

**SKRIPSI**

**PEMODELAN PENJALARAN GELOMBANG SEISMIK  
MENGUNAKAN PERSAMAAN HELMHOLTZ DUA DIMENSI PADA  
MEDIUM BERLAPIS DENGAN SYARAT BATAS PML (*PERFECTLY  
MATCH LAYER*)**

**Disusun dan diajukan oleh:**

**M. NUR ALAMSYAH RAHMAN**

**H221 16 516**



**DEPARTEMEN GEOFISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

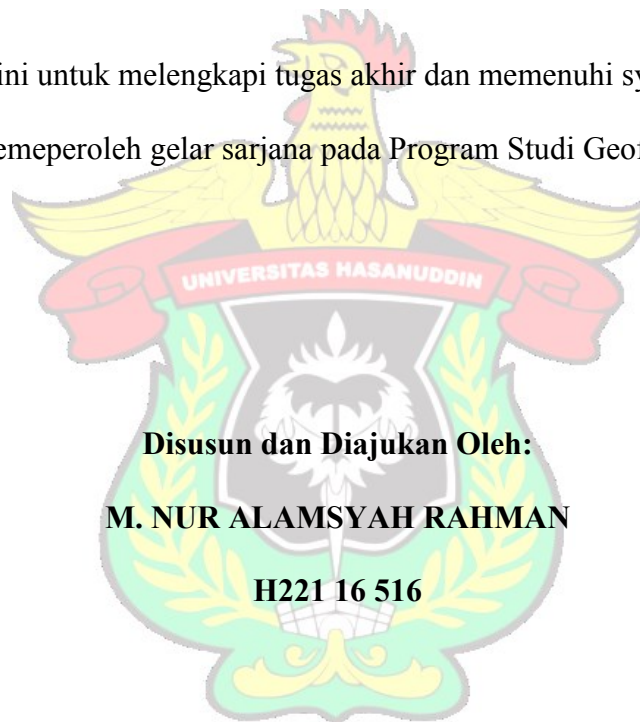
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2021**

**PEMODELAN PENJALARAN GELOMBANG SEISMIK  
MENGUNAKAN PERSAMAAN HELMHOLTZ DUA DIMENSI PADA  
MEDIUM BERLAPIS DENGAN SYARAT BATAS PML (*PERFECTLY  
MATCH LAYER*)**

Skripsi ini untuk melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat untuk  
memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Geofisika



**Disusun dan Diajukan Oleh:  
M. NUR ALAMSYAH RAHMAN  
H221 16 516**

**DEPARTEMEN GEOFISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR**

**2021**

**LEMBAR PENGESAHAN**

**PEMODELAN PENJALARAN GELOMBANG SEISMIK  
MENGUNAKAN PERSAMAAN HELMHOLTZ DUA DIMENSI PADA  
MEDIUM BERLAPIS DENGAN SYARAT BATAS PML (*PERFECTLY  
MATCH LAYER*)**

**Disusun dan diajukan oleh:**

**M. NUR ALAMSYAH RAHMAN**

**H221 16 516**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Program Sarjana Program Studi Geofisika Fakultas Matematika dan  
Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 26 Februari 2021

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

**Prof. Dr. Dadang Ahmad S, M.Eng**  
NIP. 195609301980031004

Pembimbing Pertama,

**Sabrianto Aswad, S.Si, MT**  
NIP. 197805242005011002

Ketua Program Studi,

**Dr. Muh Alimuddin Hamzah, M.Eng**  
NIP. 196709291993031003

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : M. Nur Alamsyah Rahman  
NIM : H221 16 516  
Departemen : Geofisika  
Judul Tugas Akhir : Pemodelan Penjalaran Gelombang Seismik  
Menggunakan Persamaan Helmholtz Dua Dimensi  
pada Medium Berlapis dengan Syarat Batas PML  
(*Perfectly Match Layer*)

Menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar hasil karya saya sendiri dan belum pernah diajukan untuk mendapatkan gelar sarjana di Universitas Hasanuddin atau Lembaga Penelitian lain kecuali kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang sudah lazim digunakan, karya tulis ini merupakan murni dari gagasan dan penelitian saya sendiri, kecuali arahan Tim Pembimbing dan masukan Tim Penguji.

Makassar, 26 Februari 2021

Yang Membuat Pernyataan,



**M. Nur Alamsyah Rahman**

## SARI BACAAN

Kami memperkenalkan sebuah pendekatan terbaru dalam memahami proses penjalaran gelombang seismik menggunakan persamaan Helmholtz. Penjalaran gelombang seismik yang digunakan hanya berdasarkan pada gelombang tekanan (*P-wave*) dengan parameter kecepatan menjadi karakteristik tiap lapisan. Untuk beberapa permasalahan yang diperoleh di syarat batas domain dalam proses pemodelan, diselesaikan dengan sebuah teknik optimal yaitu penerapan *Perfectly Match Layer* (PML) sebagai fungsi penyerap. Teknik ini memungkinkan kita untuk menghindari fenomena refleksi pantul di syarat batas dan mudah diterapkan dalam metode beda hingga untuk masalah skema diskrit. Efisiensi dan akurasi pendekatan ini diilustrasikan dengan beberapa tes numerik.

**Kata kunci:** seismik, persamaan Helmholtz, *Perfectly Match Layer* (PML), *P-wave*, metode beda hingga.

## ***ABSTRACT***

*We introduce a new approach in understanding the process of propagating seismic waves using the Helmholtz equation. The seismic wave propagation used is only based on the pressure wave (P-wave) with the velocity parameter being the characteristic of each layer. For some of the problems obtained in the domain boundary requirements in the modeling process, it is solved by an optimal technique, namely the application of the Perfectly Match Layer (PML) as an absorbent function. This technique allows us to avoid the spurious reflections phenomenon in boundary conditions and is easy to apply in finite difference methods to discrete schematic problems. The efficiency and accuracy of this approach is illustrated by several numerical tests.*

**Keywords:** *seismic, Helmholtz equation, Perfectly Match Layer (PML), P-wave, finite difference method.*

## KATA PENGANTAR

**Assalamualaikum warohmatullahi wabarokatuh**

Puji syukur kehadirat Allah SWT Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Semoga shalawat dan salam selalu tercurahkan untuk Nabi Muhammad SAW berikut para keluarga dan sahabatnya hingga akhir zaman. Tidak ada daya dan upaya kecuali atas pertolongan Allah yang Maha Luhur dan Maha Agung sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ***“Pemodelan Penjalaran Gelombang Seismik Menggunakan Persamaan Helmholtz Dua Dimensi Pada Medium Berlapis PML (Perfectly Match Layer)”***, sebagai satu syarat yang diajukan untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Geofisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Selesaiannya proses penyusunan naskah skripsi ini tidak lepas dari pengorbanan, dukungan dan doa dari berbagai pihak yang menyertai penulis. Tak ada kata lain yang bisa penulis haturkan selain terima kasih yang tak terhingga.

