ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI

RATRI DWI RAMADHANNY

H121 14 028

DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI

S K R I P S I

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Statistika Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddim

RATRI DWI RAMADHANNY

H121 14 028

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini;

Nama	: Ratri Dwi Ramadhanny
NIM	: H121 14 028
Program Studi	: Statistika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul:

ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut

Makassar, 26 Maret 2021

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

Ratri Dwi Ramadhanny

ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Drs. Raupong, M.Si	**Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si**
NIP. 196210151988101001	**NIP. 19750429 200003 2001**

Ketua Program Studi,

Dr. Nurtiti Sunusi, M.Si.
NIP. 19720117 199703 2 002

Pada Tanggal : 26 Maret 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI

Disusun dan diajukan oleh

RATRI DWI RAMADHANNY

H121 14 028

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Sarjana Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 26 Maret 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. Raupong, M.Si	**Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si**
NIP. 196210151988101001	**NIP. 19750429 200003 2001**

Ketua Program Studi,

Dr. Nurtiti Sunusi, M.Si.

NIP. 19720117 199703 2 002

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya. Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah mengajarkan kebenaran dan membimbing umat–umatnya ke arah yang benar. Rasa syukur yang tak terkira atas segala nikmat dan karunia yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi dengan judul **"ESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER MULTILEVEL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DIPERUMUM DAN KUADRAT TERKECIL TERBOBOTI"** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulisan skripsi ini tentunya tidak lepas dari bantuan berbagai pihak baik moril maupun materiil. Oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan pengharagaan yang tak terhingga kepada Ayahanda dan Ibunda tercinta : **Sabur dan Siti Hajar** yang tidak kenal lelah mendoakan dan memberikan semangat kepada penulis selama ini. Untuk saudara ku **Putri Dhian Menthari, S.Farm** dan **Aqilah Zalfa Latifah** terima kasih atas motivasi yang telah diberikan kepada penulis.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. **Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, **Bapak Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya. **Ibu Dr. Nurtiti Sanusi, S.Si., M.Si**, selaku Ketua Departemen Statistika, segenap Dosen Pengajar dan Staf Departemen Statistika yang telah membekali ilmu dan kemudahan-kemudahan kepada penulis selama menyelesaikan tugas akhir.
   a. **Bapak Drs. Raupong, M.Si,** selaku Pembimbing Utama dan **Ibu Dr. Erna Tri Herdiani, M.Si,** selaku Pembimbing Pertama yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya

untuk memberikan arahan, dorongan, dan motivasi kepada penulis mulai dari awal hingga selesainya penulisan skripsi ini.

2. **Ibu Sitti Sahriman, S.Si., M.Si** dan **Ibu Dr. Anna Islamiyati, M.Si**, selaku Tim Penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penyusunan tugas akhir ini serta waktu yang telah diberikan kepada penulis.
3. **Ibu Sitti Sahriman, S.Si., M.Si** , selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan masukan bantuan, nasehat serta motivasi yang diberikan kepada Penulis selama menjalani pendidikan di Departemen Statistika Universitas Hasanuddin.
4. Keluarga besar **TRANSPOSE 2014** yang telah memberikan bantuan baik dalam akademik maupun organisasi.

Serta kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semuanya. Semoga apa yang telah dituliskan pada skripsi ini dapat bermanfaat.

Makassar, 26 Maret 2021

Penulis

ABSTRAK

Regresi multilevel merupakan regresi dengan struktur data bertingkat, berjenjang dan saling berhubungan antara variabel pada setiap tingkat. Masalah yang sering muncul pada data regresi mulitilevel adalah adanya heterogenitas dalam galat dan adanya autokorelasi pada tingkat yang berbeda. Metode *Generalized Least Square* (GLS) digunakan untuk mengatasi autokorelasi dan metode Kuadrat Terkecil Terboboti atau *Weighted Least Square* (WLS) untuk menaksir parameter dengan gejala heteroskedastisitas. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan hasil estimasi parameter model regresi linier multilevel dan untuk mengetahui faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung Tahun 2018. Variabel respon yang digunakan adalah Kepadatan Penduduk (Y) dan variabel prediktor terbagi menjadi dua yaitu variable prediktor pada level 1 yaitu Rasio Jenis Kelamin (X_1) dan Laju Pertumbuhan Penduduk (X_2) sedangkan variable prediktor pada level 2 yaitu Indeks Pembangunan Manusia (R_1) dan Laju Pertumbuhan Ekonomi (R_2). Hasil yang diperoleh berupa faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk pada level 1 berbeda-beda untuk setiap kabupaten/kota. Variabel yang berpengaruh adalah Rasio Jenis Kelamin dan Laju Pertumbuhan Penduduk. Pada level 2 variabel yang signifikan mempengaruhi kepadatan penduduk adalah variabel laju pertumbuhan penduduk dimana variabel tersebut dipengaruhi oleh indeks pembangunan manusia dan laju pertumbuhan ekonomi.

Kata kunci: Multilevel, GLS, WLS, Kepadatan Penduduk

ABSTRACT

Multilevel regression is a regression with a stratified data structure, hierarchy, and interconnected between variables at each level. Problems that often arise on Multilevel regression data is the presence of heterogeneity in error and and autocorrelation at different levels. The Generalized Least Square (GLS) method is used to overcome autocorrelation and Weighted Least Square (WLS) method to estimate parameters with heteroscedasticity symptoms. This study aims to obtain the estimation results of the multilevel linear regression model parameters and to find out the factors that influence population density in Lampung Province at 2018. The response variables used are Population Density (Y), the predictor variable is divided into two, at level 1 namely the Sex Ratio (X1) and Population Growth Rate (X2) meanwhile at level 2 namely the Human Development Index (R1) and Economic Growth Rate (R2). The result obtained are factors that affect population density at level 1 different for each district / city. Influential variables are sex ratio and population growth rate. At level 2, the variables that significantly affect population density are the population growth rate variable where the variable influenced by the human development index and the rate of economic growth.

Keywords: Multilevel, GLS, WLS, Population Density

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem hierarki dapat menunjukkan hasil pengamatan berupa gambaran variabel individu dan variabel lingkungan pada tingkat yang berbeda-beda. Gambaran interaksi antara variabel individu dan variabel lingkungan ditunjukkan oleh pengaruh lingkungan dimana individu tersebut berada. Individu yang berada di dalamnya juga dapat membentuk sifat-sifat dari lingkungan.

Data yang diperoleh dari sistem hierarki umumnya memiliki struktur bertingkat, berjenjang (*hierarchy*) atau berklaster, serta adanya hubungan antara variabel pada tingkat yang berbeda (Goldstein, 1995). Apabila penelitian dengan struktur data berjenjang dianalisis dengan regresi sederhana, maka akan memberikan interpretasi dan analisis statistik yang salah. Kesalahan ini disebabkan oleh individu-individu yang diteliti berada pada lingkungan yang berbeda, namun kondisi tersebut diabaikan.

