text{gagal}) = 0$$

artinya, dua hasil, sukses dan gagal, masing-masing dilambangkan dengan 1 dan 0. Jadi fungsi peluang dari X dapat ditulis sebagai (Hogg & Craig, 1995):

$$P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0{,}1 \tag{2.1}$$

dimana x merupakan variabel acak dan p merupakan parameter dimana $0 \leq p \leq 1$.

2.2. Proses Poisson

Proses stokastik $\{N(t),\ t \geq 0\}$ dikatakan proses menghitung (*counting process*) jika $N(t)$ merupakan jumlah kejadian (*event*) yang terjadi sampai waktu t. Oleh karena itu, proses menghitung $N(t)$ haruslah memenuhi kriteria berikut (Ross, 2010):

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ bernilai bilangan bulat
- Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$
- Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ adalah banyaknya kejadian yang terjadi pada selang $(s, t]$

Proses menghitung dikatakan kenaikan independen jika jumlah kejadian yang terjadi pada selang waktu yang saling asing adalah saling bebas. Sebagai contoh, jumlah kejadian yang terjadi pada selang $(s, t]$, yaitu $N(t) - N(s)$ saling bebas dengan jumlah kejadian sampai waktu t. Proses menghitung dikatakan kenaikan stationer jika distribusi dari jumlah kejadian yang terjadi pada setiap selang waktu hanya bergantung pada panjang dari selang waktu. Dengan kata lain, jumlah kejadian pada selang $(t_1 + s, t_2 + s]$, yaitu $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ memiliki distribusi yang sama dengan jumlah kejadian pada selang $(t_1, t_2]$, yaitu $N(t_2) - N(t_1)$ untuk semua $t_1 < t_2$ dan $s > 0$.

Proses menghitung $\{N(t),\ t \geq 0\}$ dikatakan proses Poisson dengan laju λ, $\lambda > 0$ (Ross, 2010), jika

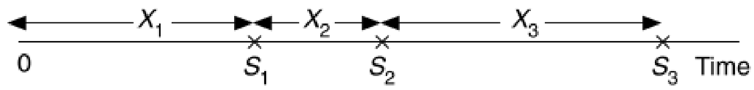
1. $N(0) = 0$
2. Proses memiliki kenaikan indepeden
3. Banyaknya kejadian di sebarang interval dengan panjang t berdistribusi Poisson dengan λt, untuk setiap $s, t \geq 0$

$$P(\{N(s + t) - N(s) = n\}) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

2.3. Proses Renewal

Misalkan $\{N(t), t \geq 0\}$ menjadi proses menghitung misalkan X_n menunjukkan waktu antara kejadian ke-$(n - 1)$ dan ke-n dari proses ini, $n \geq 1$. Jika barisan variabel acak tak negatif $\{X_1, X_2, X_3, ..\}$ adalah saling bebas dan distribusi identik, maka proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses renewal (Ross, 2010).

Dengan demikian, proses renewal adalah proses menghitung sedemikian sehingga waktu hingga kejadian pertama terjadi memiliki beberapa distribusi F, waktu antara kejadian pertama dan kedua juga memiliki, secara saling bebas dari waktu kejadian pertama, memiliki distribusi F yang sama, dan seterusnya. Ketika suatu kejadian tersebut terjadi, maka dapat dikatakan renewal telah terjadi.



Gambar 2.1. Hubungan antara waktu antar kejadian dan proses renewal

Pandang proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$, jika X_1 adalah waktu kejadian pertama, secara umum jika X_n adalah waktu antara kejadian ke-$(n - 1)$ dan kejadian ke-n, maka $\{X_n, n = 1,2,3, \ldots\}$ disebut barisan waktu antar kejadian, misalkan

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad n \geq 1$$

Bahwa $S_1 = X_1$ adalah waktu renewal pertama, $S_2 = X_1 + X_2$ adalah waktu hingga renewal pertama ditambah waktu antara renewal pertama dan kedua, sehingga S_2 merupakan waktu renewal kedua. Secara umum, S_n menunjukkan waktu renewal ke-n.

