BEBERAPA SIFAT NILAI EIGEN DAN INVERS

MATRIKS TOEPLITZ

SKRIPSI

SUKMAWATI
H111 16 010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

BEBERAPA SIFAT NILAI EIGEN DAN INVERS

MATRIKS TOEPLITZ

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SUKMAWATI

H111 16 010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

BEBERAPA SIFAT NILAI EIGEN DAN INVERS MATRIKS TOEPLITZ

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 23 Maret 2020

<u>SUKMAWATI</u>
H11116010

BEBERAPA SIFAT NILAI EIGEN DAN INVERS

MATRIKS TOEPLITZ

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
<u>Dr. Budi Nurwahyu, M.S.</u>	**<u>Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.</u>**
NIP. 19580802 198403 1 002	**NIP. 19680601 199512 2 001**

Pada Tanggal: 23 Maret 2020

LEMBAR PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : SUKMAWATI

NIM : H11116010

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : **Beberapa Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz**

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : **Dr. Budi Nurwahyu, M.S.** (……………………)
2. Sekretaris : **Jusmawati Massalesse, S.Si,. M.Si.** (……………………)
3. Anggota : **Prof. Dr. Hasmawati., M.Si.** (……………………)
4. Anggota : **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** (……………………)

etapkan : Makassar

ggal : 23 Maret 2020

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbi'alamin. Puji syukur penulis haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi dengan judul *"**Beberapa Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz**"* dapat terselesaikan dengan baik. Salawat dan taslim semoga tetap tercurah kepada Rasulullah SAW yang menjadi suri tauladan bagi umat Islam dalam menjalani hidup yang sesungguhnya.

Penulisan skrispsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan terima kasih kepada :

1. Ayahanda **Syarifuddin** dan **Ibunda Rahmatiah** tercinta yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa dan materi kepada penulis dalam menuntut ilmu.
2. **Dr. Budi Nurwahyu, M.S.** dan **Jusmawati Massalesse, S.Si,. M.Si.** yang dengan sabar meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
3. **Prof. Dr. Hasmawati., M.Si.** dan **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku penguji, terimakasih atas saran dan kritikannya demi perbaikan skripsi penulis.
4. Seluruh dosen di Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah mendidik, mengajarkan, membimbing, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
5. Adik-adikku **Salmawati dan Nur Aisyah** serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, dan kasih sayang tanpa batas.
6. Teman-teman BIDIKMISI UNHAS terkhusus buat **Titi Rizla Azis** yang selalu memberi semangat, menghibur serta mendengar keluh kesah penulis ketika mengerjakan skripsi.
7. Thanks untuk kalian kepada **Muhammad Adhan, Rahmi dan BISUR lda, Ulfa, Ayu, Inci, Maryam, Indah dan Nisa** yang selalu menghibur, emberi semangat, yang selalu kurepotkan serta mendengar keluh kesah enulis ketika mengerjakan skripsi.

8. Teman-teman seperjuangan **Algoritma 2016** terkhusus prodi **Matematika 2016** terima kasih untuk semua kebersamaan dan ikatan persaudaraan yang telah terjalin dari maba sampai saat ini. Semoga kita masih tetap **"Bersatu dalam Kebersamaan".**
9. Special Thanks kepada **Sulhan Sulaiman** yang selalu menghibur penulis disaat penat, selalu memberi semangat, menghibur serta mendengar keluh kesah penulis ketika mengerjakan skripsi dan yang paling sering kurepotkan.
10. Keluarga besar **Himatika FMIPA Unhas,** yang selalu memberikan cambukan semangat untuk menyelesaikan tugas akhir ini demi insan yang berilmu dan tentunya untuk menjaga nama baik lembaga, serta memberikan pengalaman berharga yang mungkin tidak bisa didapatkan ditempat lain. **Bravo Himatika!!**
11. Keluarga besar **KMF MIPA Unhas** terima kasih untuk semua pembelajaran dan pengalaman yang diberikan terkhusus **MIPA 2016** yang telah membersamai dan memberikan warna disetiap moment yang ada **"Seperti Seharusnya".**
12. **Kepada teman-teman IKAHIMATIKA** kepada terima kasih atas keakraban yang kekompakan yang terjalin selama ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis. Aamiin Ya Robbal Alaamiin.

