

**PEMODELAN NUMERIK DUFORT-FRANKEL PENYEBARAN  
POLUTAN PADA DANAU DENGAN ALIRAN MASUK DAN KELUAR**

**SKRIPSI**



**ZAITUN**

**H111 16 302**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2020**



**PEMODELAN NUMERIK DUFORT-FRANKEL PENYEBARAN  
POLUTAN PADA DANAU DENGAN ALIRAN MASUK DAN KELUAR**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin  
Makassar**

**ZAITUN**

**H111 16 302**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2020**



## LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan Sungguh - sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Pemodelan Numerik DuFort-Frankel Penyebaran Polutan pada Danau dengan Aliran Masuk dan Keluar**

Adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

**Makassar, 1 September 2020**



**ZAITUN**  
**NIM. H 111 16 302**



**PEMODELAN NUMERIK DUFORT-FRANKEL PENYEBARAN  
POLUTAN PADA DANAU DENGAN ALIRAN MASUK DAN KELUAR**

**SKRIPSI**

**ZAITUN**

**H111 16 302**

**Telah Diperiksa dan Disetujui  
Tanggal: 1 September 2020**

**Pembimbing Utama**

**Pembimbing Pertama**



**Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.**

**20628 200501 1 002**



**Drs. Khaeruddin, M.Sc.**

**NIP. 19650914 199103 1 003**



## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini telah diajukan oleh:

Nama : Zaitun  
NIM : H111 16 302  
Program Studi : Matematika  
Judul Skripsi : Pemodelan Numerik DuFort-Frankel Penyebaran Polutan pada Danau dengan Aliran Masuk dan Keluar

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

### Dewan Penguji

1. Ketua : **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.**
2. Sekretaris: **Drs. Khaeruddin, M.Sc.**
3. Anggota : **Dra. Nur Erawati, M.Si.**
4. Anggota : **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, M.Sc.**



an di : Makassar  
: 1 September 2020

## KATA PENGANTAR

Ucapan puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala karunia serta berkat-Nya yang senantiasa memberikan segala nikmat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Pemodelan Numerik DuFort-Frankel Penyebaran Polutan pada Danau dengan Aliran Masuk dan Keluar”** untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih sebagai wujud penghargaan kepada kedua orang tua tersayang **La Muka dan Marni** yang dengan penuh kasih sayang dan kesabaran untuk mendukung penulis dalam segala hal, semoga Allah SWT memberikan kesehatan dan umur panjang yang berkah Aamiin. Dan juga kepada saudara-saudara **Herman & Mbak Retno, Oto & Fery, Ora & Mbak Puji, Nita & Rahman, dan Kesa** serta ponakan-ponakan tersayang **Sofi, Nashwa, Icad, Fifa, Aksa, Nisa, Farah, dan Syifa** terima kasih atas kebersamaan dan dukungan yang tiada henti semoga kita selalu dalam lindungan Allah SWT agar selalu menjadi keluarga yang harmonis.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama dan Bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc.** selaku pembimbing pertama, yang dengan penuh kesabaran dan keikhlasan meluangkan banyak waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan dan membimbing penulis dari awal penyusunan sampai selesai.

Ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aris Tina Pulubuhu, MA,** selaku **Rektor Universitas Hasanuddin.**
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku **Dekan Fakultas Matematika**

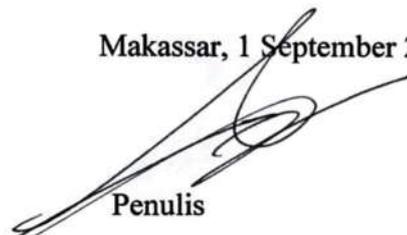
**dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin** serta seluruh staf fakultas dan departemen.



3. Bapak **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu **Dr. Kasbawati, M.Si.** selaku Sekretaris Departemen Matematika, dan segenap bapak dan ibu dosen serta staf Departemen Matematika, yang telah membekali ilmu dan bantuannya selama ini kepada penulis.
4. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, M.Sc.** dan Ibu **Dra. Nur Erawati, M.Si.** selaku tim penguji yang telah meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang sangat membangun dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ibu **Dra. Nur Erawati, M.Si.** selaku penasehat akademik yang selalu setia membimbing penulis mulai dari awal kuliah sampai tahap akhir.
6. Saudara(i) **A16oritma 2016** dan Saudara(i) **MIPA 2016** yang telah memberikan penulis pengalaman yang sangat berharga dan tak bisa dilupakan mulai sejak awal kuliah sampai tahap akhir. Salam **Bersatu Dalam Kebersamaan dan Seperti Seharusnya.**
7. Keluarga Besar **Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unhas** yang selalu memberikan pembelajaran yang sangat berharga bagi penulis yang tidak bisa didapatkan di tempat lain. Salam *Queen Of Science BRAVO Himatika.*
8. Keluarga Besar **KM FMIPA Unhas** yang selalu memberikan pembelajaran yang terbaik untuk anggotanya.
9. Teman-teman KKN Unhas Gel. 102 khususnya Tematik PPM Kabupaten Bone Berbasis Internet Kecamatan Tanete Riattang Barat dan terkhusus teman-teman Posko Macanang.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu per satu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya. Aamiin.

Makassar, 1 September 2020



Penulis



**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR  
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zaitun  
NIM : H111 16 302  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exklusif Royalti-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**“Pemodelan Numerik DuFort-Frankel Penyebaran Polutan pada Danau dengan Aliran Masuk dan Keluar”**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas Hasanuddin, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama telah mencantumkan nama saya sebagai penulis atau pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Makassar

Pada tanggal : 1 September 2020

Yang menyatakan

(un )



## ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang penyebaran polutan pada danau dengan aliran masuk dan keluar secara numerik untuk mengaproksimasi solusi dari model yang digunakan. Pemodelan numerik dilakukan karena cukup praktis dan memiliki akurasi yang memungkinkan dalam mengidentifikasi kasus secara fisis pada penyebaran polutan. Penelitian ini dilakukan untuk memperoleh model penyebaran polutan di danau dengan aliran masuk dan keluar. Model dibangun dan diselesaikan dengan metode numerik skema DuFort-Frankel serta analisisnya. Penelitian ini menghasilkan model persamaan arus atau aliran pada danau yang dinyatakan dalam persamaan Laplace 2D dan model penyebaran polutan dalam persamaan adveksi-difusi 2D. Pemodelan numerik DuFort-Frankel dilakukan dalam dua kasus injeksi polutan berbeda yaitu injeksi sesaat dan injeksi kontinu pada danau, umumnya polutan menyebar ke segala arah serta cenderung mengalir ke arah aliran keluar (*outlet*) pada danau. Analisis konvergensi dilakukan menggunakan teori kesertaraan Lax-Richtmyer dimulai dengan analisis kestabilan yang menghasilkan skema DuFort-Frankel memiliki syarat kestabilan yaitu parameter  $|\xi|^2 \leq 1$  kemudian analisis konsistensi yang menghasilkan skema numerik yang digunakan perlu untuk nilai parameter  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , dan  $\Delta t \rightarrow 0$  serta  $\Delta t \ll \Delta x$  dan  $\Delta t \ll \Delta y$  agar menghasilkan komputasi yang konvergen.