2.4. Deret Taylor dan Maclaurin

Jika $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$ untuk semua x dalam interval buka yang memuat a, maka $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Misalkan $f(x)$ mempunyai turunan ke-n untuk setiap $n = 1,2,3,\ldots$ pada suatu interval buka yang memuat a, maka deret pangkat (Thomas dan Finney, 1996)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad (2.3)$$

disebut deret Taylor yang dibangkitkan oleh $f(x)$ di a. Sedangkan, deret Taylor yang dibangkitkan oleh $f(x)$ di $a = 0$ disebut deret Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \cdots \qquad (2.4)$$

2.5. *Point Process*

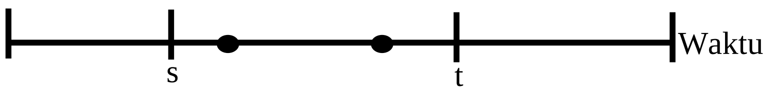
Point process adalah model probabilistik untuk titik-titik yang tersebar secara acak pada beberapa ruang X yang sering diasumsikan sebagai bagian dari $\mathbb{R}^d$ untuk beberapa d. Seringkali, point process mengdeskripsikan terjadinya peristiwa acak dari waktu ke waktu dimana kemunculannya terungkap satu per satu seiring perkembangan waktu. Dalam hal ini, apapun koleksi $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ dimana $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ kejadian dikatakan realisasi dari point process.

Point process adalah suatu model stokastik yang dapat menggambarkan fenomena alam yang bersifat acak, baik dalam ruang maupun waktu. *Point process* merupakan salah satu proses yang cukup baik digunakan untuk menggambarkan sistem stokastik yang terjadi dalam pola tertentu, dengan penggambaran peristiwa tersebut berupa titik-titik kejadian yang terjadi dalam suatu selang waktu atau ruang tertentu.

Ada dua pendekatan tradisional untuk menggambarkan point process. Pertama, misalkan rangkaian kejadian $\{t_i; 0 < t_1 < t_2 < \cdots\}$ terjadi secara acak di $(0, \infty)$. Untuk menggambarkan urutan ini dapat mengambil perbedaan waktu, $X_i = t_i - t_{i-1}$, antara titik-titik berurutan, dan kemudian menganggap $\{X_i\}$ sebagai proses stokastik bernilai positif. Dan kedua, point process didasarkan pada penghitungan titik pada interval. Misalkan $N(a, b)$ adalah banyaknya titik dalam suatu interval (a, b) pada suatu garis sehinggan jumlah titik dalam interval tersebut adalah variabel acak bernilai bilangan bulat tak-negatif. Untuk menentukan point process adalah memberikan distribusi gabungan berdimensi terbatas yang ditentukan secara konsisten dari variabel acak seperti itu untuk setiap interval yang saling terputus (Ogata, 1999).

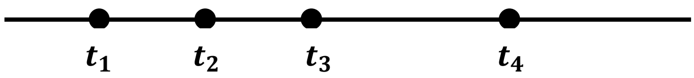
2.5.1. Temporal Point Process

Sebuah *temporal point process* adalah sebuah proses stokastik atau kejadian acak yang terdiri dari serangkaian waktu-peristiwa biner yang terjadi dalam selang waktu kontinu (Daley & Vere-Jones, 2003). Suatu *temporal point process* merupakan suatu point process dalam dimensi satu (waktu) yang berguna untuk barisan waktu-waktu acak jika suatu kejadian muncul. Sebagai contoh, waktu ketika suatu gempa terjadi dapat dimodelkan sebagai suatu *temporal point process*. Gambar 2.2 memberikan ilustrasi *temporal point process* dimana pada selang waktu (s, t) terdapat dua kejadian (●).



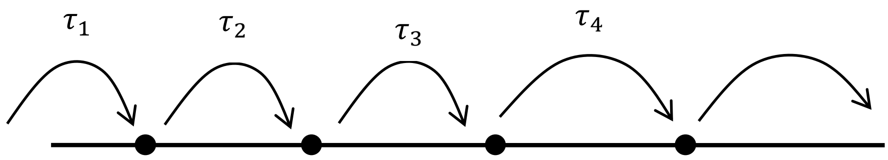
Gambar 2.2. Proses titik waktu

Pada *point process* berdimensi satu ditemukan sifat terurut alami (natural ordering) yang mana hal tersebut tidak dijumpai pada *point process* yang berdimensi lebih tinggi. *Point process* berdimensi satu dapat dinyatakan secara matematika dalam berbagai cara yang berbeda, antara lain: dapat melalui waktu kejadian (arrival times) $t_i < t_{i+1} < \cdots$ dengan t_i merupakan waktu pada saat kejadian ke-i terjadi Gambar 2.3.



