CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA

SKRIPSI

RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG

H011181012

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2022

CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG

H011181012

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2022

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM	: H011181012
Program Studi	: MATEMATIKA
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulis saya berjudul:

Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 4 Februari 2022

<u>Rayhand Rafael Wongady Sosang</u>

H011181012

CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA

Disetujui oleh

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Dra. Nur Erawaty, M.Si.**
NIP. 196808031992021001	**NIP. 196909121993032001**

4 Februari 2022

HALAMAN PENGESAHAN

CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA

Disusun dan diajukan oleh

RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG
H011181012

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 4 Februari 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Dra. Nur Erawaty, M.Si.**
NIP. 196808031992021001	**NIP. 196909121993032001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si
NIP. 197008072000031002

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM	: H011181012
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	( )
Sekretaris	: Dra. Nur Erawaty, M.Si.	( )
Anggota	: Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	( )
Anggota	: Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar
Tanggal : 4 Februari 2022

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga**". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan hingga pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang tulus kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr Eng Amiruddin**, **S.Si., M.Si.** Selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika serta segenap dosen pengajar dan staf Departemen yang telah membekali ilmu dan memberikan kemudahan-kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama dan Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** selaku penasehat akademik sekaligus anggota penguji dan Bapak **Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** selaku anggota penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Bapak **Saharuddin Sosang** dan Ibu **Mince** selaku orang tua penulis yang telah mendidik, memotivasi, mendukung, dan mendoakan penulis serta

George Gabriel Wongady Sosang dan **Claudya Angela Wongady Sosang** selaku adik kandung penulis.

7. Teman-teman seperjuangan Matematika 2018 yang banyak membantu selama perkuliahan sampai dalam penyusunan skripsi ini.
8. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis senantiasa mengharapkan kritik dan saran yang dapat membantu dalam penyempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan memberi kontribusi untuk ilmu pengetahuan.

Makassar, 4 Februari 2022

Rayhand Rafael Wongady Sosang

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM	: H011181012
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini, saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar Pada tanggal 4 Februari 2022
Yang menyatakan,

Rayhand Rafael Wongady Sosang

ABSTRAK

Dimisalkan R merupakan sebuah gelanggang dengan elemen satuan, σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang pada R, dan δ merupakan suatu σ-derivatif. Gelanggang polinom miring atas R dengan peubah tak diketahui x disimbolkan dengan $R[x;\sigma,\delta]$ memiliki aturan perkalian $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$ yang menyebabkan gelanggang ini menjadi nonkomutatif. Meskipun gelanggang polinom miring nonkomutatif, namun di dalamnya terdapat suatu himpunan bagian yang anggotanya komutatif dengan setiap anggota gelanggang polinom miring lainnya yang dikenal sebagai pusat.

Di dalam penelitian ini akan ditemukan pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil. Langkah pertama dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi gelanggang barisan bilangan riil berhingga yang disimbolkan dengan R^S dan menemukan σ dan δ pada R^S. Setelah itu dengan menggunakan R^S bersama dengan σ dan δ untuk mengkonstruksi gelanggang polinom miring atas R^S yang dinotasikan dengan $R^S[x;\sigma,\delta]$. Kemudian akan ditentukan rumus $x^k a$ dengan $a \in R^S$ yang akan digunakan untuk memudahkan tahap selanjutnya yaitu menentukan pusat dari $R^S[x;\sigma,\delta]$.

Kata Kunci: Pusat, Gelanggang Polinom Miring, Barisan Bilangan Riil Berhingga, Hasil Kali Cauchy.

ABSTRACT

Let R be a ring with unity, σ be a ring endomorphism on R, and δ be a σ-derivative on R. Skew polynomial ring over R with indeterminate x denoted by $R[x;\sigma,\delta]$ has multiplication rule $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ that caused this ring to become noncommutative. Even though the skew polynomial ring is noncommutative, there is a subset inside the skew polynomial ring with its elements commutative with other elements of the skew polynomial rings known as a center.