Kepada kedua orang tua penulis, terutama ibu penulis, Hasmah, yang dengan tetesan keringatnya berusaha menghidupi anak-anaknya dengan tetap bertahan menjadi pegawai honorer selama 15 tahun setelah ayah mengalami PHK kerja. Kesabaran dan ketabahanmu adalah pelita yang akan terus menyala menyinari ruang kalbu penulis hingga akhir nanti. Ibu adalah inspirasi terbesar bagi penulis dan penyemangat yang terus mendorong penulis untuk tidak menyerah dalam keterbatasan secara material. Segala usaha dan kerja keras mu adalah cinta yang menjadi cercah cahaya kehidupan bagi penulis. Semoga Allah menganugerahimu dengan balasan terindah. Untuk ayah penulis, Rahmansyah, terima kasih telah menjadi sosok pejuang yang walau tanpa lisan kau ucapkan tetapi telah menjadi

contoh nyata bagi penulis untuk tidak pernah merasa gengsi dalam memilih pekerjaan. Semoga Allah menganugerahimu dengan balasan terindah. Kepada Almarhumah nenek penulis, Marwah, yang telah mengasuh dengan segenap cinta di waktu kecil, semoga Allah merahmatimu dengan kasih sayang-Nya di alam barzah sana.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa selesainya tugas akhir ini berkat bantuan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan hati, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih serta penghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Dadang Ahmad Suriamihardja, M. Eng dan bapak Sabrianto Aswad, S.Si, MT selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang selain mengajari penulis juga menjadi motivator ulung yang mendorong penulis untuk berani mengambil langkah maju ke depan.
2. Bapak Dr. Muh. Altin Massinai, MT. Surv dan bapak Dr. Muhammad Hamzah, S.Si, MT selaku tim penguji dalam tugas akhir skripsi yang telah memberi masukan saran dan ilmu sehingga penulis berhasil menyelesaikan penyusunan skripsi.
3. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, S.Si, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.
4. Bapak Ir. Bambang Hari Mei, M.Si selaku Penasehat Akademik yang banyak memberikan nasehat dan arahan kepada penulis.
5. Bapak dan ibu Dosen-dosen pengajar yang menjadi ladang ilmu bagi penulis sehingga mampu menyelesaikan tugas akhir di bidang geofisika.
6. Bapak Yohanes Tjandrawidjaja selaku guru yang membantu penulis untuk memahami penggunaan code-code di Matlab selama pengerjaan tugas akhir.



7. Bapak pembimbing selama penulis melaksanakan Kuliah Praktek di LEMIGAS.
8. Bapak dan ibu staf Departemen Geofisika Unhas dan staf Fakultas yang membantu penulis menyelesaikan urusan administrasi selama proses perkuliahan.
9. Teman seperjuangan tugas akhir, **Agung, Adit, Abdi, Indra, Iksan, Aushaf, Ayyub, Leo, Maulana, Azhari, Shabran, Mufli, Syarwan, Ervin, Raxy, Fazrul, Oland, Arya, Arief, Aldin, Mappi, Sinar, Tari, Adiati, Asriani, Mira, Dewi, Sadila, Ninda, Lia, Kasma, Wasti, Debby, Azizah, Wiwi, Devy, Farah, Khaeria, Nurita, Uni, Hamdah, Dian, Hasrina, Islamiah, Retno, Santri, Athaya, Riana, Marhaeni, Hira, Mute, Winda, Widy, Lina**, terima kasih telah membersamai penulis dalam melaksanakan tugas akhir di Geofisika, semoga Allah menjadikan kita generasi yang berguna bagi bangsa dan Negara, Aamiin.
10. Teman-Teman Geofisika Unhas Angkatan 2016 (IGNEOUS).
11. Teman-teman HIMAFI FMIPA Unhas Angkatan 2016.
12. Teman-teman FMIPA Unhas Angkatan 2016.
13. Kanda-kanda angkatan 2012 ( MAPERWA), 2013 (Pengurus BEM), 2014 (Pengurus HIMAFI), 2015 (Panitia BK) yang telah member banyak bantuan dalam menghadapi dunia kampus.
14. Kepada adik-adik 2017, 2018, dan 2019 HMGF Unhas dan HIMAFI Unhas.
15. Kanda-kanda, teman-teman, dan adik-adik pengurus Society of Petroleum Enginneer Student Chapter Universitas Hasanuddin.

Serta kepada seluruh pihak yang luput penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semuanya.

Makassar, Februari 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>PERNYATAAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>SARI BACAAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xv</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xvi</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
I.1. Latar Belakang.....	1
I.2 Ruang Lingkup .....	3
I.3 Rumusan Masalah .....	3
I.4 Tujuan Penelitian.....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>4</b>
II.1 Refleksi dan Refraksi .....	6
II.2 Propagasi Gelombang dalam Medium Berlapis.....	8
II.3 Persamaan Helmholtz.....	9
II.3.1 Metode Analitik Persamaan Helmholtz.....	10
II.4 Penerapan Boundary Conditions (BC) dan Intial Condition (IC) .....	16
II.5 Inisialisasi dan Syarat Batas.....	21
II.6 Metode Beda Hingga ( <i>Finite Difference</i> ).....	22
II.7 Pengaplikasian PML ( <i>Perfectly Match Layer</i> ) Domain 2D .....	24
II.7.1 Parameter Optimal PML ( <i>Perfectly Match Layer</i> ) .....	24
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN</b> .....	<b>26</b>
III.1 Waktu dan Lokasi Penelitian .....	26
III. 2 Data Penelitian.....	26
III. 3 Pengolahan Data .....	26
III.4 Bagan Alir Penelitian.....	30

<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>31</b>
VI.1 Diskritisasi Persamaan Helmholtz.....	31
VI.2 Diskritisasi Persamaan Helmholtz Metode Beda Hingga dengan PML .....	32
VI.3 Uji Numerik.....	36
VI.3.1 Komparasi Solusi Eksak dan Solusi Numerik .....	37
VI.3.2 Model Penjalaran Gelombang Helmholtz Medium Berlapis .....	39
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>44</b>
V.1 Kesimpulan .....	44
V.2 Saran .....	44
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>45</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN .....</b>	<b>47</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2. 1</b> Refleksi ( $P_r$ ) dan refleksi ( $P_t$ ).....	7
<b>Gambar 2. 2</b> <i>Ray-path</i> gelombang koordinat Kartesian .....	9
<b>Gambar 2. 3</b> Ilustrasi elemen fluida (Erlangga, 2005). .....	10
<b>Gambar 2. 4</b> Deformasi elemen solid (Erlangga, 2005).....	12
<b>Gambar 2. 5</b> Rektangular membran.....	17
<b>Gambar 2. 6</b> Jaringan Titik Hitung Dalam Bidang $x - y$ (Triatmodjo, 2002)....	23
<b>Gambar 2. 7</b> PML Kartesian untuk domain 2D (Bermudez et al., 2006).....	25
<b>Gambar 3. 1</b> Rancang Model Medium Kartesian.....	28
<b>Gambar 3. 2</b> Rancang Model 1 Medium Berlapis .....	29
<b>Gambar 3. 3</b> Rancang Model 2 Medium Berlapis .....	29
<b>Gambar 4. 1</b> Grafik bilangan real dan imajiner konstanta $\gamma(x)$ dan $\gamma(y)$ .....	35
<b>Gambar 4. 2</b> Komparasi model Kartesian domain penjalaran gelombang Helmholtz (a). Model solusi eksak dengan fungsi Green sebagai sumber, $k =$ $2\pi m - 1$ (b). Model solusi Numerik dengan fungsi Green sebagai sumber, $k =$ $2\pi m - 1$ .....	37
<b>Gambar 4. 3</b> Profil 1D Solusi Penjalaran Eksak dan Numerik.....	39
<b>Gambar 4. 4</b> Model Kecepatan Medium 1 .....	40
<b>Gambar 4. 5</b> Solusi Numerik Model Penjalaran Medium 1 .....	41
<b>Gambar 4. 6</b> Model Kecepatan Medium 1 .....	42
<b>Gambar 4. 7</b> Solusi Numerik Model Penjalaran Medium 2 .....	43