Goldstein (1995) memperkenalkan pengembangan dari analisis regresi sederhana untuk mengatasi masalah yang disebabkan oleh data dengan struktur berjenjang yaitu analisis model multilevel. Dalam model multilevel, tingkatan dalam struktur berjenjang didefinisikan sebagai level. Tingkat yang paling rendah disebut level 1 dan tingkat yang lebih tinggi disebut level 2 (Laili, 2016).

Model dua level merupakan model yang paling sederhana dari model regresi multilevel dimana level pertama merupakan data individu dan level kedua adalah data kelompok dari individu-individu pada level 1. Model multilevel dapat mengatasi masalah pada data hasil survei yang dilakukan menggunakan random sampling bertahap (*multistage random sampling*) atau data dengan struktur berjenjang. Masalah yang muncul pada data dengan struktur seperti ini adalah adanya heterogenitas dalam galat dan adanya autokorelasi (Laili, 2016).

Metode Kuadrat Terkecil yang biasa disebut dengan *Ordinary Least Square* (OLS) kurang tepat digunakan pada data yang mengalami masalah tersebut karena cenderung terdapat kemiripan karakteristik unit-unit pada level 1 dan level 2 dan data multilevel merupakan gabungan antara data *cross section* dan *time series* (Laili, 2016).

Penaksiran parameter untuk model multilevel memiliki beberapa metode yang dapat digunakan. Goldstein (1995) yang dikutip oleh Tantular (2011) mengusulkan penggunaan metode *Generalized Least Square* (GLS) atau Kuadrat Terkecil Diperumum dalam menaksir parameter tetap pada model multilevel. Metode ini dinilai lebih baik dari metode sebelumnya karena model yang digunakan merupakan model yang telah disubstitusikan sehingga struktur varians-kovarians yang digunakan terdiri dari komponen level 1 dan level 2.

Salah satu masalah yang muncul pada model multilevel adalah masalah galat yang tidak memenuhi asumsi non-autokorelasi. Oleh karena itu, penulis meneliti beberapa literatur yang berhubungan dalam mengatasi masalah autokorelasi. Salah satunya penelitian yang dilakukan oleh Nurdin (2016) mengenai penerapan kombinasi metode regresi ridge (RR) dan metode GLS untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan autokorelasi.

Montgomery et al. (2012) yang dikutip oleh Hanifah dkk (2015) mengusulkan untuk menggunakan metode Kuadrat Terkecil Terboboti atau

Weighted Least Square (WLS) untuk menaksir parameter dengan gejala heteroskedastisitas. Hal ini dikarenakan WLS memiliki kemampuan untuk menetralisir akibat dari pelanggaran asumsi homoskedastisitas serta dapat menghilangkan sifat ketidakbiasan dan konsistensi dari model taksiran OLS. Wahidah, Ahmad dan Faisah (2018) melakukan penelitian mengenai penerapan metode WLS pada analisis regresi berganda. Kesimpulan dari penelitian tersebut adalah metode WLS efektif digunakan dalam mengatasi masalah heteroskedastisitas karena melalui prosedur pembobotan pada galat OLS yang menghasilkan varian galat WLS menjadi homoskedastisitas.

Model regresi multilevel dapat digunakan untuk mempelajari faktor-faktor yang dapat mempengaruhi kepadatan penduduk suatu wilayah. Kepadatan penduduk dapat diartikan sebagai perbandingan jumlah penduduk dengan luas wilayah yang dihuni. Faktor biologis yang mempengaruhi kepadatan penduduk berupa kelahiran, kematian dan perkawinan (Susilawati dan Sunarhadi, 2009). Faktor-faktor tersebut tidak lepas dari kajian kependudukan seperti rasio jenis kelamin dan laju pertumbuhan penduduk serta indeks pembangunan manusia dan laju pertumbuhan ekonomi.

Rasio jenis kelamin dapat menunjukkan ketidakseimbangan jumlah penduduk laki-laki dan perempuan yang mempengaruhi fertilitas dan angka pertumbuhan penduduk. Apabila jumlah penduduk perempuan lebih banyak maka akan terjadi ledakan jumlah penduduk, sebab peluang untuk memiliki keturunan semakin besar. Hal tersebut mengakibatkan meningkatnya fertilitas dan angka pertumbuhan penduduk. Sedangkan laju pertumbuhan penduduk yang tinggi berarti meningkat pula jumlah penduduk. Pertambahan penduduk yang meningkat dari waktu ke waktu menyebabkan jumlah kepadatan penduduk meningkat. Hal inilah yang menyebabkan rasio jenis kelamin dan laju pertumbuhan penduduk dapat dijadikan faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk.

Penelitian yang dilakukan oleh Rochaida (2016) mengenai Dampak Pertumbuhan Penduduk Terhadap Pertumbuhan Ekonomi dan Keluarga Sejahtera di Provinsi Kalimantan Timur diperoleh hubungan antara pertumbuhan penduduk dengan pertumbuhan ekonomi, hal ini bermakna bahwa meningkatnya jumlah penduduk membawa perkembangan bagi perekonomian, karena dengan meningkatnya jumlah penduduk maka meningkat pula peranan sumber daya manusia yang terlibat dalam kegiatan proses produksi barang dan jasa (PDRB) sehingga menambah kapasitas produksi dan menumbuhkan perekonomian.

Berdasarkan data dari sensus BPS tahun 2018, Provinsi Lampung memiliki jumlah penduduk sebanyak 8,36 juta jiwa. Rasio jenis kelamin sebesar 105, laju pertumbuhan penduduk 1,16%, indeks pembangunan manusia 69,02% dan PDRB 5,68%. Untuk melihat keterkaitan masing – masing faktor terhadap kepadatan penduduk, maka dilakukan Estimasi Parameter Regresi Linier Multilevel.

Berdasarkan uraian diatas, maka dilakukan penelitian tugas akhir dengan judul "Estimasi Parameter Regresi Linier Multilevel dengan Metode Kuadrat Terkecil Diperumum dan Kuadrat Terkecil Terboboti".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana estimasi parameter model regresi linier multilevel?
2. Bagaimana estimasi parameter model regresi linier multilevel untuk mengetahui faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung Tahun 2018?

