

**ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA PEMANGSA
PADA DUA PATCH DENGAN EFEK ALLEE DAN MIGRASI
PADA PEMANGSA**

*DYNAMICS ANALYSIS OF A TWO PATCH PREY PREDATOR MODEL
WITH ALLEE EFFECT AND MIGRATION ON PREDATOR*



**ISMI RA'YAN
H022181002**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA PEMANGSA
PADA DUA PATCH DENGAN EFEK ALLEE DAN MIGRASI
PADA PEMANGSA**

TESIS

*Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Magister Sains
pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA PEMANGSA PADA DUA
PATCH DENGAN EFEK ALLEE DAN MIGRASI PADA PEMANGSA**

Disusun dan diajukan oleh

**ISMI RA'YAN
H022181002**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
pada tanggal 5 April 2022
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 19680114 199412 1 001



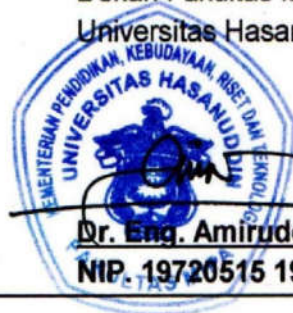
Prof. Dr. Jeffry Kusuma
NIP. 19641112 198703 1 002

Ketua Program Studi
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ismi Ra'yan
NIM : H022181002
Program Studi : Matematika
Jenjang : S2

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa Tesis yang berjudul

Analisis Dinamik Model Mangsa Pemangsa pada Dua Patch dengan Efek Allee dan Migrasi pada Pemangsa

Merupakan hasil karya penulis sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain, kecuali bagian yang telah dikutip sesuai dengan kaidah ilmiah yang berlaku.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Tesis ini hasil karya orang lain, maka penulis bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 5 April 2022

Yang Menyatakan



Ismi Ra'yan

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin.

Penyusunan Tugas Akhir ini mengalami banyak hambatan, namun dengan bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak sehingga semua hambatan itu dapat teratasi. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada:

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. Dan Prof. Dr. Jeffry Kusuma selaku pembimbing Tugas Akhir yang telah meluangkan waktu dan pikiran untuk memberi arahan dan bimbingan selama proses menyelesaikan tulisan ini.
2. Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M. Sc., Ibu Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si., dan Prof. Dr. Eng. Mawardi, S. Si., M. Si., selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penyempurnaan tulisan ini.
3. Dr. Muhammad Zakir, M.Si., selaku Ketua Prodi Magister Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin beserta seluruh dosen Departemen Matematika, yang telah membekali ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama perkuliahan.
4. Dr. Eng. Amiruddin, M.Si., selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin beserta staf administrasi bagian akademik FMIPA dan staf administrasi Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan pelayanan akademik maupun proses administarsi selama penulis menempuh pendidikan magister.
5. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah banyak membantu dan memberikan pelayanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan magister di Universitas Hasanuddin.

6. Ayahanda Syarifuddin dan Ibunda Hasma sebagai orang tua penulis, Alimuddin sebagai paman penulis, serta adik tercinta Khairul Fiqran yang selalu mendoakan dan mendukung penulis dari segi moril maupun materil.
7. Teman-teman Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin angkatan 2018 dan kepada semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung, diucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Penulis menyadari bahwa Tesis ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis dengan senang hati membuka diri untuk menerima segala saran dan kritikan yang bersifat membangun guna memberikan kontribusi untuk pengembangan ilmu pengetahuan serta bermanfaat bagi masyarakat luas, para pembaca dan khususnya bagi pribadi penulis. Semoga segala kerja keras dan Doa dari segala pihak mendapat balasan dari Sang Pencipta. Aamiin ya Robbal Alamiin.