Kata kunci: Fungsi Arus, Persamaan Adveksi-difusi, Skema DuFort-Frankel.



## **ABSTRACT**

*This research discusses the distribution of pollutants in the lake with the inlet and outlet numerically to approximate the model solution used. Numerical modeling is carried out because it is quite practical and has possible accuracy in the case of physically identified pollutant distribution. This research aims to obtain a model of the distribution of pollutants in lakes with inlet and outlet. Model is made and solved by using DuFort-Frankel with analysis. This research produces a flow equation or stream function model in a lake which is stated in 2D Laplace equation and pollutant distribution model using 2D advection-diffusion equation. The DuFort-Frankel numerical modeling was carried out in two different cases of pollutants injection namely instantaneous and continuous injection on the lake, which resulted that pollutants spreading in all directions and tend to flow toward the outlet of the lake. The convergence analysis of the model is carried out using equivalency Lax-Richtmyer theorem initiated by stability analysis which results the DuFort-Frankel scheme is stable for  $|\xi|^2 \leq 1$  and then consistency analysis which results that the grid parameter for numerical scheme is required  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  and  $\Delta t \ll \Delta x$ ,  $\Delta t \ll \Delta y$  in order to produce convergent computations.*

*Keywords: Stream Function, Advection-diffusion Equation, DuFort-Frankel Scheme.*



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS .....	vii
ABSTRAK .....	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
BAB 1 PENDAHULUAN .....	xvi
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA .....	4
2.1 Polutan .....	4
2.2 Persamaan Aliran .....	4
2.3 Persamaan Adveksi-difusi .....	8
2.4 Deret Taylor.....	10
2.5 Metode Beda Hingga .....	11
2.5.1 Formulasi Eksplisit dan Implisit.....	13
2.6 Kestabilan .....	16
2.7 Konsistensi.....	17
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.....	19
3.1 Desain Model .....	19
3.1.1 Desain Aliran .....	19
3.1.2 Desain Model Penyebaran Polutan .....	22
3.1.3 Alur Kerja .....	25



BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	26
4.1 Diskritisasi Model.....	26
4.1.1 Diskritisasi Persamaan Aliran.....	27
4.1.2 Diskritisasi Persamaan Adveksi-difusi 2D Skema FTCS.....	28
4.1.3 Diskritisasi Persamaan Adveksi-difusi 2D Skema DuFort-Frankel .....	28
4.2 Analisis Kestabilan .....	29
4.3 Analisis Konsistensi.....	32
4.4 Simulasi dan Interpretasi.....	37
4.4.1 Kasus 1.....	37
4.4.2 Kasus 2.....	49
BAB 5 PENUTUP .....	57
5.1 Kesimpulan .....	57
5.2 Saran .....	58
DAFTAR PUSTAKA .....	59
LAMPIRAN.....	61



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Pendekatan numeris fungsi nilai batas .....	12
Gambar 2. Titik grid untuk skema eksplisit FTCS .....	14
Gambar 3. Titik grid untuk skema semi-implisit .....	14
Gambar 4. Titik grid untuk skema implisit BTCS .....	15
Gambar 5. Titik grid untuk skema implisit Crank-nicolson .....	15
Gambar 6. Desain domain aliran pada danau .....	19
Gambar 7. Diskritisasi persamaan beda di titik pintu aliran terbuka .....	21
Gambar 8. Desain model polutan pada danau .....	24
Gambar 9. Titik grid skema beda tengah .....	27
Gambar 10. Titik grid skema FTCS .....	28
Gambar 11. Titik grid skema DuFort-Frankel .....	29
Gambar 12. Medan vektor kecepatan aliran .....	38
Gambar 13-a. Penyebaran polutan untuk $t=1$ (langkah waktu 20).....	39
Gambar 13-b. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 60) .....	39
Gambar 13-c. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 100).....	39
Gambar 14. Medan vektor kecepatan aliran untuk 2 <i>inlet</i> di bawah dan atas domain dan 2 <i>outlet</i> di kanan dan kiri domain .....	42
Gambar 15-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	43
Gambar 15-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	43
Gambar 15-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	43
Gambar 15-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	44
Gambar 15-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000).....	44
Gambar 16. Medan vektor kecepatan untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian atas domain .....	45
Gambar 17-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	45
Gambar 17-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	45
Gambar 17-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	46
Gambar 17-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	46
Gambar 17-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000).....	46



Gambar 18. Medan vektor kecepatan aliran untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian kanan domain .....	47
Gambar 19-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	47
Gambar 19-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	47
Gambar 19-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	48
Gambar 19-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	48
Gambar 19-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000).....	48
Gambar 20. Medan vektor kecepatan aliran untuk 2 <i>inlet</i> di bawah dan atas domain dan 2 <i>outlet</i> di kanan dan kiri domain .....	50
Gambar 21-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	50
Gambar 21-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	50
Gambar 21-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	51
Gambar 21-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	51
Gambar 21-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000).....	51
Gambar 22. Medan vektor kecepatan untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian atas domain .....	52
Gambar 23-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	52
Gambar 23-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	52
Gambar 23-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	53
Gambar 23-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	53
Gambar 23-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000) .....	53
Gambar 24. Medan vektor kecepatan aliran untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian kanan domain .....	54
Gambar 25-a. Penyebaran polutan untuk $t=3$ (langkah waktu 120).....	54
Gambar 25-b. Penyebaran polutan untuk $t=5$ (langkah waktu 200) .....	54
Gambar 25-c. Penyebaran polutan untuk $t=15$ (langkah waktu 600).....	55
Gambar 25-d. Penyebaran polutan untuk $t=60$ (langkah waktu 2400) .....	55
Gambar 25-e. Penyebaran polutan untuk $t=300$ (langkah waktu 12000).....	55