1.3 Batasan Masalah

Batasan Masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan adalah data dari Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung Tahun 2018. Data tersebut meliputi kepadatan penduduk, rasio jenis kelamin, laju pertumbuhan penduduk, indeks pembangunan manusia dan laju pertumbuhan ekonomi
2. Model regresi multilevel yang digunakan yaitu dua level, dengan level 1 tingkat kecamatan di Provinsi Lampung dan level 2 tingkat Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini sebagai berikut

1. Mendapatkan hasil estimasi parameter model regresi linier multilevel.
2. Mendapatkan hasil estimasi parameter model regresi linier multilevel untuk mengetahui faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung Tahun 2018.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagi penulis
   a. Sebagai bentuk penerapan dan pengembangan pengetahuan dalam bidang statistika yang berkaitan dengan penggunaan data multilevel.
   b. Sebagai penerapan metode Kuadrat Terkecil Diperumum dan Kuadrat Terkecil Terboboti pada regresi multilevel untuk mengestimasi parameter yang berkaitan dengan autokorelasi dan heteroskedastisitas
2. Bagi Pembaca

   Sebagai bentuk informasi tentang metode pengestimasian parameter pada regresi multilevel menggunakan metode Kuadrat Terkecil Diperumum dan Kuadrat Terkecil Terboboti.
3. Bagi Lembaga

   Sebagai referensi dalam penggunaan metode Kuadrat Terkecil Diperumum dan Kuadrat Terkecil Terboboti dalam mengestimasi parameter yang mengandung autokorelasi dan heteroskedastisitas.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi Linier

Analisis regresi merupakan salah satu analisis statistik yang sering digunakan untuk menganalisis hubungan antara dua variabel atau lebih. Analisis regresi merupakan metode analisis yang dapat digunakan untuk menganalisis data dan mengambil kesimpulan yang bermakna tentang hubungan ketergantungan variabel terhadap variabel lainnya. Hubungan yang didapat pada umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika yang menyatakan hubungan antara variabel prediktor (*independent variable*) dan variabel respon *(dependent variable)* dalam bentuk persamaan sederhana (Drapper & Smith, 1992).

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \tag{2.1}$$

keterangan:

Y = variabel respon

β_0 = konstanta *intrecept*

β_1 = koefisien dari variabel prediktor

X = variabel prediktor

ε = galat

Model statistik linier dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau *k* variabel. Persamaan model statistik linier dengan *k* variabel adalah sebagai berikut (Gujarati,2010):

$$Y_i = \beta_0 X_{i0} + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \sum_{q=0}^{k} \beta_q X_{iq} + \varepsilon_i \tag{2.2}$$

$i = 1,2, \dots, n$ $\qquad$ $q = 0,1,2,\dots,k$

keterangan:

Y_i = variabel respon untuk data ke-i, $i = 1,2, \dots, n$ data

β_0 = konstanta *intercept*

β_q = koefisien dari variabel prediktor ke-q, $q = 0,1,2,\dots,k$ variabel

X_{iq} = variabel prediktor ke-q pada data ke-i

ε_i = galat regresi untuk data ke-i

X_{0i} = $[1\ 1\ 1\ \cdots\ 1]^t$

atau dapat dinotasikan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

persamaan (2.3) dapat dituliskan bentuk umum model regresi linier sebagai berikut (Gujarati,2010):

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.4}$$

Beberapa asumsi penting dalam regresi linier antara lain (Widarjono, 2005):

a. Hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor adalah linier dalam parameter dan linier dalam variabel.

b. Tidak ada hubungan linier antar variabel prediktor atau tidak ada multikolinearitas antar variabel prediktor.

c. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$ (2.5) dalam bentuk matriks

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ \vdots\\ E(\varepsilon_N)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

d. Tidak ada korelasi antara (ε_i) dan (ε_j). Sehingga

$$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j \tag{2.7}$$

e. Variansi setiap ε adalah sama (homoskedastisitas)

$$E(\varepsilon^2) = \sigma^2 I \tag{2.8}$$

dalam bentuk matriks

$$E(\boldsymbol{\varepsilon^2}) = E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon'}) = E\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n\end{bmatrix}\right] \tag{2.9}$$

$$= \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_N^2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2\end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 I$$

2.2 Regresi Linier Multilevel

Model linier multilevel adalah model linier dengan variabel respon yang nilainya tidak hanya dipengaruhi oleh variabel tetap (*fixed*) saja namun juga dipengaruhi oleh variabel acak (*random*). Model linier multilevel memiliki dua karakterisitik khusus dalam mendefinisikan model. Pertama, data yang sesuai untuk model berstruktur berjenjang, dengan unit level pertama tersarang dalam unit level kedua, unit level kedua tersarang di dalam unit level ketiga dan seterusnya. Sedangkan hal kedua, parameter model tersebut terlihat seperti memiliki struktur berjenjang (Raudenbush dan Bryk, 2002).

Gabungan level 1 dan level 2 merupakan model linier campuran dengan *fixed* dan *random* koefisien regresi. Secara umum model regresi linier 2 level mendefinisikan variabel prediktor pada level individu (level 1) dan pada level kelompok (level 2). Berdasarkan struktur data pada Tabel 2.1 pemodelan multilevel dengan 2 level adalah sebagai berikut (Goldstein,2011) :

1. Model 1

Model 1 adalah model yang disusun tanpa memperhatikan pengaruh dari level kelompok. Pemodelan multilevel untuk tiap kelompok dapat ditulis sebagai berikut.

$$Y_{ij} = \beta_{j0}X_{ij0} + \beta_{j1}X_{ij1} + \beta_{j2}X_{ij2} + \cdots + \beta_{jk}X_{ijk} + \varepsilon_{ij} \quad (2.10)$$

$$Y_{ij} = \sum_{q=0}^{k} \beta_{jq}X_{ijq} + \varepsilon_{ij} \quad (2.11)$$

$$i = 1,2, \dots, n_j \quad j = 1,2, \dots, m \quad q = 0,1,2, \dots, k$$

Keterangan:

Y_{ij} = variabel respon kelompok data ke-j, $j = 1,2, \dots, m$ kelompok pada data ke-i, $i = 1,2, \dots, n_j$ data

β_{0j} = konstanta *intercept* pada kelompok ke-j

Keterangan:

β_{jq} = koefisien regresi dari variabel prediktor ke-q, $q = 0,1,2,\dots,k$ variabel pada kelompok ke-j

X_{ijq} = variabel prediktor ke-q,kelompok ke-j dan data ke-i

ε_{ij} = galat regresi kelompok ke-j pada data ke-i

X_{0ij} = $[1\ 1\ 1\ \cdots 1]^t$

atau dapat dinotasikan dalam bentuk matriks adalah

$$\boldsymbol{Y}_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ y_{3j} \\ \vdots \\ y_{n_j j} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1j1} & x_{1j2} & \cdots & x_{1jk} \\ 1 & x_{2j1} & x_{2j2} & \cdots & x_{2jk} \\ 1 & x_{3j1} & x_{3j2} & \cdots & x_{3jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n_j j1} & x_{n_j j2} & \cdots & x_{n_j jk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j0} \\ \beta_{j1} \\ \beta_{j2} \\ \vdots \\ \beta_{jk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \\ \varepsilon_{3j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_j j} \end{bmatrix}$$

dan bentuk umum sebagai berikut

$$\boldsymbol{Y_j} = \boldsymbol{X_{ij}\beta_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j} \tag{2.12}$$