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 4. 1</b> Karakteristik Tiap Lapisan Model Medium 1 .....	40
<b>Tabel 4. 2</b> Karakteristik Tiap Lapisan Model Medium 2 .....	42

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran I Skrip Uji Solusi Eksak dan Numerik di Program Matlab .....	48
Lampiran II Skrip Model Solusi Numerik di Program Matlab .....	52
Lampiran III Hasil Model Solusi Neumerik .....	56

## DAFTAR SIMBOL

$v$	: Kecepatan medium (m/s)
$c$	: Komponen kecepatan medium berbeda (m/s)
$p$	: Ray parameter
$\nabla^2$	: Operator Laplace
$V$	: Volume (m <sup>3</sup> )
$p$	: Tekanan (Pascal)
$\mathbb{R}^3$	: Domain 3D
$F$	: Gaya (Newton)
$K$	: Kompresibilitas
$\rho$	: Rapat massa
$\mu$	: Modulus geser
$\lambda$	: Konstanta Lamba
$\Phi$	: Potensial skalar
$H$	: Potensial vektor
$t$	: Waktu (detik)
$k$	: Bilangan gelombang
$\omega$	: Kecepatan sudut
$u$	: Perpindahan dalam fungsi $x$ dan $y$
$\Omega$	: Medium penjalaran
$\gamma$	: Komponen PML
$\sigma$	: Konstanta penyerap medium PML



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **I.1. Latar Belakang**

Bentuk dari bawah permukaan bumi yang kompleks merupakan tantangan utama bagi para geosaintis memproses dan menginterpretasi hasil dari akuisisi lapangan untuk keberlangsungan proses eksplorasi dan eksploitasi sumber daya alam. Sejauh ini, metode seismik merupakan teknik geofisika terpenting dengan jumlah ahli geosaintis terbanyak yang terlibat. Metode seismik merupakan salah satu metode di bidang geofisika yang mampu menginformasikan mengenai gambaran bawah permukaan bumi dengan memberi gangguan di permukaan bumi sehingga terjadi proses perambatan gelombang seismik yang dimana, setiap lapisan yang dilalui akan mengalami proses refleksi, refraksi, dan transmisi (Telford,1990). Gelombang balik atau gelombang yang direfleksikan dan direfraksikan akan dimanfaatkan sebagai informasi dalam mengetahui perbedaan karakterisasi lokal di setiap lapisan di bawah permukaan bumi. Hal ini yang menjadikan metode seismik terus mengalami perkembangan dalam berbagai aspek utamanya dalam proses pengolahannya.

Perkembangan ilmu pengetahuan didukung oleh kemajuan teknologi menjadikan metode seismik berkembang dengan berbagai proses pengolahan didalamnya dan mendorong eksplorasi ke wilayah yang lebih kompleks secara geologi. Ini dibuktikan dengan kemampuan komputasi pada perangkat keras (*hardware*) dalam pengembangan penyelesaian sistem numerik yang efisien. Simulasi numerik pada gelombang akustik adalah bagian penting dari banyak pengembangan metode

seismik guna memecahkan masalah yang timbul dalam eksplorasi geofisika. Beberapa penelitian sebelumnya mengenai algoritma di metode migrasi klasik Kirchoff dan Born (Claerbout, 1971; Beylkin, 1985) memiliki kendala pada pencitraan dengan variasi kecepatan yang besar diakibatkan oleh kompleksitas jalur gelombang yang sulit di bawah lapisan yang kompak. Kemudian penelitian selanjutnya pada migrasi multinilai Kirchoff digunakan untuk meningkatkan hasil migrasi ketika kecepatan awal diketahui dengan akurat (Ten Kroode et al. 1998; Xu & Lambar'e 2000). Namun, metode ini didasarkan pada perkiraan frekuensi tinggi yang tidak sesuai dengan struktur bumi yang kompleks yang bekerja pada frekuensi rendah (Mulder & Plessix, 2004).

Oleh karena itu penelitian ini mengarah pada simulasi gelombang akustik yang mempertimbangkan aspek kompleksitas bawah permukaan bumi, dimana pendekatan frekuensi tinggi yang digunakan pada persamaan eikonik dapat dihilangkan dengan beralih dari persamaan gelombang satu arah ke persamaan gelombang dua arah. Persamaan gelombang dua arah diselesaikan menggunakan persamaan Helmholtz dengan metode beda hingga domain frekuensi untuk menyelesaikan persoalan kompleksitas bawah permukaan bumi dan juga lebih efisien dalam penyelesaian numerik (Erlangga A, 2005). Serta penggunaan domain PML (*Perfectly Match Layer*) dalam memenuhi syarat pemodelan dalam dimensi bawah permukaan bumi yang diasumsikan sebagai ruang bebas (*free-space*).

## **I.2 Ruang Lingkup**

Pada penelitian ini batasi oleh model data sintetik bawah permukaan yang dibuat dengan menerapkan prinsip penyalaran gelombang akustik pada medium dua dimensi yang tiap batasnya dimodelkan oleh persamaan gelombang Helmholtz dengan batas medium menggunakan syarat batas Neumann dan medium penyerap PML (*Perfectly Match Layer*).

## **I.3 Rumusan Masalah**

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini, yaitu:

1. Bagaimana efisiensi penggunaan PML dan syarat batas Neumann pada model penyalaran gelombang akustik 2D yang dihasilkan dengan menggunakan persamaan Helmholtz ?
2. Bagaimana model penyalaran gelombang akustik 2D menggunakan persamaan gelombang Helmholtz pada medium berlapis ?

## **I.4 Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Menghasilkan model eksak dan numerik dari penyalaran gelombang akustik 2D dari penyelesaian persamaan Helmholtz medium penyerap PML (*Perfectly Match Layer*) dan syarat batas Neumann
2. Menghasilkan model penyalaran gelombang akustik 2D dari penyelesaian uji numerik persamaan Helmholtz yang realistis dengan interior bawah permukaan bumi pada medium berlapis.

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Dalam aplikasi geofisika informasi seismik mengenai struktur bawah permukaan bumi sangat penting. Di industri Migas misalnya, akurasi dari informasi seismik mengenai struktur di bawah permukaan dapat membantu menentukan kemungkinan reservoir hidrokarbon dalam lapisan bawah permukaan. Informasi ini atau citra bawah permukaan bumi diperoleh dari mengumpulkan rekaman waktu tempuh dari gelombang seismik untuk kembali ke permukaan setelah mengalami proses refleksi akibat perbedaan karakteristik fisis lokal di tiap muka perlapisan. Gelombang seismik biasanya dibangkitkan oleh sebuah sumber ledakan dipermukaan bumi yang diketahui frekuensinya, dan gelombang balik direkam oleh beberapa instrument perekam yang diletakkan di permukaan bumi.

Variasi dalam waktu refleksi di setiap tempat di permukaan biasanya mengindikasikan sebuah variasi struktur hingga kedalaman 6000 m di bawah permukaan. Sebuah teknik yang populer saat ini ialah *post-processing* dan konstruksi citra bawah permukaan dengan migrasi. Migrasi adalah teknik menempatkan atau memfokuskan gelombang seismik sehingga diperoleh informasi yang benar dan tepat dari reflektor di bawah permukaan. Teknik migrasi moderen saat ini ialah berdasarkan persamaan gelombang, lebih awal telah diperkenalkan oleh Claerbout di awal 1970, kemudian oleh Berkhout pada tahun 1982 dikembangkan dengan menggunakan pendekatan metode beda hingga.