## DAFTAR TABEL

Tabel 1. Syarat batas untuk 2 <i>inlet</i> 2 <i>outlet</i> .....	40
Tabel 2. Syarat batas untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian atas domain .....	41
Tabel 3. Syarat batas untuk untuk <i>inlet</i> di bagian bawah domain dan <i>outlet</i> di bagian kanan domain .....	41



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan sesaat pada danau dengan 2 <i>inlet</i> dan 2 <i>outlet</i> .....	62
Lampiran 2. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan sesaat pada danau dengan <i>inlet</i> di bagian bawah dan <i>outlet</i> di bagian atas domain .....	69
Lampiran 3. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan sesaat pada danau dengan <i>inlet</i> di bagian bawah dan <i>outlet</i> di bagian kanan domain .....	76
Lampiran 4. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan terus menerus pada danau dengan 2 <i>inlet</i> dan 2 <i>outlet</i> .....	83
Lampiran 5. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan terus menerus pada danau dengan <i>inlet</i> di bagian bawah dan <i>outlet</i> di bagian atas domain .....	90
Lampiran 6. Program MATLAB penyebaran polutan yang diinjeksikan terus menerus pada danau dengan <i>inlet</i> di bagian bawah dan <i>outlet</i> di bagian kanan domain .....	97



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika dengan fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri beserta derivatifnya. Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua golongan berdasarkan jumlah variabel bebasnya, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa hanya melibatkan satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial melibatkan lebih dari satu variabel bebas dan juga melibatkan turunan parsial.

Persamaan diferensial parsial (PDP) membentuk dasar dari sangat banyak model matematika dari fenomena fisik, kimia dan biologi. Untuk menyelidiki prediksi model PDP dari fenomena seperti itu, seringkali perlu untuk memperkirakan solusinya secara numerik, biasanya dalam kombinasi dengan analisis kasus khusus sederhana (Morton & Mayers, 2005). Dalam penerapannya, PDP telah banyak mengambil peran dalam berbagai pemodelan seperti persoalan peramalan, pemrosesan gambar, mekanika fluida, dan lain sebagainya. Salah satu pemodelan yang dapat dilakukan adalah persoalan mekanika fluida pada transport massa yang banyak memiliki karakteristik serta asumsi yang dapat dipertimbangkan seperti kasus penyebaran polutan.

Polutan merupakan bahan yang mengakibatkan polusi. Proses transport polutan dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial yaitu persamaan adveksi-difusi (Hutomo, 2019). Persamaan adveksi-difusi merupakan persamaan parsial orde dua pada kelas parabolik. Model adveksi-difusi dapat digunakan untuk menentukan besar transport massa polutan dalam suatu perairan dengan parameter parameter yang sesuai serta dapat dipertimbangkan.

Penyebaran polutan di suatu perairan merupakan permasalahan yang sering di kalangan masyarakat. Sorotan ini mengemuka karena besarnya nilai polusi suatu polutan yang terlarut. Berdasarkan kejadian ini diperlukan analisis khusus penyebaran polutan pada suatu badan air baik itu melalui



pengukuran langsung maupun menggunakan pemodelan dengan perangkat komputer. Dari sisi ekonomis dan kepraktisan, penggunaan pemodelan komputer dapat dijadikan skala prioritas mengingat akurasi yang didapat memungkinkan keadaan fisis di alam dapat dihipotesiskan dengan baik (Sampera, 2016).

Penelitian mengenai sebaran polutan pada suatu perairan telah banyak dilakukan dengan asumsi asumsi yang sesuai. Seperti pada Sampera (2016) dalam publikasinya untuk kasus pencemaran sungai Kapuas dengan kondisi pencemaran sesaat dan secara kontinu berhasil mengvisualisasikan model penyebaran polutan. Hutomo (2019) juga dalam publikasinya mengambil kasus pada danau Unhas dengan menggunakan metode DuFort-Frankel untuk koefisien adveksi merupakan suatu variabel dan memodelkan penyebaran polutannya.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul:

### **“Pemodelan Numerik DuFort-Frankel Penyebaran Polutan pada Danau dengan Aliran Masuk dan Keluar”.**

#### **1.2 Rumusan Masalah**

Pada penelitian ini penulis merumuskan tiga permasalahan yaitu:

1. Bagaimana membentuk model numerik aliran arus pada danau dengan aliran masuk dan keluar?
2. Bagaimana pemodelan numerik DuFort-Frankel penyebaran polutan pada danau danau dengan aliran masuk dan keluar?
3. Bagaimana kekonvergenan model numerik aliran arus dan model numerik DuFort-Frankel?

#### **1.3 Batasan Masalah**

Penelitian ini penulis batasi permasalahan pada pemodelan dengan domain persegi serta pada persamaan aliran dan persamaan adveksi-difusi 2D dengan nilai

ditentukan serta menggunakan metode beda hingga.



#### **1.4 Tujuan Penelitian**

Pada penelitian ini bertujuan untuk:

1. Memperoleh model aliran pada danau danau dengan aliran masuk dan keluar.
2. Memperoleh model penyebaran polutan pada danau danau dengan aliran masuk dan keluar.
3. Mengetahui kekonvergenan model numerik aliran arus dan model numerik DuFort-Frankel.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Dalam penelitian ini diharapkan memberikan manfaat:

1. Dapat menambah pemahaman dan wawasan mengenai model aliran dan model penyebaran polutan serta lebih mendukung teori-teori yang telah ada dan berkaitan dengan masalah yang diteliti.
2. Penjelasan metode beda hingga DuFort-Frankel serta analisisnya.
3. Bagi pihak Universitas hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan, khususnya di Departemen Matematika serta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.



## BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Polutan

Transportasi aliran merupakan bagian dari dinamika fluida yang mengkaji perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak dan interaksinya dengan benda padat (Alman, 2013). Proses transport massa secara umum sulit diidentifikasi seperti proses penyebaran polutan di suatu perairan.