Makassar, April 2022

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini membahas model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee pada pertumbuhan mangsa dan migrasi pada pemangsa. Diasumsikan bahwa pemangsa melakukan migrasi ke patch dengan interaksi mangsa pemangsa yang lebih terkonsentrasi. Perilaku dinamik model tanpa migrasi dan model dengan migrasi dianalisis. Dari hasil yang diperoleh, titik kesetimbangan trivial bersifat stabil asimtotik lokal untuk kasus efek Allee kuat dan tidak stabil pelana untuk kasus efek Allee lemah, sedangkan titik kesetimbangan batas dan koeksistensi bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat parameter yang telah ditentukan. Simulasi numerik dilakukan di sekitar titik kesetimbangan koeksistensi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ambang batas efek Allee mempengaruhi pertumbuhan populasi mangsa ketika mengalami efek Allee kuat. Pertumbuhan mangsa juga bergantung pada kondisi awal kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Selanjutnya, ketika mangsa mengalami efek Allee lemah, tidak ada ambang batas yang harus dilampaui agar mangsa dapat bertahan sehingga untuk setiap kondisi awal bagaimanapun, mangsa tidak akan punah. Selain itu, migrasi pada pemangsa tidak mengubah kestabilan titik kesetimbangan koeksistensi. Jika titik kesetimbangan tanpa migrasi pada pemangsa adalah stabil untuk setiap patch, maka ketika pemangsa melakukan migrasi, titik kesetimbangan koeksistensi untuk keempat populasi akan tetap stabil.

Kata Kunci: Model Mangsa Pemangsa, Efek Allee, Migrasi, Kestabilan.

ABSTRACT

This study discusses a prey-predator model in two patches with the Allee effect in prey growth and migration in predator. It is assumed that the predator migrated towards patches with more concentrated prey-predator interactions. The dynamic behavior of the model without migration and with migration is analyzed. From the result, it is obtained that the trivial equilibrium point is locally asymptotically stable for the case of the strong Allee effect and the saddle unstable for the case of the weak Allee effect, while the boundary and coexistence equilibrium points are locally asymptotically stable if it satisfies several parameter conditions. Numerical simulations are carried out around the coexistence equilibrium point. The simulation results show that the Allee effect threshold affects prey population growth when experiencing a strong Allee effect. The growth of the prey population also depends on the initial conditions of the prey and predator population density. Furthermore, when the prey population experiences a weak Allee effect, there is no threshold must be exceeded for the population to survive so that for each initial condition however, the population will not experience extinction. In addition, migration of predator does not change the stability of the coexistence equilibrium point. If equilibrium point without migration in predator is stable for each patch, then when the predator migrates, the coexistence equilibrium point for the four population will remain stable.

Keywords: Prey-Predator Model, Allee Effect, Migration, Stability.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Model Pertumbuhan Logistik	7
2.2 Model Mangsa Pemangsa	8
2.3 Fungsi Respon	9

2.4	Sistem Dinamik	11
2.5	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	16
2.6	Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	19
2.7	Efek Allee	21
BAB III METODOLOGI PENELITIAN		25
3.1	Jenis Penelitian	25
3.2	Lokasi dan Waktu Penelitian	25
3.3	Langkah Penelitian	25
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		28
4.1	Model Mangsa Pemangsa pada Dua Patch dengan Efek Allee dan Migrasi pada Pemangsa	28
4.2	Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Model tanpa Migrasi pada Pemangsa	32
4.3	Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Model dengan Migrasi pada Pemangsa	43
4.4	Simulasi Numerik	68
BAB V PENUTUP		87
5.1	Kesimpulan	87
5.2	Saran	88
DAFTAR PUSTAKA		89
LAMPIRAN		92

DAFTAR TABEL

Tabel		Halaman
Tabel 4.1	Deskripsi variabel dan parameter	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
Gambar 3.1	Diagram Alur Kerja	27
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Mangsa Pemangsa pada Dua Patch dengan Efek Allee dan Migrasi pada Pemangsa	29
Gambar 4.2	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) untuk setiap patch dengan kondisi awal $x_1(0) = 3.9, y_1(0) = 0.7, x_2(0) = 4.9, y_2(0) = 1.3$	71
Gambar 4.3	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) untuk setiap patch dengan nilai θ_i yang divariasikan	73
Gambar 4.4	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan $\eta_1 = -0.3$ dan $\eta_2 = -0.1$	75
Gambar 4.5	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 0.25$ dan $\rho_2 = 0.6$	79
Gambar 4.6	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 0.25$ dan $\rho_2 = 0.9$	80
Gambar 4.7	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 0.025$ dan $\rho_2 = 0.9$	81
Gambar 4.8	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 1$ dan $\rho_2 = 0.6$	84
Gambar 4.9	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 0.6$ dan $\rho_2 = 0.6$	85
Gambar 4.10	Kurva solusi populasi mangsa (x_i) dan pemangsa (y_i) dengan tingkat migrasi $\rho_1 = 0.25$ dan $\rho_2 = 0.6$	86