Sebelumnya untuk proses komputasi pada persamaan gelombang biasanya diganti dengan pendekatan satu arah atau paraxial seperti penelitian yang telah dilakukan oleh (Bamberger et al, 1988; Biondi & Palacharla, 1996; Claerbout, 1985; Collino & Joly, 1995; Jing & Peng, 1998). Perkiraan ini tidak berlaku dalam beberapa kasus untuk kontras kecepatan yang tidak terlalu besar dan sudut kejadian yang tidak terlalu lebar. Dengan terus meningkatnya kemampuan dalam proses komputasi, pengembangan teknik baru dalam migrasi persamaan gelombang dua arah atau penuh dengan menggunakan metode beda hingga dan tidak lagi membuat perkiraan yang digunakan untuk metode migrasi berbasis ray atau satu arah (Yoon et al, 2004).

Pencitraan data seismik terus mengalami perkembangan, industri secara bertahap beralih dari model satu dimensi yang berbasis teknik ray ke migrasi persamaan gelombang metode beda hingga dua atau tiga dimensi. Metode berbasis sinar sulit digunakan untuk pendekatan dalam model bumi yang kompleks dan dengan adanya kontraks kecepatan yang besar. Oleh karena itu migrasi persamaan gelombang dapat menangani situasi ini dengan baik. Dalam ruang dua dimensi, migrasi gelombang dua arah dapat dilakukan dengan bekerja dalam domain frekuensi. Dalam hal ini, sistem linear yang timbul dari diskritisasi persamaan gelombang dua arah diselesaikan satu kali dengan metode solusi langsung untuk setiap frekuensi. Hasilnya dapat digunakan untuk perhitungan semua bidang gelombang di semua bidang dan juga untuk bidang gelombang penerima yang dipropagasi mundur. Hal ini membuat metode dua dimensi domain frekuensi lebih cepat diproses dibandingkan dengan domain waktu (Erlangga, 2005).

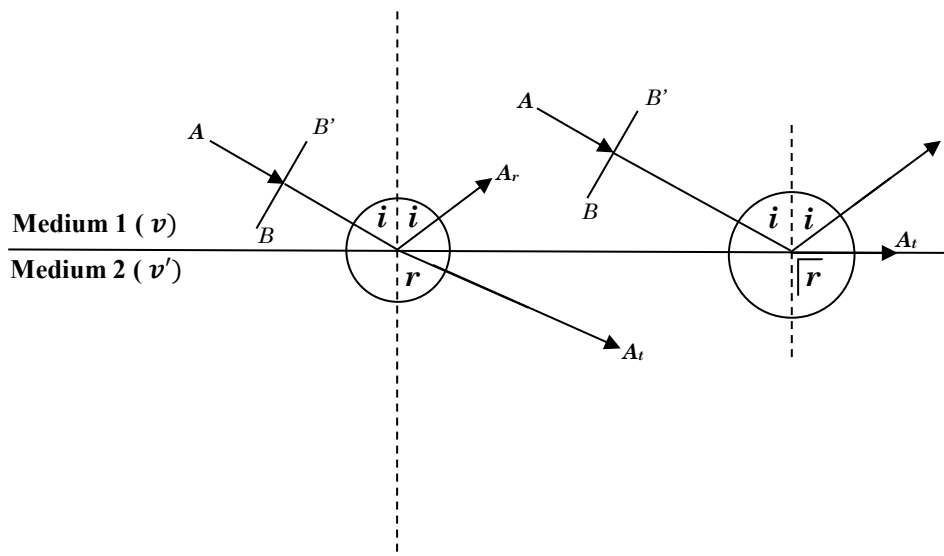
Selain itu untuk migrasi dalam domain waktu memerlukan penyimpanan di bidang gelombang maju atau sebelum refleksi dan penyimpanan untuk bidang gelombang balik atau yang terrefleksi untuk menghindari aliasing. Selanjutnya kedua bidang gelombang ini dikorelasikan untuk mendapatkan gambar migrasi parsial untuk setiap bidikan, dan terakhir menambah semua bidikan memberikan hasil yang diinginkan. Dalam domain frekuensi, hanya satu medan gelombang maju dan satu gelombang balik yang perlu disimpan. Mereka hanya dikalikan untuk mendapatkan citra migrasi parsial. Penjumlahan bidikan dan frekuensi menghasilkan gambar migrasi akhir. Dengan cara ini, diperoleh pengurangan subtasial dari kebutuhan penyimpanan.

## **II.1 Refleksi dan Refraksi**

Kita ketahui bahwa bumi merupakan medium yang tidak homogen, melainkan sifatnya elastis sehingga bervariasi dengan kedalaman dari satu wilayah ke wilayah lainnya. Variasi ini mungkin bertahap, tetapi ada juga diskontinuitas yang memisahkan medium dengan kepadatan dan koefisien elastis yang berbeda. Sehingga yang menjadi pertimbangan ialah fenomena yang terjadi ketika gelombang merambat dari satu medium ke medium lainnya dengan property yang berbeda. Ketika gelombang merambat pada permukaan yang memiliki medium yang berbeda, sebagian energy dipantulkan kembali ke medium pertama dan sebagian ditransmisikan atau dibiaskan ke medium kedua. Pantulan gelombang juga terjadi bila ada permukaan yang bebas (*free-surface*). Ini merupakan masalah yang sangat penting dalam seismologi, karena bumi kita ini merupakan permukaan yang bebas

atau *free surface* dan beberapa diskontinuitas yang memisahkan medium dengan kerapatan dan koefisien elastik yang berbeda (Udias A, 2012).

Pada intinya kontras antara perbedaan material menghasilkan fenomena refleksi dan refraksi gelombang. Teori mengenai refleksi dan refraksi dari gelombang seismik pertama kali dikembangkan oleh Cargill G. Knott tahun 1899 dan Zoeppritz tahun 1919. Namun jauh sebelum itu kejadian refleksi dan refraksi telah dijelaskan oleh Willebrord Snell tahun 1612 dalam hukum Snellius. Sesuai pada Gambar 2.1, ketika terdapat dua media dimana kecepatan gelombang adalah  $v$  dan  $v'$ . Jika  $i$  adalah sudut datang di media dengan  $B$  ke  $B'$  tegak lurus muka gelombang dan kecepatan  $v$  di medium satu menemui bidang normal dan  $r$  adalah sudut bias dengan kecepatan  $v'$  ke arah  $A_t$ . Sehingga hukum snellius dapat dituliskan



**Gambar 2. 1** Refleksi ( $A_r$ ) dan refraksi ( $A_t$ )

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin r}{v'} = \frac{1}{c} = p, \quad (1)$$

dimana  $p$  adalah ray parameter dan  $c$  adalah komponen dari kecepatan dalam dua medium berbeda.