In this research, the center of the skew polynomial ring over finite sequence of real numbers will be determined. The first step in this research is to construct the ring of finite sequence of real numbers which is denoted by R^S and find σ and δ on R^S. Afterward with using R^S together with σ and δ to construct the skew polynomial ring over R^S which is denoted by $R^S[x;\sigma,\delta]$. Then the formula of $x^k a$ with $a \in R^S$ will be determined which will be used to facilitate the next step, which is to determine the center of $R^S[x;\sigma,\delta]$.

Keywords: Center, Skew Polynomial Ring, Finite Sequence of Real Number, Cauchy Product.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah penelitian, tujuan, batasan masalah, dan manfaat dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Dalam aljabar abstrak atau sering juga disebut sebagai aljabar modern dipelajari mengenai struktur aljabar seperti grup, gelanggang, dan lainnya. Di dalam grup dibahas mengenai sebuah himpunan yang dipasangkan dengan suatu operasi biner, sedangkan di dalam gelanggang dibahas mengenai sebuah himpunan yang dipasangkan dengan dua buah operasi biner. Dua operasi biner yang umum digunakan pada gelanggang berupa operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$.

Pada teori gelanggang dikenal konsep gelanggang komutatif, yaitu gelanggang yang setiap operasi perkalian dua anggota gelanggang tersebut bersifat komutatif (Shahriari, 2017). Apabila terdapat operasi perkalian dua anggota gelanggang yang tidak bersifat komutatif, maka gelanggang tersebut disebut dengan gelanggang nonkomutatif. Salah satu contoh gelanggang nonkomutatif adalah gelanggang polinom miring yang diperkenalkan pertama kali oleh Ore pada tahun 1933. Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang berisis himpunan polinom-polinom yang operasi perkaliannya tidak komutatif. Aturan perkalian pada gelanggang polinom miring adalah $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, di mana σ merupakan endomorfisma gelanggang dan δ merupakan σ-derivatif. Gelanggang polinom miring dengan tumpuan gelanggang R disertai dengan σ dan δ disimbolkan dengan $R[x; \sigma, \delta]$.

Salah satu contoh pengaplikasian gelanggang polinom miring adalah di bidang teori koding oleh Siap, Abualrub, Aydin, dan Seneviratne (2011). Dalam jurnalnya yang berjudul "*Skew Cyclic Codes of Arbitrary Length*", gelanggang polinom miring dimanfaatkan untuk mempelajari kode siklik miring dengan panjang sembarang yang merupakan jenis khusus dari kode linear yang dikonstruksi menggunakan gelanggang polinom miring.

Gelanggang tumpuan sangat penting dalam mengkaji gelanggang polinom miring, sehingga banyak penelitian mengenai gelanggang polinom miring dengan berbagai macam gelanggang tumpuan. Seperti oleh Akalan, Aydoğdu, Marubayashi, Saraç, dan Ueda (2016) yang menggunakan gelanggang Herediter, Noether, dan Prim (HNP) sebagai gelanggang tumpuan. Pada kajian yang dilakukan oleh Amir, Djuddin, Bahri, Erawaty, dan Abdal (2017), diteliti struktur gelanggang polinom miring dengan menggunakan quaternion sebagai gelanggang tumpuannya. Di kesempatan lain, Amir, Erawaty, Bahri, Fadillah, dan Gormantara (2018) menggunakan coquaternion sebagai gelanggang tumpuan dalam kajiannya. Gelanggang nilpoten secara lokal juga telah digunakan sebagai gelanggang tumpuan oleh Chen, Hagan, dan Wang (2019).