Makassar, 23 Maret 2020

Sukmawati

MOTTO

Berangkat dengan keyakinan….

Berjalan dengan keikhlasan….

Istiqomah dengan menghadapi cobaan….

DOA, USAHA DAN KESABARAN ADALAH AWAL DARI KEBERHASILAN

Tidak ada yang sia-sia…

Tidak ada masalah yang tidak bisa diselesaikan selama ada komitmen untuk menyelesaikannya.

PERNYATAAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Sukmawati
NIM	: H111 16 010
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif** ***(Noneexclusive Royalty and Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

"Beberapa Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz "

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengallih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan saya buat dengan sebenarnya.

Makassar, 23 Maret 2020

Sukmawati

ABSTRAK

Sukmawati. *Beberapa Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz* (dibimbing oleh **Budi Nurwahyu** dan **Jusmawati Massalesse**)

Matriks Toeplitz adalah matriks yang sirkulan dimana setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama dan t_{ij} adalah entri-entri yang terletak di baris ke i dan kolom ke j, dinotasikan dengan $t_{ij} = t_{i-j}$ untuk $i \neq j$ dan $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

Pada penulisan ini dibahas mengenai matriks Toeplitz yang terdapat beberapa sifat yang dapat dikembangkan dari keberadaan matriks Toeplitz, termasuk diantaranya adalah sifat nilai eigen didalam matriks Toeplitz, untuk nilai eigen T_n dan $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ untuk suatu $r, u \in \mathbb{R}^+$ dan syarat cukup invers Matriks Toeplitz.

Kata Kunci : *Matriks Toeplitz*, *Nilai Eigen Toeplitz, Invers Toeplitz.*

ABSTRACT

Sukmawati. *Some Properties Of Eigenvalues and inverse Toeplitz Matrices* (supervised by **Budi Nurwahyu** dan **Jusmawati Massalesse**)

The Toeplitz matrix is a circular matrix where each element on the main diagonal is the same and each element on the subdiagonal corresponding to the main diagonal is also the same and t_{ij} are entries located in row i and column j, denoted by $t_{ij} = t_{i-j}$ for $i \neq j$ and $i, j = 1,2,3, \ldots, n$.

in this paper discussed regarding the Toeplitz matrix, there are several properties that can be developed from the existence of the Toeplitz matrix, including the nature of the eigenvalues in the Toeplitz matrix, for eigenvalues T_n and $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ for $r, \alpha \in \mathbb{R}^+$ an inverse and sufficient condition of the Toeplitz Matrix.

Keywords : *Toeplitz Matrix, Toeplitz Eigenvalue, Toeplitz Inversion*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$+$	Tambah
$-$	Kurang
$\neq$	Tidak sama dengan
$\times$	Kali
$\div$	Bagi
$\mathbb{R}^+$	Himpunan semua bilangan real
$\in$	Elemen
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan
Σ	Sigma
A^T	Transpose Matriks A
$\det(A)$	Determinan Matriks A
$Adj\ (A)$	Adjoin Matriks A
ë	Lambda
ä	Delta

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh masyarakat dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika juga merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. Matematika memiliki peran yang sangat penting pada ilmu-ilmu pengetahuan lainnya, seperti fisika, kimia, biologi, ekonomi dan lain-lain. Adapun konsep perhitungan manusia terangkum dalam ilmu matematika.

Salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting adalah aljabar. Aljabar berasal dari bahasa arab yaitu “al-jabr” yang berarti “pertemuan atau hubungan atau penyelesaian”. Penemu aljabar adalah Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi. Aljabar memiliki pokok permasalahan untuk dikembangkan lebih lanjut lagi, salah satunya yaitu aljabar linier.

Salah satu cabang ilmu matematika adalah aljabar linear yang di dalamnya membahas mengenai matriks. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya pada aplikasi perbankan yang senantiasa berhubungan dengan angka-angka, dalam dunia olahraga seperti penentuan klasemen suatu pertandingan, dalam bidang ekonomi biasa digunakan untuk menganalisa input dan output seluruh sektor ekonomi.