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama/Arti
ρ	Rho
η	Eta
θ	Theta
ε	Epsilon
μ	Mu
λ	Lambda
α	Alpha
β	Beta
δ	Delta
γ	Gamma
ξ	Xi
ϑ	Vartheta
∂	Turunan parsial
\mathbb{R}	Bilangan real
\in	Elemen

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran		Halaman
Lampiran 1	Titik Kesetimbangan Model tanpa Migrasi pada Pemangsa Menggunakan Maple	92
Lampiran 2	Titik Kesetimbangan Model dengan Migrasi pada Pemangsa Menggunakan Maple	92
Lampiran 3	Simulasi Numerik Model tanpa Migrasi pada Pemangsa Menggunakan Maple	93
Lampiran 4	Simulasi Numerik Model dengan Migrasi pada Pemangsa Menggunakan Maple	104

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dinamika populasi merupakan suatu kajian mengenai perubahan-perubahan yang terjadi dalam sistem populasi dan bagaimana populasi dalam sistem tersebut dapat mempengaruhi populasi lain. Pemodelan matematika pada bidang ekologi sangat menarik untuk dikaji mengingat banyak sekali faktor-faktor yang mempengaruhi kehidupan populasi makhluk hidup dan keseimbangan makhluk hidup serta interaksi mereka dalam kehidupan.

Model matematika memberikan kontribusi dalam memudahkan fenomena alam yang abstrak untuk disimulasikan dalam bentuk rumusan matematika. Model matematika digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi, serta dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu. Proses dinamika populasi dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan differensial yang melibatkan waktu yang kontinu atau waktu yang diskrit (Agrawal & Pathak, 2012).

Salah satu model matematika yang digunakan dalam menjelaskan fenomena pertumbuhan populasi secara dinamik adalah model predasi mangsa pemangsa. Dalam pembahasan ilmu ekologi, khususnya interaksi predasi dua populasi mangsa pemangsa menjadi sangat penting karena kelangsungan hidup makhluk hidup bergantung pada keseimbangan

lingkungan sekitarnya. Keseimbangan tersebut dapat tercapai jika rata-rata spesies dari dua populasi yaitu populasi mangsa dan pemangsa saling berinteraksi sesuai dengan ukuran atau proporsinya. Model mangsa pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 (Boyce & DiPrima, 2001).

Dalam banyak kasus, model sederhana interaksi mangsa-pemangsa diasumsikan terjadi pada lingkungan yang homogen. Namun kenyataannya, yang terjadi di alam adalah interaksi pada lingkungan yang heterogen dan ini membentuk patch-patch diskrit yang berkaitan dengan imigrasi.

Penyebaran populasi sangat umum dalam ekologi. Spesies bermigrasi dari satu patch ke patch lain disebabkan oleh beberapa faktor. Spesies mangsa akan bermigrasi berdasarkan ketersediaan sumber daya dan resiko predasi. Sementara pemangsa cenderung bermigrasi ke patch yang lebih baik untuk mendapatkan mangsa yang lebih banyak. Di alam, kurangnya makanan, kompetisi, sex, umur, kurangnya keamanan (khusus mangsa), kondisi iklim, populasi yang melimpah dalam suatu patch merupakan faktor yang menyebabkan spesies bermigrasi dari suatu patch ke patch lain (Pillai dkk., 2011).

Hubungan antara penyebaran dan dinamika populasi sangat penting untuk mengatur populasi dan untuk memprediksi bagaimana respon populasi terhadap perubahan lingkungan. Model populasi mangsa pemangsa dengan bentuk penyebaran telah banyak dikaji dalam beberapa

penelitian. Ghosh dan Bhattacharyya (2011) membahas model metapopulasi mangsa pemangsa dengan penyebaran pada pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dimana pemangsa membutuhkan waktu untuk mencari dan mencerna makanan.

Kang dkk., (2017) membahas model mangsa pemangsa pada dua patch dimana penyebaran pemangsa dilakukan berdasarkan interaksi antar mangsa pemangsa yang lebih terkonsentrasi yang digambarkan dengan fungsi respon Holling tipe II. Sun dan Ali (2018) membahas model mangsa pemangsa dua patch dengan penyebaran pada mangsa dan pemangsa serta penambahan pengaruh waktu tunda pada penyebaran.