Banyak macam gelanggang lain dengan berbagai jenis himpunan dan operasi dapat digunakan sebagai gelanggang tumpuan. Himpunannya dapat berupa berbagai macam objek matematika seperti bilangan riil, bilangan kompleks, matriks, dan lain-lainnya. Barisan merupakan salah satu objek matematika yang umum dijumpai. Barisan dapat dipandang sebagai kumpulan objek yang disusun dengan urutan tertentu. Salah satu manfaat dari barisan adalah pada bidang pengolahan sinyal digital, di mana barisan dapat digunakan untuk merepresentasikan sinyal diskrit. Barisan bilangan riil berhingga merupakan contoh dari barisan. Himpunan barisan bilangan riil berhingga dengan dua operasi biner yang sesuai dapat membentuk suatu gelanggang yang bisa digunakan sebagai gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring.

Di dalam gelanggang polinom miring yang merupakan gelanggang nonkomutatif, terdapat himpunan bagian yang anggotanya bersifat komutatif dengan setiap anggota dari gelanggang polinom miring tersebut yang dikenal sebagai pusat. Pusat dari suatu gelanggang polinom miring menjadi salah satu topik pembahasan yang menarik dan penting perannya dalam membantu mengkaji gelanggang polinom miring tersebut secara keseluruhan (Amir, 2009). Oleh karena strukur dari suatu gelanggang polinom miring sangat dipengaruhi oleh gelanggang tumpuan, σ yaitu endomorfisma gelanggang, dan juga δ yaitu σ-derivatif, sehingga pusat dari suatu gelanggang polinom miring juga akan sangat dipengaruhi oleh tiga hal tersebut. Maka gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang berbeda akan berkemungkinan memiliki pusat yang berbeda.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuannya berupa gelanggang barisan, namun akan dibatasi pada barisan bilangan riil berhingga dengan fokus kajian pada pusat dari gelanggang polinom miring tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga?
2. Bagaimana pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menemukan persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga.
2. Untuk menemukan pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan elemen gelanggang barisan bilangan riil berhingga, serta pusat dari gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang digunakan berupa gelanggang yang terbentuk dari himpunan barisan bilangan riil berhingga dengan operasi penjumlahan barisan dan operasi hasil kali Cauchy barisan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan bidang ilmu matematika dan khususnya di bidang aljabar.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa materi yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam mengkaji karakteristik daerah komutatif pada gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga. Materinya berupa definisi dan konsep dari operasi biner, grup, gelanggang, gelanggang polinom miring, dan juga barisan.

2.1 Operasi Biner

Operasi biner sangat penting dalam membahas struktur aljabar seperti grup dan gelanggang. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1

Misal G merupakan suatu himpunan, maka operasi biner pada G adalah sebuah fungsi dari $G \times G$ ke G (Shahriari, 2017).

2.2 Grup

Grup merupakan dasar struktur aljabar lain yang lebih kompleks. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai definisi dari grup.

Definisi 2.2

Grup $(G,\circ)$ adalah sebuah himpunan tidak kosong G dengan operasi biner $\circ$ terdefinisi pada G sedemikian sehingga:

a) *Jika $a, b \in G$, maka $a * b \in G$,*
b) *$(a \circ b) * c = a \circ (b \circ c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$,*
c) *Terdapat sebuah elemen identitas $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$ untuk setiap $a \in G$,*

d) *Untuk setiap* $a \in G$ *terdapat sebuah elemen invers* $a^{-1} \in G$ *sedemikian sehingga* $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. *(Shahriari, 2017)*

2.3 Gelanggang

Gelanggang merupakan struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup. Berbeda dengan grup yang merupakan struktur aljabar yang memiliki satu operasi biner, di dalam gelanggang terdapat dua operasi biner. Pada sub bab ini akan dibahas beberapa definisi terkait gelanggang.