2. Model 2

Koefisien regresi pada model 1, β_{jq}, q = 0,1,2,...,k memiliki nilai yang berbeda antar kelompok, variasi nilai β_{jq} akan dijelaskan dengan membentuk model 2. Pembentukan model 2 dilakukan untuk setiap parameter regresi sebagai respon ke-q dengan menggunakan variable prediktor pada level 2. Bentuk pemodelan pada level 2 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\beta_{j0} = \gamma_{00}R_{j0} + \gamma_{01}R_{j1} + \gamma_{02}R_{j2} + \cdots + \gamma_{0l}R_{jl} + u_{j0}$$

$$\beta_{j1} = \gamma_{10}R_{j0} + \gamma_{11}R_{j1} + \gamma_{12}R_{j2} + \cdots + \gamma_{1l}R_{jl} + u_{j1}$$

$$\beta_{j2} = \gamma_{20}R_{j0} + \gamma_{21}R_{j1} + \gamma_{22}R_{j2} + \cdots + \gamma_{2l}R_{jl} + u_{j2}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{jk} = \gamma_{k0}R_{j0} + \gamma_{k1}R_{j1} + \gamma_{k2}R_{j2} + \cdots + \gamma_{kl}R_{jl} + u_{jk} \tag{2.13}$$

$$\beta_{jq} = \sum_{q=0}^{k} \gamma_{qp}R_{jp} + u_{jq} \tag{2.14}$$

$$p = 0,1,2,\dots,l \quad q = 0,1,2,\dots,k \quad j = 1,2,\dots,m$$

keterangan:

β_{jq} = variabel respon kelompok data ke-q, $q = 0,1,2,\dots,k$ kelompok pada data ke-j, $j = 1,2,\dots,m$ data

γ_{0q} = konstanta *intercept* untuk data ke-q

γ_{qp} = koefisien dari variabel prediktor ke-p, $p = 0,1,2,\dots,l$ variabel pada kelompok data ke-q, $q = 0,1,2,\dots,k$ kelompok

R_{jp} = variabel prediktor ke-p pada kelompok ke-j

u_{jq} = galat regresi untuk kelompok data ke-q pada data ke-j

R_{0j} = $[1\ 1\ 1\ \cdots\ 1]^t$

atau dinyatakan dalam bentuk matriks adalah

$$\boldsymbol{\beta}_q = \begin{bmatrix} \beta_{1q} \\ \beta_{2q} \\ \beta_{3q} \\ \vdots \\ \beta_{mq} \end{bmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1l} \\ 1 & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2l} \\ 1 & r_{31} & r_{32} & \cdots & r_{3l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{ml} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_p = \begin{bmatrix} \gamma_{0p} \\ \gamma_{1p} \\ \gamma_{2p} \\ \vdots \\ \gamma_{kp} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_q = \begin{bmatrix} u_{1q} \\ u_{2q} \\ u_{3q} \\ \vdots \\ u_{mq} \end{bmatrix}$$

dan bentuk umum sebagai berikut

$$\boldsymbol{\beta_q} = \boldsymbol{R_p}\boldsymbol{\gamma_{qp}} + \boldsymbol{u_q} \tag{2.15}$$

Struktur data untuk model regresi 2 level dapat dilihat pada Tabel 2.1 sebagai berikut (Ayu, 2017).

Tabel 2. 1 Struktur Data Multilevel dengan 2 Level

Kelompok	Pengamatan	Variabel Respon	Variabel Prediktor Level 1			Variabel Prediktor Level 2		
		Y	X_1	...	X_k	R_1	...	R_l
1	1	y_{11}	x_{111}	$\cdots$	x_{k11}	r_{11}	$\cdots$	r_{l1}
	2	y_{21}	x_{121}	$\cdots$	x_{k21}			
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$			
	n_1	$y_{n_1 1}$	$x_{1n_1 1}$	$\cdots$	$x_{kn_1 1}$			
2	1	y_{12}	x_{112}	$\cdots$	x_{k12}	r_{12}	$\cdots$	r_{l2}
	2	y_{22}	x_{122}	$\cdots$	x_{k22}			
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$			
	n_2	$y_{n_1 2}$	$x_{1n_2 2}$	$\cdots$	$x_{kn_2 2}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
m	1	y_{1m}	x_{11m}	$\cdots$	x_{k1m}	r_{1m}	$\cdots$	r_{lm}
	2	y_{2m}	x_{12m}	$\cdots$	x_{k2m}			
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$			
	n_m	$y_{n_m m}$	$x_{1n_m m}$	$\cdots$	$x_{kn_m m}$			

Jika persamaan (2.14) disubstitusikan pada pada persamaan (2.11) maka diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{ij} = (\gamma_{00}R_{j0} + \gamma_{01}R_{j1} + \gamma_{02}R_{j2} + \cdots + \gamma_{0l}R_{jl} + u_{j0})X_{ij0} \\ + \left(\gamma_{10}R_{j0} + \gamma_{11}R_{j1} + \gamma_{12}R_{j2} + \cdots + \gamma_{1l}R_{jl} + u_{j1}\right)X_{ij1} \\ + \left(\gamma_{20}R_{j0} + \gamma_{21}R_{j1} + \gamma_{22}R_{j2} + \cdots + \gamma_{2l}R_{jl} + u_{j2}\right)X_{ij2} \\ + \cdots \\ + \left(\gamma_{k0}R_{j0} + \gamma_{k1}R_{j1} + \gamma_{k2}R_{j2} + \cdots + \gamma_{kl}R_{jl} + u_{jk}\right)X_{ijk} \\ + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$y_{ij} = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} \gamma_{qp}R_{jp}X_{ijq} + \sum_{q=0}^{k} u_{jq}X_{ijq} + \varepsilon_{ij} \tag{2.17}$$

atau dalam bentuk matrik adalah

$$\boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{X_j R_j \gamma} + \boldsymbol{X_j u_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j} \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{X_j R_j \gamma}$ = pengaruh tetap (*fixed effect*)

$\boldsymbol{X_j u_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j}$ = peangaruh acak (*random effect*)

Matriks **R** dalam persamaan (2.18) merupakan variabel perantara untuk menghubungkan y dan **X**. Oleh karena itu, variasi hubungan antara y dan **X** bergantung pada **R**. Interpretasi dari koefisien regresi pada model level 1 dan level terhadap y tergantung pada tanda positif dan negatif dari kedua koefisien regresi tersebut. Jika koefisien regresi model level 1 dan koefisien regresi model level 2 bertanda sama berarti kedua koefisien regresi tersebut memiliki pengaruh berbanding lurus terhadap y.