Polutan di perairan dapat berupa tumpahan minyak, limbah masyarakat, maupun limbah pabrik yang dibuang langsung ke perairan. Polutan yang masuk dalam perairan dapat mengalami perubahan. Proses perubahan tersebut adalah lapisan (*slick formation*), menyebar, *dissolution*, menguap (*evaporation*), polimerisasi (*polymerization*), emulsifikasi (*emulsification*), fotooksida (*photooxidation*), biodegradasi mikroba (*micronial degradation*), bentukan gumpalan ter (*tur lump formation*), dan dicerna oleh plankton (Mukhtasor, 2007).

Penyebaran polutan di suatu perairan sangat bergantung pada angin dan arus yang timbul di perairan tersebut. Berbagai macam akibat dari penyebaran polutan sulit dihindari seperti pencemaran lingkungan perairan sehingga perlu dilakukan antisipasi serta penanggulangan akibat polutan tersebut (Krisdiantoro, 2012).

### 2.2 Persamaan Aliran

Suatu aliran secara umum dapat diwakilkan oleh arus. Misalnya elemen fluida yang sangat kecil dalam aliran, dengan volume tertentu yang sangat kecil. Namun, cukup besar untuk mengandung sejumlah molekul sehingga dapat dilihat sebagai media yang kontinu. Elemen fluida dapat secara konstan di ruang dengan fluida bergerak melaluinya. Atau, mungkin bergerak di sepanjang garis aliran dengan kecepatan tertentu yang sama dengan kecepatan aliran di setiap titik. Prinsip-prinsip fisik dasar dapat diterapkan hanya pada elemen fluida itu sendiri (Anderson, 2010).

beberapa definisi fisik dari aliran adalah tak termampatkan (*incompressible*), atau nilai massa jenis  $\rho$  konstan. Karena massa jenis adalah



massa per satuan volume, maka elemen fluida dari massa tetap yang bergerak melalui medan aliran yang tidak dapat termampatkan juga harus memiliki volume yang tetap dan konstan. Elemen fluida tidak melakukan gerak rotasi sehingga pergerakan fluida selalu mengikuti bentuk wadahnya dan bergerak secara stabil selama tidak ada pengaruh lain yang mempengaruhinya dalam bergerak. Ini menyiratkan bahwa elemen fluida tidak memiliki kecepatan sudut sehingga pergerakan fluida yang melalui ruang adalah gerak translasi murni.

Dengan asumsi tersebut, pertama persamaan kontinuitas dapat diterapkan yang ditunjukkan oleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.1)$$

dengan  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  adalah operator Laplace dan  $V = (u, v, w)$  adalah vektor kecepatan dalam ruang tiga dimensi, serta waktu  $t \geq 0$  sehingga persamaan (2.1) di atas merupakan persamaan untuk fluida yang tak stabil (*unsteady*). Secara umum kasus fluida selalu dalam kondisi yang stabil (*steady state*). Kondisi *steady state* adalah kondisi nilai massa jenis  $\rho > 0$  dan selalu konstan terhadap waktu maupun ruang

$$\rho(x, y, z, t) = \rho, \quad x, y, z, t \geq 0 \quad (2.2)$$

sehingga  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ , serta dapat dibuat Persamaan (2.1) menjadi

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

dalam ruang dua dimensi, Persamaan (2.5) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Aliran fluida dapat dianggap sebagai aliran suatu molekul yang melewati titik yang. Pada ruang dua dimensi berlaku

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy} \quad (2.7)$$



Persamaan (2.7) menyatakan perbandingan kecepatan arah  $x$  yaitu  $u$  dengan kecepatan arah  $y$  yaitu  $v$  sama dengan elemen arah arus yaitu  $dx$  mewakili elemen arah  $x$  dan  $dy$  elemen arah  $y$ . Nilai perbandingan tersebut haruslah konstan dan bergantung pada posisi dalam bidang. Misalnya  $u$  dan  $v$  adalah fungsi terhadap  $x$  dan  $y$  maka Persamaan (2.7) dapat dibentuk menjadi fungsi aliran rata-rata  $\bar{\psi}$  dengan  $s$  adalah konstan

$$\bar{\psi}(x, y) = s \quad (2.8)$$

karena fluida dianggap sebagai molekul yang sangat kecil sehingga jarak antar molekul sangatlah dekat dengan jarak normal antar molekul adalah  $\Delta n$  dan kecepatan aliran  $V$ , maka massa yang melalui suatu wadah per satuan kedalaman adalah

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\psi} &\equiv \rho V \Delta n \\ \frac{\Delta\bar{\psi}}{\Delta n} &= \rho V \end{aligned} \quad (2.9)$$

untuk  $\Delta n \rightarrow 0$  maka

$$\rho V = \frac{\Delta\bar{\psi}}{\Delta n} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n} \quad (2.10)$$

karena hukum kekekalan massa, aliran massa melalui  $\Delta n$  (per unit kedalaman) sama dengan jumlah aliran massa melalui sumbu  $y$  positif dan sumbu  $x$  negatif (per unit kedalaman) sehingga Persamaan (2.9) menjadi

$$\Delta\bar{\psi} = \rho (u, v) \cdot (dy, -dx) \quad (2.11a)$$

$$d\bar{\psi} = \rho u(dy) + \rho v(-dx) \quad (2.11b)$$

telah diketahui bahwa  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x, y)$  dengan aturan rantai derivatif fungsinya dapat ditentukan

$$d\bar{\psi} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} dy \quad (2.12)$$

Persamaan (2.11b) dan (2.12) dapat dibuat menjadi

$$\begin{aligned} \rho u &= \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} \\ u &= \frac{\partial\left(\frac{\bar{\psi}}{\rho}\right)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.13)$$



$$\rho v = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial \left(\frac{\bar{\psi}}{\rho}\right)}{\partial x} \quad (2.14)$$

untuk aliran yang tak termampatkan (*incompressible*) nilai massa jenis tidak lah berpengaruh terhadap komponen kecepatan  $u$  dan  $v$  sedemikian sehingga Persamaan (2.13) dan (2.14) dapat dibentuk menjadi

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.15a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.15b)$$

untuk  $\psi$  adalah fungsi aliran dengan satuan  $m^2/s$  pada ruang dua dimensi.