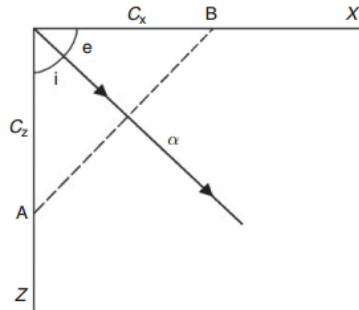
## II.2 Propagasi Gelombang dalam Medium Berlapis

Pada sub-bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai transmisi dan refleksi gelombang di antara medium dengan karakteristik berbeda. Kondisi selanjutnya mengarah pada pertimbangan pada banyak kejadian gelombang yang ditransmisikan dan dipantulkan di setiap batas antar lapisan. Banyak kasus dalam seismologi dapat diselesaikan dengan merepresentasikan bumi sebagai medium bertingkat atau berlapis dengan ketebalan tertentu dan property yang berbeda. Untuk itu koefisien elastik bervariasi secara kontinu terhadap kedalaman merupakan model yang lebih realistis untuk mendekati kondisi interior bumi. Dalam media berlapis atau bertingkat, masalah disajikan dalam skema diskrit dan diselesaikan dalam formulasi matriks. Solusi masalah perambatan gelombang dalam media berlapis menggunakan formulasi matriks pertama kali diperkenalkan oleh Thomson tahun 1950 dan Haskell tahun 1953. Rumusan serupa juga dikemukakan oleh Leon Knopoff tahun 1964.

Model yang berguna untuk memperkirakan struktur bumi adalah model media berlapis atau bertingkat yang dibentuk oleh lapisan horizontal parallel dengan koefisien dan kepadatan elastis yang berbeda. Masalah perambatan gelombang pada model seperti itu dapat diselesaikan dengan menggunakan formulasi matriks dengan model ditinjau dalam koordinat Kartesian. Menggunakan koordinat Kartesius  $(x,z)$ , dimana  $x$  horizontal dan  $z$  vertikal sesuai dengan yang digunakan hingga sekarang. Untuk sinar yang membentuk sudut  $i$  (sudut datang) dengan sumbu  $z$  pada gambar (2.2), potensial gelombang  $P$  dari gelombang harmonik monokromatik dengan frekuensi  $\omega$  dapat diekspresikan sebagai



$$\phi = A \exp[ik_{\alpha}(\sin ix + \cos iz - \alpha t)]. \quad (2)$$



**Gambar 2. 2** Ray-path gelombang koordinat Kartesian

Merujuk dari persamaan di atas, diselesaikan dengan merumuskan persamaan gerak dalam bentuk vektor tegangan-perpindahan. Dengan demikian persamaan gelombang dapat dirumuskan dengan persamaan matriks tunggal untuk gerak SH dan persamaan matriks lainnya untuk gerak P-SV dimana turunannya terhadap  $z$  dari komponen vektor tegangan-perpindahan adalah fungsi linear dari komponen yang sama. Dengan metodologi ini, perambatan gelombang dalam medium berlapis dengan parameter konstan sangat disederhanakan dalam hal produk fungsi eksponensial dan menggunakan nilai eigen dan fungsi eigen dari matriks dengan parameter di setiap lapisan (Udias A, 2012).

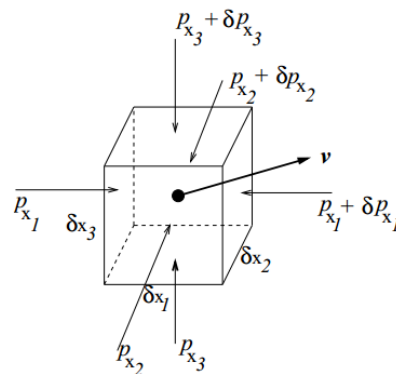
### II.3 Persamaan Helmholtz

Persamaan Helmholtz diambil dari nama seorang fisikawan fisika yang bernama Hermann von Helmholtz. Persamaan ini membahas mengenai nilai eigen untuk operator Laplace ( $\nabla^2$ ), dan sering muncul dalam studi masalah fisik yang melibatkan persamaan diferensial parsial baik dalam ruang maupun waktu. Persamaan Helmholtz yang merepresentasikan bentuk persamaan gelombang yang tidak bergantung waktu, dihasilkan dari penerapan teknik pemisah variabel untuk

mengurangi kompleksitas analisis. Hal ini kemudian diterapkan dalam proses migrasi persamaan gelombang dalam domain frekuensi dimana persamaan persamaan Helmholtz sebagai substansi yang penting dalam penelitian ini. Persamaan Helmholtz sendiri dapat digunakan dalam menjelaskan medium fluida dan padat yang merupakan medium utama dari bumi.

### II.3.1 Metode Analitik Persamaan Helmholtz

Persamaan dasar yang digunakan untuk menurunkan persamaan gerak yang didasari dari hukum ke dua Newton dan hukum Hooke, dengan melihat hubungan kecepatan partikel dalam ruang dan tekanan dalam waktu. Penjelasan akan dimulai dengan membahas persamaan gelombang untuk fluida.



**Gambar 2. 3** Ilustrasi elemen fluida (Erlangga, 2005).

Untuk sebuah asumsi bahwa elemen fluida yang ditinjau sangat kecil dengan volume  $\delta V$  dalam domain  $\mathbb{R}^3$  digambarkan pada Gambar 2.2. dengan asumsi kecepatan bernilai nol, dan variasi spasial dari tekanan  $p = p(\mathbf{x}, t)$  dalam elemen dibangkitkan oleh sebuah gaya  $F$  yang didasari pada hukum kedua Newton.

$$F = m \cdot a, \tag{2}$$

$$\delta F = \delta m \frac{\partial v}{\partial t},$$

dimana  $\delta m$  adalah elemen massa,  $v = v(\mathbf{x}, t)$  partikel kecepatan,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

dan  $p = F/A$  maka  $\delta F = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right) \delta V = -\nabla p \delta V$ . Nabla ( $\nabla$ ) sebagai

gradient operator. Sehingga hubungan dari persamaan (2) dan persamaan dari

tekanan diperoleh

$$\begin{aligned} \delta m \frac{\partial v}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right) \delta V, \\ \delta m \frac{\partial v}{\partial t} &= -\nabla p \delta V, \\ \nabla p &= -\frac{\delta m}{\delta V} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \nabla p &= -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3}$$

dengan  $\rho_0$  densitas statis.

Untuk fluida, hukum Hooke dapat ditulis

$$dp = -K \frac{dv}{\delta V}, \tag{4}$$

dengan  $K$  adalah modulus kompresibilitas,  $dv$  diindikasikan dengan perubahan

kecepatan bergantung pada waktu. Untuk variasi spasial yang kecil,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{\delta V} &= \frac{dx_1}{\delta x_1} + \frac{dx_2}{\delta x_2} + \frac{dx_3}{\delta x_3} \\ &= \frac{((v_1 dt)_{x+\Delta x} - (v_1 dt)_x) \delta x}{\delta x} + \frac{((v_2 dt)_{y+\Delta y} - (v_2 dt)_y) \delta y}{\delta y} \\ &\quad + \frac{((v_3 dt)_{z+\Delta z} - (v_3 dt)_z) \delta z}{\delta z} \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dt \\ \frac{dV}{\delta V} &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan (4), maka hukum Hooke menjadi

$$dp = -K(\nabla \cdot v)dt,$$

$$-\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} = (\nabla \cdot v). \quad (6)$$

Sehingga dari persamaan (3) diterapkan operator gradient

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{\partial v}{\partial t},$$

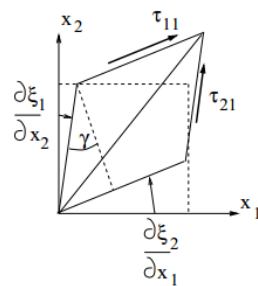
$$\nabla \left( -\frac{1}{\rho_0} (\nabla p) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot v). \quad (7)$$

$$\left( -\frac{1}{\rho_0} (\nabla p) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \right),$$

$$\frac{K}{\rho_0} \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Dipersamaan (8) diperoleh persamaan kompresibilitas gelombang fluida, dimana  $\Delta \equiv \nabla^2$  sebagai operator Laplace dan  $c = \sqrt{K/\rho_0}$  adalah cepat rambat dari gelombang kompresibilitas dalam fluida.