Definisi 2.3

Gelanggang $(R, +, \cdot)$ *adalah himpunan tidak kosong R dengan dua operasi biner* $+$ *dan* $\cdot$ *terdefinisi pada R sedemikian sehingga:*

a) *Jika* $a, b \in R$, *maka* $a + b \in R$,
b) $a + b = b + a$ *untuk setiap* $a, b \in R$,
c) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *untuk setiap* $a, b, c \in R$,
d) *Terdapat sebuah elemen* $0_R \in R$ *sedemikian sehingga* $a + 0_R = 0_R + a = a$ *untuk setiap* $a \in R$,
e) *Untuk setiap* $a \in R$ *maka terdapat* $-a \in R$ *sedemikian sehingga* $a + (-a) = (-a) + a = 0_R$,
f) *Jika* $a, b \in R$, *maka* $a \cdot b \in R$,
g) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, *untuk setiap* $a, b, c \in R$,
h) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dan* $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ *untuk setiap* $a, b, c \in R$. *(Shahriari, 2017).*

Definisi 2.4

Sebuah gelanggang $(R, +, \cdot)$ *disebut sebagai gelanggang komutatif jika memenuhi* $a \cdot b = b \cdot a$ *untuk setiap* $a, b \in R$ *(Shahriari, 2017).*

Definisi 2.5

Sebuah gelanggang $(R,+,\cdot)$ *disebut sebagai gelanggang dengan elemen satuan jika terdapat sebuah elemen* 1_R *sedemikian sehingga memenuhi* $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ *untuk setiap* $a \in R$ *(Shahriari, 2017).*

Contoh 2.1

Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian) membentuk gelanggang. Karena berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ maka $(\mathbb{R},+,\cdot)$ merupakan gelanggang komutatif. Diketahui juga terdapat elemen satuan terhadap operasi $\cdot$ yaitu 1 di dalam $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, maka $(\mathbb{R},+,\cdot)$ juga merupakan gelanggang dengan elemen satuan.

Definisi 2.6

Misal R *adalah sebuah gelanggang. Maka pusat dari* R *dilambangkan dengan* $Z(R)$ *didefinisikan sebagai* $Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}$ *(Amir et al., 2020).*

2.4 Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma gelanggang merupakan suatu pemetaan antara dua buah gelanggang. Pada sub bab ini akan dibahas beberapa definisi terkait gelanggang berserta contohnya.

Definisi 2.7

Pemetaan f *dari gelanggang* R *ke gelanggang* S *merupakan homomorfisma gelanggang dari* R *ke* S *jika untuk setiap* $a, b \in R$ *memenuhi*

a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

b) $f(ab) = f(a)f(b)$. *(Shahriari, 2017)*

Definisi 2.8

Endomorfisma gelanggang merupakan homomorfisma gelanggang dari suatu gelanggang ke dirinya sendiri (Shahriari, 2017).

Contoh 2.2

Himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi penjumlahan matriks $(+)$ dan perkalian matriks $(\cdot)$ membentuk gelanggang. Misalkan suatu pemeetaan $\sigma: M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2} \to M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$. Akan ditunjukkan σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa σ merupakan suatu homomorfisma gelanggang. Ambil sebarang $x, y \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$, dengan $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa

a) $$\begin{aligned} \sigma(x+y) &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a+e & -(b+f) \\ -(c+g) & d+h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & -b-f \\ -c-g & d+h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ -g & h \end{bmatrix} \\ &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \sigma\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= \sigma(x) + \sigma(y). \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \sigma(x \cdot y) &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= \sigma\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & -(af+bh) \\ -(ce+dg) & cf+dh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & -af-bh \\ -ce-dg & cf+dh \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & -f \\ -g & h \end{bmatrix}$$
$$= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \sigma\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$
$$= \sigma(x) \cdot \sigma(y).$$

Jadi diperoleh bahwa σ merupakan homomorfisma. Karena σ merupakan homomorfisma gelanggang dan memetakan $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ ke dirinya sendiri, maka σ adalah endomorfisma gelanggang.