2.3 Estimasi Parameter Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil (OLS) adalah suatu metode penaksiran parameter model regresi yang meminimumkan jumlah kuadrat galat (Fathurahman, 2012).

Dalam regresi OLS ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi yaitu asumsi normalitas, homoskedastisitas, non autokorelasi dan non multikolinieritas (Gujarati, 2003). Misalkan diberikan sampel Y, untuk memperoleh taksiran dari $\boldsymbol{\beta}$ pada sampel Y dengan membuat

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta} \tag{2.19}$$

sekecil mungkin. Dengan demikian, perlu memilih parameter $\boldsymbol{\beta}$ sehingga

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.20}$$

menjadi minimal. Persamaan (2.20) adalah skalar sehingga komponen-komponen didalamnya menjadi skalar, maka transpose skalar tidak mengubah nilai tersebut. Oleh karena itu, diperoleh nilai $\boldsymbol{S}$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.21}$$

$$= (\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$$

$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta})' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$$

$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$$

$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$$

Maka dari itu digunakan sifat-sifat transpose matriks, yaitu $(\boldsymbol{X\beta})' = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'$ dan $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ adalah suatu skalar, maka bentuk tersebut sama dengan transpose dari $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X\beta}$. Untuk meminumkanya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama $\boldsymbol{S}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{\boldsymbol{\beta}=\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 0 - 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})' \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{\boldsymbol{\beta}=\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

dan menyamakan persamaan dengan nol, sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.23}$$

yang disebut sebagai persamaan normal dan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}) \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) disebut sebagai penaksir parameter $\boldsymbol{\beta}$ secara kuadrat terkecil (Aziz, 2010).

2.4 Heteroskedastisitas dan Autokorelasi

Heteroskedastisitas merupakan salah satu pelanggaran asumsi pada regresi linier. Heteroskedastisitas terjadi akibat varian dari faktor galat tidak sama. Jadi heteroskedastisitas terjadi apabila $Var(\varepsilon_i) \neq \sigma_i^2$ (Sumodiningrat, 1994). Adanya heteroskedastisitas mengakibatkan persamaan (2.8) menjadi $E(\varepsilon^2) \neq \sigma^2 I$. Uji statistik yang dapat digunakan untuk menguji gejala heteroskedastisitas adalah uji Glejser. Apabila uji menghasilkan signifikansi > 0,05, maka variabel pada model yang digunakan tidak terjadi gejala heteroskedastisitas

Autokorelasi adalah hubungan antara galat satu observasi dengan galat observasi lainnya. Adanya autokorelasi mengakibatkan persamaan (2.7), yaitu $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ untuk $i \neq j$ tidak berlaku lagi (Mukhlisin, 2019). Autokorelasi memiliki variansi dan kovariansi yang berbeda sehingga asumsi pada persamaan (2.8) menjadi

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega} \tag{2.25}$$

Apabila ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = E\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_N\end{bmatrix}\right] \tag{2.26}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_N\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2\varepsilon_N\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_N\varepsilon_1 & \varepsilon_N\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_N^2\end{bmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_N^2)\end{bmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_1\sigma_2 & \dots & \sigma_1\sigma_N\\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_1\sigma_N\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_N\sigma_1 & \sigma_N\sigma_2 & \dots & \sigma_{NN}^2\end{bmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \boldsymbol{\sigma^2 V}$$

dengan $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks definit positif yaitu untuk setiap $x \neq 0$ berlaku $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x} > 0$, dan $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x} = 0$ untuk $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uji yang dapat digunakan untuk mendeteksi autokorelasi adalah uji *Durbin-Watson* yaitu dengan membandingkan nilai *Durbin-Watson* dari hasil regresi dengan nilai *Durbin-Watson* tabel pada taraf signifikansi

5%. Pedoman pengambilan keputusan dalam uji autokorelasi sebagai berikut (Ghozali,2009).

1. Bila nilai $d < dl$, maka koefisien autokorelasi lebih besar dari 0 yang berarti terjadi autokorelasi positif.

2. Bila nilai $d > (4 - dl)$, maka koefisien autokorelasi lebih kecil dari 0 yang berarti terjadi autokorelasi negatif.

3. Bila nilai $du < d < (4 - du)$, maka koefisien autokorelasi sama dengan 0 yang berarti tidak terjadi autokorelasi.

4. Bila nilai $du < d < dl$ atau $(4 - du) < d < (4 - dl)$, maka koefisien autokorelasi tidak dapat disimpulkan.

2.5 Estimasi Parameter Metode Kuadrat Terkecil Diperumum

Menurut Gujarati dan Porter (2010), GLS merupakan OLS yang telah mengalami proses transformasi menggunakan pembobot pada variabel-variabel asli sehingga menghasilkan penduga yang bersifat BLUE. Dalam GLS, kita menghasilkan jumlah kuadrat galat yang telah diberi pembobot. Perhatikan kembali persamaan (2.4)

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Menurut Baltagi (2011), pada kasus autokorelasi $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{V}$ dimana $\boldsymbol{V}$ merupakan matriks simetris dan definit positif, sehingga $\boldsymbol{V}$ dapat difaktorisasikan menjadi

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{CDC'}$$

$\boldsymbol{D}$ adalah matriks diagonal yang elemennya merupakan nilai-nilai eigen dari $var(\boldsymbol{\varepsilon})$.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dan $\boldsymbol{C}$ adalah matriks *orthogonal*. Maka,

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}'^{-1}$$

$$= \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{D}'^{-1/2}\boldsymbol{C}'^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'$$

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1/2}$ dan $\boldsymbol{D}^{-1/2}$ adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix}$$

dan $\boldsymbol{PVP}' = \boldsymbol{I}$. Dari persamaan model statistik linier diperoleh transformasi model menjadi.

$$\boldsymbol{Py} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{PX\beta} + \boldsymbol{P\varepsilon} \tag{2.27}$$

atau

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{2.28}$$

dimana $E(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = E(\boldsymbol{P\varepsilon}\ ) = \boldsymbol{P}E(\boldsymbol{\varepsilon}\ ) = 0$ dan

$$var(\boldsymbol{\varepsilon}\ ) = \boldsymbol{P}\, var(\boldsymbol{\varepsilon}\ )\boldsymbol{P}'$$

$$var(\boldsymbol{\varepsilon}\ ) = \sigma^2\boldsymbol{PVP}'$$

$$= \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

Maka estimasi GLS pada $\boldsymbol{\beta}$ sebagai berikut

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{gls} = (\boldsymbol{X}^{*'}\boldsymbol{X}^*)^{-1}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{y}^*$$

$$= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{gls} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{2.29}$$

yang merupakan *best linier unbiased estimator* (BLUE) (Azis, 2010).