Dalam suatu pergerakan fluida tidak berotasi atau tidak bergerak melingkar dengan kecepatan sudut yang bergantung pada pusat rotasi akan mengalir mengikuti bentuk wadahnya. Suatu parameter atau kuantitas baru untuk fluida yang berotasi dalam wadahnya disebut vortisitas. Vortisitas  $\Omega$  adalah bidang pseudovektor didefinisikan sebagai bentuk rotasi bidang kecepatan yang menggambarkan gerakan kontinum. Besarnya nilai vortisitas  $\Omega$  adalah dua kali besar rata-rata kecepatan sudut fluida  $\bar{\omega}$

$$\Omega = 2\bar{\omega} \quad (2.16)$$

dalam bidang kecepatan, *Curl* dari kecepatan sama dengan vortisitas sehingga

$$\Omega = \nabla \times V \quad (2.17)$$

Dari Persamaan (2.17) di atas penting untuk diketahui dua hal yaitu:

1. Aliran dikatakan berotasi (*rotational*) atau melingkar terhadap pusat rotasi maka nilai vortisitas di setiap titik aliran tidak sama dengan nol.

$$\Omega = \nabla \times V \neq 0 \quad (2.18)$$

2. Aliran dikatakan tidak berotasi (*irrotational*) atau bergerak tidak melingkar terhadap pusat rotasi maka nilai vortisitas di setiap titik aliran sama dengan nol.

$$\Omega = \nabla \times V = 0 \quad (2.19)$$

Aliran dalam ruang dua dimensi, maka Persamaan (2.17) menjadi



$$\begin{aligned}\Omega &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \times (u, v) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Pada aliran yang tak berotasi atau *irrotational*, nilai vortisitas  $\Omega$  sama dengan nol, sehingga Persamaan (2.20) menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\tag{2.21}$$

dengan mensubstitusi Persamaan (2.15a) dan (2.15b) ke Persamaan (2.21) maka Persamaan (2.21) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

atau dapat dibuat Persamaan (2.22) memenuhi persamaan Laplace dua dimensi (2D) yang berbentuk

$$\nabla^2 \psi = 0$$

sehingga dapat dikatakan bahwa fungsi aliran pada ruang dua dimensi juga memenuhi persamaan Laplace 2D (Anderson, 2010).

Persamaan Laplace merupakan anggota dari kelas persamaan diferensial parsial eliptik. Persamaan ini dapat menentukan nilai untuk potensial (suhu, tegangan, konsentrasi, atau kuantitas potensial lainnya) pada titik-titik dalam wilayah segi empat menurut pada kondisi yang ditentukan pada batas-batasnya (Gerald & Wheatley, 1970).

### 2.3 Persamaan Adveksi-difusi

Model reaksi adveksi-difusi standar berkaitan dengan evolusi waktu partikel kimia atau biologis dalam media yang mengalir seperti air atau udara. Persamaan matematika yang menggambarkan evolusi ini adalah persamaan diferensial parsial yang dapat diturunkan dari kesetimbangan massa. Misalnya konsentrasi  $C(x, t)$

partikel tertentu, dengan variabel ruang  $x \in \mathbb{R}$  dan waktu  $t \geq 0$ . Misalkan  $\epsilon$  merupakan bilangan yang kecil, dan misalkan konsentrasi rata-rata  $\bar{C}(x, t)$  dalam domain  $\left[ x - \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h \right]$ ,



$$\bar{C}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} C(s, t) ds = C(x, t) + \frac{1}{24} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) + \dots \quad (2.23)$$

Jika suatu partikel dibawa bersama oleh media yang mengalir dengan kecepatan  $u(x, t)$ , maka hukum konservasi massa menyiratkan bahwa perubahan  $\bar{C}(x, t)$  per unit waktu adalah jumlah dari kesetimbangan aliran yang masuk dan keluar melewati batas domain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{C}(x, t) = \frac{1}{h} & \left[ u \left( x - \frac{1}{2} h, t \right) C \left( x - \frac{1}{2} h, t \right) \right. \\ & \left. - u \left( x + \frac{1}{2} h, t \right) C \left( x + \frac{1}{2} h, t \right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

dengan  $u(x \pm \frac{1}{2}h, t) C(x \pm \frac{1}{2}h, t)$  adalah fluks massa yang melewati batas kiri dan kanan domain. Untuk  $h \rightarrow 0$  Persamaan (2.24) dapat dibuat menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)C(x, t)) = 0 \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) disebut persamaan adveksi (atau persamaan konveksi). Dengan cara yang sama efek difusi dapat dipertimbangkan untuk perubahan  $\bar{C}(x, t)$  disebabkan oleh gradien dalam larutan dan fluks melintasi batas domain yaitu  $-D(x \pm \frac{1}{2}h, t) C(x \pm \frac{1}{2}h, t)$  dengan  $D(x, t)$  adalah koefisien difusi. Sehingga persamaan difusi dapat sesuai dengan

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x, t) \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) \right) \quad (2.26)$$

Mungkin juga ada perubahan lokal dalam  $C(x, t)$  karena sumber, tenggelam, dan reaksi kimia, yang diberikan oleh persamaan

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = f(x, t, u(x, t)) \quad (2.27)$$

Perubahan keseluruhan konsentrasi dijelaskan dengan menggabungkan ketiga efek ini, yang mengarah ke suatu persamaan reaksi adveksi-difusi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)C(x, t)) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x, t) \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) \right) + f(x, t, u(x, t)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

orfer & Vewer, 2003).



## 2.4 Deret Taylor

Berbagai metode numerik yang digunakan untuk menurunkan persamaan solusi pendekatan biasanya didasarkan oleh persamaan polinomial. Fungsi polinomial adalah fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas dengan menggunakan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian (Pucell & Varbeg, 1987). Fungsi polinomial juga fungsi yang mudah dipahami bentuknya karena jika perhitungan dilakukan dengan nilai eksak maka menghasilkan nilai atau solusi eksak dan jika perhitungan dilakukan dengan nilai hampiran maka akan menghasilkan solusi hampiran atau solusi numerik.

Selisih antara solusi eksak dan numerik disebut galat. Galat perlu diperhitungkan untuk menguji seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksak sehingga menjadi parameter seberapa baiknya metode yang digunakan. Dalam melakukan perhitungan hampiran pada fungsi polinomial, di sini akan digunakan deret Taylor.