Selain itu, perilaku dinamik sistem mangsa pemangsa dengan efek Allee mendapatkan banyak perhatian dalam beberapa studi matematika ekologi. Efek Allee menjelaskan korelasi positif antara kepadatan populasi dan laju pertumbuhan yang juga dikenal sebagai kebalikan dari ketergantungan kepadatan positif. Efek Allee memungkinkan meningkatkan resiko kepunahan pada kepadatan populasi yang rendah (Wu dan Xiuxiang, 2016).

Efek Allee muncul karena beberapa hal seperti kesulitan mendapatkan pasangan, disfungsi sosial, eksploitasi makanan dan depresi perkawinan sekerabat. Efek Allee diklasifikasikan berdasarkan sifat ketergantungan kepadatan pada kepadatan rendah. Populasi dengan efek Allee kuat mengalami pertumbuhan per kapita negatif pada kepadatan rendah. Populasi dengan efek Allee lemah mengalami penurunan tingkat

pertumbuhan pada kepadatan rendah tapi tidak mengalami pertumbuhan negatif.

Beberapa peneliti seperti Yong Ye dkk., (2019) membahas dinamika model mangsa-pemangsa dengan efek Allee lemah pada pertumbuhan mangsa dan menggabungkan waktu tunda pada laju predasi. Boli Xie dkk., (2015) membahas model mangsa-pemangsa dengan waktu tunda dan efek Allee ganda. Kemudian, Singh dkk., (2016) membahas analisis bifurkasi pada modifikasi Leslie-Gower model mangsa-pemangsa dengan efek Allee ganda pada mangsa. Selanjutnya, Pal dan Samanta (2018) menyelesaikan model mangsa pemangsa dua patch dengan penyebaran pada mangsa dan penambahan efek Allee kuat pada pertumbuhan populasi mangsa.

Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, peneliti akan mengkaji bagaimana efek Allee dan migrasi mempengaruhi dinamika populasi mangsa dan pemangsa. Adapun model dalam penelitian ini mengacu pada penelitian model mangsa pemangsa pada dua patch dengan penyebaran yang dikembangkan oleh Kang dkk., (2017). Model dalam penelitian ini dikembangkan dengan menambahkan efek Allee pada pertumbuhan populasi mangsa di kedua patch. Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan, akan dilakukan penelitian tentang **“Analisis Dinamik Model Mangsa Pemangsa pada Dua Patch dengan Efek Allee dan Migrasi pada Pemangsa”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee dan migrasi pada pemangsa?
2. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee dan migrasi pada pemangsa?
3. Bagaimana perbandingan simulasi numerik model tanpa migrasi dan model dengan migrasi pemangsa pada kedua patch?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee dan migrasi pada pemangsa.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee dan migrasi pada pemangsa.
3. Menganalisis perbandingan simulasi numerik model tanpa migrasi dan model dengan migrasi pemangsa pada kedua patch.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian diharapkan dapat memberi pemahaman tentang pengaruh efek Allee dan migrasi pada dinamika model mangsa pemangsa.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Model yang diteliti adalah model mangsa pemangsa pada dua patch dengan efek Allee pada pertumbuhan mangsa dan migrasi pada pemangsa.
2. Pertumbuhan mangsa mengikuti model pertumbuhan logistik dengan penambahan efek Allee pada masing-masing patch.
3. Migrasi dilakukan oleh pemangsa ke patch dengan interaksi mangsa pemangsa yang lebih terkonsentrasi.
4. Fungsi respon yang digunakan untuk menggambarkan interaksi mangsa pemangsa adalah fungsi respon Holling tipe II.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model eksponensial $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$ yang memiliki solusi $x(t) = ke^{rt}$ dimana r merupakan angka pertumbuhan populasi dan k suatu nilai konstan. Model eksponensial mempunyai kelemahan yaitu saat nilai laju pertumbuhan populasi $r > 0$ maka populasi tumbuh tak terbatas. Hal ini mustahil terjadi, sehingga perlu adanya kajian lagi. Model ini diberikan dengan asumsi bahwa $r = R(N)$. Nilai $R(N)$ ditentukan oleh kelahiran dan pengaruh kepadatan populasi (keterbatasan luas lingkungan). Nilai $R(N)$ dapat dirumuskan dengan:

$$R(N(t)) = a - bN(t) \quad (2.1)$$

di mana a menyatakan laju pertumbuhan populasi tanpa pengaruh lingkungan dan b menyatakan pengaruh dari penambahan kepadatan populasi (semakin padat populasi maka persaingan antar individu semakin meningkat).