2.6 Estimasi Parameter Kuadrat Terkecil Terboboti

Mengatasi model regresi dengan varian galat tidak konstan dapat dilakukan dengan metode kuadrat terkecil terboboti (WLS). Pada metode ini digunakan "weight" atau pembobot yang proporsional terhadap inverse (kebalikan) dari varians variabel respon sehingga diperoleh galat baru yang memiliki sifat seperti pada regresi dengan OLS.

Model statistik linier yang diperumum adalah $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $var(\varepsilon_i) = \sigma^2\boldsymbol{W}$. $\sigma^2\boldsymbol{W}$ merupakan matriks varian-covarian

$$\sigma^2\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

dengan $\boldsymbol{W}$ adalah matriks diagonal (nxn) definit positif dan nonsingular. Sehingga $\boldsymbol{W}$ dapat difaktorisasikan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{1/2}\left(\boldsymbol{W}^{1/2}\right)'$$

dengan $\boldsymbol{W}^{1/2}$ adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal $(\sqrt{W_1}, \sqrt{W_2}, \dots, \sqrt{W_n})$. Maka

$$\boldsymbol{W}^{-1} = \boldsymbol{W}^{-1/2} \left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)'$$

dengan $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal $(\frac{1}{\sqrt{w_1}}, \frac{1}{\sqrt{w_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{w_n}})$ dan $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)' = \boldsymbol{I}$.

Model statistik linier dapat ditransformasikan menjadi.

$$\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W}^{-1/2} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

atau

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$$

dimana $E(\boldsymbol{u}) = E\left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{W}^{-1/2}\, E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan

$$E(\boldsymbol{uu}') = E\left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\, \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\, \boldsymbol{\varepsilon}\right)'\right)$$

$$= E\left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\, \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}' \left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)'\right)$$

$$= \boldsymbol{W}^{-1/2}\, E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') \left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)'$$

$$= \boldsymbol{W}^{-1/2}\, \sigma^2\boldsymbol{W} \left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)'$$

$$= \sigma^2\, \boldsymbol{W}^{-1/2}\, \boldsymbol{W} \left(\boldsymbol{W}^{-1/2}\right)'$$

$$= \sigma^2\boldsymbol{I}$$

Maka estimasi WLS pada β diberikan sebagai berikut.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{wls}} = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{y}^{*}$$

$$= (\boldsymbol{X}'\left(\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\right)'\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\left(\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\right)'\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\,\boldsymbol{y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{wls}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} \tag{2.30}$$

dimana matriks $\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}$ merupakan matriks diagonal yang berisi pembobot.

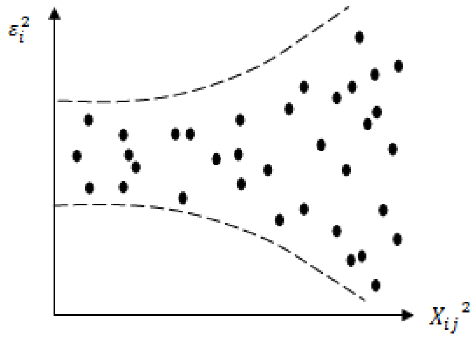
$$\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}$$

Mentransformasikan $Var(\boldsymbol{\varepsilon_i}) = \sigma^2\boldsymbol{W}$ menjadi suatu model dengan galat yang homoskedastisitas dapat dilakukan dengan membagi variabel respon dan variabel prediktor dengan pembobot yang ditentukan. Penentuan pembobot dilakukan dengan melihat pola yang ditunjukkan galat terhadap variabel bebas. Pola tersebut antara lain:

1. Varians galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}^{\mathbf{2}}$ untuk suatu j dengan $1 \leq j \leq k$:

$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}\right) = \sigma^2\boldsymbol{X_{ij}}^{\mathbf{2}} \tag{2.31}$$

Jika dalam pendeteksian heteroskedastisitas menggunakan metode grafik diyakini bahwa varians galat proporsional terhadap nilai kuadrat dari variabel X_{ij} seperti pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2. 1 Varians galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}^{\boldsymbol{2}}$

Jika pola menunjukkan hubungan kuadrat seperti pola Gambar 2.1 maka dapat diasumsikan varinsi galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}^{\boldsymbol{2}}$**,** sehingga pembobot yang digunakan dalam metode kuadrat terkecil terboboti adalah $\frac{1}{X_{ij}}$ sehingga persamaan regresinya menjadi.

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{X_{ij}}} = \frac{(\boldsymbol{\beta_0}+\boldsymbol{\beta_1}\boldsymbol{x_{i1}}+\boldsymbol{\beta_2}\boldsymbol{x_{i2}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_j}\boldsymbol{x_{ij}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_k}\boldsymbol{x_{ik}}+\boldsymbol{\varepsilon_i})}{\boldsymbol{X_{ij}}} \tag{2.32}$$

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{X_{ij}}} = \frac{\boldsymbol{\beta_0}}{\boldsymbol{X_{ij}}} + \boldsymbol{\beta_1}\frac{\boldsymbol{X_{i1}}}{\boldsymbol{X_{ij}}} + \boldsymbol{\beta_2}\frac{\boldsymbol{X_{i2}}}{\boldsymbol{X_{ij}}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k}\frac{\boldsymbol{X_{ik}}}{\boldsymbol{X_{ij}}} + \boldsymbol{u_i}$$

dengan $\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\boldsymbol{X_{ij}}} = \boldsymbol{u_i}$ merupakan faktor galat yang telah ditransformasikan. Lalu dapat diturunkan sebagai berikut.

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = E\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\boldsymbol{X_{ij}}}\right)^2$$

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \frac{1}{\boldsymbol{X_{ij}}^2}E(\boldsymbol{\varepsilon_i^2})$$

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \frac{1}{\boldsymbol{X_{ij}}^2}\sigma^2\boldsymbol{X_{ij}}^{\boldsymbol{2}}$$

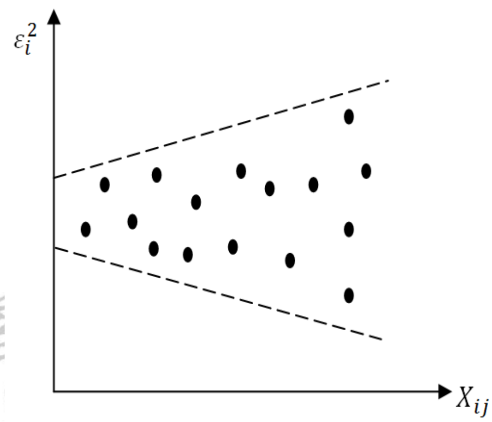
$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$$

Dengan demikian varians $\boldsymbol{u_i}$ menjadi homoskedastisitas sehingga penggunaan metode kuadrat terkecil pada persamaan (2.32) dapat digunakan untuk estimasi parameter regresi.