Misalkan  $f$  adalah fungsi dengan derivatif dari semua orde dalam suatu interval  $(x_0 - r, x_0 + r)$ . Deret Taylor

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (2.29)$$

pada interval  $(x_0 - r, x_0 + r)$  jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (2.30)$$

untuk  $R_n(x)$  adalah sisa atau galat dalam deret Taylor,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (2.31)$$

adalah beberapa poin dalam interval  $(x_0 - r, x_0 + r)$  (Pucell & Varbeg,



## 2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga hadir untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, dengan aplikasi khusus pada persamaan yang memodelkan perpindahan panas dan massa dalam suatu cairan (Noye, 1983). Mulai dari pembentukan model persamaan differensial parsial hingga diskritisasi persamaan beda melalui deret Taylor, berbagai bentuk persoalan PDP dapat disimulasikan baik itu yang berbentuk eksplisit maupun implisit.

Dalam metode beda hingga, persamaan diferensial parsial harus didekati dengan persamaan bentuk beda berhingga dimulai dengan pendekatan persamaan differensial biasa. Mirip dengan apa yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah nilai awal, sumbu variabel independen dibagi lagi menjadi interval kecil dengan lebar konstan  $h$ . Jika jumlah interval dalam kisaran  $x$  yang diberikan adalah  $n + 1$ , dan jika titik akhir interval diberi label sesuai dengan notasi indeks yang ditunjukkan pada Gambar (1), dimulai dengan  $x_0$  di ujung kiri, maka hubungan berikut berlaku:

$$x = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n + 1 \quad (2.32)$$

untuk  $x_0 = x_{min}$  dan  $x_n + 1 = x_{max}$ . Nilai fungsi  $f$  yang dievaluasi pada titik akhir ini juga disimbolkan dalam notasi indeks sesuai dengan definisi  $f_i \equiv f(x_i)$ . Diharapkan dapat memperkirakan turunan  $f$  pada titik arbitrer  $x_i$  dengan ekspresi yang mengandung nilai  $f$  yang dievaluasi sepanjang  $x_i$ .

Misalnya  $x_j$  merupakan titik yang berdekatan dengan  $j = i + m$ , untuk  $m$  adalah bilangan bulat positif atau negatif. Untuk nilai  $h$  yang kecil, fungsi yang dievaluasi pada  $x_i$  dapat diperluas dalam deret Taylor tentang  $x_i$ :

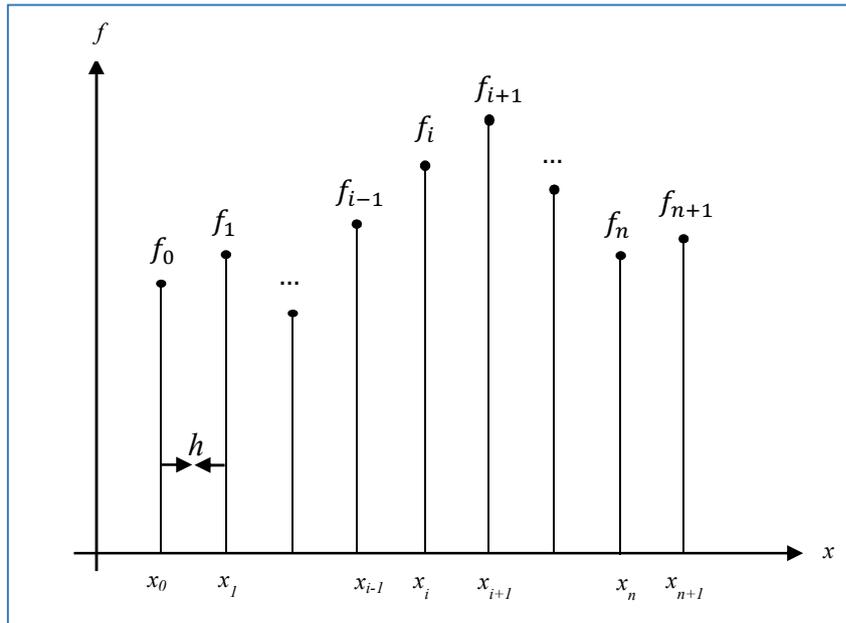
$$\begin{aligned} f_i &\equiv f(x_{i+mh}) \\ &= f_i + mh f'_i + \frac{(mh)^2}{2!} f''_i + \frac{(mh)^3}{3!} f'''_i + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

dengan menetapkan nilai  $-1$  dan  $+1$  ke  $m$  di Persamaan (2.33), diperoleh dua ekspresi untuk  $f(x)$  pada titik tetangga terdekat  $x_i$ .

$$f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{1}{2} h^2 f''_i - \frac{1}{6} h^3 f'''_i + \dots \quad (2.34a)$$

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{1}{2} h^2 f''_i + \frac{1}{6} h^3 f'''_i + \dots \quad (2.34b)$$





**Gambar 1. Pendekatan numeris fungsi nilai batas**

Ada banyak cara melakukan penghitungan turunan tertentu. Misalnya,  $f'_i$  dapat dipecahkan mulai dari Persamaan (2.34b) untuk diberikan

$$f'_i = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i + \dots \quad (2.35)$$

dengan kesalahan pemotongan  $O(hf''_i)$ , kemudian didekati dengan

$$f'_i = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) \quad (2.36)$$

ini merupakan persamaan beda maju untuk turunan orde pertama, dinamakan demikian karena melibatkan nilai-nilai fungsi pada  $x_i$  dan pada titik di depannya. Di sisi lain, jika menggunakan Persamaan (2.34b), persamaan beda-mundur dari persamaan sebelumnya adalah

$$f'_i = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1}) \quad (2.37)$$

diperoleh kesalahan pemotongan yang urutan besarnya sama dengan rumus sebelumnya, kecuali untuk perbedaan dalam tanda. Dengan demikian, pendekatan pada Persamaan (2.36) dan (2.37) akan memberikan akurasi yang sama dalam komputasi numerik. Pendekatan yang lebih akurat, memiliki kesalahan  $O(h^2f'''_i)$ , diperoleh dengan mengurangi Persamaan (2.34a) dengan (2.34b) sehingga

bentuk

$$f'_i = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (2.38)$$



Persamaan (2.38) disebut persamaan beda pusat untuk  $f'$ . Untuk melakukan pendekatan turunan orde kedua dari  $f$ , persamaan beda pusat dari  $f$  adalah dengan menjumlahkan Persamaan (2.34a) dan (2.34b)

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (2.39)$$

### 2.5.1 Formulasi Eksplisit dan Implisit

Berbagai formulasi dari metode iteratif dapat dibagi menjadi dua kategori. Jika suatu formulasi menghasilkan hanya satu yang tidak diketahui, maka itu disebut metode iteratif titik. Formulasi ini mirip dengan metode eksplisit persamaan parabola. Di sisi lain, jika formulasi melibatkan lebih dari satu yang tidak diketahui (biasanya tiga tidak diketahui, menghasilkan koefisien matriks tridiagonal), itu diklasifikasikan sebagai metode garis iteratif, yang mirip dengan formulasi implisit dari persamaan parabola (Hoffmann & Chiang, 1995).