Verhulst (1990) memperkenalkan model pertumbuhan logistik, yaitu:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.2)$$

dengan N kepadatan populasi, r menyatakan laju pertumbuhan populasi dan parameter K merupakan *carrying capacity* atau daya dukung lingkungan (Waluya, 2011).

Terdapat dua titik kesetimbangan pada model (2.2) yaitu $N = 0$ dan $N = K$, di mana $\frac{dN}{dt} = 0$.

Jika pada persamaan (2.2) ditambahkan syarat awal $N(0) = N_0$, maka dapat diperoleh solusi khusus dari persamaan differensial tersebut, yaitu

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} \quad (2.3)$$

untuk $r > 0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ sehingga grafik dari persamaan (2.3) mempunyai asimtot mendatar $N(t) = K$ (Barnes & Fulford, 2002).

2.2 Model Mangsa Pemangsa

Model mangsa-pemangsa merupakan salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem. Model ini disebut juga model Lotka Volterra (Boyce & DiPrima, 1992). Persamaan ini adalah persamaan yang masih sederhana dengan asumsi dasar dari persamaan Lotka-Voltera yaitu populasi mengalami pertumbuhan dan peluruhan secara eksponensial. Pemangsaan bergantung pada kemungkinan interaksi langsung pemangsa terhadap mangsa, dan pertumbuhan pemangsa tergantung pada tangkapan mangsa. Berikut ini sistem persamaan Lotka-Voltera yang dikonstruksi dari asumsi-asumsi tersebut (Verhulst, 1990).

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) \quad (2.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(dx - c)$$

dengan x dan y masing-masing menyatakan kepadatan populasi mangsa dan pemangsa, sedangkan a, b, c, d berturut-turut menyatakan pertumbuhan populasi mangsa, laju predasi pemangsa, laju pertumbuhan pemangsa dan laju kematian pemangsa. Diasumsikan $a, b, c, d > 0$, karena setiap populasi berpotensi berkembang biak. Titik keseimbangannya adalah $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (0, 0)$ dan $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ (Keshet, 2005).

2.3 Fungsi Respon

Dalam dinamika populasi, fungsi respon mengacu pada peningkatan populasi pemangsa atau pengurangan mangsa saat terjadi interaksi. Fungsi respon pemangsa adalah tingkat predasi (daya makan) pemangsa terhadap jumlah makanan atau mangsa. Berdasarkan karakteristiknya, fungsi respon Holling terbagi dalam tiga tipe yaitu:

1. Fungsi Respon Holling Tipe I

Pada tipe ini, diasumsikan bahwa waktu penanganan dan waktu pencarian mangsa dapat diabaikan secara bersamaan (Jeschke dkk., 2002). Hal ini menyebabkan tingkat konsumsi pemangsa meningkat secara linear dengan kepadatan mangsa, tetapi konstan jika pemangsa berhenti memangsa. Fungsi ini terjadi pada pemangsa yang pasif atau lebih suka

menunggu mangsanya. Sebagai contoh pemangsa fungsi respon Holling tipe I adalah laba-laba dengan serangga sebagai mangsa.

Menurut Murray dkk., (2013), fungsi Holling tipe I diberikan sebagai berikut:

$$F^{(I)}(N) = aN \quad (2.5)$$

di mana

$F^{(I)}$: fungsi respon Holling tipe I

a : tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa

N : jumlah populasi mangsa.

2. Fungsi Respon Holling Tipe II

Tipe ini menggambarkan rata-rata tingkat konsumsi pemangsa, ketika pemangsa menghabiskan waktu untuk mencari mangsa (Murray dkk., 2013). Fungsi respon Holling tipe II terjadi pada pemangsa dengan karakteristik aktif dalam mencari mangsanya. Sebagai contoh pemangsanya adalah serigala. Fungsi ini akan meningkat jika konsumsinya mengalami penurunan dan konstan jika mencapai titik jenuh (*half saturation*).