**Gambar 2. 4** Deformasi elemen solid (Erlangga, 2005).

Untuk medium solid yang isotropik dengan densitas  $\rho$ . Persamaan gerak diturunkan dengan mengasumsikan bahwa sebuah elemen yang di dalamnya bekerja sebuah

gaya, maka elemen tersebut akan terdeformasi secara linear; lihat Gambar 2.3.

Perpindahan  $\xi_i$  diakibatkan oleh tekanan persatuan luas  $\tau$  diberikan oleh

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (9)$$

Hukum Hooke dapat menjadi representasi dari generalisasi hubungan tegangan dan rengangan sebagai berikut

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\nabla \cdot \xi, \quad (10)$$

dengan diketahui perpindahan  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$  adalah regangan,  $\mu$  modulus geser,  $\lambda$  adalah konstanta lamda dan  $\delta_{ij}$  memenuhi symbol Kronecker  $\delta_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$  dan  $\delta = 1$  untuk  $i = j$ . Subtitusikan persamaan (10)

ke dalam persamaan (9) sehingga hasilnya

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \xi + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \xi). \quad (11)$$

Perpidahan  $\xi$  juga dapat dinyatakan sebagai potensial skalar  $\Phi$  dan sebuah potensial vektor  $H$  seperti berikut

$$\xi = \nabla \Phi + \nabla \times H, \quad (12)$$

dengan sebuah asumsi bahwa  $\nabla \cdot H = 0$ . Dari substitusi hubungan diatas ke dalam persamaan (11) sehingga diperoleh

$$\nabla \left( (2\mu + \lambda) \nabla^2 \Phi - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left( \mu \nabla^2 H - \rho \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (13)$$

Hubungan persamaaan diatas berlaku jika memenuhi

$$\nabla^2 \Phi \equiv \Delta \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$\nabla^2 H \equiv \Delta H = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad (15)$$

dimana  $c_1^2 = (2\mu + \lambda)/\rho$  dan  $c_2^2 = \mu/\rho$ . Persamaan (14) berhubungan dengan gelombang kompresi, sedangkan persamaan (15) sesuai untuk gelombang geser atau transisi.

Untuk gelombang kompresi, potensial  $\Phi$  dapat didefinisikan ulang sebagai

$$\psi = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (16)$$

yang memenuhi persamaan gelombang

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (17)$$

dari persamaan (12), dengan  $H = 0$  sehingga diperoleh

$$\xi = \nabla \Phi \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \Phi \Rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \psi, \quad (18)$$

dengan  $v = \partial \xi / \partial t$  adalah kecepatan partikel. Sehingga persamaan kecepatan secara umum dapat ditulis

$$\nabla \cdot v = -\frac{1}{2\mu + \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (19)$$

Persamaan di atas menjelaskan mengenai hubungan antara kecepatan  $v$  dengan potensial  $\psi$ . Sama halnya dengan persamaan (3) dan persamaan (6) yang menjelaskan hubungan antara kecepatan dengan tekanan. Sehingga potensial  $\psi$  medium solid dapat dikatakan sebagai sebuah tekanan, dengan  $2\mu + \lambda$  sebagai modulus kompresi di medium solid.

Pembahasan selanjutnya kita membahas persamaan gelombang untuk fluida (8).

Untuk persamaan gelombang dengan waktu harmonik dari tekanan yang bergantung pada waktu, solusi yang digunakan periodic dengan periode yang sama

$$p(x, y, t) = u(x, y, t)e^{(-i\omega t)}, \quad (20)$$

dimana  $\omega > 0$  adalah frekuensi kecepatan sudut dan  $\hat{i} = \sqrt{1}$  satuan imajiner. Substitusikan persamaan (20) ke dalam persamaan (8) sehingga diperoleh persamaan Helmholtz

$$-\Delta u(x, y) - k^2(x, y)u(x, y) = 0, \quad (21)$$

dengan  $k$  adalah bilangan gelombang dan  $k(x, y) = \omega/c$ . Karena  $\omega = 2\pi f$ , dimana  $f$  adalah frekuensi gelombang. Selain itu kita juga mengetahui  $k = 2\mu/\lambda$ , dan  $\lambda = c/f$  sebagai panjang gelombang. Sehingga persamaan (21) disebut sebagai persamaan Helmholtz untuk tekanan. Kemudian memasukkan fungsi sumber pada persamaan dengan masih merupakan waktu harmonik, maka diperoleh rumusan yang lebih umum dari persamaan Helmholtz

$$-\Delta u(x, y) - k^2(x, y)u(x, y) = f(x, y). \quad (22)$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz dilakukan separasi variabel untuk memperoleh solusi yang terdiri dari nilai eigen dan fungsi eigen.

$$\sum F_{horizontal} = T_{\Delta y} \cos(\beta) - T_{\Delta y} \cos(\alpha) = 1 - 1 = 0, \quad (23)$$

Dimana  $\beta, \alpha \ll$  sehingga untuk motion pada arah horizontal tidak ada atau sama dengan nol.

$$\sum F_{vertikal} = T_{\Delta y} \sin(\beta) - T_{\Delta y} \sin(\alpha). \quad (24)$$

Dikarenakan small angle approximation sehingga,  $\sin(\theta) \approx (\theta) \approx \tan(\theta)$ , maka

$$\tan(\beta) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=x+\Delta x \\ y=y_1 \in (y, y+\Delta y)}} = u_x(x + \Delta x, y_1),$$

$$\tan(\alpha) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=x \\ y=y_2 \in (y, y+\Delta y)}} = u_x(x, y_2).$$

Substitusikan ke persamaan  $\sum F_{vertikal}$  pada seluruh sisi, untuk sisi kanan + sisi kiri

$$\sum F_{vertikal} = T_{\Delta y} [u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)], \quad (25)$$

untuk sisi depan + sisi belakang

$$\sum F_{\text{vertikal}} = T_{\Delta y} [u_x(x_1, y + \Delta y) - u_x(x_2, y)]. \quad (26)$$

Selanjutnya, berdasarkan hukum ke-2 Newton

$$m \cdot a_{\text{vertikal}} = \sum F_{\text{vertikal}}. \quad (27)$$

Dengan begitu persamaan menjadi,

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T [(u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2) + (u_x(x_1, y + \Delta y) - \\ &\quad u_x(x_2, y))], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \left[ \frac{(u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2))}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u_x(x_1, y + \Delta y) - u_x(x_2, y))}{\Delta y} \right], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 (u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Dimana  $T/\rho = c^2$  sehingga diperoleh persamaan gelombang 2D dengan  $u_{xx} + u_{yy}$  merupakan persamaan Laplace  $\nabla^2 u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (2D \text{ wave equation}). \quad (28)$$

#### II.4 Penerapan Boundary Conditions (BC) dan Intial Condition (IC)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (PDE) \quad (28)$$