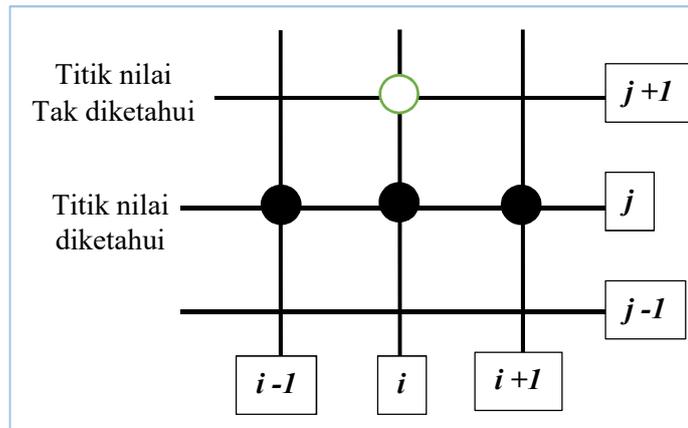
Formulasi eksplisit pada metode beda hingga relatif mudah digunakan jika dibandingkan dengan formulasi implisit karena pada formulasi eksplisit hanya perlu mengevaluasi satu titik dalam satu persamaan bedanya sehingga iterasi dilakukan secara langsung. Sedikit berbeda dengan formulasi implisit yang persamaan beda terdapat variabel yang lebih dari satu tidak dapat diketahui secara langsung. Dalam suatu persamaan diferensial parsial ada persamaan yang perlu dilakukan evaluasi menggunakan formulasi implisit.

Beberapa metode dalam formulasi eksplisit dapat diterapkan seperti *Forward in Time Forward in Space* (FTCS), *Central in Time Central in Space* (CTCS) Saul-yev, Richardson, dan DuFort-Frankel. Sedikit berbeda untuk DuFort-Frankel metode ini biasa disebut formulasi semi-implisit karena dalam evaluasi pertama dibutuhkan dua garis grid awal untuk mengevaluasi garis grid selanjutnya.

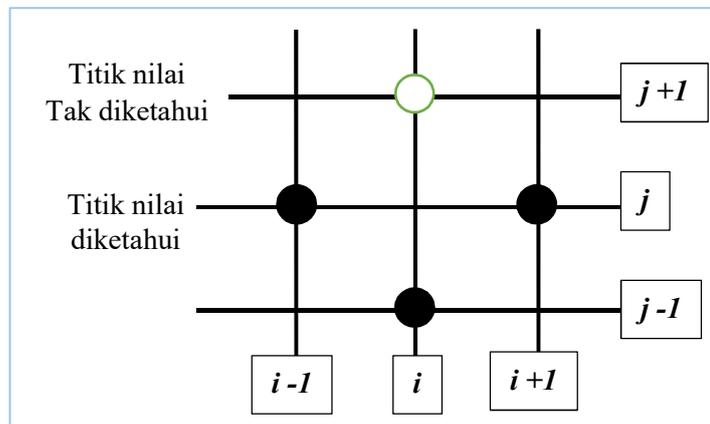
Salah satu perubahan dari formulasi DuFort-Frankel adalah mengganti suku tengah dari persamaan beda dengan rata-rata dari dua garis grid waktu. Hal ini mengubah skema CTCS dengan nilai rata-rata grid waktu (Hutomo, 2019).



Beberapa diskritisasi deret Taylor dari formulasi eksplisit dapat ditunjukkan pada berikut



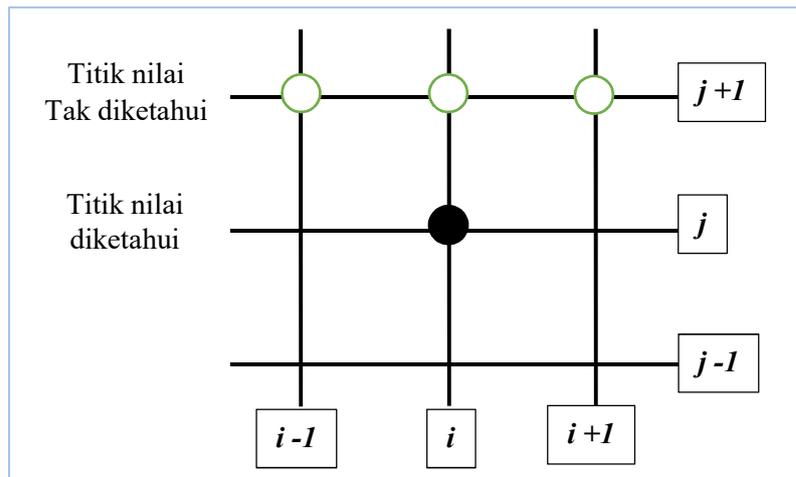
**Gambar 2. Titik grid untuk skema eksplisit FTCS**



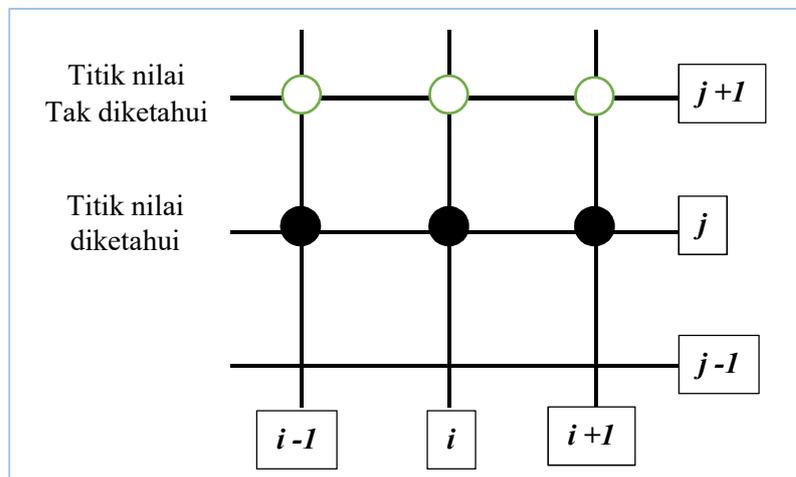
**Gambar 3. Titik grid untuk skema DuFort-Frankel**