Menurut Jeschke dkk., (2002), fungsi respon Holling tipe II diberikan sebagai berikut:

$$F^{(II)}(N) = \frac{aN}{1 + bN} \quad (2.6)$$

di mana

$F^{(II)}$: fungsi respon Holling tipe II

a : tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa

b : tingkat kejenuhan pemangsa

N : jumlah populasi mangsa.

3. Fungsi Respon Holling Tipe III

Pada tipe ini, hubungan tingkat pemangsaan dan kepadatan mangsa bersifat sigmoid, di mana saat kepadatan mangsa rendah, efek pemangsaan juga rendah, tetapi jika ukuran populasi mangsa meningkat, pemangsaan akan lebih intensif (Agrawal & Pathak, 2012). Fungsi ini terjadi pada pemangsa yang cenderung mencari mangsa lain ketika mangsa utamanya mulai berkurang sehingga variabel mangsa menjadi N^2 dan menyebabkan laju populasi lebih cepat. Fungsi respon Holling tipe III diberikan sebagai berikut (Ndam & Kaseem, 2009):

$$F^{(III)}(N) = \frac{aN^2}{1 + bN^2} \quad (2.7)$$

di mana

$F^{(III)}$: fungsi respon Holling tipe III

a : tingkat konsumsi maksimum pemngsa terhadap mangsa

b : tingkat kejenuhan pemangsa

N : jumlah populasi mangsa.

2.4 Sistem Dinamik

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan differensial di mana dalam persamaannya

mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik kesetimbangan.

Titik kesetimbangan merupakan salah satu kunci konsep dalam sistem dinamik. Sistem yang lebih umum dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dan $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, adalah suatu fungsi umum dari $x_i = 1, 2, \dots, n$ dan waktu t .

Suatu fungsi yang tidak bergantung waktu secara eksplisit (sistem *autonomous*) diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Titik kesetimbangan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ akan memenuhi

$$\begin{aligned}
f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\
f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\
&\vdots \\
f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

di mana $f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Strogatz, 1994).

Berikut definisi titik kesetimbangan dan kestabilan pada sistem (2.9).

Definisi 2.1 (Titik Kesetimbangan)

Titik $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem (2.9) jika $f_i(\bar{x}) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Perko, 1991).

Definisi 2.2 (Kestabilan)

Titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pada sistem (2.9) dikatakan:

1. *Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*
2. *Stabil asimtotik lokal jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$.*
3. *Tidak stabil jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi kondisi (1).*
(Wiggins, 2003).

Definisi 2.3 (Matriks Jacobi)

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.9) dengan $f_i \in C^1(E)$,
 $i = 1, 2, \dots, n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan E adalah himpunan terbuka. Matriks

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik \bar{x} (Hale & Kocak, 1991).

Pada definisi 2.3, simbol $f_i \in C^1(E)$ menyatakan f_i mempunyai turunan di E dan $Jf(\bar{x})$ kontinu pada E .

Definisi 2.4 (Titik Hiperbolik)

Titik kesetimbangan dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol (Perko, 1991).

Contoh 2.1

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 x_2 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 - x_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Misal $f_1 = x_1 x_2 - 2x_2$ dan $f_2 = x_1^2 - x_2$. Akan dicari titik kesetimbangan \bar{x}_1 dan \bar{x}_2 sedemikian sehingga $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$, dan $f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$.

Untuk $f_1 = 0$, maka

$$x_1x_2 - 2x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0 \vee x_1 = 2$$

Jika $x_2 = 0$ disubstitusi ke $f_2 = 0$, maka diperoleh

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0$$

Dengan demikian titik kesetimbangan pertama diperoleh $\bar{x}_1 = (0, 0)$.

Selanjutnya, jika $x_1 = 2$ dan disubstitusi ke $f_2 = 0$, maka diperoleh

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4$$

Jadi, titik kesetimbangan kedua diperoleh $\bar{x}_2 = (2, 4)$. Dapat disimpulkan

bahwa, sistem (2.11) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu $\bar{x}_1 = (0, 0)$ dan

$\bar{x}_2 = (2, 4)$.

Selanjutnya akan dicari matriks $Jf(\bar{x})$ dengan $\bar{x}_1 = (0, 0)$ dan $\bar{x}_2 = (2, 4)$.