Dalam teori matriks terdapat berbagai macam bentuk matriks, salah satu diantaranya adalah Matriks Toeplitz. Matriks ini dinamakan Toeplitz untuk menghormati Otto Toeplitz Profesor Matematika yang dilahirkan di Jerman tahun 1881 . Otto Toeplitz diusir oleh Nazi karena dia seorang Yahudi dan wafat di Israel.Didalam matriks bujur sangkar entri-entrinya dapat diatur secara khusus, ...an tersebut dilakukan oleh Otto Toeplitz sehingga disebut Matriks ... Didalam matriks Toeplitz terdapat beberapa sifat yang dapat ...ngkan dari keberadaan matriks Toeplitz, termasuk diantaranya adalah sifat nilai eigen didalam matriks Toeplitz dan beberapa sifat yang menyangkut invers Matriks Toeplitz.

Matriks Toeplitz pada dasarnya memiliki operasi yang sama dengan matriks biasa hanya saja pada matriks Toeplitz mempunyai struktur dan sifat yang khusus, karena setiap entri pada diagonal utama bernilai sama begitupun dengan entri pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga bernilai sama. Ditinjau dari ukurannya, matriks ini merupakan jenis matriks bujursangkar karena memiliki ukuran $n \, x \, n$ atau dengan kata lain jumlah baris dan kolomnya sama.

Invers mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks, semakin besar ukuran matriks akan semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan sifat atau formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks. Salah satu kegunaan invers dari suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Pada Tahun 1991, Kouachi telah melakukan penelitian mengenai "nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan". Selanjutnya, pada Tahun 2005 Gray dan Robert juga melakukan penelitian mengenai teori matriks dengan judul "Toeplitz and Circulant Matrices". Pada tahun 2015, penulis juga telah melakukan penelitian mengenai "invers matriks Toeplitz tridiagonal". Safruddin (2015) telah melakukan penelitian mengenai "nilai eigen pada matriks simetris menggunakan faktorisasi QR". Bakti Siegar, Sdkk (2014) melakukan penelitian "invers suatu matriks toeplitz menggunakan metode adjoin". T H Jones, dkk (2016) melakukan penelitian mengenai "*inverse eigenvalue problems for checkerboard Toeplitz matrices*". Berdasarkan uraian tersebut penulis bermaksud untuk melakukan penelitian judul "Beberapa Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini yaitu bagaimana cara menentukan nilai eigen dan syarat cukup invers matriks Toeplitz.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi dengan penentuan syarat cukup invers matriks Toeplitz ukuran $n \, x \, n$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah untuk menentukan nilai eigen dan syarat cukup invers matriks Toeplitz.

1.5 Manfaat Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka manfaat dilakukannya penelitian ini yaitu:

1. Memperluas pengetahuan dan pengembangan keilmuan dalam bidang ilmu matematika khususnya mengenai perkembangan dari Aljabar.
2. Sebagai sarana penulis dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang selama ini menjadi bidang ilmu yang dipelajari
3. Sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika dibidang aljabar khusunya tentang matriks toeplitz.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas beberapa definisi, istilah, jenis-jenis serta konsep-konsep dasar matriks yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya.

2.1 Matriks.

Definisi 2.1 *Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.* (Howard Anton, 1987: 22).

Sehingga, dengan kata lain matriks merupakan susunan dari bilangan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi atau persegi panjang. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan elemen penyusun matriks dan diapit oleh tanda kurung siku atau kurung biasa. Ukuran dari matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya jumlah baris dan banyaknya jumlah kolom atau biasa disebut dengan ordo dan nama matriks ditulis dengan huruf kapital. Bentuk umum dari suatu matriks yang berordo $m \; x \; n$ adalah:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dengan a_{ij} *disebut elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j. Jika m=n maka matriks tersebut dinamakan juga matriks bujur sangkar (Munir, 2010:98).*

2.2 Jenis-jenis Matriks

Pada bagian ini akan dibahas beberapa jenis matriks yang akan digunakan pada penelitan ini diantaranya:

Definisi 2.2.1 *Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam bentuk baris dan kolom. ...triks yang terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom. Suatu matriks ...ya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (Anton dan Rorres,* ...

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Matriks A adalah matriks kolom. Sedangkan matriks B adalah matriks baris.