2.5 Gelanggang Polinom Miring

Gelanggang polinom miring merupakan salah satu contoh gelanggang nonkomutatif yang diperkenalkan pertama kali oleh Ore (1933). Pada sub bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep terkait dengan gelanggang polinom miring.

Definisi 2.9

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan dan σ *merupakan endormorfisma gelanggang, maka pemetaan* $\delta: R \to R$ *disebut sebagai* σ*-derivatif dari R jika untuk semua* $a, b \in R$ *memenuhi*

a) $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$,

b) $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$. *(Farahat & Al-Bogamy, 2021)*

Contoh 2.3

Himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi penjumlahan matriks $(+)$ dan perkalian matriks $(\cdot)$ membentuk gelanggang. Diberikan σ yang merupakan endormofisma gelanggang dan didefinisikan sebagai $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$. Misalkan suatu pemeetaan $\delta: M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2} \to M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ yang didefinisikan dengan $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$. Akan ditunjukkan

δ merupakan suatu σ-derivatif dari $M_{(\mathbb{R})}^{2\times2}$. Ambil sebarang $x, y \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times2}$, dengan $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa

a) $$\begin{aligned}
\delta(x+y) &= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(b+f) \\ -(c+g) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b-f \\ -c-g & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ -g & 0 \end{bmatrix} \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\
&= \delta(x) + \delta(y).
\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}
\delta(x \cdot y) &= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ -(ce+dg) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -af-bh \\ -ce-dg & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(x)\cdot\delta(y) + \delta(x)\cdot y &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \delta\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -f \\ -g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} bg & -af \\ -dg & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -bg & -bh \\ -ce & -cf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -af-bh \\ -dg-ce & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\delta(x \cdot y) = \sigma(x)\cdot\delta(y) + \delta(x)\cdot y$. Jadi δ merupakan σ-derivatif pada $M_{(\mathbb{R})}^{2\times2}$.

Definisi 2.10

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan 1, σ *merupakan endomorfisma gelanggang pada R, dan* δ *merupakan* σ*-derivatif. Gelanggang polinom miring atas R dengan peubah tak diketahui* x *dinotasikan dengan*

$$R[x;\sigma,\delta] = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 |\, a_i \in R, 0 \leq i \leq n\}$$

dan memiliki aturan $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ *untuk setiap* $a \in R$ *(McConnel & Robson, 2001).*

Contoh 2.4

Misalkan Gelanggang $\left(M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}, +, \cdot\right)$ di mana $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil, diberikan σ yang merupakan endomorfisma gelanggang pada $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$. Selanjutnya diberikan juga pemetaan δ yang merupakan σ-derivatif dan didefinisikan sebagai $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$. Maka gelanggang $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}$ dengan σ dan δ membentuk gelanggang polinom miring yang disimbolkan dengan $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}[x;\sigma,\delta]$. Misalkan diambil $f(x), g(x) \in M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}[x;\sigma,\delta]$ dengan $f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x^2$ dan $g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$, akan diperlihatkan bahwa perkalian pada $M_{(\mathbb{R})}^{2\times 2}[x;\sigma,\delta]$ tidak komutatif.

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x^2\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right)\left(x \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right)\left(\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x + \delta\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) x \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) x \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}x\right)\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}x^2\right) + \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}x\right)\left(\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}x\right)\\
&= \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}\right)x^2 + \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x\\
&= \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\sigma\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}\right)x + \delta\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\right)x^2\\
&\quad + \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\sigma\left(\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x + \delta\left(\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\right)x\\
&= \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x^2 + \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\right)x^3 + \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x^2\\
&\quad + \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x^2 + \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)x\\
&= \begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 16\end{bmatrix}x^3 + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 12\end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 12\end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 12\end{bmatrix}x\\
&= \begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 16\end{bmatrix}x^3 + \begin{bmatrix}0 & 8\\0 & 24\end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 12\end{bmatrix}x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x)f(x) &= \left(\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}x\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}x^2\right)\\
&= \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)x^2\\
&= \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\sigma\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)x + \delta\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)\right)x^2\\
&= \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 4\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0 & -2\\-3 & 0\end{bmatrix}\right)x^2\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 4\end{bmatrix}\right)x^3 + \left(\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -2\\-3 & 0\end{bmatrix}\right)x^2\\
&= \begin{bmatrix}-11 & 14\\-3 & 4\end{bmatrix}x^3 + \begin{bmatrix}-12 & -2\\-3 & 0\end{bmatrix}x^2.
\end{aligned}
$$