Dari hasil linearisasi sistem maka diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1x_2 - 2x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1x_2 - 2x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\bar{x}_1 = (0, 0)$

$$Jf(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks $Jf(\bar{x}_1)$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\lambda)(-1 - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1 \end{aligned}$$

Bagian real nilai eigen nol, maka titik kesetimbangan $\bar{x}_1 = (0, 0)$ adalah titik kesetimbangan nonhiperbolik. Selanjutnya, untuk $\bar{x}_2 = (2, 4)$

$$Jf(\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks $Jf(\bar{x}_2)$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4 - \lambda)(-1 - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -1 \end{aligned}$$

Bagian real nilai eigen tak nol, maka titik kesetimbangan $\bar{x}_2 = (2, 4)$ adalah titik kesetimbangan hiperbolik.

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk menentukan solusi sistem linear dari suatu sistem dinamik. Secara formal definisi nilai eigen dan vektor eigen diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.5 (Anton, 1992)

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A jika terdapat suatu skalar $\lambda \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x \quad (2.12)$$

Nilai skalar λ dinamakan nilai eigen dari A . Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks A , maka persamaan (2.12) dituliskan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.13) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) disebut persamaan karakteristik dari matriks A .

Contoh 2.2

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow & (-2 - \lambda)(5 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 5$.

Berdasarkan Definisi 2.5,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah solusi tak nol dari $(A - \lambda I)x = 0$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Untuk $\lambda_1 = -2$, maka persamaan (2.15) menjadi

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

yang ekuivalen dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Berdasarkan persamaan (2.17) diperoleh solusi dari sistem (2.16) yaitu

$3x_1 = -x_2$. Misal $x_1 = t_1$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -2$ adalah

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} t_1$$

Untuk $\lambda_2 = 5$, maka persamaan (2.15) menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

yang ekuivalen dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) diperoleh solusi dari sistem (2.18) yaitu $x_1 = 2x_2$. Misal $x_2 = t_2$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 5$ adalah

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t_2$$

Dengan demikian, vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.6 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Untuk menguji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi di titik kesetimbangan. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk menentukan nilai eigen dari suatu persamaan karakteristik. Analisis dilakukan melalui koefisien-koefisien persamaan karakteristik tersebut. Misalkan diberikan sistem linear dengan koefisien konstan, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.20)$$

di mana A adalah matriks berukuran $n \times n$ yang merupakan bentuk linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Kemudian x adalah vektor berukuran $n \times 1$. Persamaan karakteristik sistem (2.20) diberikan sebagai berikut:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.21)$$

di mana I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik polinomial diberikan sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.22)$$

di mana koefisien a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ adalah konstanta real. Persamaan tersebut mempunyai n buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Masing-masing akar dapat bernilai real atau mungkin bernilai kompleks yang memenuhi $P(\lambda_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Uji kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari matriks A , yaitu melalui determinan dari matriks D_k yang disebut dengan matriks Hurwitz. Syarat perlu dan cukup agar $P(\lambda)$ mempunyai nilai eigen dengan bagian real yang negatif adalah $a_n > 0$ (Murray, 2002).

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 2.1. Uji kestabilan Hurwitz (Keshet, 2005). *Semua nilai eigen dari persamaan (2.22) memiliki bagian real yang negatif jika dan hanya determinan dari semua matriks Hurwitz positif, yaitu*

$$\det[D_k] > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Diberikan contoh persamaan kubik sebagai berikut

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, persamaan kubik tersebut memiliki akar-akar dengan bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

dengan demikian diperoleh kondisi sebagai berikut

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0.$$

2.7 Efek Allee

Efek Allee terjadi pada populasi kecil. Meskipun jarang terdeteksi, secara luas efek Allee diyakini bersifat umum. Pertumbuhan populasi yang terkena efek Allee berkurang pada kepadatan rendah. Pencetus fenomena tersebut adalah Warder Clyde Allee (1885–1955), seorang ahli zoologi dan ekologi hewan Universitas Chicago, yang memiliki minat khusus pada perilaku kelompok pada hewan.

Allee adalah seorang pengamat yang cerdas tentang perilaku hewan, dengan memperhatikan bahwa dalam banyak spesies terdapat kepadatan yang membatasi pertumbuhan populasi, bukan persaingan intraspesifik. Allee mengamati secara langsung bahwa agregasi memberikan efek positif pada kelangsungan hidup Isopoda tanah yang menjadi sasaran pengeringan ketika diisolasi (Allee, 1927). Contoh-contoh

empirisnya tentang manfaat agregasi tampaknya bertentangan dengan paradigma Malthus dan model logistik. Sebagian besar pekerjaan awal Allee berfokus dengan mendokumentasikan fenomena ini pada populasi hewan (Allee 1931).