Contoh 2.2.1 Berikut ini contoh matriks kolom dan baris.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.2 *Matriks Bujur Sangkar ialah matriks yang jumlah baris sama dengan jumlah kolom atau berukuran $n \times n$. Pada matriks bujur sangkar dikenal istilah elemen diagonal yaitu elemen a_{11}, a_{22}, a_{33} dan seterusnya (Aini dan Utami, 2013:22).*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.3 *Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemen penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol (Sembiring, 2003: 19).*

Contoh 2.2.3 Berikut ini contoh matriks diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.4 Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utama bernilai satu (Sembiring, 2003: 19). Matriks Identitas juga disebut matriks satuan dan disimbolkan dengan I_n.

Contoh 2.2.4 Berikut ini contoh matriks identitas berukuran 2 x 2 dan 3 x 3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, dan \, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.5 *Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utama bernilai sama, tetapi selain nol (Mahmud 'Imrona, 2013: 3).*

Contoh 2.2.5 Berikut ini contoh matriks Skalar berukuran 2 x 2 dan 3 x 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.6 *Transpose Matriks adalah matriks $m\, x\, n$ maka transpose dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n\, x\, m$ yang didapatkan dengan menukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.(Anton dan Rorres 2004).*

Contoh 2.2.6 Berikut ini contoh transpose matriks berukuran 2 x 3.

$$Jik \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, mak \quad a^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2.7 *Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang sama dengan transposenya yaitu $A = A^T$ (Mahmud 'Imrona, 2013: 3).*

Contoh 2.2.6 Berikut ini contoh matriks simetris.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = a_{32} = 4$

2.3 Operasi Matriks

Pada dasarnya operasi pada matriks sama dengan operasi matematika biasa.

Beberapa operasi matriks yang umum digunakan antara lain:

2.3.1 Penjumlahan Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila berukuran sama. Sehingga penjumlahan matriks dapat dioperasikan hanya pada matriks-matriks yang memiliki orde sama. Setiap elemen pada baris ke-m dan kolom ke-n dijumlahkan dengan matriks lain pada baris ke-m dan kolom ke-n pula. (Sembiring, 2003: 20)

Contoh 2.3.1 Berikut ini contoh penjumlahan matriks.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 6 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 7\\ 5 & 3 & 7\\ 8 & 10 & 3\end{pmatrix}$$

2.3.2 Pengurangan Matriks

Sama halnya dengan penjumlahan matriks, pengurangan matriks juga hanya dapat dioperasikan pada matriks-matriks yang berorde sama. Cara pengurangan matriks juga sama dengan penjumlahan matriks yaitu setiap elemen pada baris ke-m dan kolom ke-n dikurangkan dengan matriks lain pada baris ke-m dan kolom ke-n pula.

Contoh 2.3.2 Berikut ini contoh pengurangan matriks.

$$A-B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 5 & 4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

2.3.3 Perkalian Matriks dengan Matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m\ x\ r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $r\ x\ n$, maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m\ x\ n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j pada matriks $\boldsymbol{B}$. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang ...n. (Howard Anton, 1987: 25).

...erkalian matriks dengan matriks hanya dapat dioperasikan jika ...a kolom dari matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua, jika syarat tersebut tidak terpenuhi, maka hasil kali tidak dapat didefinisikan. Perkalian matriks dengan matriks ini tidak bersifat komutatif atau $AB \neq BA$.

Contoh 2.3.3 Berikut ini contoh perkalian matriks.

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 16 \\ 18 & 22 & 23 \\ 29 & 27 & 34 \end{pmatrix}$$

2.4 Matriks Toeplitz

Definisi 2.4.1 *Matriks Toeplitz adalah matriks yang sirkulan dimana setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama dan* t_{ij} *adalah entri-entri yang terletak di baris ke i dan kolom j.Robert (2005)* .

$$T_n = (t_{ij}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & a_{2-n} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_o \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4.1 Berikut ini contoh matriks Toeplitz.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Sifat matriks Toeplitz

Adapun sifat matriks Toeplitz yaitu sebagai berikut:

1. Berbentuk matriks bujursangkar yang berorde n.

nua unsur pada diagonal utama bernilai sama, dinotasikan dengan

$= a_{ji} = t_{i-j}$ untuk $i = j$ dan $i, j = 1,2,3,\dots,n$

3. Semua unsur pada subdiagonal atau unsur diatas diagonal dan dibawah diagonal bernilai sama, dinotasikan dengan $t_{ij} = t_{i-j}$ untuk $i \neq j$ dan $i,j = 1,2,3,\dots,n$.
4. Penjumlahan pada matriks Toeplitz hasilnya akan tetap berbentuk matriks Toeplitz.