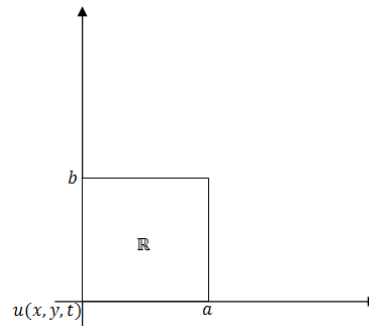
$u(x, y, t) = 0$  untuk semua  $x, y$  pada boundry (BC)

$u(x, y, 0) = f(x, y)$  initial condition (IC) untuk displacement

$u_t(x, y, 0) = g(x, y)$  initial condition (IC) untuk velocity

Setelah didefinisikan komponen yang akan digunakan, maka tujuan dari proses ini ialah untuk mendapatkan fungsi dari  $u(x, y, t)$  yang memenuhi PDE, BC dan IC. Oleh karena itu sebuah rectangular membrane (dijelaskan pada gambar di bawah) ditinjau sebagai contoh pembelajaran ini. Proses akan dijelaskan menjadi 3 tahap sbb;





**Gambar 2. 5** Rektangular membran

Tahap 1: menyelesaikan 2 separasi variabel berikut

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t). \quad (29)$$

$$F(x, y) = H(x)Q(y) \quad (30)$$

Untuk persamaan (30)  $u(x, y, t)$  substitusi ke dalam persamaan (31) gelombang 2D , sehingga

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -v^2$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = -v^2 \text{ dan } \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -v^2,$$

dimana  $\lambda = cv$  Maka,  $\ddot{G} + \lambda^2 G = 0$ , sehingga diperoleh persamaan (31) (linear 2<sup>nd</sup> orde ODE) dan persamaan (32) (PDE untuk 2D Helmholtz equation).

$$\ddot{G} + c^2 v^2 G = 0. \quad (31)$$

$$(F_{xx} + F_{yy}) + v^2 F = 0. \quad (32)$$

Untuk persamaan (30)  $F(x, y)$  substitusikan separasi variabel dalam persamaan Helmholtz, sehingga

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{1}{Q} \left( \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2,$$

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = -k^2 \implies \frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0,$$

$$-\frac{1}{Q} \left( \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2 \implies \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q - k^2 Q = 0,$$

dengan  $p^2 = v^2 - k^2$  maka

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + Q(v^2 - k^2) = 0,$$

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0. \quad (33)$$

Tahap 2: memenuhi syarat Boundry condition (BC)

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0 \implies H(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (34)$$

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0 \implies Q(y) = C \cos(py) + D \sin(py). \quad (35)$$

Kondisi batas

$$u(x, y, t) = 0 \text{ untuk semua } t,$$

$$F(x, y)G(t) = 0,$$

$$F(x, y) = 0,$$

Menerapkan keseluruhan sisi di  $F(x, y) = H(x)Q(y)$ , dengan memenuhi BC

Kiri  $F(0, y) = 0 \implies H(0); Q(y) = 0 \implies H(0) = 0,$

Kanan  $F(a, y) = 0 \implies H(a); Q(y) = 0 \implies H(a) = 0,$

Atas  $F(x, 0) = 0 \implies H(x); Q(0) = 0 \implies Q(0) = 0,$

Bawah  $F(x, b) = 0 \implies H(x); Q(b) = 0 \implies Q(b) = 0.$

Aplikasikan BC pada persamaan (34) dan (35),

untuk  $H(0) = 0$

$$H(0) = A \cos(k \cdot 0) + B \sin(k \cdot 0) = 0,$$

maka,  $A = 0$

untuk  $H(a) = 0$

$$H(a) = A \cos(k \cdot a) + B \sin(k \cdot a) = 0,$$

maka,  $B \sin(k \cdot a) = 0$  dengan  $k = \frac{m\pi}{a}$   $m \in \mathbb{R}$

untuk  $Q(0) = 0$

$$Q(0) = C \cos(p \cdot 0) + D \sin(p \cdot 0) = 0,$$

maka,  $C = 0$

untuk  $Q(b) = 0$

$$Q(b) = C \cos(p \cdot b) + D \sin(p \cdot b) = 0,$$

Maka,  $D \sin(p \cdot b) = 0$  dengan  $p = \frac{n\pi}{b}$   $n \in \mathbb{R}$ .

Oleh karena itu,

$$H_m(x) = B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right), \quad (36)$$

$$Q_n(y) = D \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (37)$$

Untuk  $m, n \in \mathbb{R}$ . Sehingga solusi dari solusi Helmholtz diperoleh sbb,

$$\begin{aligned} F_{mn}(x, y) &= H_m(x)Q_n(y) \\ &= B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) D \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad m, n \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (38)$$

Untuk  $B$  dan  $D$  merupakan konstanta sembarang sehingga kita dapat mendefinisikan sebagai

$$\Gamma = B \cdot D,$$

Sehingga,

$$F_{mn}(x, y) = \Gamma \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right)$$

Ingat persamaan (30) persamaan Helmholtz, substitusikan solusi ke dalam persamaan Helmholtz, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \Gamma \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \Gamma \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right) \right) + \\ v^2 \left( \Gamma \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Dimana,  $v^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2$ . Ingat persamaan (28) *linear 2<sup>nd</sup> orde PDE*

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0,$$

dimana,

$$\lambda = cv,$$

$$p^2 = v^2 - k^2,$$

$$v = \sqrt{p^2 + k^2},$$

$$\lambda = c\sqrt{p^2 + k^2},$$

$$\frac{\lambda}{c} = \sqrt{p^2 + k^2},$$

$$k = \frac{m\pi}{a} \text{ dan } p = \frac{n\pi}{b},$$

$$\lambda = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2},$$

$$\lambda = c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \text{ (nilai eigen)} \quad (40)$$

dengan  $c = \sqrt{T/\rho}$ , Sehingga solusi untuk temporal ODE

$$G(t) = B_{mn} \cos(\lambda_{mn}t) + B_{mn}^* \sin(\lambda_{mn}t). \quad (41)$$

$$u(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t).$$

Substitusikan solusi yang diperoleh dari Helmholtz dan temporal ODE ke dalam persamaan di atas sehingga,

$$u(x, y, t) = \Gamma \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right) \cdot [ B_{mn} \cos(\lambda_{mn}t) + B_{mn}^* \sin(\lambda_{mn}t) ],$$

Dimana  $\Gamma = 1$  sehingga fungsi eigen diperoleh,

$$u(x, y, t) = [ B_{mn} \cos(\lambda_{mn}t) + B_{mn}^* \sin(\lambda_{mn}t) ] \left( \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right). \quad (42)$$

## II.5 Inisialisasi dan Syarat Batas

Untuk melakukan pemodelan pada fenomena fisik, umumnya digunakan persamaan diferensial parsial di dalam suatu domain dan menerapkan syarat batas di batas domain. Secara umum dikenal beberapa syarat batas, yakni syarat batas Dirichlet, Neumann dan Robin (Spiegel, 1983). Namun untuk studi ini hanya diperkenalkan syarat batas Dirichlet dan Neumann sebagai berikut;

### 1. Syarat Batas Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f \text{ di } \Omega \\ u = g \text{ di } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dengan  $\Omega$  adalah persegi  $(0,1) \times (0,1)$ . Solusi dari persamaan ini, yaitu  $u(x, y)$  menyatakan perubahan nilai  $k$  (bilangan gelombang) di titik  $(x, y)$ . Syarat batas  $u = g$  di  $\partial\Omega$  disebut syarat batas Dirichlet dari nama penemunya Peter Gustav Lejeune Dirichlet, yaitu syarat batas untuk nilai  $u$  secara langsung. Sehingga di semua batas yang mengelilingi  $\Omega$  akan bernilai  $g$  terhadap  $(x, y)$ .