Dalam biologi modern, efek Allee dianggap memiliki dua manifestasi:

1. Komponen efek Allee

Populasi di mana terdapat hubungan positif antara beberapa komponen kebugaran (misalnya, viabilitas, ketahanan hidup remaja, kesuburan) dengan ukuran populasi.

2. Efek demografis Allee

Terjadi ketika komponen efek Allee menghasilkan hubungan positif antara pertumbuhan populasi per kapita dan ukuran populasi.

Persaingan, misalnya untuk sumber daya atau ruang akan membatasi ukuran populasi, dan laju pertumbuhan per kapita suatu populasi pada ukuran kecil sama dengan rata-rata absolut kebugaran individu.

Efek Allee yang menyebabkan ukuran populasi kritis disebut efek Allee kuat, sedangkan efek Allee yang tidak menyebabkan ukuran populasi kritis disebut efek Allee lemah. Nama lain untuk efek Allee adalah ketergantungan kepadatan.

Hubungan positif antara kebugaran dan ukuran populasi dapat disebabkan oleh berbagai mekanisme yang mempengaruhi reproduksi dan kelangsungan hidup. Misalnya, keterbatasan mendapatkan pasangan

dapat terjadi pada kepadatan spesies yang bereproduksi secara seksual, karena reproduksi seksual memerlukan kontak antara gamet jantan dan betina. Keterbatasan pasangan mengurangi reproduksi saat tanaman atau hewan melepaskan gamet ke lingkungan atau ketika jantan dan betina mengalami kesulitan menemukan satu sama lain.

Ketika perilaku seperti berkembang biak, makan, dan pertahanan kooperatif menjadi lebih efisien atau berhasil dalam kelompok sosial yang lebih besar, akan mengakibatkan peningkatan keberhasilan reproduksi atau keberlangsungan hidup (Courchamp dkk., 1999). Meskipun perilaku kooperatif paling jelas pada vertebrata sosial, seperti anjing padang rumput, berkuku atau burung, efek Allee yang dihasilkan dari pemberian makan atau pertahanan kelompok juga dapat timbul pada serangga, seperti kumbang kulit kayu, dan organisme air, seperti ikan cichlid (Friedenberg dkk., 2007).

Konsekuensi yang paling dramatis dari efek Allee dikaitkan dengan efek Allee yang kuat, meskipun efek Allee yang lemah juga diperkirakan akan memunculkan perbedaan dinamis yang terukur. Perbedaan antara efek Allee dan teori logistik klasik (Malthus) terlihat pada korelasi antara tingkat pertumbuhan per kapita dan ukuran populasi (Drake & Kramer, 2011).

Model matematika pertumbuhan populasi tunggal dengan efek Allee diberikan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN}{N+n} \left(1 - \frac{N}{K}\right) (N - m) \quad (2.24)$$

di mana m adalah ambang batas efek Allee, $n > 0$ adalah parameter pembantu dengan $m > -n$.

Pada persamaan (2.24), tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa dipengaruhi oleh dua komponen efek Allee yaitu faktor $m(N) = N - m$ dan $r(N) = \frac{rN}{N+n}$ yang kemudian dimodifikasi dengan fungsi pertumbuhan logistik. Fungsi $(N - m)$ menyatakan bahwa ketika $N < m$ maka $\frac{dN}{dT} < 0$ dan kepadatan polulasi akan menurun dan konvergen ke titik kepunahan. Sedangkan ketika $N > m$ maka $\frac{dN}{dT} > 0$ dan populasi akan meningkat dan konvergen ke daya dukung lingkungan (K).

Selanjutnya, fungsi $r(N) = \frac{rN}{N+n}$ dapat dinyatakan sebagai bentuk pendekatan dinamika populasi dimana perbedaan antara individu yang subur dan tidak subur tidak dijelaskan secara eksplisit pada model. Dengan demikian, diasumsikan bahwa faktor tersebut menunjukkan dampak dari efek Allee dikarenakan populasi yang tidak subur (Barclay dan Mackauer, 1980).