Gambar 2.3. Waktu kejadian t_i

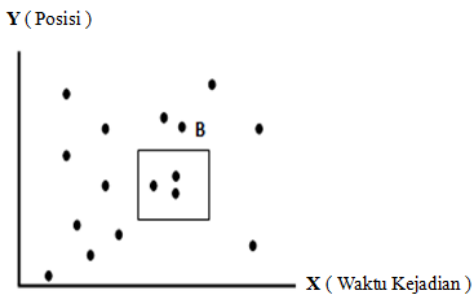
Cara lain yang dapat digunakan untuk mendefinisikan *point process* adalah melalui waktu antar kejadian (inter-event times) $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Waktu antar kejadian τ_i

2.5.2. Spatial Point Process

Suatu *spatial point process* merupakan suatu model yang berguna untuk pola acak titik-titik dalam ruang berdimensi d, dimana $d \geq 2$. Sebagai contoh, jika dibuat peta lokasi kejadian gempa pada suatu tahun tertentu, maka peta ini merupakan pola acak titik-titik dalam dua dimensi. Gambar 2.5 memberikan ilustrasi *spatial point process,* dimana pada lokasi B terdapat 3 kejadian.



Gambar 2.5. Spatial point process

2.6. Fungsi Intensitas Bersyarat

Dinamika temporal pada suatu selang waktu $[0, T)$ direpresentasikan oleh laju rata-rata $\lambda(t)$ yang disebut sebagai intensitas. Hal ini berkaitan dengan ekspektasi banyaknya kejadian dalam suatu periode atau selang waktu tertentu. Sehingga $\lambda(t)$ dapat dipandang sebagai suatu frekuensi dimana kejadian-kejadian diharapkan muncul pada suatu saat disekitaran titik tertentu berdasarkan historis suatu *point process*. Karena $\lambda(t)$ berdasarkan historisnya maka $\lambda(t)$ dinyatakan sebagai intensitas bersyarat $\lambda(t|\mathcal{H}_t)$ dengan $\mathcal{H}_t$ adalah himpunan observasi hingga saat t atau dapat ditulis $\mathcal{H}_t = \{t_i; t_i < t\}$.

Pandang suatu *point process* pada selang $(0, \infty)$. Selang tersebut dibagi kedalam selang-selang kecil dengan panjang Δ, sehingga diperoleh proses stokastik $\{X(t)\}$, dimana $\{X(t)\} = N[(t-1)\Delta, t\Delta]$ adalah variabel acak ke-t pada subinterval $[(t-1)\Delta, t\Delta]$. Untuk Δ yang cukup kecil, dapat diasumsikan bahwa $\{X(t)\}$ merupakan suatu proses biner (*binary process*) yang bernilai 0 atau 1. Jika *point process* yang dipandang adalah suatu proses Poisson stasioner, maka $\{X(t)\}$ berdistribusi identik dan saling bebas, yaitu suatu barisan Bernoulli. Fungsi intensitas bersyarat (*conditional intensity function*) $\lambda(t|\mathcal{H}_t)$ didefinisikan sebagai (Ogata, 1999):

$$P(N(t, t+\Delta) = 1|\mathcal{H}_t) = \lambda(t|\mathcal{H}_t)\Delta\mathrm{t} + o(\Delta) \tag{2.5}$$

dengan kata lain,

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t) = \frac{P\{N(t, t+\Delta) = 1|\mathcal{H}_t\}}{\Delta\mathrm{t}} \tag{2.6}$$

2.7. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial adalah salah satu distribusi kontinu dan suatu fungsi khusus dari distribusi Gamma. Distribusi Eksponensial berguna dalam mencari selisih waktu yang terjadi dalam suatu peluang pada daerah tertentu (Kececioglu, 1991).

2.7.1. Distribusi Eksponensial Satu Parameter

Suatu variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi Eksponensial dengan parameter θ, jika fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0; \theta > 0 \tag{2.7}$$

dimana, θ adalah parameter skala atau nilai konstan laju, dalam kegagalan per unit pengukuran.

2.7.2. Distribusi Eksponensial Dua Parameter

Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Eksponensial dua parameter sebagai berikut:

$$f(x) = \theta e^{-\theta(x-\gamma)},\ x > \gamma; \theta > 0 \tag{2.8}$$

dimana, γ adalah parameter lokasi.

2.8. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull adalah salah satu distribusi kontinu yang pertama kali diperkenalkan oleh fiskawan Swedia bernama Waloddi Weibull pada tahun 1939 dengan 3 parameter, yang kemudian seiring perkembangan konsep distribusi Weibull tersebut terdapat juga distribusi Weibull dengan dua dan satu parameter, dengan masing-masing distribusi sebagai berikut (Rinne, 2009):

2.8.1. Distribusi Weibull Tiga Parameter

Sebuah variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Weibull tiga parameter dengan parameter α, β dan γ jika fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{(\beta-1)} \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right), \quad x \geq \gamma\,; \alpha,\beta > 0 \qquad (2.9)$$

dimana, α adalah parameter skala, β adalah parameter bentuk, dan γ adalah parameter lokasi.