$\therefore f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$.

2.6 Barisan

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi dari barisan serta beberapa operasi pada barisan.

Definisi 2.11

Misal X merupakan suatu himpunan. Barisan dalam X adalah sebuah fungsi $a: N \to X$*, di mana* $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ *untuk suatu* $n_0 \in \mathbb{Z}$*. Dalam kata lain barisan adalah sebuah fungsi dengan nilai di dalam X dengan domainnya berupa seluruh bilangan bulat dimulai dengan* n_0 *(biasanya* $n_0 = 0$ *atau* 1*). Jika* a *merupakan sebuah barisan, maka biasanya tidak dinotasikan dengan* $a(n)$ *melainkan digunakan* (a_n) *(Hsu, 2020).*

Jika $X = \mathbb{R}$ yaitu himpunan seluruh bilangan riil dan $a: N \to \mathbb{R}$, maka barisan (a_n) merupakan barisan bilangan riil.

Definisi 2.12

Barisan berhingga merupakan barisan yang memiliki domain yang berhingga.. Sedangkan jika suatu barisan memiliki domain yang tidak berhingga maka barisan tersebut disebut dengan barisan tak hingga (Warner, 2012).

Definisi 2.13

Jumlah barisan (a_n) *dan* (b_n) *adalah sebuah barisan* (k_n) *yang didefinisikan sebagai* $k_n = a_n + b_n$ *untuk semua* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *dan ditulis dengan* $(k_n) = (a_n + b_n)$ *(Anderson & Hall, 2012).*

Contoh 2.5

Misalkan diberikan dua barisan berhingga $(2,4,6,8,10)$ dan $(0,1,1,2,3)$, maka

$$(2, 4, 6, 8, 10) + (0, 1, 1, 2, 3) = (2 + 0,4 + 1,6 + 1,8 + 2,10 + 3)$$
$$= (2,5,7,10,13).$$

Definisi 2.14

Hasil kali Cauchy dari dua barisan (a_n) *dan* (b_n) *didefinisikan sebagai* $(a_n) * (b_n) = (c_n)$ *di mana* $c_n = \sum_{d=0}^{n} a_d b_{n-d}$ *dengan* $n \geq 0$ *(Falcó & Grosse-Erdmann, 2020).*

Contoh 2.6

Misalkan diberikan dua barisan berhingga $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (2,4,6,8,10)$ dan $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (0,1,1,2,3)$, maka

$$
\begin{aligned}
(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) * (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) &= \left(a_0 b_0, \sum_{d=0}^{1} a_d b_{1-d}, \sum_{d=0}^{2} a_d b_{2-d},\right. \\
&\qquad \left.\sum_{d=0}^{3} a_d b_{3-d}, \sum_{d=0}^{4} a_d b_{4-d}\right) \\
&= (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 \\
&\qquad + a_2 b_0,\ a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\
&\qquad + a_3 b_0, a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\
&\qquad + a_4 b_0) \\
&= (2(0), 2(1) + 4(0), 2(1) + 4(1) \\
&\qquad + 6(0), 2(2) + 4(1) + 6(1) \\
&\qquad + 8(0), 2(3) + 4(2) + 6(1) + 8(1) \\
&\qquad + 10(0)) \\
&= (0, 2, 6, 14, 28).
\end{aligned}
$$