### 2. Syarat Batas Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f \text{ di } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ di } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sama halnya dengan memisalkan  $\Omega$  seperti penjelasan di syarat batas Dirichlet. Disebut sebagai syarat batas Neumann dari nama penemunya Carl Gottfried Neumann. Syarat batas Neumann adalah syarat batas untuk turunan pertama dari  $u$  ke arah luar.

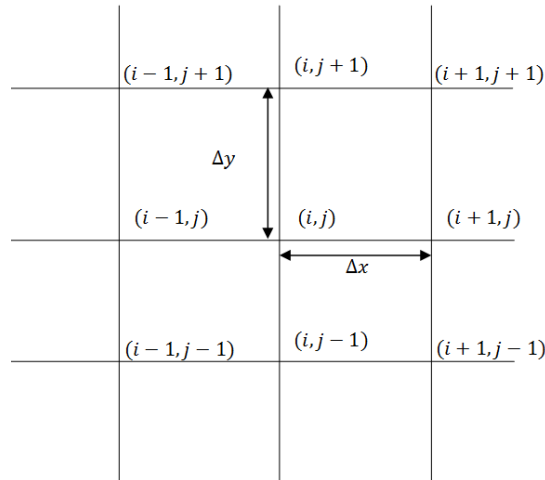
## II.6 Metode Beda Hingga (*Finite Difference*)

Metode beda hingga (*finite difference*) merupakan metode yang memanfaatkan deret Taylor untuk memperoleh suatu nilai yang mendekati nilai turunannya. Kasus ini sangat sesuai diterapkan pada persamaan Helmholtz yang memenuhi bentuk persamaan Poisson. Oleh karena itu persamaan Poisson dituliskan sbb;

$$-\Delta u - k^2 u = f, \quad (47)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Persamaan (47) dalam domain ruang  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  dengan menggunakan syarat batas Dirichlet atau Neumann. Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa persamaan (47) yang dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial dapat diubah ke bentuk differensial numerik atau dalam hal ini ke beda hingga (Chen, 2020). Metode beda hingga mempertimbangkan kondisi awal dan batas, sehingga dibuat jaringan berupa titik-titik hitung dalam daerah yang akan ditinjau. Untuk bidang dua dimensi dalam arah  $x$  dan  $y$  yang dapat dibagi menjadi sebuah jalur segi empat dengan sisi  $\Delta x$  dan  $\Delta y$ . Panjang jalur untuk arah  $x$  adalah  $\Delta x$  dan dalam arah  $y$  adalah  $\Delta y$ , seperti gambar berikut (Triatmodjo, 2002)



**Gambar 2. 6** Jaringan Titik Hitung Dalam Bidang  $x - y$  (Triatmodjo, 2002).

Formulasi metode beda hingga menawarkan pendekatan yang lebih langsung dan intuitif untuk solusi numerik dari pada formulasi lain. Sehingga untuk pengaplikasiannya dalam arah  $x(i)$  dan  $y(j)$  untuk fungsi diskritisasi menghasilkan skema berikut (Chen, 2020):

- Beda hingga mundur (*backward finite difference*)

$$(D^-u)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}$$

- Beda hingga ke depan (*forward finite difference*)

$$(D^+u)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

- Beda hingga tengah (*central finite difference*)

$$(D^\pm u)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}$$

- Beda hingga tengah kedua (*second central finite difference*)

$$(D^2u)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

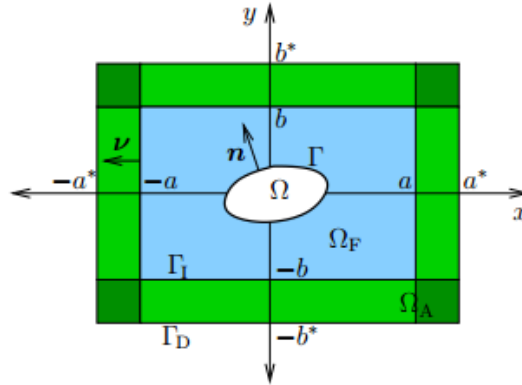
## II.7 Pengaplikasian PML (*Perfectly Match Layer*) Domain 2D

Diperkenalkan PML (*Perfect Match Layer*) adalah sebuah teknik baru untuk simulasi dalam domain ruang bebas (*free-space*) yang dikembangkan untuk memecahkan masalah di batas domain dengan menggunakan metode beda hingga. PML menjadi teknik yang tersebar luas untuk mencegah refleksi dari batas medium yang ditentukan sebelumnya untuk masalah perambatan gelombang baik dalam domain waktu maupun frekuensi. Dikembangkan skema diskritisasi untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz dalam domain dua dimensi tak hingga atau *free-space*. Skema diskrit atau persamaan interior menggunakan penyelesaian beda hingga. Kemudian hasil gabungan dari Helmholtz-PMLs dianalisis untuk memperoleh kinerja terbaik (Singer, 2004; Belonosov, 2017).

### II.7.1 Parameter Optimal PML (*Perfectly Match Layer*)

Berdasarkan artikel (Bermudez et al., 2006), diperkenalkan sebuah teknik untuk menghasilkan batas optimal metode *perfectly Match Layer* (PML) yang didasari fungsi penyerap khusus dengan integral tak terbatas. Teknik ini memungkinkan kita untuk menghindari refleksi palsu meskipun ketebalan lapisan terbatas. Selain itu, metode ini mudah diimplementasikan dalam metode elemen hingga maupun beda hingga untuk penyelesaian masalah diskritisasi. Misalkan  $\Omega$  menjadi domain terikat dari  $\mathbb{R}^2$  pada arah  $x$  dan  $y$  memotong domain tak terbatas, seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.7 Persegi panjang bagian dalam berisi kendala  $\Omega$  dan domain fisik  $\Omega_F$ , yaitu subdomain yang ditempati oleh fluida yang mengelilingi.





**Gambar 2. 7** PML Kartesian untuk domain 2D (Bermudez et al., 2006).

Dalam kasus ini dipertimbangkan variabel absorpsi dalam PML yaitu  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$ , masing-masing bekerja pada lapisan vertikal dan horizontal. Oleh karena itu gambar 2.7 digunakan untuk memperoleh solusi  $u(x,y)$ , dengan mengikuti persamaan (48):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - k^2 u = 0 \text{ dalam } \Omega_F \\ -\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k^2 u(x,y) = 0 \text{ dalam } \Omega_A \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ di } \Gamma \\ u \text{ dan } \left( \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial u}{\partial v_x} + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial u}{\partial v_y} \right) \text{ lanjutan di } \Gamma_I \\ u = 0 \text{ di } \Gamma_D \end{array} \right. \quad (48)$$

dimana

$$\gamma_x(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } |x| < a, \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(|x|), & \text{jika } a \leq |x| < a^*, \end{cases}$$

$$\sigma_x(x) = \frac{c}{a^* - x}$$

dan

$$\gamma_y(y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } |y| < b, \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(|y|), & \text{jika } b \leq |y| < b^*, \end{cases}$$

$$\sigma_y(y) = \frac{c}{b^* - y}$$