2.8.2. Distribusi Weibull Dua Parameter

Kepadatan peluang versi dua parameter sebagai berikut:

a. Parameter lokasi ($\gamma = 0$)

$$f(x|\alpha,\beta,0) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{(\beta-1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right), \quad x \geq 0\,; \alpha,\beta > 0 \qquad (2.10)$$

b. Parameter skala ($\alpha = 1$)

$$f(x|1,\beta,\gamma) = \beta(x-\gamma)^{(\beta-1)} \exp\left(-(x-\gamma)^{\beta}\right), \quad x \geq \gamma\,; \beta > 0 \qquad (2.11)$$

c. Parameter bentuk ($\beta = 1$)

$$f(x|\alpha,1,\gamma) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)\right), \quad x \geq \gamma\,; \alpha > 0 \qquad (2.12)$$

Fungsi (2.10) sejauh ini adalah distribusi Weibull dua parameter yang paling sering ditemukan, disebut versi bentuk skala. Alasannya adalah bahwa biasanya x dimulai dari nol. Fungsi (2.11) disebut versi lokasi bentuk, tidak berskala, tapi hanya bergeser. Dan fungsi (2.12) disebut versi lokasi skala tidak lain adalah distribusi eksponensial umum.

2.8.3. Distribusi Weibull Satu Parameter

Kepadatan peluang versi satu parameter sebagai berikut:

a. Parameter lokasi ($\gamma = 0$) dan skala ($\alpha = 1$)

$$f(x|1,\beta,0) = \beta(x)^{(\beta-1)} \exp\left(-(x)^{\beta}\right), \quad x \geq 0\,; \beta > 0 \tag{2.13}$$

b. Parameter lokasi ($\gamma = 0$) dan bentuk ($\beta = 1$)

$$f(x|\alpha,1,0) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad x \geq 0\,; \alpha > 0 \tag{2.14}$$

c. Parameter skala ($\alpha = 1$) dan bentuk ($\beta = 1$)

$$f(x|1,1,\gamma) = \exp\left(-(x-\gamma)\right), \quad x \geq \gamma \tag{2.15}$$

Fungsi (2.14) dan (2.15) tidak lain adalah kasus khusus distribusi eksponensial umum yang diberikan oleh fungsi (2.12), baik hanya skala atau hanya bergeser. Jadi $\beta = 1$ selalu mengarah pada distrbusi eksponensial. Dan fungsi (2.13) versi bentuk, disebut kepadatan Weibull yang dikurangi atau di normalisasi.

2.9. Uji Kesesuaian Distribusi

Uji Anderson Darling digunakan untuk menguji berbagai macam sebaran data, yaitu normal, lognormal, eksponensial, Weibull, dan sebaran lainnya. Statistik Anderson – Darling A^2 di definisikan sebagai (Anderson & Darling, 1954):

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot\left[\ln F(X_i) + \ln\left(1 - F(X_{n-i+1})\right)\right] \tag{2.16}$$

dengan uji Hipotesis:

H_0 : Data mengikuti distribusi tertentu yang diujikan

H_1 : Data tidak mengikuti distribusi tertentu yang diujikan

Hipotesis awal akan ditolak jika nilai dari A^2 lebih besar dari nilai kritis tabel atau ketika nilai p lebih kecil dari tingkat signifikansi. Nilai Anderson Darling merupakan ukuran yang menunjukkan seberapa jauh plot titik dari garis kecocokan (fit). Sehingga semakin kecil nilai Anderson Darling, maka semakin baik kesesuaian data dengan distribusi yang diujikan.