   Contoh:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 + B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Pengurangan pada matriks Toeplitz hasilnya akan tetap berbentuk matriks Toeplitz.

   Contoh:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 - B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Perkalian pada 2 matriks Toeplitz belum tentu hasilnya toeplitz

   Contoh:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 * B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 13 \\ 15 & 16 & 11 \\ 17 & 24 & 19 \end{pmatrix}$$

2.5 Matriks Toeplitz Simetris

Definisi 2.5.1 Matriks Toeplitz Simetris merupakan matriks toeplitz yang setiap entri diagonalnya sama dan entri $r_{ij} = r_{ji}$ untuk setiap $i,j = 1,2,3,\dots,n$.

num matriks Toeplitz simetri dapat ditulis sebagai berikut:

$$T_n = t_{ij} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{1-n} \\ a_{-1} & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{2-n} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1-n} & a_{2-n} & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Contoh 2.5.1 Berikut ini contoh matriks Toeplitz simetris

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Sifat matriks Toeplitz simetris

Adapun Sifat matriks Toeplitz simetris yaitu sebagai berikut:

1. Berbentuk matriks bujursangkar yang berorde n.
2. Semua unsur pada diagonal utama bernilai sama, dinotasikan dengan $a_{ij} = a_{ji} = t_{i-j}$ untuk $i = j$ dan $i, j = 1,2,3,\ldots,n$
3. Semua unsur pada subdiagonal atau unsur diatas diagonal dan dibawah diagonal bernilai sama, dinotasikan dengan $t_{ij} = t_{i+1,j+1}$. Untuk $t_{ij} = t_{i-j}\ jik\ \ i < j$, dan $t_{ij} = t_{j-i}\ jik\ \ i > j$
4. Penjumlahan pada matriks Toeplitz hasilnya akan tetap berbentuk matriks Toeplitz simetris.

   Contoh:

   $$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$A_3 + B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 7 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Pengurangan pada matriks Toeplitz hasilnya akan tetap berbentuk matriks Toeplitz.

   Contoh:

   $$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Perkalian pada matriks Toeplitz simetris hasilnya tidak berbentuk matriks Toeplitz, kecuali semua nilai entri-entrinya selain diagonal utamanya sama.

Contoh:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 * B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 13 \\ 9 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

2.6 Nilai Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \; x \; n$, maka sebuah vector yang tak nol di R^n dinamakan sebuah vector eigen (eigen vector) dari A jika Ax adalah kelipatan scalar dari x yaitu:

$$Ax = \text{ë}x$$

Untuk suatu scalar ë. Scalar ë dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan sebuah vector eigen yang bersesuaian dengan ë (Anto,1998:277).

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \; x \; n$ maka dituliskan kembali

$$Ax = \text{ë}x$$

$$Ax = \text{ë}Ix$$

$$(\text{ë}I - A)x = 0$$

Agar ë menjadi nilai eigen maka harus ada penyelesaian tidak nol dari persamaan diatas dan persamaan tersebut akan mempunyai penyelesaian tidak nol apabila det $(\text{ë}I - A) = 0$.

Persamaan diatas dinamakan persamaan karakteristik dari A, scalar ë yang memenuhi persamaan tersebut adalah nilai eigen dari A.

2.7 Invers Matriks

Definisi 2.7.1 Misalkan A dan B adalah matriks bujursangkar. *Matriks B disebut invers matriks A jika AB = BA = I dimana I adalah matriks identitas ,ditulis* $B = A^{-1}$ *(Anton dan Rorres, 2004).*

Jika $|A| \neq 0$, *maka*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} x \, Adj\,(A)$$

Dengan $Adj(A)$ adalah transpose dari matriks kofaktor.