2. Varians galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon_i^2}) = \sigma^2 \boldsymbol{X_{ij}} \tag{2.33}$$

Jika dalam pendeteksian menggunakan metode grafik diyakini bahwa varians erro proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}$, seperti pada Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2. 2 Varians galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}$

Jika pola menunjukkan hubungan linier seperti pada Gambar 2.2 maka dapat diasumsikan varians galat proporsional terhadap $\boldsymbol{X_{ij}}$ sehingga pembobot yang digunakan adalah $\frac{1}{\sqrt{X_{ij}}}$ sehingga persamaan regresinya menjadi.

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} = \frac{(\boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1 x_{i1}} + \boldsymbol{\beta_2 x_{i2}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_j x_{ij}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k x_{ik}} + \boldsymbol{\varepsilon_i})}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} \tag{2.34}$$

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} = \frac{\boldsymbol{\beta_0}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} + \boldsymbol{\beta_1} \frac{\boldsymbol{X_{i1}}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} + \boldsymbol{\beta_2} \frac{\boldsymbol{X_{i2}}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k} \frac{\boldsymbol{X_{ik}}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} + \boldsymbol{u_i}$$

dengan $\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}} = \boldsymbol{u_i}$, merupakan factor galat yang telah ditransformasikan. Lalu dapat diturunkan sebagai berikut.

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = E\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\sqrt{\boldsymbol{X_{ij}}}}\right)^2$$

$$E(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}) = \frac{1}{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{ij}}} E(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}})$$

$$E(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}) = \frac{1}{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{ij}}} \sigma^2 \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{ij}}$$

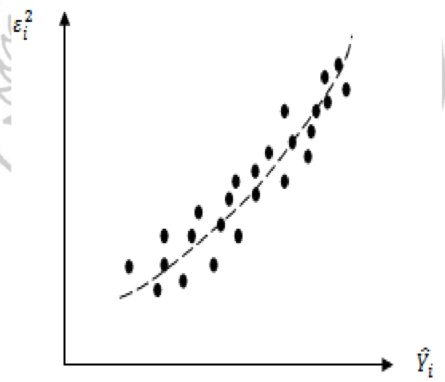
$$E(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

Dengan demikian, varians $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}$ menjadi homoskedastisitas sehingga penggunaan metode kuadrat terkecil pada persamaan (2.34) dapat digunakan untuk estimasi parameter regresi.

3. Varians galat proporsional terhadap $[E(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}})]^2$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}) = \sigma^2 [E(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}})]^{\mathbf{2}} \tag{2.35}$$

Varians galat proporsional terhadap $[E(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}})]^2$, seperti diilustrasikan pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2. 3 Galat kuadrat proporsional terhadap $\widehat{\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}}}$

Jika varians galat proporsional terhadap $[E(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}})]^2$, maka metode kuadrat terkecil terboboti dilakukan dengan meregresikan metode kuadrat terkecil dengan mengabaikan heteroskedastisitas untuk mendapatkan nilai $\widehat{\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}}}$ yang akan digunakan sebagai pembobot sehingga persamaan regresinya menjadi seperti berikut.

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} = \frac{(\boldsymbol{\beta_0}+\boldsymbol{\beta_1}\boldsymbol{x_{i1}}+\boldsymbol{\beta_2}\boldsymbol{x_{i2}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_j}\boldsymbol{x_{ij}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_k}\boldsymbol{x_{ik}}+\boldsymbol{\varepsilon_i})}{\boldsymbol{E(Y_i)}} \quad (2.36)$$

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} = \frac{\boldsymbol{\beta_0}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} + \boldsymbol{\beta_1}\frac{\boldsymbol{X_{i1}}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} + \boldsymbol{\beta_2}\frac{\boldsymbol{X_{i2}}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k}\frac{\boldsymbol{X_{ik}}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} + \boldsymbol{u_i}$$

dengan $\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\boldsymbol{E(Y_i)}} = \boldsymbol{u_i}$, merupakan faktor galat yang telah ditransformasikan. Lalu dapat diturunkan sebagai berikut.

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = E\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon_i}}{E(\boldsymbol{Y_i})}\right)^2$$

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \frac{1}{[E(\boldsymbol{Y_i})]^2}E(\boldsymbol{\varepsilon_i^2})$$

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \frac{1}{[E(\boldsymbol{Y_i})]^2}\sigma^2[E(\boldsymbol{Y_i})]^2$$

$$E(\boldsymbol{u_i^2}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$$

Dengan demikian persamaan (2.36) merupakan model regresi yang memenuhi asumsi homoskedastisitas. Nilai $E(\boldsymbol{Y_i})$ bergantung pada besarnya β_0 dan β_1, sehingga transformasi persamaan (2.36) tidak dapat dioperasikan. Oleh karena itu digunakan estimator dari $\boldsymbol{Y_i}$ yakni $\widehat{\boldsymbol{Y_i}}$, sehingga perlu dilakukan regresi dengan metode kuadrat terkecil terlebih dahulu dengan mengabaikan heteroskedastisitasnya untuk mendapatkan nilai $\widehat{\boldsymbol{Y_i}}$. Kemudian dari $\widehat{\boldsymbol{Y_i}}$ yang telah didapatkan digunakan untuk mentransformasikan persamaan (2.35) menjadi sebagai berikut. (Setyaningsih,2017)

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} = \frac{(\boldsymbol{\beta_0}+\boldsymbol{\beta_1}\boldsymbol{x_{i1}}+\boldsymbol{\beta_2}\boldsymbol{x_{i2}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_j}\boldsymbol{x_{ij}}+\cdots+\boldsymbol{\beta_k}\boldsymbol{x_{ik}}+\boldsymbol{\varepsilon_i})}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} \quad (2.37)$$

$$\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} = \frac{\boldsymbol{\beta_0}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} + \boldsymbol{\beta_1}\frac{\boldsymbol{X_{i1}}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} + \boldsymbol{\beta_2}\frac{\boldsymbol{X_{i2}}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k}\frac{\boldsymbol{X_{ik}}}{\widehat{\boldsymbol{Y_i}}} + \boldsymbol{u_i}$$

2.7 Uji Serentak atau Uji F

Uji serentak digunakan untuk melakukan uji hipotesis koofisien regresi secara bersamaan. Secara umum hipotesisnya dituliskan sebagai berikut (Gujarati, 2004):

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$

H_1: Terdapat paling tidak satu β_k yang $\neq 0$

dengan k adalah banyaknya variabel bebas. Sehingga statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$F_{hit} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \tag{2.38}$$

dengan

R^2 = Koofisien determinasi

n = jumlah data

k = jumlah variabel bebas

Kriteria uji yang digunakan, yaitu H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{tabel}$ berarti bahwa hubungan antara semua variabel bebas dan variabel terikat berpengaruh signifikan (Widarjono, 2005).