2.10. Pemilihan Model Terbaik

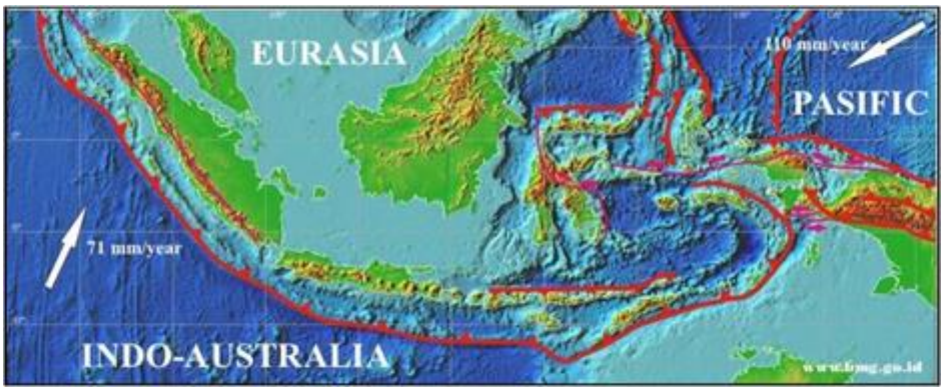
Pemodelan statistik yang digunakan perbandingan terhadap bebarapa model, biasanya diikuti uji kebaikan model. Hal ini dilakukan untuk memastikan salah satu model yang terbaik. Beberapa uji yang biasa digunakan seperti MSE (*Mean Square Error*), R-Square dan nilai AIC (*Akaike Information Criterion*). Berdasarkan ogata (1988) uji perbandingan model *point process* dapat dilakukan dengan menggunakan nilai AIC, dimana model dengan nilai AIC terkecil dianggap model yang terbaik (Yendra & Noviadi, 2015).

$$AIC = (-2)(maks\ log - likelihood) + 2(jumlah\ parameter) \qquad (2.17)$$

2.11. Gempa Bumi

Gempa bumi adalah peristiwa bergetarnya bumi akibat pelepasan energi di dalam bumi secara tiba-tiba yang ditandai dengan patahnya lapisan batuan pada kerak bumi. Akumulasi energi penyebab terjadinya gempa bumi dihasilkan dari pergerakan lempeng-lempeng tektonik. Energi yang dihasilkan dipancarkan kesegala arah berupa gelombang gempa bumi sehingga efeknya dapat dirasakan sampai ke permukaan bumi.

Kepulauan Indonesia terletak pada pertemuan 3 lempeng utama dunia yaitu lempeng Australia, Eurasia, dan Pasifik. Lempeng Eurasia dan Australia bertumbukan di lepas pantai barat Pulau Sumatera, lepas pantai selatan pulau Jawa, lepas pantai Selatan kepulauan Nusatenggara, dan berbelok ke arah utara ke perairan Maluku sebelah selatan. Antara lempeng Australia dan Pasifik terjadi tumbukan di sekitar Pulau Papua. Sementara pertemuan antara ketiga lempeng itu terjadi di sekitar Sulawesi. Itulah sebabnya mengapa di pulau-pulau sekitar pertemuan 3 lempeng itu sering terjadi gempabumi.



Gambar 2.6. Peta kepulauan Indonesia pada pertemuan 3 lempeng tektonik (Sumber: BMKG, 2018)

Berikut ini adalah 25 Daerah Wilayah Rawan Gempabumi Indonesia yaitu: Aceh, Sumatera Utara (Simeulue), Sumatera Barat - Jambi, Bengkulu, Lampung, Banten Pandeglang, Jawa Barat, Bantar Kawung, Yogyakarta, Lasem, Jawa Timur, Bali, NTB, NTT, Kepulauan Aru, Sulawesi Selatan, Sulawesi Tenggara, Sulawesi

Tengah, Sulawesi Utara, Sangir Talaud, Maluku Utara, Maluku Selatan, Kepala Burung-Papua Utara, Jayapura, Nabire, Wamena, dan Kalimantan Timur (Sunarjo, Gunawan, & Pribadi, 2018).

a. Jenis Gempa Bumi

   Faktor penyebab gempa bumi dapat dibedakan menjadi:

   1. Gempa Bumi Tektonik

      Yaitu gempa bumi yang disebabkan oleh adanya aktivitas tektonik yang berupa pergeseran lempeng-lempeng tektonik secara mendadak yang mempunyai kekuatan dari yang sangat kecil hingga yang sangat besar.

   2. Bumi Vulkanik

      Gempa bumi vulkanik adalah gempa bumi yang terjadi akibat adanya aktivitas gunung api.

   3. Gempa Bumi Runtuhan

      Gempa bumi runtuhan adalah gempa bumi yang terjadi akibat runtuhnya atap gua atau daerah kosong dibawah lahan mengalami keruntuhan, runtuhnya atap tambang, runtuhnya batuan, dan lainnya.

b. Parameter Gempa bumi

   Parameter gempa bumi atau lebih luas lagi disebut dengan gelombang seismik yang disebabkan karena terjadinya gempa bumi, adalah sebagai berikut:

   1. Waktu terjadinya gempa bumi (*Origin Time*)
   2. Lokasi pusat gempa bumi (*Episenter*)
   3. Kedalaman pusat gempa bumi (*Depth*)
   4. Kekuatan gempa bumi (*Magnitudo*)