Metode yang biasa digunakan dalam formulasi implisit sebenarnya hanya memodifikasi dari pendekatan deret Taylor nya. Metode dalam formulasi ini seperti metode *Backward in Time and Central in Space* (BTCS) dan Crank-nicolson. Diskritisasi formulasi implisit dapat ditunjukkan pada gambar berikut





**Gambar 4. Titik grid untuk skema implisit BTCS**



**Gambar 5. Titik grid untuk skema implisit Crank-nicolson**

Dalam evaluasi nilai pada tiap grid untuk formulasi implisit, terbentuk suatu sistem persamaan linier yang dapat dibentuk ke dalam suatu matriks dengan ordo  $n \times n$ . Kemudian diperlukan metode dalam pemecahan persamaan linier tersebut seperti Metode Invers matriks dan metode numerik iteratif. Banyak metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan implisit. Salah satu metode numerik yang menggunakan skema berulang adalah metode Gauss-Seidel. Metode Gauss-Seidel merupakan metode iteratif dalam menyelesaikan persamaan linier multivariabel (Biringen, 2011).

Dalam metode Gauss-Seidel langkah pertama adalah mengatur ulang persamaan dengan menyelesaikan setiap persamaan untuk salah satu



variabel dalam hal yang lain. Kemudian menghitung lagi untuk meningkatkan masing-masing nilai variabel berikutnya, selalu menggunakan pendekatan terbaru untuk nilai-nilai variabel lain. Formulasi metode iterative ini dapat ditunjukkan seperti berikut

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -1x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= 1 - \frac{1}{2}x_2^n - \frac{1}{2}x_3^n \\ x_2^{n+1} &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1^{n+1} + \frac{1}{3}x_3^n \\ x_3^{n+1} &= -2x_1^{n+1} - 2x_2^{n+1} \end{aligned}$$

dimulai dengan  $x^1 = (0,0,0)^T$ . Sehingga iterasi kedua adalah

$$\begin{aligned} x_1^2 &= -1 - \frac{1}{2}x_2^1 - \frac{1}{2}x_3^1 \\ x_2^2 &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_3^1 \\ x_3^2 &= -2x_1^2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

$x^2 = (1, -0.067, -0.067)^T$ . Pada iterasi ketiga

$$\begin{aligned} x_1^3 &= -1 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ x_2^3 &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}x_3^2 \\ x_3^3 &= -2x_1^3 - 2x_2^3 \end{aligned}$$

$x^3 = (1.667, -1.111, -1.111)^T$ . Kemudian dilakukan hingga nilai  $x$  konvergen di satu titik.

## 2.6 Kestabilan

Suatu persamaan differensial parsial dapat dikatakan stabil dan tak stabil.

konsep kestabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Kestabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi



numerik kurang mendekati dari solusi eksak. Terminologi stabilitas menunjukkan karakteristik persamaan differensial tertentu jika  $\Delta t \rightarrow 0$  serta berhubungan dengan amplifikasi solusi selama proses komutasi. Jika amplifikasi solusi semakin besar maka proses komputasi akan divergen dan tidak memperoleh hasil atau menunjukkan bahwa stabilitas solusi sangatlah rendah (Zaureder, 2006).

Dasar dalam analisis stabilitas untuk persamaan diferensial parsial linier (yaitu, yang turunan dan istilahnya adalah urutan pertama) terdiri dari penulisan solusi persamaan sebagai deret Fourier yang kompleks dan menganalisis komponen generik dari solusi (Gilberto, 2004). Salah satu metode dalam penggunaan pendekatan deret fourier dalam menganalisis kestabilan adalah metode von Neumann. Metode ini selanjutnya diterapkan pada persamaan beda hingga dengan mensubstitusi elemen fourier  $U_i^n = \xi^n e^{I\theta i}$  untuk  $i$  menunjukkan titik grid pada ruang,  $n$  pada grid waktu,  $\xi$  adalah bilangan gelombang (*Wave Number*),  $I = \sqrt{-1}$ , dan  $\theta$  adalah sudut fase gelombang dengan interval  $[0, 2\pi]$ . Kemudian syarat agar skema dikatakan stabil adalah nilai  $|\xi| \leq 1$ .

Untuk kasus skema beda hingga yang terdapat koefisien nonlinier, uji kestabilan von Neumann tetap dapat dilakukan setelah dilakukan linierisasi pada skema numerik tersebut dengan mengubahnya ke dalam konstanta dan memilih nilai maksimum dari suku tersebut (Alman, 2013).

## 2.7 Konsistensi

Persamaan beda hingga dikatakan konsisten dengan persamaan diferensial jika pada limit jarak grid mendekati nol dan persamaan selisih menjadi sama dengan persamaan differensial parsial pada setiap titik dalam domain solusi (Noye, 1983). Dalam Strikwerda (2004), konsistensi menunjukkan bahwa solusi dari persamaan diferensial parsial untuk kondisi *smooth* adalah solusi pendekatan dari skema beda hingga. Sama halnya dengan konvergensi yang berarti bahwa solusi dari skema beda hingga mendekati solusi dari persamaan diferensial parsial. Pentingnya konsep konsistensi dan stabilitas terlihat pada teori kesetaraan Lax-

ur, yang merupakan teori dasar dalam skema beda hingga untuk masalah



Teori kesetaraan Lax-Richtmyer menyebutkan bahwa skema beda hingga yang konsisten untuk persamaan diferensial parsial yang masalah nilai awalnya terpenuhi dengan baik adalah konvergen jika dan hanya jika stabil. Teori kesetaraan Lax-Richtmyer adalah teorema yang sangat berguna, karena memberikan karakterisasi sederhana dari skema konvergen (Strikwerda, 2004). Pada Hundsdorfer & Vewer (2003), teknik untuk membangun konvergensi dapat digunakan melalui hukum umum berikut

$$\textit{Stabil \& Konsisten} \Rightarrow \textit{Konvergen}$$