2.8 Uji Parsial Satu-satu atau Uji t

Uji parsial satu-satu digunakan untuk melakukan uji hipotesis pada setiap parameter. Adapun hipotesis dalam uji ini sebagai berikut:

H_0: $\beta_q = 0$

H_1: $\beta_q \neq 0$

Dengan statistik uji yang digunakan adalah

$$t_{hit} = \frac{\widehat{\beta_q}}{SE(\widehat{\beta_q})} \tag{2.39}$$

$$q = 1,2,3, \dots, k$$

H_0 ditolak apabila $|t_{htg}| > t_{tabel}$ dengan α adalah tingkat signifikansi yang dipilih. Apabila H_0 ditolak menyatakan bahwa parameter tersebut signifikan secara statistik pada taraf signifikansi sebesar α (Nur, 2013).

2.9 Kependudukan

2.9.1 Kepadatan Penduduk

Kepadatan penduduk adalah banyaknya penduduk per satuan luas. Kegunaannya adalah sebagai dasar kebijakan pemerataan penduduk dalam program transmigrasi. Kepadatan penduduk kasar atau crude population density (CPD) merupakan ukuran persebaran penduduk yang umum digunakan, karena selain data dan cara perhitungannya sederhana, ukuran ini sudah distandarisasi dengan luas wilayah. Kepadatan penduduk kasar menunjukkan jumlah penduduk untuk setiap kilometer persegi luas wilayah. Luas wilayah yang dimaksud adalah luas seluruh daratan pada suatu wilayah administrasi. Kepadatan penduduk dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$KP = \frac{P}{A}$$

dimana

KP = kepadatan penduduk

P= jumlah penduduk

A = luas wilayah (km^2)

2.9.2 Rasio Jenis Kelamin

Rasio Jenis Kelamin (RJK) adalah perbandingan antara jumlah penduduk laki-laki dengan jumlah penduduk perempuan pada suatu daerah dan pada waktu tertentu, yang biasanya dinyatakan dalam banyaknya penduduk laki-laki per 100 perempuan. Data mengenai rasio jenis kelamin berguna untuk pengembangan perencanaan pembangunan yang berwawasan gender, terutama yang berkaitan dengan perimbangan pembangunan laki-laki dan perempuan secara adil. Rasio jenis kelamin dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut.

$$SR = \frac{P_L}{P_W}\ x\ 100$$

dimana

SR = rasio jenis kelamin

P_L = jumlah penduduk berjenis kelamin laki-laki

P_W = jumlah penduduk berjenis kelamin perempuan

Apabila $SR > 100$ berarti jumlah penduduk laki-laki lebih banyak dari jumlah penduduk perempuan, jika $SR = 100$ berarti jumlah penduduk laki-laki sama dengan jumlah penduduk perempuan dan apabila $SR < 100$ berarti jumlah penduduk laki-laki lebih sedikit dari jumlah penduduk perempuan.

2.9.3 Laju Pertumbuhan Penduduk

Laju pertumbuhan penduduk merupakan angka yang menunjukan tingkat pertambahan penduduk pertahun dalam jangka waktu tertentu. Angka ini digunakan untuk mengetahui perubahan jumlah penduduk antar dua periode waktu. Laju pertumbuhan penduduk dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut.

$$r = \left\{ \left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{\left(1/_t \right)} - 1 \right\} x\ 100$$

dimana

r = laju pertumbuhan penduduk

P_t = jumlah penduduk pada tahun ke-t

P_0 = jumlah penduduk pada tahun dasar

t = selisih tahun P_t dan P_0

Apabila $r > 0$ berarti terjadi penambahan penduduk pada tahun t dibanding tahun sebelumnya, jika $r = 0$ berarti tidak terjadi perubahan jumlah penduduk pada tahun t dari tahun sebelumnya dan jika $r < 0$ berarti terjadi pengurangan jumlah penduduk pada tahun t dibanding tahun sebelumnya.

2.9.4 Indeks Pembangunan Manusia

Indeks pembangunan manusia (IPM) merupakan indeks yang mengukur pembangunan manusia dari tiga aspek dasar yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan dan standar hidup layak. IPM dapat digunakan sebagai indikator dalam mengukur keberhasilan dalam upaya membangunkualitas hidup manusia (masyarakat/penduduk). IPM juga dapat menentukan peringkat atau level pembangunan suatu wilayah atau negara. Bagi indonesia, IPM merupakan data strategis karena selain sebagai ukuran kinerja pemerintah IPM juga digunakan sebagai salah satu alokator penentuan Dana Alokasi Umum (DAU). Nilai IPM dapat dihitung sebagai berikut.

$$IPM = \sqrt[3]{I_{Kesehatan}\ x\ I_{Pendidikan}\ x\ I_{Pengeluaran}}$$

IPM = indeks pembangunan manusia

$I_{Kesehatan}$ = indeks kesehatan

$I_{Pendidikan}$ = indeks pendidikan

$I_{Pengeluaran}$ = indeks pengeluaran

Capaian pembangunan manusia di suatu wilayah pada waktu tertentu dikelompokkan dalam empat kelompok, yaitu

- Kelompok sangat tinggi, apabila IPM ≥ 80,2.
- Kelompok tinggi, apabila 70 ≤ IPM < 80,2.
- Kelompok sedang, apabila 60 ≤ IPM < 70.
- Kelompok rendah, apabila IPM < 60.

Pengelompokan ini bertujuan untuk mengorganisasikan wilayah-wilayah menjadi kelompok-kelompok yang sama dalam hal pembangunan manusia. Semakin ringgi nilai IPM suatu negara/daerah menunjukkan pencapaian pembangunan manusianya semakin baik.

2.9.5 Laju Pertumbuhan Ekonomi

Laju pertumbuhan ekonomi merupakan aspek penting yang menentukan status maju atau berkembangnya suatu negara atau daerah. Ada beberapa faktor yang mempengaruhi laju pertumbuhan ekonomi, namun faktor utama yang paling mempengaruhi adalah Produk Domestik Regional Bruto (PDB). PDRB merupakan gambaran total produksi barang dan jasa yang dihasilkan dalam satu periode. PDRB inilah yang kemudian dijadikan tolak ukur dalam perhitungan laju pertumbuhan ekonomi. Laju pertumbuhan PDRB dapat dihitung sebagai berikut.

$$R = \frac{PDRB_t - PDRB_{t-1}}{PDRB_{t-1}} \; x \; 100\%$$

Dimana

R = laju pertumbuhan ekonomi (dalam satuan persen)

$PDRB_t$ = produk domestik regional bruto pada tahun tertentu

$PDRB_{t-1}$ = produk domestik regional bruto pada tahun sebelumnya